С.М. Соловйов

ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ – 2007

УДК 001.891(075.8)
ББК 72я73
С 60

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України
(лист №14/18–Г–230 від 07.06.2006 р.)

Рецензенти:
Дубовий О.М. – доктор технічних наук, професор;
Квасницький В.Ф. – доктор технічних наук, професор;
Клименко Л.П. – доктор технічних наук, професор.

Соловйов С.М.
С 60 **Основи наукових досліджень.** Навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 176 с.

ISBN 966-364-420-6

У навчальному посібнику наведено методи планування та здійснення експерименту у технічних галузях наукових досліджень та виробництва. З багатьма прикладами розглянуті питання вибору устаткування, вимірювальних засобів, уникнення грубих похибок і обробки результатів експерименту.

Навчальний посібник у першу чергу пропонується магістрантам спеціальностей технічного спрямування. Він може бути корисним також аспірантам, молодим вченим і інженерам.

ISBN 966-364-420-6

ПЕРЕДМОВА

Процес об'єднання Європи супроводжується формуванням спільного освітнього і наукового простору та розробкою єдиних критеріїв і стандартів у цій сфері. Цей напрямок започатковано 19 червня 1999 року в Болоньї (Італія). Міністри освіти 30 європейських держав від імені урядів підписали документ, який назвали "Болонська декларація".

Головна мета цього процесу – консолідація зусиль наукової та освітянської громадськості й урядів країн Європи для істотного підвищення конкурентоспроможності європейської системи науки і вищої освіти у світовому вимірі, а також для підвищення ролі цієї системи в суспільних перетвореннях.

На третьому етапі Болонського процесу, який відбувся в Берліні 18–19 вересня 2003 року, зазначено принципово положення: Європейський простір вищої освіти та Європейський простір дослідницької діяльності – дві взаємопов’язані частини спільноти знань.

Відповідно до прийнятих стандартів друга ступень навчання у вищій школі, магістерська, триває два роки. За змістом ця ступень науково-кваліфікаційна. Магістрант, крім іншого, за цей термін повинен виконати наукову кваліфікаційну роботу.

Пропонуємий навчальний посібник слід розглядати як першу спробу викласти деякі розділи методології наукової праці в допомогу магістрам.

Матеріал посібника відповідає кваліфікаційним вимогам технічних спеціальностей. В роботі зроблено акцент на експеримент не тільки тому, що гіпотеза перетворюється у теорію або відкидається на основі експериментальної перевірки, але й тому, що планування і здійснення експерименту, вибір вимірювальних засобів, реєстрація показань і обробка дослідних даних складає основну трудомісткість усіх виконуємих досліджень.

Експеримент для наукових працівників технічного спрямування не можна переоцінити. Але він, як самодостатній метод досліджень, в багатьох випадках – приоритетний. Хорошо його роль висвітлив С. Капица: "Опыт – те зерна из которых произрастает наука, а теория занимается перемалыванием этих зерен для пользы дела".

У навчальному посібнику використані праці вітчизняних і закордонних авторів, досвід, набутий професорсько-викладацьким складом кафедри "Технологія суднового машинобудування" Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Навчальний посібник буде корисний інженерам, аспірантам, молодим ученим різних технічних спеціальностей, які торкаються питань, пов’язаних із експериментом.

Автор буде вдячний будь-яким зауваженням та пропозиціям щодо покращення тексту.

ВСТУП

Наука пронизує буквально всі сфери людської діяльності: як матеріальної, так і духовної. У виробництво наукового продукту залучено величезні маси людей, численні наукові колективи, матеріальні засоби. Робота в сфері науки має свої специфічні особливості. Науковим дослідженням відповідають певні методи їх здійснення.

Сучасний науково-технічний прогрес – дітище науки (рис. 1).

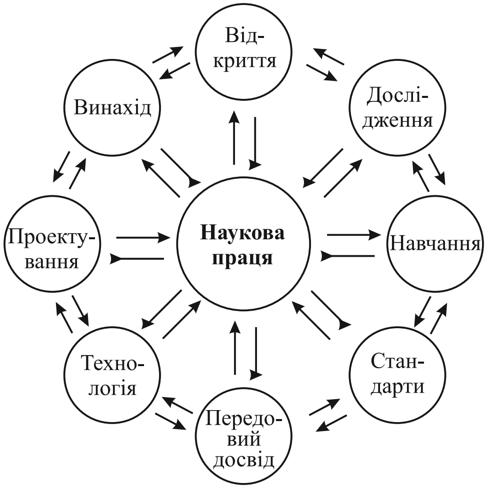

Рис. 1. Наука і зовнішні зв'язки

Наука займає особливе місце в комплексі з технікою і виробництвом. Темпи розвитку науки повинні випереджати темпи розвитку техніки і виробництва. Половина всіх даних, наявних зараз у розпорядженні науки, отримана в останні 10...15 років. За майбутні 15 років сучасному поколінню вчених за прогнозом мають бути виконати стільки наукових робот, скільки їх було виконано за весь попередній час розвитку науки.

Однієї з причин прискорюваного розвитку науки є комулятивний характер наукового знання. Ньютон колись говорив: "Якщо я бачу далі Декарта, то це тому, що я стою на плечах гіганта". Кожне покоління вчених працює, використовуючи досвід усіх попередніх поколінь. Цей закон прискорюваного розвитку науки уперше сформулював Ф. Енгельс: "...Наука росте щонайменше з такою же швидкістю, як і населення; населення росте пропорційно чисельності останнього покоління, наука рухається вперед пропорційно масі знань, успадкованих нею від попереднього покоління...". Математично це виглядає так:

$$S = S_0 e^{kt}, \tag{1.1}$$

де S_0 – сума результатів науки до моменту відліку; k – постійна; t – час.

Формула не розрахункова. Вона показує лише характер зміни науки.

Найбільш оптимальний варіант сучасного етапу розвитку науці представлений на рис. 2.

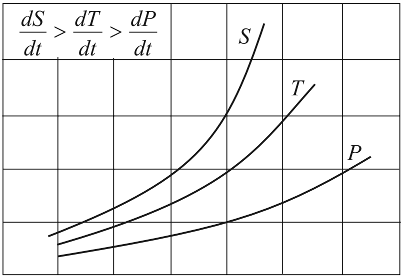

Рис. 2. Темпи розвитку науки, техніки і технології:
S – наука; T – техніка; P – технологія

Освіта і наука тісно зв'язані, переплетені між собою. Продукти науки завжди були основою сучасної освіти. І навпаки, науку роблять високоосвічені, інтелектуально підготовлені для наукової діяльності члени суспільства. У період, коли наука все частіше стає продуктивною силою, навчання науковим методам, знайомство з організацією науки стає необхідним елементом сучасної освіти. Задовго до сьогоднішніх днів цю ситуацію передбачив великий натураліст, найбільший організатор і дослідник науки Д.І. Менделєєв. Йому належать пророчі слова: "Намагаючись пізнати нескінченне, наука сама кінця не має і, будучи всесвітньої, у дійсності неминуче здобуває народний характер..."

Звичайно, мистецтву робити відкриття не можна навчитися, ця задача і не ставиться. У даній роботі робиться скромна спроба ознайомити молодого дослідника з деякими підготовчими роботами, що, можливо, колинебудь приведуть до відкриття. Сучасний інженер повинен мати запас знань, що дозволив би йому проводити виробничі і лабораторні експерименти, узагальнювати розрізнені дані, прогнозувати хід виробництва.

Глава перша

КЛАСИФІКАЦІЯ НАУК. ФОРМИ І МЕТОДИ НАУКОВОГО ПІЗНАННЯ

1.1. Наука – продуктивна сила

Наука. Отже, що таке наука? Нараховується більш 90 різних визначень науки. Одні вважають науку тільки сумою знань. Очевидно, наука є сумою знань, але це лише один з її аспектів. Інші обмежують науку рамками розумової діяльності людей, спрямованої на розширення пізнання людством законів природи і суспільства. Це також не загальне визначення.

Наука – це і сукупність знань, перевірених практикою, які вважаються об'єктивною істиною, і одночасно процес вироблення знань. Тому найбільш повним формулюванням терміна "наука" можна вважати наступне:

наука – це система накопичених знань і діяльність людей, що спрямована на одержання, засвоєння, переробку, подальшу систематизацію, більш заглиблене пізнання та подальше втілення в практику отриманої інформації.

Термін "наука" відбиває багатопланове поняття трудової діяльності людського суспільства, процесу пізнання реальної дійсності й абстрактного мислення. Цей термін змінювався зі зміною або розвитком науки. У XVIII–XIX сторіччях цим терміном позначали всяке ремесло: уміння, навчання, навички.

Величезний вклад у скарбницю світової науки зв'язан з іменами великих трудівників думки: М.В. Ломоносова, М.І. Лобачевского, Д.І. Менделєєва, О.С. Попова, К.С. Ціолковського, С.П. Тимошенко, І.І. Сікорського, Є.О. Патона, Б.Є. Патона, С.П. Королева, В.П. Глушко.

Техніка. Логічним завершенням наукових досліджень є матеріалізація ідей, упровадження наукових розробок у техніку і виробництво. Техніка є сукупність засобів праці, створювана людиною на основі пізнань закономірностей розвитку природи для того, щоб, направляючи енергію природи на речовину, здійснювати процес виробництва матеріальних благ. Таким чином, наука і техніка зв'язані воєдино. Техніка є необхідною проміжною ланкою між науковим продуктом і виробництвом. Без нової, новітньої техніки, так само як і без наукового продукту, неможливий науково-технічний прогрес, сучасна науково-технічна революція.

Наука – продуктивна сила. Наука являє собою явище духовного життя суспільства. Накопичені знання переломлюються або в розвитку теорії, або в гуманітарному і духовному удосконалюванні членів суспільства, або у виробничій практиці. В останньому випадку наука перетворюється в інтелектуальну силу матеріального виробництва, на її основі розробляється техніка, удосконалюється технологія з'являються нові предмети праці. У цих умовах н*аука усе більш стає безпосередньою продуктивною силою, а виробництво – технологічним застосуванням сучасної науки*. Наука пронизує весь процес праці, удосконалює його складові частини, поліпшує технологію (спосіб з'єднання засобів і предметів праці), організацію виробництва (спосіб з'єднання засобів виробництва і робочої сили), визначає перспективу для виробництва, збагачує всі продуктивні сили. Коли ми говоримо, що наука стає продуктивною силою суспільства, то в першу чергу маємо на увазі природознавчі науки, що прямо впливають на матеріальний стан суспільства.

Фундаментальні природознавчі науки поряд з розкриттям закономірностей явищ природи в остаточному підсумку досить повно розробляють основи технологічного застосування пізнаних законів. Так, наприклад, для того щоб люди могли одержати усе велике різноманіття синтетичних матеріалів, починаючи від синтетичних волокон і кінчаючи синтетичними алмазами, насамперед, потрібно було фундаментальним наукам, органічної і неорганічної хімії розробити загальну молекулярну теорію будови речовини і прикладні питання хімії. Але в надрах цієї ж фундаментальної хімії зароджувалися і технологічні основи виробництва синтетичних матеріалів. Розвиток фізичної і ряду інших наук реалізувалося в атомній промисловості. На основі кібернетики – теоретичної основи автоматизації – вирішуються найважливіші задачі науково-технічного прогресу. Удосконалювання технології приводить до того, що механічні засоби праці усе частіші заміняються природними процесами: хімічними, біологічними, електричними і т.д. Організація виробництва удосконалюється на основі ергономіки і технічної естетики, інженерної психології, фізіології. Освоюються автоматизовані системи керування й обробки інформації.

Більшість галузей знань виникло і розвивалося, насамперед, у зв'язку з потребами практики. Виникаючі суспільні потреби рухають науку більше, ніж десяток університетів. Рішення проблеми автоматизації вимагає розвитку досліджень у математики, фізики, хімії і механіки. Потреби атомної промисловості викликали до життя фізику плазми. Задачі автоматизації неможливо вирішувати без математичної логіки і теорії інформації.

Нові наукові напрямки виникають не тільки на основі потреб практики. Наука як система накопичених знань розвивається й за власними законами. Частина наукових відкриттів може не втілитися в практичних результатах, але не можна робити висновок, що вони марні. Це своєрідний "заділ", необхідний для майбутнього.

Система накопичених знань протягом багатьох літ може представляти тільки потенційну силу науки. Рентген відкрив промені, Фарадей – індукцію струму, Менделєєв – періодичну таблицю раніш, ніж був "закладений фундамент", визначена практична користь їх відкриттів. Закон Архімеда про тіла, що плавають, втілився в практичне застосування майже через дві тисячі років.

В даний час є також багато ідей і теорій, що представляють потенційне наукове багатство. В усіх цих випадках наука не перетворюється в безпосередню продуктивну силу. Потенційні багатства або реалізуються надалі в нових теоріях, або в практиці, або будуть відкинуті новими теоретичними побудовами. Наука тільки тоді перетворюється в безпосередню продуктивну силу, коли вона переломлюється у виробництві. Подальший розвиток науки приводить до зростання її ролі як безпосередньої продуктивної сили. Праця людини все більш стає експериментальною, матеріально творчою наукою та наукою, що предметно втілюється.

1.2. Класифікація наук

Будь-яка класифікація дозволяє представити загально складне явище як суму взаємозалежних його частин, тому з часу виникнення науки різні філософи, учені намагалися класифікувати науку. До нас дійшли класифікації Платона, Аристотеля.

Аристотель (384–322 р. до н. е.) дав наступну класифікацію:

Логіка	Соціологія
Фізика	Політика
Біологія (тут же – про душу)	Історія
Філософія (метафізика)	Мистецтво
Етика	Поезія
Риторика	

Ця класифікація цікава не тільки як історичний факт, але в неменшому ступені як система для порівняння. Зверніть увагу, що упор у цій класифікації зроблений на соціальні і гуманітарні науки. Місце фізики і біології хоча вже і високо, але їхній об'єм поки ще малий.

Одна із сучасних класифікацій, приведених нижче, істотно відрізняється від Аристотелевої не стільки об'ємом, скільки змістовним аспектом.

Філософські науки

Філософія	Теорія пізнання

Математичні науки

Математична логіка	і практична математика
Математика	включаючи кібернетику

Природні і технічні науки

Механіка	і прикладна механіка
Астрономія	і космонавтика
Астрофізика	
Фізика	і технічна фізика
Хімічна фізика	

Фізична хімія	
Хімія	і хіміко-технологічні науки
Геохімія	
Геологія	і гірська справа
Географія	
Біохімії	
Біологія	і сільськогосподарські науки
Фізіологія людини	і медичні науки

Соціально-політичні і гуманітарно-економічні науки

Історія	Етнографія
Археологія	Економічна географія

Політична економія
Наука про державу і право
Історія мистецтва і мистецтвознавство
Мовознавство, педагогічна наука й інші науки
Психологія

У цій класифікації математичні науки, природні й технічні науки складають її основу.

Класифікацію відкривають філософські науки. Це вони дають єдиний метод наукової творчості, що забезпечує справді науковий світогляд для пізнання – діалектику, теорію і метод пізнання світу.

Математичні науки – це знаряддя мислення, вони описують кількісні взаємодії матерії, речовини й енергії в спеціальній символіці.

Природні і технічні науки – це велика або менша конкретизація взаємодії речовини й енергії в процесі пізнання світу, що осягається на теоретичному й експериментальному рівні.

Соціальні науки описують взаємодії розумних індивідуумів у рамках співтовариств у часі і просторі на шляху оволодіння речовиною й енергією природи.

Універсальна десяткова класифікація

Універсальна десяткова класифікація (УДК) є міжнародною системою класифікації творів друку й документальних матеріалів.

УДК охоплює всі області людських знань, її розділи органічно пов'язані між собою.

Постановою Ради Міністрів СРСР від 11 травня 1962 року "О мерах по улучшению организации научно-технической информации в стране" УДК введена як обов'язкова для класифікації природничої і технічної літератури в науково-технічних бібліотеках, видавництвах, редакціях науково-технічних журналів, в установах науково-технічної інформації.

З 1992 року УДК юридично є власністю Консорціуму УДК (Гаага, Нідерланди), до якого входить і Міжнародна федерація з інформації і документації. Вона веде інтенсивну роботу з удосконалення УДК у відповідності з сучасним станом розвитку науки і техніки. Створено струнку систему внесення доповнень і змін до системи УДК, що після обговорення споживачами набирають чинності та публікуються в спеціальному періодичному виданні "Доповнення і виправлення до УДК".

З метою впровадження україномовної системи УДК у 1997 році Книжковою палатою України розроблено проект "Класифікаційна система України", що передбачає створення еталона таблиць УДК українською мовою. У стислі строки було підписано угоду, придбано ліцензію Консорціуму УДК на видання українською мовою Міжнародного еталона УДК, а також "Доповнень та виправлень до УДК", здійснено переклад таблиць УДК з англійської, зроблено комп'ютерний набір, редагування галузевих і наукових розділів УДК, узгоджено термінологію з науковцями України, отримано згоду на друкування тиражу від Консорціуму УДК.

Україна вперше за свою історію має видання УДК українською мовою, отримуватиме від Консорціуму періодичні видання "Доповнення і виправлення до УДК", а також матиме можливість співпрацювати з фахівцями багатьох країн світу та вносити свої пропозиції з питань удосконалення таблиць міжнародної Універсальної десяткової класифікації.

Побудова та властивості УДК

Структура

В основі структури УДК – *принцип десяткових дробів*. Для позначення відділів застосовуються арабські цифри, зрозумілі у всіх країнах, що робить УДК загальнодоступною міжнародною системою. Десятковий принцип структури дозволяє безмежно розширювати її шляхом додавання нових цифрових позначень до існуючих, не змінюючи системи в цілому.

Таблиці УДК розподіляються на *основні* та *допоміжні*. Крім того, до УДК належать алфавітно-предметний покажчик, методичні вказівки до багатьох розділів, а також знаки, за допомогою яких здійснюється побудова індексу.

Розподіл таблиць на основні та допоміжні базується на особливостях понять, які в них відображені.

Основна таблиця містить у собі поняття, специфічні для певних галузей науки, техніки, мистецтва тощо.

До допоміжних таблиць віднесені поняття, що повторюються, загальні для всіх або багатьох розділів (загальні визначники), або ті, що застосовуються лише в одному розділі (спеціальні визначники).

Визначники використовуються для подальшої деталізації індексу, відображаючи якісні характеристики документів або властивості предмету з певного погляду, вони уточнюють, звужують ту чи іншу тему. Визначники приєднуються до основного індексу за допомогою символів, характерних для конкретного визначника (крапка, дужки, дефіс, лапки тощо).

Основна таблиця

Відповідно до десяткової системи всю сукупність знань розділено на *десять основних класів*:

0 Загальний відділ

1 Філософія. Психологія

2 Релігія. Теологія

3 Суспільні науки. Статистика. Політика. Економіка тощо

4 (вільний)

5 Математика та природничі науки

6 Прикладні науки. Медицина. Техніка

7 Мистецтво. Декоративно-прикладне мистецтво. Ігри. Спорт

8 Мова. Мовознавство. Художня література. Літературознавство

9 Географія. Біографії. Історія

Кожен з цих класів складається з 10 розділів, кожен з яких у свою чергу поділяється на 10 підрозділів тощо.

Для полегшення читання і для кращої наочності після кожного третього знака ставиться крапка.

Індекси УДК побудовані так, що кожна наступна цифра, що приєднується до індексу, не змінює попереднє значення, а лише уточнює, визначаючи більш конкретне поняття.

Наприклад, індекс поняття "Шліфування в центрах" складається так:

6 Прикладні науки. Медицина. Техніка

62 Машинобудування. Техніка в цілому

621 Загальне машинобудування

621.9 Обробка та формування за допомогою зняття стружки. Обробка шліфуванням. Молоти та преси

621.92 Абразивні матеріали та інструменти. Шліфування та пов'язана з ним техніка. Подрібнювання, змішування, відокремлення абразивних матеріалів

621. 923 Шліфування, полірування та споріднені процеси. відповідне обладнання

621. 923.0 (вільний)

621. 923.04 Спеціальні методи полірування та шліфування

621. 923.045 Шліфування в центрах

Якщо треба створити поняття "Без центрове шліфування", слід замінити лише останню цифру – 621.923.046.

Допоміжні таблиці

В УДК, крім основної, є допоміжні таблиці визначників, котрі використовуються для подальшої деталізації індексу. Визначники підрозділяються на дві групи: *спеціальні* (*аналітичні*) та *загальні*.

Спеціальні визначники відбивають локально-розповсюджені характеристики, тобто ті, що застосовуються в одному або кількох розділах основних таблиць.

Для наочності спеціальні визначники виділяються вертикальною рискою на полях таблиць.

Загальні визначники відображують загально-розповсюджені характеристики, тобто ті, що застосовуються у всіх або багатьох розділах таблиць.

Загальні визначники приєднуються до кожного індексу основної таблиці за допомогою особливих символів (круглі дужки, лапки, знак рівності тощо).

Загальні визначники мови містять класифікацію мов. Їх символ = ... (знак рівності), наприклад:

= 161.2 Українська мова

Загальні визначники народів утворюються із загальних визначників мови, символ яких береться в круглі дужки. Наприклад:

=111 англійська мова

(=111) англійці

Загальні визначники форми документів мають символ (0...). Вони застосовуються для класифікації документів за формою і характером викладу: підручник, стаття, довідник, словник, звіт, патент тощо. Наприклад:

54(075.8) Підручник для вузів з хімії

Загальні визначники місця мають символ (1/9). Вони застосовуються для відображення географічного або територіального аспекту, в якому розглядається тема (ріки, моря, океани, країни та території сучасного та стародавнього світу тощо).

Вони приєднуються до індексу будь-якого розділу, якщо необхідно відобразити матеріал в зазначеному аспекті. Наприклад:

69(213.5) Будівництво в тропіках

Загальні визначники часу мають символ "...". Вони застосовуються для утворення підрозділів за хронологічним принципом.

61(52) "08" Японська медицина у IX столітті

Загальні визначники точки зору мають символ .00... Вони застосовуються для вираження аспекту, в якому розглядається те або інше поняття, явище, предмет. Це може бути теоретичний аспект, аспект виробництва, експлуатації, ремонту, адміністративний тощо.

Наприклад:

621.873.002.5Крани як устаткування

Загальні визначники з дефісом мають символ -0. Існує два види таких визначників:

-03 Матеріали

-05 Особи. Особисті характеристики

Знаки УДК

УДК має великий набір різних знаків (символів). Їх основне призначення – фіксування відношень між поняттями, що відображені в документах, і утворення правильного пошукового образу, що забезпечує повноту та точність пошуку інформації.

***Знак приєднання* + (*плюс*)** означає наявність у документі двох і більше формальних особливостей. Наприклад:

622+669 Гірнича справа та металургія

***Знак поширення* / (*коса риска*)**. Завдяки цьому знаку відбувається злиття кількох загальних або окремих понять, які йдуть одне за одним, у загальне. Наприклад:

017/019 Каталоги

***Знак відношення* : (*двокрапка*)** з'єднує між собою індекси двох понять (предметів, тем), взаємозв'язаних по суті; при цьому утворюється складений індекс зі значенням, яке не співпадає зі значенням кожного з них окремо, – якісно новий індекс. Наприклад:

678.01:536 Властивості високомолекулярних речовин – теплота (Теплові властивості високомолекулярних речовин)

***Знак відношення* :: (*подвійна двокрапка*)** закріплює певний порядок двох і більш компонентів у складеному індексі, що робить його необоротним. Наприклад:

575::576.3 Цитогенетика

Квадратні дужки [...] – знак, який використовується в усіх розділах УДК у складних та складених індексах. За квадратні дужки виносять визначники, що є загальними для двох і більше індексів, а також виносять індекс, який повторюється. Наприклад:

[622+669](477) Гірнича справа та металургія України

Методика індексування за УДК

Методика індексування – це сукупність заходів та правил побудови індексів УДК для понять, які відображають основний зміст документа або запита.

Основним завданням методики є забезпечення одноманітності підходу до створення індексів.

Для виконання цього завдання розроблено правила індексування за УДК.

1. Індексувати документ за його основним змістом.

2. Враховуючи багатоаспектність УДК, необхідно чітко визначити предмет та аспект його розгляду.

3. Спеціальні визначники можуть використовуватись як самостійні індекси тільки в комбінації з індексами основної таблиці.

Загальні визначники точки зору та з дефісом -03 і -05 не можуть використовуватись як самостійні індекси.

Загальні визначники мови, форми, місця, народів та часу також не рекомендується використовувати як самостійні індекси.

4. При індексуванні документів рекомендується така послідовність визначення індексу:

0/9 (індекс основної таблиці)

' 1/'9 (спеціальні визначники з апострофом) .

01/.09 (спеціальні визначники з крапкою нуль)

-1/-9 (спеціальні визначники з дефісом)

.001/.009 (загальні визначники точки зору) -03 (загальні визначники матеріалів) -05 (загальні визначники осіб) інші загальні визначники

5. Утворення складних індексів. Складні індекси – це індекси, що утворюються сполученням основного індексу із загальним або спеціальним визначником, а також індекси, що утворюються за допомогою "косої риски" (/). Для побудови складних індексів використовують послідовність розташування визначників із п. 4.

6. Утворення складених індексів УДК. Складені індекси утворюються з двох і більше простих або складних індексів за допомогою знаків відношення та подвійного відношення. Значення складеного індексу завжди більш вузьке, ніж значення його основних складових частин. На першому місці ставиться індекс, який відображає основну тему документа. Індекси, що приєднуються за допомогою двокрапки тільки уточнюють, деталізують основне поняття, яке відображене в першому індексі. Наприклад:

621.74:669.2/.8 Лиття кольорових металів, де...

621.74 Лиття

669.2/.8 Металургія кольорових металів

7. Правило першого згадування. Якщо тема в цілому не може бути відображена одним індексом УДК, а лише кількома, то роботи загального

характеру, в яких розглядається ця проблема, збираються під індексом, в якому тема згадується вперше, тобто під індексом найменшої абсолютної величини. Наприклад:

Посібник з обробки металів отримає індекс 621.7(075), незважаючи на те, що для обробки металів є два індекси 621.7 *Обробка в цілому та.* 621.91 *Обробка різанням.*

8. Алгоритм практичного індексування за УДК. Процес індексування можна подати у вигляді переліку операцій, які виконуються послідовно:

- ознайомлення із змістом документа;
- формулювання основного змісту або відбір понять, які відображають основний зміст документа;
- аналіз семантичної ролі понять основного змісту документа (поділ на основні й допоміжні поняття);
- визначення тематичного розділу таблиць УДК, в якому необхідно шукати поняття, що індексується, шляхом побудови ієрархічних понять або пошуку індексу в АПП;
- визначення індексів для понять, які індексуються, або їх складових;
- перевірка відповідності значень отриманих індексів і понять, компонування понять;
- визначення відношень між поняттями основного змісту для відбору знаків з'єднання індексів цих понять в єдиний індекс документа;
- компонування індексу як результат використання правил.

Цю послідовність технологічних операцій індексування можна розглядати як єдиний алгоритм індексування за УДК.

Перевага використання єдиного алгоритму полягає в тому, що кожен систематизатор може обґрунтувати прийняте класифікаційне рішення, стереотипно вирішуючи питання індексування кожного документа.

1.3. Загальні методи і форми наукового пізнання

Під методом розуміється система регулятивних принципів практичної або теоретичної діяльності людини. Про ролі методу в наукових дослідженнях добре сказав П.Л. Капіца: "Великі методичні винаходи, так само як і наукові відкриття, можуть привести до створення цілої наукової області та рішенню основних задач, що стоять перед наукою вже багато часу". Лише завдяки використанню різних методів людська діяльність може бути ефективної.

Застосовуваний науковий метод визначається характером досліджуваного об'єкта, наприклад: метод спектрального аналізу застосуємо до випромінюючих тіл, метод виміру твердості – до твердих тіл і т. д. Останнім часом спостерігається "експансія" методів, тобто методи проникають з однієї області знань в іншу, наприклад: методи математики – у лінгвістику (математична лінгвістика).

Метод залежить також від наявних у науковій практиці засобів пізнання. Засіб пізнання – це деяка матеріальна система, що *заміщає* об'єкт дослідження (у випадку застосування моделей) або людини, що пізнає: а) як відчуттєвого (мікроскоп, телескоп, підсилювач); б) як мислячого (арифмометр, обчислювальна машина); в) як діючого (ракета, промінь лазера). Наприклад, метод візуального спостереження небесних світил став можливим тільки з часу винаходу телескопа. Методи, у свою чергу, впливають на засоби пізнання, стимулюючи їхнє удосконалювання. З філософської точки зору методи поділяються на загальний метод пізнання і спільні методи пізнання.

Загальний метод – матеріалістична діалектика – визначає позиції дослідника, є основою інтерпретації об'єкта пізнання, суб'єкта пізнання, процесу пізнання і результату пізнання. Він діє у всіх галузях науки і на всіх етапах дослідження.

Спільні методи наукового пізнання мають обмежену сферу дії:

- застосовуються не у всіх галузях знання (спостереження й експеримент широко застосовуються в технічних науках і не знаходять застосування, наприклад, у математики);
- використовуються тільки на окремих ступінях процесу пізнання; наприклад, ідеалізація, формалізація, аксіоматичний метод широко застосовуються тільки на теоретичному рівні пізнання.

У науковому дослідженні можна виділити два рівні: 1) емпіричний, на якому йде процес нагромадження фактів і 2) теоретичний, на якому досягається синтез знання (у формі наукової теорії).

Згідно з цими рівнями методи можна розділити на три групи: а) методи емпіричного дослідження; б) методи, використовувані на емпіричному і теоретичному рівнях; в) методи теоретичного дослідження. Очевидно, грані між цими групами обкреслені досить розпливчасто.

Методи емпіричного дослідження

Спостереження. Спостереженням називається систематичне цілеспрямоване сприйняття об'єкта. Наприклад, розгляд мікроструктури на шліфі під мікроскопом, реєстрування показань датчиків тиску, температури і т. д., відлік числа працюючих і не працюючих верстатів протягом зміни і т. д. Цей метод часто виступає як елемент у складі інших методів. Прогрес методу спостереження зв'язаний із прогресом засобів спостереження (телескоп, мікроскоп).

Щоб бути плідним, метод повинен задовольняти ряду вимог:

- *навмисності* (спостереження ведеться для конкретної, чітко і докладно поставленої задачі);

- *планомірності* ведення спостережень за планом, складеному виходячи з задач спостереження;
- *цілеспрямованості* – спостерігаються тільки цікавлячі сторони явища;
- *активності спостереження* (спостерігач не просто сприймає усе, що попадає в поле зору, а активно шукає потрібні об'єкти, риси явища);
- *систематичності* (спостереження повинне вестися безупинно або по визначеній системі).

Спостереження як метод пізнання дозволяє одержувати первинну інформацію про світ, форму, сукупність емпіричних тверджень.

Емпірична сукупність, представлена в тій або іншій системі мови, дає первинну схематизацію об'єктів реальності, що і є вихідними об'єктами наукового дослідження. Тому спостережливість є одним з найбільш важливих якостей дослідника. От як про це говорив Ч. Дарвін: "Сприятливою для мене, як я думаю, обставиною є те, що я перевершую людей середнього рівня в здатності примічати речі, що легко вислизають від уваги, і піддавати їх ретельному спостереженню. Ретельність, яка виявлена мною в спостереженні і збиранні фактів, була майже настільки велика, якою тільки вона взагалі могла б бути". Але корисно пам'ятати також, що самі по собі спостереження, без узагальнення, не занадто коштовні, тому завжди потрібно знаходити місце для своєчасної перерви в стомлюючій роботі спостереження, щоб подивитися, які висновки можна зробити зі своєї роботи.

Порівняння. Порівнянням називається встановлення подібності й розходження предметів і явищ дійсності, находження загального, що властиво двом або декільком об'єктам. Метод порівняння може бути плодотворним при задоволенні його основним вимогам:

- *порівнюватися можуть* і повинні лише такі *явища, між якими існує визначена об'єктивна спільність;*
- *порівняння повинне здійснюватися по найбільш важливим, істотним* (у плані конкретної задачі) *ознакам*. Акцент при порівнянні на несуттєві ознаки часто приводить до оман. Так, формально порівнюючи стійкість двох різців і додаючи значення матеріалу, наприклад, хімічному складу, державки різців, можемо прийти до свідомо невірного висновку.

Різні об'єкти або явища можуть порівнюватися або безпосередньо, або опосередньо через порівняння їх з яким-небудь третім об'єктом. У першому випадку звичайно отримують якісні результати (більше-менше, вище-нижче). *Порівняння об'єктів з еталоном дають можливість одержання кількісних характеристик. Такі порівняння називаються виміром*.

За допомогою порівняння інформація про об'єкт може бути отримана двома шляхами:

- як безпосередній результат порівняння (первинна інформація);
- як результат обробки первинних даних (вторинна або похідна інформація).

Найбільш важливим способом такої обробки є висновок за аналогією. Сутність його зводяться до наступного:

$$
\begin{array}{l}
\text{А має ознаки } x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\
\text{Б має ознаки } x_1, x_2, \ldots, x_n \\
\hline
\text{Висновок: Імовірно, Б має ознаку } x_{n+1}
\end{array}
$$

Висновок на основі аналогії носить імовірнісний характер. Збільшити імовірність одержання істинного знання можна, виконуючи наступне:

- знання тим більше істинно, чим більше подібних ознак виявлено в порівнюваних об'єктів;
- істинність висновку знаходитися в прямій залежності від істотності подібних рис об'єктів;
- ніж глибше взаємозв'язок виявлених в об'єктів ознак, тим вище імовірність істинного висновку. Аналогія називається повною або строгою, якщо простежується такий логічний ланцюг: в об'єкті "А" ознака x_{n+1} необхідно зв'язана з іншими n його ознаками, які властиві також і об'єкту "Б"; очевидно, ознака xn+1 властива також і об'єкту "Б";
- загальна подібність двох об'єктів не є підставою для висновку за аналогією, якщо в того з них, до якого робиться висновок, є ознака, несумісна зі переносною ознакою. Таким чином, для одержання істинного висновку потрібно враховувати не тільки характер подібності, але і характер розходження об'єктів.

Вимір. Вимір розвився з операції порівняння, що є його основою, проте вимір є більш могутнім і універсальним пізнавальним способом. Проголошений Галілеєм принцип кількісного підходу, відповідно до якого опис фізичних явищ повинний спиратися на величини, що мають кількісну міру, є методологічним фундаментом точної науки.

Вимір є операція визначення чисельного порівняння деякої величини за допомогою одиниці виміру. Вимір припускає наявність наступних основних елементів: об'єкта виміру, одиниці виміру (еталон), вимірювальних приладів, методу виміру, спостережливості.

Проблемам виміру, точності виміру присвячена вся гл. 2. Тут тільки позначимо, що вимірювання дають точні, кількісно визначені відомості про навколишню дійсність. У результаті виміру можуть бути встановлені такі факти, зроблені такі емпіричні відкриття, що приводять до корінного ламання устояних у науці представлень.

Експеримент. Під експериментом розуміється такий метод вивчення об'єкта, коли дослідник активно, цілеспрямовано впливає на нього шляхом створення штучних умов (або використання природних умов), необхідних для виявлення відповідних властивостей, коли свідомо змінюється перебіг природних, процесів. Експеримент припускає використання спостереження, порівняння і вимірювання. Експериментальний метод у науці вперше затверджений великим Галілеєм. Він здійснив ряд досконалих експериментів.

У чому ж переваги експериментального вивчення об'єкта в порівнянні зі спостереженням? По-перше, у процесі експерименту можливе вивчення явища "у чистому" виді, тобто усуваються побічні фактори, що затемнюють основний процес.

По-друге, цінністю експерименту є те, що він дозволяє досліджувати властивості об'єктів в екстремальних умовах (понад низькі і надвисокі температури, наднизькі і надвисокі тиски). Ці умови дозволяють значно глибше проникнути в сутність явищ і об'єктів (надпровідність, надтекучість).

Нарешті, третім достоїнством експерименту є його повторюваність: можемо провести цікавлячі нас дослідження, іспити стільки разів, скільки це необхідно.

До експерименту звертаються в наступних ситуаціях:

- спроба виявлення в об'єкта невідомих раніше властивостей;
- перевірка правильності теоретичних побудов;
- демонстрація явища.

Експерименти підрозділяються на натурні і модельні. Натурний експеримент стоїть ближче до природи, модельний – дозволяє вивчати більш широкий діапазон умов.

У науковому дослідженні експеримент і теорія найтіснішим образом взаємозалежні. Всяке ігнорування експерименту неминуче веде до помилок, незмінним супутницям висновку, тому всіляке розгортання експериментальних досліджень являє собою один з найбільш важливих магістральних шляхів розвитку всієї сучасної науки.

Методи, які використовують на емпіричному та теоретичному рівні дослідження

Абстрагування. Сутність абстрагування складається в уявному відволіканні від несуттєвих властивостей, зв'язків, відносин предметів і виділенні декількох цікавлячих дослідника сторін.

Процес абстрагування проходить дві ступені.

Перша ступінь: вичленовування найбільш важливого в явищах і встановлення незалежності або зневажено слабкої залежності досліджуваних явищ від визначених факторів (якщо А не залежить від фактора Б, то можна відвернутися від останнього як несуттєвого).

Друга ступінь: реалізація можливостей абстрагування. Суть полягає в тім, що здійснюється заміщення об'єкта K_1 іншим, менш багатим властивостями об'єктом K_2, що виступає в якості "моделі" першого. Наприклад, перевірка на згинальну утому циліндричного зразка з метою прогнозування працездатності зубчастого колеса.

Абстрагування може застосовуватися як до реальних, так і до абстрактних об'єктів (що пройшли раніше абстрагування). Багатоступінчасте абстрагування веде до абстракцій, усе зростаючого ступеня спільності (чоловік–людина–жива істота–матеріальний об'єкт).

Абстрагування дозволяє замінити в пізнанні складне простим, але таким простим, котрий виражає основне в цьому складному.

Абстракції існують наступних основних видів:

1) ототожнення – утворення понять шляхом об'єднання предметів, зв'язаних відносинами типу рівності в особливий клас (відволікання від ряду індивідуальних властивостей предметів);

2) ізолювання – виділення властивостей і відносин, нерозривно зв'язаних із предметами, і позначення їх визначеними "іменами", що дає абстракціям статус самостійних предметів ("надійність", "технологічність"). Розходження між цими двома абстракціями полягає в тому, що в першому випадку ізолюється комплекс властивостей об'єкта, а в другому – єдина його властивість;

3) конструктивізація – відволікання від хиткості, невизначеності границь реальних об'єктів, "огрубіння" дійсності (безперервний рух зупиняємо і т. п.);

4) абстракція актуальної нескінченності – це одна з основних абстракцій математики і логіки. Сутність – у відволіканні від незавершеності (і незавершуванності) процесу утворення нескінченної безлічі, від неможливості задати його повним списком всіх елементів. Така безліч розглядається як дане, як існуюче;

5) абстракція потенційної здійсненності – ця абстракція також знаходить найбільше застосування в математиці і логіці. Суть її – у відволіканні від реальних границь людських можливостей, обумовлених обмеженістю життя в часі і просторі. Нескінченність виступає вже не як безпосередньо дане, актуальне, а як потенційно здійсненне.

Результат абстрагування часто виступає як специфічний метод дослідження. Так, у механіці для висновку умов рівноваги рідких тіл використовується принцип отвердіння та застосовують до неї рівняння рівноваги твердого тіла. Та ж роль у "чорної скриньки".

Абстрагування виступає як елемент більш складних по своїй структурі методів виміру, експерименту, аналізу, моделювання.

Аналіз і синтез. Аналіз – це метод пізнання, що дозволяє розчленовування предметів дослідження на складові частини (природні елементи об'єкта або його властивості й відносини).

Синтез, навпаки, дозволяє здійснювати з'єднання окремих частин або сторін предмета в єдине ціле.

Аналіз і синтез діалектично взаємозалежні, вони з'являються як нерозривну єдність протилежностей. Аналіз і синтез буває:

а) прямій або емпіричний. Припускає виділення окремих частин об'єкта, виявлення його властивостей, найпростіші виміри і т. п.;

б) поворотний або елементарно-теоретичний. Базується на деяких теоретичних розуміннях причинно-наслідкового зв'язку різних явищ або дії якої-небудь закономірності. При цьому виділяються і з'єднуються явища, що представляються істотними, а другорядні ігноруються;

в) структурно-генетичний. Вимагає вичленовування в складному явищі таких елементів, які представляють центральне, що робить вирішальне на всі інші сторони об'єкта сутності.

Індукція і дедукція. Дедуктивним називають такий висновок, у якому висновок про деякий елемент безлічі робиться на підставі знання загальних властивостей усієї безлічі. Змістом дедукції як методу пізнання є використання загальних наукових положень при дослідженні конкретних явищ.

Під індукцією розуміється висновок від часткового до загального, коли на підставі знання про частині предметів класу робиться висновок про клас у цілому. Дедукція й індукція – взаємо-зворотні методи пізнання.

Мається п'ять методів установлення причинного зв'язку методами наукової індукції:

1. Метод єдиної подібності. Якщо два або більш випадку досліджуваного явища мають загальним лише одну обставину, а всі інші, обставини різні, то ця єдина подібна обставина і є причина даного явища.

2. Метод єдиного розходження. Якщо випадок, у якому досліджуване явище настає, і випадок, у якому воно не настає в усьому подібні й різні тільки в одній обставині, то ця обставина, що є присутньою в одному випадку й відсутня у другому, і є причина досліджуваного явища.

3. З'єднаний метод подібності і розходження – комбінація двох перших методів.

4. Метод супровідних змін. Якщо виникнення або зміна одного явища всякий раз необхідно викликає визначену зміну іншого, то обидва ці явища знаходяться в причинному зв'язку один з одним.

5. Метод залишків. Якщо складне явище викликається складною причиною, що складається із сукупності визначених обставин, і знаємо, що деякі з цих обставин є причиною частини явищ, то залишок цього явища викликається іншими обставинами.

Моделювання і використання приладів. Класична схема пізнання припускає зв'язок суб'єкта пізнання й об'єкта пізнання. Опосередковане пізнання припускає взаємозв'язок трьох елементів: суб'єкта пізнання, об'єкта пізнання і, що стоять між засобів пізнання. Наприклад, щоб вивчити мікроструктуру сталі, потрібно спостерігачу застосувати мікроскоп, а для вивчення обтікання рідиною близького до кулі тіла модно використовувати сферичну модель. Під моделями розуміються матеріальні системи, що заміщують об'єкт пізнання і служать джерелом інформації про нього. Моделі – це такі аналоги, подібність яких з оригіналом істотно, а розходження несуттєве.

Метод моделювання має наступну структуру:

- постановка задачі;
- створення або вибір моделі;
- дослідження моделі;
- перенос знання з моделі на оригінал. Наприклад, дослідження контактної витривалості навскісзубчастих коліс на конусних роликових моделях.

Моделювання може бути фізичне (зберігається природа явища) і умовне (математичне). Фізичне моделювання припускає встановлення якісних і кількісних зв'язків подібних явищ у виді критеріальних співвідношень. Математичне моделювання ґрунтується на тотожності рівнянь, що описують процеси моделі і досліджуваного явища.

Методи теоретичного дослідження

Ідеалізація. Уявне конструювання об'єктів, що не існують у дійсності (практично не здійсненні), називається ідеалізацією. Наприклад, абсолютно тверде тіло, лінія, абсолютно чорне тіло і т. д.

Ціль ідеалізації:

1. Позбавити реальні об'єкти деяких властивих їм властивостей.
2. Наділити (думкою) ці об'єкти визначеними нереальними і гіпотетичними властивостями.

Досягнення мети здійснюється:

1) багатоступінчастим абстрагуванням, наприклад абстрагування від товщини приводить до поняття площина;

2) уявним переходом до граничного випадку в розвитку якої-небудь властивості (абсолютно тверде тіло);

3) простим абстрагуванням (нестисливість рідини).

Природно, будь-яка ідеалізація правомірна лише у визначених межах.

Формалізація. Під формалізацією в широкому смислу слова розуміється метод вивчення найрізноманітніших об'єктів шляхом відображення і змісту їхньої структури в знаковій формі за допомогою штучних мов. Наприклад, мова математики, хімії, радіотехніки і т. д.

Достоїнства формалізації:

1. Формалізація забезпечує узагальненість підходу до рішення проблем, наприклад інтегральне вирахування при обчисленні площин.
2. Символіка додає стислість і чіткість фіксації значень.
3. Однозначність символіки (немає двозначності звичайної мови).
4. Формалізація дозволяє формувати знакові моделі об'єктів та вивчення реальних речей і процесів заміняти вивченням цих явищ.

Аксіоматичний метод. Метод побудови наукової теорії, коли ряд тверджень приймається без доказів, а всі інші знання виводяться з них по визначених логічних правилах.

Проблема і питання. Наукове дослідження завжди являє собою ланцюг наступний друг за другом проблем. Проблема – така форма наукового пізнання, у якій, з одного боку, констатується недостатність досягнутого до даного моменту рівня знання, неможливість пояснити на основі цього знання нові явища дійсності, а з іншого боку, проблема спирається на це обмежене знання, наявності якого вона зобов'язана своєю постановкою, тобто проблема – форма розвитку знання, форма переходу від старого знання до нового.

Проблема знаходить своє концентроване вираження в питанні. Кутовим пунктом усякої проблеми є центральне питання. Специфічною рисою проблеми є те, що для її рішення, для відповіді на її питання, що виражають, необхідно вийти за рамки старого досягнутого знання, у той же час нерідко для відповіді на питання цілком достатньо старого знання. У цьому складається відмінність проблеми і питання.

Ідея, принцип, закон. У складі теорії ідея виступає як вихідна думка (центральне положення), що поєднує вхідні в теорію поняття і судження в цілісну систему. В ідеї відображається фундаментальна закономірність, що лежить в основі теорії, у той час як в інших поняттях відображені ті або інші істотні сторони й аспекти цієї закономірності. Ідей можуть не тільки бути основою теорії, але і зв'язувати ряд теорій у галузь науки, окрему область знання. Крім того, ідея може існувати до створення теорії як передумова її побудови.

Стосовно ідеї принцип виступає як її перше і саме абстрактне визначення. Принцип не вичерпує всього смислу ідеї. Якщо в основі теорії завжди лежить одна ідея, то принципів, що виражали її, може бути кілька.

Висунуті принцип та ідея являють собою закони науки, оскільки в них виражаються істотні й необхідні відносини дійсності. У той же самий час закон не завжди виступає як принцип або ідея.

Теорія. Під теорією розуміється система знань, що описує і пояснює сукупність явищ деякої області дійсності і що зводить відкриті в цій області закони до єдиного з'єднувального початку. Побудова теорії спирається на результати, отримані на емпіричному рівні дослідження. У теорії ці результати упорядковуються, приводяться в струнку систему, об'єднану загальною ідеєю, уточнюються на основі абстракцій, ідеалізації і принципів, що вводяться в теорію.

До знову створюваної теорії пред'являється ряд важливих вимог:

1. Наукова теорія повинна бути адекватна описуваному об'єкту, що дозволяє у визначених межах замінити експериментальні дослідження теоретичними вишукуваннями.

2. Теорія повинна задовольняти вимозі повноти опису деякої області дійсності.

3. Повинні бути з'ясовні взаємозв'язки між різними компонентами в рамках самої теорії. Повинні існувати зв'язки між різними положеннями теорії, що забезпечують перехід від одних тверджень до інших.

4. Повинне виконуватися вимога внутрішньої несуперечності теорії й відповідності її дослідним даним. У противному випадку теорія повинна бути удосконалена або відкинута.

Теорія повинна володіти евристичністю, конструктивністю і простотою.

Евристичність теорії відбиває її пророкувальні і пояснювальні можливості. Математичний апарат теорії повинний дозволяти не тільки робити точні кількісні пророкування, але і відкривати нові явища. Конструктивність теорії складається в простій, виконуваної за визначеними правилами перевірюваності основних її пропозицій, принципів, законів. Простота теорії досягається шляхом введення узагальнених законів, скорочення й ущільнення інформації за допомогою визначень – скорочень.

Наукова теорія розвивається під впливом різних стимулів, що можуть бути зовнішніми і внутрішніми. Зовнішні стимули – це протиріччя теорії й досвіду, внутрішні стимули являють собою виявлені в складі теорії невирішені задачі, протиріччя і т. п. Як ті, так і інші приводять до розвитку теорії в трьох основних формах: 1) інтенсифікаційна форма розвитку, коли відбувається поглиблення знань без зміни області застосування теорії; 2) екстенсифікаційна форма розвитку, коли відбувається розширення області застосування теорії без істотної зміни її змісту, наприклад поширення теорії електромагнетизму на область оптичних явищ; 3) екстенсифікаційно-інтенсифікаційна форма розвитку. Такою формою є, наприклад, процес диференціації наукових теорій.

У розвитку теорій можуть бути два самостійних, етапу: еволюційний, коли теорія зберігає свою якісну визначеність, і революційний, коли здійснюється ламання її основних вихідних початків, компонентів, математичного апарата і методології. Власне кажучи цей стрибок є створення нової теорії, вона відбувається тоді, коли можливості старої теорії вичерпані.

Існують різноманітні способи узагальнення теорії:

1) узагальнення, засноване на застосуванні абстракції ототожнення, коли теорія, розвита для області явищ "а", екстраполюється на іншу область "б";
2) узагальнення шляхом об'єднання декількох теорій в одну в результаті виявлення більш загальних і фундаментальних закономірностей, що мають силу в розглянутих у кожній теорії областях;
3) узагальнення шляхом усунення зі складу оазису теорії тієї або іншої аксіоми;
4) узагальнення з граничним переходом, коли вводяться нові характеристичні параметри стосовно предметів колишньої області, ви-

являються нові властивості і відносини об'єктів у межах колишньої області.

Гіпотеза і припущення. Математична гіпотеза. У становленні теорії як системи наукового знання найважливішу роль грає гіпотеза. Гіпотеза є формою осмислення фактичного матеріалу, формою переходу від фактів до законів.

У своєму розвитку гіпотеза проходить три стадії: 1) накопичення фактичного матеріалу та висловлення на його основі припущення; 2) формування гіпотези, тобто виведення наслідків зі зробленого припущення, розгортання на його основі цілої можливої теорії; 3) перевірка отриманих висновків на практиці й уточнення гіпотези на основі результатів такої перевірки. Якщо при перевірці виявляється, що наслідок відповідає дійсності, гіпотеза перетворюється в наукову теорію.

У звичайній гіпотезі робиться припущення про фізичні властивості об'єкта, а потім дається його математична теорія. У математичній гіпотезі спочатку конструюється математичний опис об'єктів, а потім відшукується фізичне тлумачення отриманих результатів.

Розрізняють чотири основних типи математичних гіпотез: 1) математичні гіпотези, у яких змінюється тип, загальний вид рівнянь; 2) гіпотези, у яких тип, загальний вид рівнянь залишається колишнім, але в них підставляються величини іншої природи; 3) математичні гіпотези, у яких змінюється і загальний вид рівнянь і тип вхідних у них величин; 4) математичні гіпотези, у яких змінюється характер граничних умов.

Прямий зв'язок математичної гіпотези з досвідом є досить слабкою. Але при цьому дія ученого визначається цілим рядом принципових наукових положень:

1. Математична гіпотеза повинна підкорятися принципу відповідності, тобто при переході до умов колишньої теорії нові рівняння повинні переходити в колишні.
2. Повинні дотримуватися закони збереження.
3. Не повинний порушуватися принцип причинності.
4. Рівняння повинні бути інваріантні стосовно системи перетворень, що вважаються обов'язковими для усякої фізичної теорії.
5. Рівняння повинні бути прості і математично витончені.

Остаточний вирок математичній гіпотезі виносить тільки практика.

Наприклад, при висновку диференціального рівняння теплопровідності Фур'є не враховувалася конкретна обстановка явища, розглядався тільки виділений диференціальний об'єм тіла ΔV. Для висновку рівняння потрібен був єдиний, досвідчений факт, що полягає в тім, що перерозподіл теплоти в середовищі можливо тільки при наявності температурних інградієнтів, не рівних нулю. Фур'є приклав до вивчення температурного поля тіла закон збереження енергії. Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є описує механізм явища перерозподілу тепла в речовинному середовищі, тому це рівняння являє собою найбільш загальний зв'язок між істотними для явища величинами і характеризує властивості, властивим усім явищам даного класу – класу явищ теплопровідності. Перемінні, вхідні до складу рівняння, можуть приймати самі різні значення, кожне з яких відповідає якомусь одиничному явищу.

Таким чином, будь-яке диференціальне рівняння (система) є математичною моделлю цілого класу явищ. При інтегруванні будь-якого диференціального рівняння виходить незліченна безліч різних рішень, що задовольняють цьому рівнянню.

Щоб одержати з безлічі можливих рішень одну частку (відповідне визначеному конкретному явищу), необхідно мати додаткові дані, що не утримуються у вихідному диференціальному рівнянні. Треба знати всі конкретні особливості даного явища, що виділяють його з усього класу однорідних явищ. Ці додаткові умови називаються умовами однозначності. Конкретне явище характеризується наступними індивідуальними ознаками, що виділяють його з цілого класу явищ:

- геометричними властивостями системи (визначені розміри, форма і т. п.);
- фізичними властивостями (необхідно задати усі фізичні коефіцієнти тіл, істотні для цього явища);
- часовими (початковими) умовами (визначеність стану системи в деякий момент часу). Для початкового моменту необхідно знати повну картину розподілу перемінних по всьому обсягу системи;
- граничними умовами. Необхідно задати умови взаємодії системи з навколишнім середовищем.

Тимчасові і граничні умови називають крайовими. Крайові умови і диференціальні рівняння (системи) у сукупності однозначно визначають конкретні одиничні явища. Найбільше повно конкретне явище можливе вивчити експериментальним методом. Недоліком експериментального методу є неможливість поширення результатів даного явища на інші явища. Цей недолік успішно усувається застосуванням методів теорії подоби. Теорія подоби являє собою методи наукового узагальнення даних конкретного досвіду. Деякі попередні знання про цю теорію і про моделювання будуть викладені в гл. 4.

1.4. Види і структура наукових праць

Наукові праці можна підрозділити на наступні види: ФД – фундаментальні дослідження; ПД – прикладні дослідження; ДКР – дослідно-конструкторські розробки; ДТХ – дослідно-технічні розробки.

Фундаментальне дослідження являє собою пошук за допомогою експериментальних і теоретичних методів нових закономірностей дійсності з метою їхнього пізнання і практичного використання, фундаментальне дослідження звичайне не ставить яких-небудь практичних цілей прикладного характеру, їх задачею є пошук нового, незвіданого. По деяким даним, тільки 8...10% фундаментальних досліджень є результативними, але вони і забезпечують загальний науковий прогрес.

Прикладне дослідження проводиться відповідно до запланованої програми і спрямовано на досягнення конкретної, заздалегідь визначеної практичної мети. Базою для проведення прикладних досліджень є результати фундаментальних робіт. Але і навпаки, результати прикладних досліджень нерідко визначають проведення фундаментальних досліджень.

Ціль прикладних досліджень – поліпшення якості виробів, розробка нових матеріалів, технологічних процесів машин або пристроїв, підвищення ефективності устаткування, зниження собівартості. Прикладні дослідження, вірніше, результати прикладних досліджень є основою для великих дослідно-конструкторських розробок, технологічних процесів.

Дослідно-конструкторські та дослідно-технологічні розробки або виробничі дослідження містять у собі: проектування виробництва й оцінку виробів, виготовлених у кількості, достатньому для випробування в умовах експлуатації; перевірка матеріалів, процесів і пристроїв у робочих умовах; експлуатаційні випробування нових пристроїв і процесів.

Будь-який науковий пошук полягає в тім, що науковець сам відшукує і виробляє власний оригінальний метод або на теоретичній основі, або за допомогою експерименту, емпіричних методів досліджень. Надзвичайно важливо при цьому завжди пам'ятати, що наука повинна починатися з фактів і закінчуватися ними поза залежністю від того, які теоретичні структури будуються між початком і кінцем.

Структура будь-якого наукового дослідження в загальному випадку можуть бути представлені на рис. 3. На вході проведеної структурної системи наукового дослідження знаходяться питання, проблеми, основою яких є фактичний матеріал, отриманий у результаті виробничої діяльності або попередніх наукових досліджень.

На виході дослідник припускає одержати науковий результат, що розширює і поглиблює наші знання.

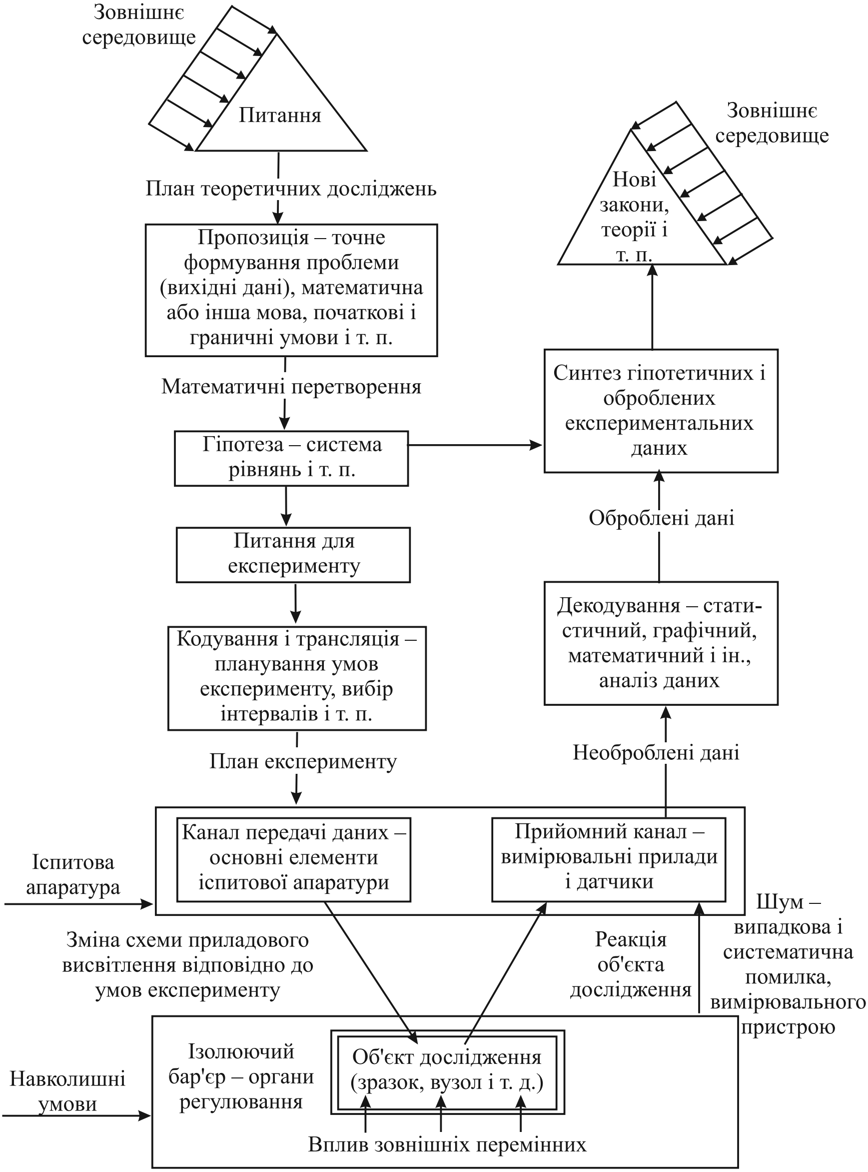

Рис. 3. Структура наукового дослідження

Глава друга
СПОСТЕРЕЖЕННЯ, ВИМІРИ І ПОХИБКИ

2.1. Спостереження і виміри в експерименті

У наукових і виробничих дослідженнях *випробуванням* називають практичне здійснення визначеного комплексу умов в експерименті, досліди й т. п. Комплекс умов може бути природним, штучним і змішаним. Наприклад, відповідно: спостереження сонячного затьмарення, протягання моделі судна в дослідницькому басейні, аналіз ходу виробництва з включенням у верстатний парк конкретного (за умовами експериментатора) устаткування.

Комплекс умов експерименту задається комплексом основних факторів, що підрозділяються на досліджувані, стабілізуючі і побічні (зовнішні).

Досліджувані фактори є метою спостереження і всього випробування. *Стабілізуючі* – підтримують систему в заданої динамічної рівновагі або змінюють її по заданому закону. Наприклад, дослідження термомеханічної обробки (ТМО) сталі передбачає випробування, тобто здійснення ТМО, при строго визначеній температурі, що повинна підтримуватися увесь час випробування. Складніше з *побічними* факторами. Безумовно, їх варто прагнути усувати (наприклад, наявність рвучких протягів у робочого місця, де йде випробування ТМО). Але вірно і те, що всі такі фактори усунути неможливо. Тому до основних факторів будемо відносити ті з них, що з достатньою повнотою можуть бути враховані.

Дослідник, знаючи, що будь-який результат випробування має похибку, або маючи гіркий досвід експериментування, завжди прагне зняти з експериментальної установки побільше однакових (у межах похибки) результатів, тобто одержати гарну надійність результату. У цілому це бажання закономірне, хоча не завжди здійснене, а іноді і невиправдане (див. п. 2.5). Сукупність (серія) таких випробувань здійснюється при незмінних основних факторах для кожного окремого випробування. Тому випробування серії називають *однорідними*.

Однорідні серії дають відтворені результати. Забезпечення однорідності досягається проведенням всіх випробувань серії на тих самих приладах і установках (або сукупності однакових установок), тими самими експериментаторами, у короткий термін (деякі фактори значимо змінюються в часі). Якщо все-таки стабільність не забезпечена, то зміни від випробування до випробування варто врахувати як особливий фактор і включити його в число основних факторів.

Непереборні фактори, що важко піддаються обліку, відносять до випадкових. Майстерність експериментування у визначеній мері полягає в умінні щораз вирішувати питання: які фактори потрібно обов'язково враховувати, які віднести до випадкового. Наприклад, використовуючи один і той же тахометр для вимірювання чисел оборотів у різних випробуваннях, його похибка визнаємо основним фактором. Знайдемо йому властиву похибку в показаннях і виключимо цю, так називану систематичну похибку (тобто врахуємо). Якщо ж в випробуваннях серії число оборотів міряли різними тахометрами, то їх похибки будемо вважати випадковими.

Потрібно твердо і назавжди засвоїти, що розподіл факторів експерименту на основні і випадкові умовно та може бути необґрунтованим – головне, щоб, раз установлені, вони не мінялися в межах однієї серії.

Якщо виділення факторів у число основних допускає визначену необґрунтованість, то чим же керуватися при аналізі факторів?

Відомо, що в результаті випробування, тобто здійснення визначеного комплексу умов, відбувається викликане цими умовами явище, що називається *подією*. Ці події майже завжди відносяться до категорії випадкових явищ і характеризуються відповідними випадковими величинами. Теорія імовірностей і математична статистика розробили правила поводження з випадковими величинами. Усі правила побудовані на об'єктивній реальності існування випадкових подій. При різних умовах випадкові події та їм відповідні випадкові величини підкоряються різним правилам поведінки (законам). Звідси вже не важко припустити, що було б зовсім непогано навчитися вибирати основні фактори так, щоб наші, отримані в експерименті, випадкові величини дотримували хороших правил, найбільш вивчених і зручних у звертанні законів. Цьому можна навчитися. І тоді вибір основних факторів – уже не безпідставність, вона підлегла головному критерію вибору – одержанню випадкових величин, що підкоряються "хорошим" законам.

Експериментування – трудомісткий процес. Тому кожне випробування повинно надавати максимальну інформацію. Одночасно намагаються вивчати не одну подію, а клас подій – сукупність властивостей складного явища, числових значень випадкової величини. Наприклад, при вивченні впливу жорсткості верстата на шорсткість оброблюваної поверхні одночасно спостерігають і реєструють: відтиснення в системі ВПІД (верстат–пристосування–інструмент–деталь), режими різання, геометрію і фізико-механічні властивості ріжучої частини інструмента, вихідні фізико-механічні властивості матеріалу виробу, профіль оброблюваної поверхні, власні і змушені коливання в ВПІД і т. п.

Реєстрація подій, що здійснилися і не здійснилися в випробуванні, називається *спостереженням*. При спостереженні фіксуються ознаки основних факторів: *досліджувані* і *контрольні*. Контрольні ознаки служать для перевірки і підтримки однорідності випробувань. Наприклад, вивчаючи тертя у вакуумі, необхідно послідовно реєструвати величини тиску в реторті і втрутитися (якщо експеримент не автоматизований), коли значення тиску підійдуть до верхньої або нижньої границі інтервалу, заданого умовами експерименту.

За своїм характером ознаки та їм відповідні результати спостереження поділяються на *якісні* і *кількісні*. До якісних результатів відносяться: поява події (запалювання контрольної лампочки, поява зазору в процесі тертя, робота верстата і т. п.), колір, смак, форма об'єкта. Розподіл результатів на якісні і кількісні – категорія історична. Поступово до якісних показників підбирають їм властиві одиниці вимірювання, і вони переходять у кількісні результати. Цьому зараз піддані навіть такі класично "нематематичні" науки, як, наприклад, медицина, лінгвістика і т. п.

Кількісні результати найбільш зручні для математичної обробки, що здатна генерувати нові, узагальнені результати. Джерелами кількісних результатів є в основному спостереження двох видів: *підрахунок* і *вимірювання*. До першого виду відносяться спостереження, у яких, наприклад, визначається число бракованих деталей з числа придатних, число зруйнованих зразків, число зерен на шліфі і т. п.

Вимірювання виникають тоді, коли властивість, що спостерігається, порівнюється в кількісному відношенні з деяким еталоном (одиницею виміру). Вимірювання зв'язане з визначенням фізичних величин, за допомогою яких розкриваються фізичні закономірності досліджуваних явищ. Вимірюванням називається знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Основним рівнянням вимірювання є

$$Q = q \cdot [Q], \tag{2.1}$$

де Q – вимірювана величина; $[Q]$ – одиниця її виміру; q – числове значення вимірюваної величини в прийнятій одиниці вимірювання.

Права частина рівняння (2.1) називається результатом вимірювання. *Вимірювана величина* – числове відображення об'єктивно властивим матеріальним об'єктам властивостей.

Основною одиницею вимірювання називається одиниця, обрана довільно при побудові системи одиниць (метр, секунда і т. д.).

Похідною називається одиниця, яка утворена по визначальному цю одиницю рівнянню з інших одиниць даної системи. Наприклад, одиниця швидкості знаходиться з рівняння

$$v = \frac{S}{t} - [v] = LT^{-1}, \; v = \frac{S}{t} = [v] = LT^{-1},$$

де L – довжина; T – час.

В Україні діють наступні стандарти на величини та одиниці величин: ДСТУ 3651.0–97 "Основні одиниці фізичних величин Міжнародної системи одиниць", ДСТУ 3651.1–97 "Метрологія. Одиниці фізичних величин.

Похідні одиниці фізичних величин. Міжнародної системи одиниць та позасистемні одиниці. Основні положення, назви та позначення", ДСТУ 3651.2–97 "Метрологія. Одиниці фізичних величин. Фізичні сталі та характеристичні числа. Основні положення, назви та позначення".

Для кожної основної одиниці вимірювання існує еталон одиниці. Єдність вимірювання та правильність мір і вимірювальних приладів забезпечується Держспоживстандарт України, з підлеглими організаціями нижчого підпорядкування. Наприклад, кожен прилад, застосовуваний для наукових досліджень у НУК, обов'язково у визначений термін атестується (переатестовується) по точності, чутливості і т. п. у Миколаївської обласний лабораторії Держнагляду за стандартами і вимірювальною технікою.

2.2. Методи і засоби вимірювання

Якщо одиниця вимірювання прийнята, то числове значення вимірюваної величини буде залежати від своєї природи і стану в процесі вимірювання. Вимірювана величина може бути постійною або перемінною, випадковою або невипадковою, залежною або незалежною. Вона може знаходитися в момент вимірювання в стані спокою або в стані руху, під навантаженням і т. п. Методи і засоби вимірювання повинні вибиратися з урахуванням цих факторів.

Сукупність ознак, що характеризують умови експерименту, визначають фізичні принципи, які використовують при вимірюванні, конструкцію, метрологічні характеристики засобів вимірювання, спосіб одержання результату вимірювання і т. д.

Результат вимірювання X є функцією ряду факторів, що залежать від методу вимірювання:

$$X = f(A, B, C, ...), \tag{2.2}$$

де $A, B, C, ...$ – чисельні значення яких-небудь факторів, що характеризують призначення, область і умови застосування, можливості й інші властивості методу вимірювання.

Тому вибору методу вимірювання, його відповідності умовам вимірювання виходячи з аналізу (2.2) необхідно приділяти велику увагу, виявляти терпіння і вдумливість.

За способом одержання результати вимірювання поділяються на *прямі* і *непрямі*. Безпосереднім або прямим виміром називають вимір, при якому значення вимірюваної величини (або відхилення від неї) визначається шляхом безпосереднього її порівняння з мірами або за допомогою приладу, проградуірованому в прийнятих одиницях вимірювання.

Очевидно, значення вимірюваної величини Q, в цьому випадку, дорівнюють значенню X, яке безпосередньо отримано при вимірі:

$$Q \approx X. \tag{2.3}$$

Істотною ознакою прямого вимірювання є те, що результат виражається безпосередньо в тих же одиницях, що і вимірювана величина (наприклад, визначення маси тіла зважуванням на вагах, довжині тіла мірою довжини і т. п.). Прямий вимірювання складається тільки в приведенні вимірювального приладу в дію й одержанні відліку.

Більшість фізичних величин безпосередньо виміряти або взагалі неможливо, або дуже складно, або такий вимірювання ненадійний.

Непрямим виміром називають вимір, при якому значення вимірюваної величини обчислюється за результатами прямих вимірювання однієї або декількох величин, зв'язаних з вимірюваною величиною, якоюсь функціональною залежністю. Числове значення вимірюваної величини, у цьому випадку, визначається вираженням

$$Q \approx Z = F(x, y, ..., t), \quad (2.4)$$

де $x, y, ..., t$ – значення величин, вимірюваних прямим методом.

Вимірювану величину можна оцінити двома способами. Перший – вимірювання усього значення – *безпосередній* метод. Другий – вимірювання відхилення вимірюваної величини від відомого значення міри – *диференціальний* метод. Наприклад, вимірювання діаметра оброблюваного валика (40 мм штангенциркулем – вимірювання безпосереднім методом; а вимірювання мікрометром – диференціальним методом, оскільки перед виміром мікрометр був установлений по плоскопаралельним плиткам на розмір, наприклад, 25 мм і вимірялося лише відхилення 40 – 25 = 15 мм. Експериментатор повинний знати, що другий метод точніше першого, якщо відомо дійсне значення міри та похибка її зневажено мала.

Виміри можуть бути *контактні* і *безконтактні*. Вони здійснюються за допомогою засобів вимірювання – технічних засобів, що мають нормовані метрологічні властивості. Засоби вимірювання поділяються на міри, вимірювальні прилади і вимірювальні перетворювачі.

Мірою називають засіб вимірювання, призначений для відтворення фізичної величини заданого розміру.

Вимірювальний прилад – засіб вимірювання, що виробляє сигнали вимірювальної інформації у формі, доступної для безпосереднього сприйняття спостерігачем.

Вимірювальний перетворювач (датчик) – засіб вимірювання, що генерує сигнал вимірювальної інформації у формі, зручної для передачі, подальшого перетворення, обробки і збереження, але не піддається безпосередньому сприйняттю спостерігачем.

У залежності від використання фізичного принципу засоби вимірювання підрозділяють на механічні, електричні, оптичні, пневматичні, фотоелектричні й ін.

Міри бувають однозначні (гирі, кінцеві плитки) і багатозначні (масштабні лінійки, рулетки і т. п.).

Вимірювальні прилади в залежності від форми показань поділяються на *аналогові* і *цифрові*.

Під аналоговими розуміють вимірювальні прилади, показання яких є безперервною функцією змін вимірюваної величини. Цифровий – прилад, що виробляє дискретні сигнали вимірювальної інформації, показання якого представлені в цифровій формі.

Вимірювальні прилади бувають: що показують, що реєструють, самописні, друкуючі. Сукупність функціонально зв'язаних мір, вимірювальних приладів, перетворювачів і допоміжних пристроїв, що забезпечує вироблення вимірювальної інформації, зручної для безпосереднього спостереження, називається вимірювальною установкою (наприклад, тензометрична установка).

Засоби вимірювання поділяються на *зразкові* і *робочі*. Експериментатор має справу з робочими засобами вимірювання, що час від часу і перед початком експерименту порівнюють зі зразковими.

Відлікові пристрої засобів вимірювання – ті їхні елементи, що дозволяють робити відлік значень вимірюваної величини.

Відлік – число, відлічене по відліковому пристрою при вимірюванні або отримане рахунком послідовних оцінок сигналу. Відлік – число відвернене, не зв'язане з одиницею вимірювання. Перехід від відліку до показань приладу здійснюється за допомогою постійній приладу, ціни розподілу шкали або градуіровочної кривій. Постійна приладу є число одиниць вимірювання, на яке збільшується відлік. Під показанням приладу мається на увазі іменоване число. В окремому випадку, коли постійна приладу дорівнює одиниці вимірювання, показання приладу і відлік чисельно збігаються (наприклад, масштабні лінійки, термометри).

Шкала – частина відлікового пристрою – сукупність оцінок, що відповідають ряду послідовних значень величини. Шкали бувають *рівномірні* і *нерівномірні*. Рівномірні шкали мають постійні інтервали розподілу шкали по її довжині і постійній ціні розподілу. Нерівномірні шкали, крім неоднакових інтервалів, іноді мають і непостійну ціну розподілу. Оцінки шкали (штрих, точка й ін.) відповідають окремим значенням вимірюваної величини. Проміжок між (осями, центрами) двома сусідніми оцінками шкали називається розподілом. Різниця значень величин, що відповідають двом сусіднім оцінкам, називається *ціною розподілу шкали*. Ціна розподілу шкали виражається в одиницях вимірюваної величини або в умовних одиницях. В останньому випадку показання приладу збільшуються на перекладні множники шкал. Оцінка, що відповідає нульовому значенню вимірюваної величини, називається нулем шкали. Шкала без нуля називається безнульовою; з нулем на початку або наприкінці – однобічною; з нулем у середині – двосторонньою. Оцінка, що відповідає найменшому значенню вимірюваної величини, називається початком шкали, а найбільшому значенню – кінцем шкали. Значення вимірюваної величини, що відповідає початку шкали, визначає нижню межу показань приладу, а відповідно кінцю шкали – верхня межа його показань. Межі вказують область показань приладу. Нерідко виділяється робоча частина шкали, що менше області показань приладу. Це зв'язано з тим, що відліки в початку шкали часто менш точні, чим у середині, а в кінці шкали прилад іноді буває значно перевантажений і його показання стають ненадійними. Робоча, частина шкали (робочий діапазон перетворень) – частина шкали, для якої межі похибок, що допускаються, установлені відповідно до вимог стандартів.

Покажчик – частина відлікового пристрою, положення якого щодо оцінок шкали визначає показання засобів вимірювання (стрілка, лезо, нитка, світловий промінь, штрих і т. п.). Може переміщатися не покажчик, а шкала (наприклад, у довжинамірах, оптиметрах і т. д.).

На міри, вимірювальні прилади і вимірювальні перетворювачі Державної системи забезпечення єдності вимірювання установлені класи точності. Стандарт не поширюється на прилади, призначені для вимірювання тільки з багаторазовим відліком показань і визначення результату вимірювання як середнього арифметичного з ряду відліків. *Не можна плутати поняття*: *клас точності вимірювального засобу і точність вимірювання, виконуваного за допомогою цього вимірювального засобу*. Клас точності характеризує властивості вимірювального засобу. Так, наприклад, клас точності кінцевих мір довжини характеризує ступінь наближення їхніх розмірів до номінальних відхилень, що допускаються від плоскопаралельності, а також притераємість і нестабільність.

Клас точності, наприклад, нормальних елементів характеризує межі, у яких повинні знаходитися дійсні значення е.р.с, стабільність за часом і т. п. Точність вимірювання ж характеризує не вимірювальний засіб, а точність методу вимірювання, і оцінюється іншими числовими показниками.

Класи точності засобів вимірювання визначаються межами допускаючої основної похибки, допускаючої додаткової похибки й інших властивостей засобів вимірювання, що впливають на їхню точність.

Основною похибкою називають похибку, яку має засоб вимірювання, що знаходиться в нормальних умовах застосування.

Додатковою похибкою називають похибку, властиву засобу вимірювання і виникаючу при відхиленні однієї з величин, що впливають, за межі, установлені для нормального значення або для нормальної області значень.

Нормальними умовами застосування засобів вимірювання вважаються такі умови, коли впливові величини мають нормальні значення або знаходяться в межах нормальної області значень. Нормальні значення впливової величини (з нормованими відхиленнями) встановлюються в стандартах або технічних умовах на засоби вимірювання даного виду. При цих значеннях величина похибки вимірювального засобу не повинна перевищувати встановленої межі. Нормальна область значень впливової величини також заноситься в стандарт або технічні умови – це та область, у межах якої основна похибка не повинна перевищувати встановлених меж.

Для нормування додаткових похибок уведене поняття розширеної області – області значень впливової величини (також вноситься в стандарт або технічні умови), у межах якої значення додаткової похибки (зміна показань) не повинне перевищувати встановлених меж.

Межі, що допускаються, основної і додаткової похибок виражаються у виді *абсолютної*, *приведеної* або *відносної* похибки або у виді визначеного числа розподілів.

Абсолютна похибка може бути записана в двох видах:

– одним значенням

$$\Delta = \pm a, \tag{2.5}$$

де Δ – межа абсолютної похибки, що допускається*;* a – постійна величина.

– у виді залежності межі похибки, що допускається, від номінального значення, показання або сигналу x, вираженою формулою

$$\Delta = \pm(a + bx), \tag{2.6}$$

де b – постійна величина; x – змінна величина, прийнята без урахування знака або у виді таблиці меж похибок, що допускаються, для різних номінальних значень, показань або сигналів.

Відносна похибка δ виражається теж у двох видах:

$$\delta = \pm\frac{100\Delta}{x} = \pm c; \tag{2.7}$$

$$\delta = \pm\frac{100\Delta}{x} = \pm\left[c + d\left(\frac{x_к}{x} - 1\right)\right], \tag{2.8}$$

де c, d – постійні числа, $x_к$ – кінцеве значення діапазону вимірювання або діапазону значення сигналу на вході перетворювача

Стандарт допускає застосування приведеної похибки, що визначається формулою

$$\gamma = \pm\frac{100\Delta}{x_N}, \tag{2.9}$$

де x_N – нормувальне значення, тобто значення величини, до якої відносять абсолютну похибку засобів вимірювання при обчислень похибки.

Нормувальне значення приймають рівним для засобів вимірювання з рівномірною або стегенною шкалою, якщо нульова оцінка знаходиться на краю або поза шкалою, – кінцевому значенню робочої частини шкали; для тих же шкал, але з нульовою оцінкою в усередині робочій частині – арифметичній сумі кінцевих значень робочої часта шкали (без обліку знака); для засобів вимірів, призначених для вимірювання величин, для яких установлене номінальне значення – цьому номінальному значенню; для засобів вимірювання з логарифмічною або гіперболічною шкалою – усі довжини шкал.

Істотний вплив на точність показання вимірювального приладу може робити його *чутливість* – відношення зміни сигналу на виході вимірювального приладу, наприклад переміщення покажчика, до зміни вимірюваної величини, що викликало зміну сигналу.

Абсолютна чутливість

$$S = \frac{\Delta l}{\Delta x}. \tag{2.10}$$

Відносна чутливість

$$S_0 = \frac{\Delta l}{\Delta x / x}, \tag{2.10}$$

де Δl – зміна сигналу на вході, x – вимірювана величина, Δx – зміна вимірюваної величини.

Якщо чутливість постійна, то при її визначенні вимірювана величина повинна змінюватися настільки, щоб зміна сигналу на виході, з одного боку, була досить помітною, а з іншого боку, ця зміна повинна бути настільки малою, що в її межах чутливість можна було б вважати постійної. Якщо чутливість перемінна і залежить від вимірюваної величини, то будується крива цієї залежності.

Для шкальних приладів чутливість обернено пропорційна ціні ділення шкали. Тому що ціна ділення даного приладу – величина постійна, то шкала буде нерівномірної, якщо чутливість – величина перемінна.

Поріг чутливості вимірювального приладу – найменша зміна значення вимірюваної величини, здатна викликати найменшу зміну в показаннях приладу. Мірою порога чутливості буде зміна в показаннях приладу, якщо значення вимірюваної величини сначала незначно підвищити, а потім трохи понизити.

При низької чутливості прилад не може бути використаний повною мірою. Занадто висока чутливість може привести до помилкової оцінки точності приладу.

Стабільність засобів вимірювання – якість, що відбиває незмінність у часі їхніх метрологічних властивостей. Стабільність характеризується, в основному, варіацією в показаннях вимірювального приладу.

Варіацією називається область показань даного приладу для даного значення вимірюваної величини, якщо усунуті причини коливання показань, крім властивих самому приладу. Варіацію можна одержати експериментально як різницю між багаторазовими показаннями вимірювального приладу і тим самим дійсним значенням вимірюваної величини. У працюючих приладів варіацію можна знайти, змінюючи дійсне значення вимірюваної величини від найменшого до найбільшого і назад і відзначаючи відповідні показання приладу. При цьому виявляється похибка, трохи менша, чим варіація. Цю похибку називають *похибкою зворотного ходу*.

Причинами варіації є тертя, мертвий хід рухливих частин, неповна пружність, залишкові напруги, теплові потоки, старіння матеріалу і т. п.

Похибки, спричинені нестабільністю, можуть значно обмежити корисну область застосування приладу, тому завжди бажано установити ступінь їхнього впливу на результати вимірів. Величина нестабільності повинна бути у відповідності з чутливістю засобів вимірювання і з градуіровкою шкали. Так, нема рації поділяти шкалу вимірювального приладу на мікрони, якщо нестабільність його досягає сотої частки міліметра.

Таким чином, ми розглянули засоби вимірювання які дозволяють виявляти фізичні величини і давати про них інформацію в чисельних значеннях вимірюваної величини. Показано основні, що впливають на похибку інформації, властивості вимірювальних засобів, тобто сам вимірювальний засіб відтворює чисельне значення будь-якої фізичної величини приблизно. Чим ближче наближення, тим вище клас вимірювального засобу. Якщо відомі для вимірювального засобу абсолютна або відносна похибка та інші фактори, що впливають на точність приладу, то ці фактори потрібно вносити в комплекси основних факторів, що задають умови випробування.

2.3. Похибки вимірювання і їхні джерела

Кожне спостереження здійснюється для вивчення цікавлячого причинно-наслідкового зв'язку, досліджуваний фактор при цьому завжди включається в число основних факторів випробування. Вище було сказано, що на результат спостереження впливають і численні побічні (зовнішні) фактори. Якщо такі фактори включені в число основних, то їхня дія враховується та не спотворює результат спостереження

Результат, що визначився б при впливі одних тільки основних факторів випробування, називається *істинним результатом* (а при вимірюванні – істинним значенням вимірюваної величини). Відшукання істинного результату і є ідеальна мета кожного дослідження. Але, і це теж показано вище, на кожен результат крім основних факторів впливають усілякі (свідомо або несвідомо) невраховувані випадкові фактори.

Реальний результат спостереження завжди є випадковою величиною. Кожен реальний результат відхиляється від істинного. Це відхилення називається похибкою спостереження. Причому, і про це не менш важливо завжди пам'ятати, сама похибка спостереження є також випадковою величиною, тобто її значення ми можемо пізнати теж лише приблизно, з похибкою.

При вимірюванні фізичних величин звичайно зіштовхуються з такими можливими джерелами похибок :

1. Недосконалість засобів вимірювання. Наприклад, чуттєвий елемент неправильно відбиває вимірювану величину (погано приклеєний тензодатчик, ушкоджений спай термопари). Узагалі кожен вимірювальний засіб вимірює лише з визначеним ступенем точності.

2. Нездатність якої-небудь проміжної частини приладу правильно відбивати реакцію чуттєвого елемента. Наприклад, потенціометр дає неправильні показання через старіння нормального елемента або ушкодження в серводвигуні і т. п.

3. Суб'єктивність спостерігача. Наприклад, зняти показання з вакууммметра без підключення потрібної шкали.

4. Недотримання (або неврахування) необхідних умов при вимірюванні (температура, вологість, освітленість, тиск і т. п.).

Ці джерела можуть поставляти складові похибки одночасно, але цілком можливо, що одне з джерел виявиться головним.

Таким чином, разом з результатом вимірювання потрібно вказувати і наближену похибку вимірювання. Наприклад, ми виміряли температуру масла в масляній системі працюючого редуктора і написали

$$t = 70 \pm 5\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Це означає, що температура лежить у межах від 65 до 75 °С. Якщо ж говорити точніше, то повної впевненості в нас немає. Наші виміри лише показують, що є деяка імовірність такого інтервалу температур.

Покажемо, що оцінка похибки результату експерименту зовсім необхідна. У противному випадку просто не можна зробити правильний висновок. Шукаємо: чи залежить опір котушки від температури?

200,025 Ом при 10 °С,

200,034 Ом при 20 °С.

Значимо лі значення різниці цих величин? Не знаючи похибок вимірювання, на ці питання відповісти не можна. При похибці 0,001 Ом – різниця значима, а при 0,010 – незначима. Похибка результату безумовно повинна вказуватися в публікаціях, інакше результат неможливо буде використовувати і звістка виявиться марною.

Більш того, при плануванні експерименту ми повинні знати похибку результату, що допускається. Величини похибки, що допускається, нерідко задаються цілями експерименту. Наприклад, перевірка теоретичних положень вимагає відповідності точності експерименту, точності теорії.

Точність результату не повинна бути не тільки нижче значення, що допускається, але і не вище його. Підвищення точності зв'язане з додатковою витратою людських, матеріальних, тимчасових ресурсів.

Точність остаточного результату повинна відповідати цілі його одержання.

Нехай у приведеному вище прикладі нам потрібно знати опір котушки лише для того, щоб використовувати її як еталон в інтервалі температур від 10 до 20°С. Необхідна точність при цьому – 1:10000. Тоді нам досить виміряти опір з похибкою 0,010 Ом, а вимірювання з точністю до 0,001 Ом буде лише непотрібною витратою часу. А ось вимірювати опір з похибкою 0,05 Ом неприпустимо, тому що тоді результат вимірювання буде марний з погляду поставленої задачі.

Похибка остаточного результату дорівнює сумі похибок вимірюваних величин, по яких обчислюється остаточний результат. Оскільки доданки в цій сумі неоднакові, то, щоб одержати мінімальну похибку результату, потрібно виявити найбільш вагомі доданки і так спланувати експеримент, що ці доданки будуть виключені або зменшені.

2.4. Систематичні і випадкові похибки

Розглянуті в п. 2.3 джерела похибок приводять до появи похибок двох видів – систематичних і випадкових.

Систематичною називається похибка, що залишається постійної протягом усієї серії вимірювання або закономірно змінюється в процесі вимірів.

Випадковою називається похибка, що змінюється (приймає деяке значення) у кожнім відліку із серії вимірювання і в однаковій мірі може бути як позитивною, так і негативною.

Випадкові похибки завжди присутні в експерименті, як би ми ні прагнули розширити кількість основних факторів. При відсутності систематичних похибок вони служать причиною розкиду повторних вимірювання щодо істинного значення (рис. 4,***а***). Якщо мається також і систематична похибка *с*, то результати вимірювання будуть розкидані щодо не істинного, а змішаного значення (рис. 4,***б***). Якщо експериментатор зробить один відлік, то можна укласти, що імовірність того, що відлік буде точним, дуже мала. Тільки серія відликів покаже, чи маємо ми справу з випадковими розкиненнями або є і систематична похибка.

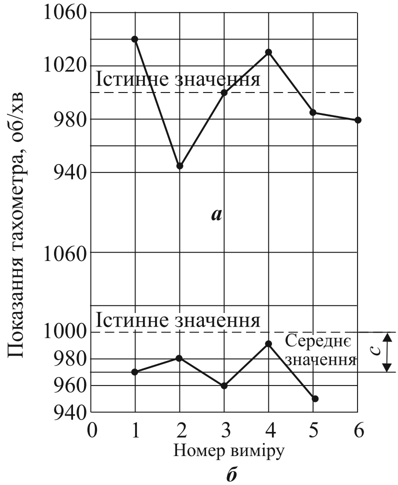

Рис. 4. Дані зняті з двох тахометрів:
а *– випадкове розташуванням точок щодо істинного значення;* ***б*** *– точки випадково розподілені щодо середнього значення, яке зміщено на величину систематичної похибки с щодо істинного значення*

Неодмінно потрібно зрозуміти і запам'ятати, що в загальному випадку всі похибки: (у тому числі і систематичні) є випадковими величинами, якщо їхні породжувальні фактори не включаються в число основних і не враховуються. Так, якщо ми усі виміри серії робимо одним і тим же приладом, то будемо враховувати систематичну похибку, властивому даному інструменту (знайдену шляхом калібрування, тарування або зазначену в атестаті). Якщо ж виміри будуть здійснюватися різними приладами, то нам вигідніше (по витратах часу на облік похибок) вважати похибки приладів у якості випадкових (неврахованих у числі основних факторів), що впливають на результат. Тобто розподіл похибок на випадкові і систематичні умовно: якщо похибка безпосередньо враховується, то вона – систематична, якщо ніяких виправлень на неї в результат не вноситься, – то вона випадкова й автоматично в ході експерименту враховується шляхом своєї невідомої нам взаємодії з іншими випадковими похибками.

Систематичні похибки в принципі небезпечніше випадкових, котрі можна знайти шляхом повторних вимірів. В міру збільшення числа вимірів, по середньому арифметичному ми можемо одержувати усе більш точне значення вимірюваної величини. Повторні виміри з тим самим приладом не дозволяють ні знайти, ні усунути систематичну похибку. Якщо в ході експерименту допущені великі випадкові похибки, то вони виявлять себе у великій величині похибки остаточного результату. Таким чином, усі будуть про це інформовані та ніякої шкоди це не принесе. Але біда, якщо результат виглядає цілком надійним, приведений з малою похибкою (а розкид від випадкових факторів могли виявитися малим) і в той же час містить сховану систематичну похибку.

Випадкові похибки можна знайти методами математичної статистики. Систематичні похибки не піддаються подібному аналізу. Їх необхідно виявляти й усувати. Якщо не вміємо усувати – враховувати. Потрібно обов'язково продумувати методику експерименту і дуже причепливо вибирати апаратуру. Нижче приведемо деякі прийоми виключення систематичних похибок з результату вимірів. Загальних правил не існує.

Спосіб уведення поправок

Спосіб припускає, що нам відома величина або закономірність зміни систематичної похибки. У цьому випадку в результат вимірювання, що містить систематичні похибки, або в показання приладу вносяться поправки, рівні цим похибкам, але зі зворотним знаком. Так, наприклад, до лінійних шкал універсального мікроскопа додається атестат, у якому указуються величина й знак виправлення для кожного розподілу шкали. Вносячи в результат вимірювання поправки (узяті з атестата) на шкалу, ми виключимо з результату вимірювання систематичну похибку шкали.

Оскільки згодом міняються (старіють) умови вимірювання, джерела похибок, то, зрозуміло, і систематична похибка стабільна до визначених меж. Поправки звичайно усувають не цілком систематичну похибку. Частина, що залишилася, змінюється випадковим образом і називається залишковою дією систематичної похибки. Величина виправлення часто знаходиться шляхом перевірки приладу у всьому діапазоні вимірюваних величин за допомогою відомого еталона.

Спосіб порівняння зі зразком

Досліджуваний об'єкт і зразок, що має ті ж розміри, форму та фізичні властивості, вимірюють тим самим методом, за допомогою одних засобів вимірювання, при однакових зовнішніх умовах. Зразок попередньо атестований з достатньою точністю в порівнянні зі ступенем точності наших вимірів. Тоді, якщо немає великої різниці в досліджуваних величинах вимірюваного об'єкта і зразка, систематична похибка виключається з результатів вимірів, тому що здійснюється вимірювання не усієї фізичної величини, а тільки її відхилення від аналогічної величини зразка, тобто виміряється різниця цих двох величин. Чим менше різниця, тим менше вплив систематичної похибки на результат вимірів.

Спосіб заміщення

Спосіб заміщення відрізняється від попередніх тим, що різницю між атестованим зразком і вимірюваним об'єктом прагнуть зробити рівної нулю, домагаючись однакових показань приладу під час вимірювання атестованого зразка і вимірюваного об'єкта шляхом підбора зразка відповідного розміру. Такий прийом виключає систематичну похибка, залишкова величина якої буде дорівнювати неточності атестації зразка.

Компенсація похибки за знаком

Цей прийом передбачає проведення вимірювання таким чином, щоб похибка у результатах вимірювання була один раз з одним знаком, інший раз – зі зворотним.

Коли систематична похибка має характер прогресивної похибки, що змінюється по лінійному закону, одним із прийомів її виключення є метод симетричних спостережень. У цьому випадку середні арифметичні кожної пари значень прогресивної похибки, симетричних щодо деякого моменту, рівні між собою:

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_6}{2} = \frac{\Delta_2 + \Delta_5}{2} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{2} \qquad (2.12)$$

або

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_7}{2} = \frac{\Delta_2 + \Delta_6}{2} = \frac{\Delta_3 + \Delta_5}{2} = \Delta_4. \qquad (2.13)$$

У багатьох випадках це досягається повторенням спостережень у зворотному порядку.

Прийомом симетричних спостережень рекомендується користуватися при точних вимірах у всіх випадках, коли він застосовний. Цим шляхом можна виключити всі можливі прогресивні похибки, що залишилися по своїй малості або з інших причин поза увагою спостерігача. Крім того, цей прийом дозволяє переконатися в тім, що під час роботи не відбулося змін у самих приладах або в зовнішній обстановці, що можуть уплинути на їхні показання.

У випадку періодичних похибок прийомом виключення є спостереження парне число раз через напівперіоди. Тоді періодична похибка виключається, якщо взяти середнє з двох спостережень, зроблених одне за іншим через інтервал, що дорівнює напівперіоду величини, що визначає значення періодичної похибки.

Періодична похибка змінюється за законом

$$\Delta = A\sin\frac{2\pi}{T}\Psi, \tag{2.14}$$

де T – період зміни похибки; Ψ – величина, від якої залежить похибка (час, кут повороту стрілки приладу і т. п.).

Нехай при $\Psi = \Psi_0$ значення похибки $\Delta_0 = A\sin\frac{2\pi}{T}\Psi_0$. Знайдемо значення цієї похибки для $\Psi = \Psi_0 + \tau$, де інтервал τ такий, що

$$\Delta\tau = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\Psi_0 + \pi\right) = -A\sin\frac{2\pi}{T}\Psi_0 = -\Delta_0.$$

Визначимо значення інтервалу τ. За умовою для інтервалу τ маємо

$$\frac{2\pi}{T}(\Psi_0 + \tau) = \frac{2\pi}{T}\Psi_0 + \pi,$$

відкіля

$$\frac{2\pi}{T}\tau = \pi \quad \text{і} \quad \tau = \frac{T}{2}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta_0 + \Delta\tau}{2} = \frac{\Delta_0 - \Delta_0}{2} = 0.$$

Є й інші способи виключення систематичної похибки. У цілому ця робота не з легких, і успіх приходить зі збільшенням досвіду експериментатора.

Усуненню систематичних похибок допомагає і більш ретельний облік усіх діючих факторів (температура, тиск, магнітне поле, вологість і т. п.). З усіх приведених методів найбільше широко застосовується метод калібрування з уведенням виправлень.

У процесі планування експерименту ми можемо нічого не знати про характер похибок, крім того, що варто очікувати деякого відхилення від точного значення, У цьому випадку ми маємо справу не з похибкою, а з невизначеністю. Будемо вважати, що невизначеність після її оцінки, можна розглядати як випадкову похибку, незважаючи на те, що невизначеність може мати і систематичну складову. Це дозволить нам застосувати до аналізу невизначеностей весь апарат математичної статистики.

2.5. Показники випадкової похибки

Весь подальший виклад стосується тільки випадкових величин (факторів, вимірів, похибок і т. п.), тобто будуть вивчатися системи, з яких деяким образом цілком виключені систематичні впливи або ці впливи досить повно враховані.

Якщо відомо, що існує випадкова похибка, ніколи не можна установити її абсолютну величину, зробивши єдиний вимір.

Нехай виробляється вимірювання однієї і тієї ж величини. Через наявність випадкових похибок окремі значення x_1, x_2 і т. д. не однакові. Як найкраще значення приймемо середнє арифметичне $\overline{X}$. Малоймовірно, що середнє арифметичне (далі будемо опускати слово – арифметичне) виявиться рівним істинному значенню вимірюваної величини X_n. Істинна похибка нам невідома. Наскільки ж близька величина $\overline{X}$ до X_n? Можна думати, що мається деяка імовірність того, що X_n лежить у якихось межах поблизу $\overline{X}$. Яка ця імовірність? Які ці межі? У цьому і перебуває задача.

Наприклад, на рис. 5 у випадку "***а***" імовірність того, що $\overline{X}$ лежить ближче до X_n очевидно більше, ніж у випадку – "***б***".

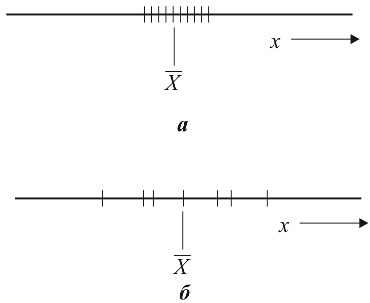

Рис. 5. Багаторазовий вимірювання однієї і тієї ж величини:
а *–* $\overline{X}$ *видимо ближче до* X_n*, чим у випадку* ***б***

Розподіл випадкових величин

Вимірюючи якусь величину багато разів, ми одержуємо кожен відлік у виді деякого дискретного значення. Ці значення можуть збігатися, можуть знаходитися близько друг до друга або – далеко. Побачити, як часто ми одержували те або інше значення, зовсім не важко. Досить добудувати діаграму, що називається гістограмою

Приклад 2.1. На суховантажах типу "Физик Вавилов" валопровід прокладений на підшипниках кочення. Внутрішній діаметр зовнішньої обойми такого підшипника має розмір $\varnothing 700^{+0,10}$ мм. Перед зборкою (на передстапельної площадці) і навішенням на судновий вал для подачі на судно підшипники проходили контроль. Внутрішній діаметр зовнішньої обойми вимірявся мікрометричним штихмасом з ціною розподілу 0,01 мм. Для компенсації суб'єктивного фактора вимірювання робили декілька контролерів: контролери ОТК, технологи, майстер-бригадир монтажників. Результати вимірювання представлені в таблиці як відхилення від номінального значення діаметра в міліметрах:

0,07	0,05	0,05	0,06	0,06	0,08	0,08
0,03	0,07	0,06	0,08	0,06	0,06	0,07
0,05	0,03	0,07	0,07	0,08	0,07	0,10
0,08	0,08	0,06	0,05	0,04	0,07	0,10
0,06	0,07	0,04	0,07	~~0,11~~	~~0,12~~	~~0,13~~

Разом – n = 35 вимірів. Три виміри: 0,11; 0,12; 0,13 – довелося відкинути, як грубі, тобто помилкові: виявилося, що виміри робив один із присутніх технологів, що недавно закінчил інститут. Він не мав достатньої практики звертання з таким "примхливим" інструментом, як штихмасс. У розрахунок приймаємо 32 вимірювання. З даних, що залишилися, знаходимо найбільше і найменше значення:

$$X_{\max} = 0{,}10, \quad X_{\min} = 0{,}03.$$

Розмах варіювання, або широта розподілу, або поле розсіювання, складає

$$v = X_{\max} - X_{\min}, \tag{2.15}$$

$$v = 0{,}10 - 0{,}03 = 0{,}07.$$

Задамося числом інтервалів, на які розділимо поле розсіювання. Будемо керуватися: число інтервалів повинне бути не менш 6–7 при n = 30…100 і не менш 9–15 при n > 100. Покладемо, число інтервалів k = 7. Тоді ціна інтервалу

$$c = \frac{v}{k}, \quad c = \frac{0{,}07}{7} \approx 0{,}01. \tag{2.16}$$

Підрахуємо частоти емпіричного розподілу за допомогою таблиці:

Інтервали		Підрахунок частот позначками	Частота
від	до		
0,03	0,04	II	2
0,04	0,05	II	2
0,05	0,08	IIII	4
0,06	0,07	IIIIII	7
0,07	0,08	IIIIIIII	9
0,08	0,09	IIIII	6
0,09	0,10	II	2

Ліворуч вписуються інтервали від $X_{\min}$ до $(X_{\min}+c)$, від $(X_{\min}+c)$ до $(X_{\min}+2c)$ і т. д. У кожен інтервал включаються розміри, що лежать у межах від найменшого значення інтервалу включно до найбільшого значення інтервалу, крім його. Праворуч за допомогою позначок роблять підрахунок числа спостережених розмірів по інтервалах.

Побудуємо гістограму, як це видно з рис. 6. Тепер уявимо собі, що штихмас або, якщо перейти до будь-якого іншого приладу, прилад має дуже велику чутливість, а число вимірювання ми продовжуємо до великої кількості. Очевидно, інтервал тоді можна зробити дуже малим. І все-таки в кожнім інтервалі буде досить багато відліків. У межі одержимо плавну криву розподілу.

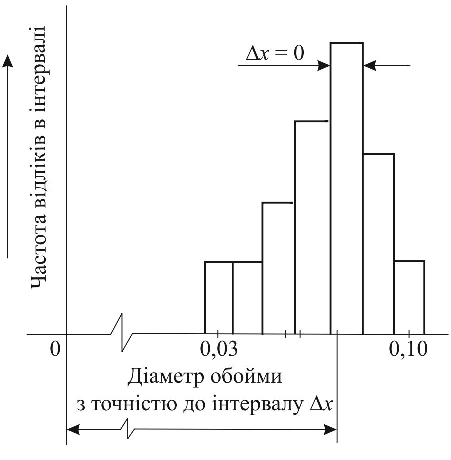

Рис. 6. Гістограма до прикладу 2.1

Для різних випадкових явищ існує багато всіляких розподілів. Оскільки випадкові похибки вимірювання підкоряються розподілу Гауса або *за-*

кону нормального розподілу, обмежимося поки дослідженням саме цього закону.

Закон установлений на основі допущень:

1. Остаточна похибка будь-якого вимірювання являє собою результат великого числа дуже малих похибок, розподілених випадковим образом.

2. Позитивні й негативні відхилення щодо істинного значення рівноймовірні.

Тоді різними способам можна одержати вираження для частоти появи відхилення як функцій величини відхилення, так називану щільність розподілу (щільність імовірності, диференціальна функція розподілу випадкової величини безперервного типу і т. п.):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\overline{X})^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.17}$$

де x – перемінна випадкова величина; σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини x від $\overline{X}$; $\overline{X}$ – середнє значення величин x; e – основа натуральних логарифмів.

Щільність нормального розподілу графічно виглядає у виді горбообразної кривій (рис. 7). Ця функція задається параметрами x і σ (двохпараметрична). Вона:

– симетрична відносно X_n;

– досягає максимального значення в точці X_n;

– швидко прагне до нуля, коли $|x - X_n|$ стає великим у порівнянні з σ (див. цю же главу далі);

– у точках $\pm\sigma$ крива має точки перегину;

– з зміною X_n форма кривій не змінюється, але змінюється її положення відносно початку координат.

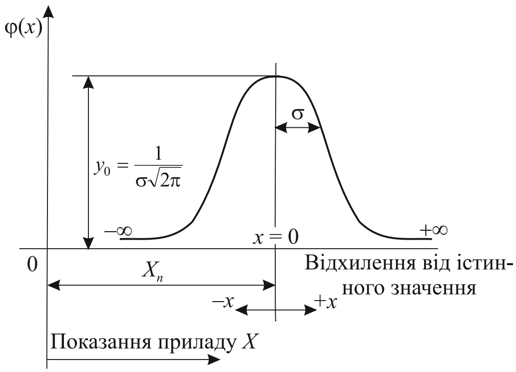

Рис. 7. Типова крива розподілу обмірюваних значень

Помітимо кілька моментів:

1. Зміст $\varphi(x)$ полягає в тому, що добуток $\varphi(x)\cdot dx$ дає частку повного числа відліків N, що приходиться на інтервал від x до $(x+dx)$, тобто цей добуток не що інше, як імовірність того, що окреме випадково обране значення вимірюваної величини виявиться в інтервалі від x до $(x+dx)$. Сумарна площа під кривою охоплює усі відхилення для даного приладу.

Імовірність появи відхилення в інтервалі від –x до $+x$ дорівнює площі під кривою, обмеженої інтервалом $\pm x$ (рис. 8):

$$A = P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma^2}}\cdot dx. \qquad (2.18)$$

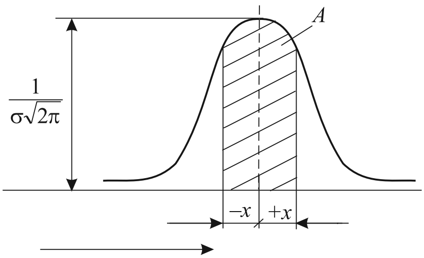

Рис. 8. Знаходження імовірності по площі обмеженій інтервалом ±x

Функція $P(x)$ називається функцією розподілу. Вона залежить від σ. Зручно мати таблицю значень, який можна було б користуватися при будь-яких значеннях σ. Щоб функцію можна було розрахувати, чисельно вводять нову перемінну

$$t = \frac{x - \overline{X}}{\sigma} = \frac{d}{\sigma}. \quad (2.19)$$

Інтеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt \quad (2.20)$$

зветься нормованою функцією Лапласа. У дод. 1 приведена таблиця її значень. Ця функція непарна:

$$\Phi(-t) = -\Phi(t). \quad (2.21)$$

У табл. 2.1 приведені спеціально обрані значення $2\Phi(t)$.

Таблиця 2.1.

Значення функції $2\Phi(t)$ у випадку нормального розподілу

$t = \frac{d}{\sigma}$	$2\Phi(t)$	Зразкова частка результатів за межами t
0	0	1
1	0,683	1/3
2	0,954	1/20
3	0,9973	1/400
4	0,99994	1/16000

З третього стовпця видно, що в межах $\pm\sigma$ укладено приблизно дві третини результатів. Це дозволяє грубо оцінювати правильність обчислення величини σ. За межами інтервалу $\pm 2\sigma$ знаходиться 1/20 частина всіх результатів. Як іноді говорять, у кожного з відліків мається в цьому випадку один шанс до двадцяти не потрапити в зазначений інтервал. Всього 0,27 % складають результати, що не ввійшли в інтервал $\pm 3\sigma$. Цей інтервал вважають *практичною* 100%-ою імовірністю.

2. По визначенню, $\varphi(x)$ задовольняє співвідношенню

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x) dx = 1. \quad (2.22)$$

У реальному експерименті значення вимірюваної величини повинні лежати, як найближче до істинного значення X_n. Багато хто з величин узагалі (по своїй природі) не можуть приймати негативні значення. При нескінченних межах інтегрування й при збільшенні різниці між X_n і x функція $\varphi(x)$ повинна ставати дуже малої, тобто чим більше у вираженні (2.17) σ, тим більше положистої стає крива, тим менше y_0 (функція (2.17) при x = 0, див. рис. 8) – частота появи нульового відхилення.

3. Функція (2.17) і її крива безперервні, тобто вони виражають сукупність, що містить нескінченну безліч вимірів. Це – генеральна сукупність, з якої для дослідження (у процесі експерименту, випробування) беруться деякі кінцеві вибірки. Генеральна сукупність охоплює всю безліч відхилень для даного приладу.

4. *Середнє значення* для нормального розподілу (усереднення по всій сукупності вимірювання – генеральна сукупність) збігається з істинним значенням X_n

$$X_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx. \tag{2.23}$$

5. Похибка в обмірюваному значенні x

$$e = X_n - x. \tag{2.24}$$

6. Корінь квадратний із середнього квадрата різниці e позначається через σ і називається *середньоквадратичним відхиленням*, або середньоквадратичною похибкою. Величина σ визначається з вираження

$$\sigma^2 = (\text{усередненому } e^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X_n)^2 \varphi(x)dx, \tag{2.25}$$

де σ^2 – дисперсія.

Якби ми при вимірюванні завжди одержували генеральну сукупність відліків, то, мабуть, середньоквадратичне відхилення могло б добре служити показником точності вимірювальної системи. Але, на жаль, нам невідомо істинне середнє X_n, і ми робимо кінцеве число вимірів, звичайно 5…10 .Тому потрібно знайти інший критерій оцінки точності вимірювального приладу.

7. Якщо ми маємо кінцеве число відліків, то "найкращим" значенням (значення, біля якого групуються всі відліки) є середнє арифметичне цих відліків. "Найкраще" значення завжди можна зробити ще більш кращим, як ми це нижче покажемо. Спробуємо оцінити ступінь наближення середнього до істинного значення.

Середньоквадратична похибка середнього. Зв'язок із середньоквадратичною похибкою окремого виміру

Нехай n послідовних вимірювання деякої величини дали значення

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2.26}$$

Число n невелике – 5…10. Як найкраще значення цікавлячий нас величини краще взяти середнє

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum x_i. \tag{2.27}$$

Тут і далі символ Σ означає підсумовування від $i = 1$ до $i = n$.

Визначимо похибку у величині $\overline{X}$. Запишемо похибку i-го виміру

$$e_i = x_i - X_n, \tag{2.28}$$

де X_n – істинне, але невідоме значення. Тоді похибка середнього

$$E = \overline{X} - X_n.$$

Тепер уявимо собі, що дані набираються серіями по n вимірювання у кожній, причому число таких серій дуже велико. Уся сукупність обмірюваних значень (генеральна сукупність або сукупність до неї близька) характеризується якимсь розподілом із середньоквадратичним відхиленням σ. У кожній серії мається своє власне середнє значення і сукупність усіх таких середніх характеризується теж власним розподілом із середньоквадратичним відхиленням σ_m. У реальному експерименті ми, звичайно, маємо справу лише з однією серією з n вимірювання і одним середнім значенням. Ми хочемо підкреслити, що ця серія являє собою випадкову вибірку з повної сукупності (генеральної) окремих вимірів, а середнє значення є лише одне значення з повної сукупності середніх. Величину σ_m називають середньоквадратичною похибкою середнього, і вона є мірою похибки середнього значення.

Величини σ (2.25) і σ_m, зв'язані простим співвідношенням. Опустивши доказ, маємо

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{2.29}$$

тобто середньоквадратична похибка середнього з n вимірювання у $\sqrt{n}$ менше середньоквадратичної похибки окремого вимірювання.

Вираження (2.29) помітно просунуло нас до мети – одержанню показника точності вимірювальної системи. Величина σ залежить тільки від точності окремих вимірювання і не залежить від їхнього числа, тоді як величину σ_m можна зменшити, збільшивши n (рис. 9). Однак, дивлячись на рисунок, ми позбавляємося надмірного оптимізму. Дійсно, збільшивши число вимірювання з одного до чотирьох, ми підвищуємо точність усього в 2 рази, а для її підвищення в 4 рази ми повинні узяти вже 16 відліків. Тому, нерідко вигідніше йти на зменшення σ, тобто на підвищення точності вимірювання. Узагалі говорячи, при плануванні експерименту нам повинна бути відома припустима (потрібна) точність результату. Її ми думаємо досягти, варіюючи обираною точністю приладів σ і передбачуваним числом відліків n.

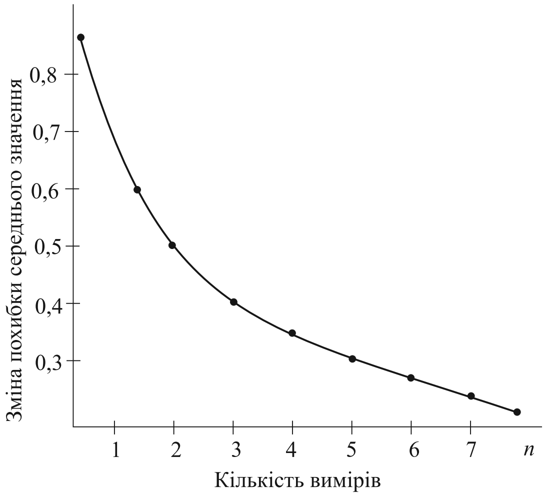

Рис. 9. Залежність σ_m *від n*

Зв'язок з вибірковим середньоквадратичним відхиленням

Важливе співвідношення (2.29) усе-таки не дозволяє нам обчислити σ_m, тому що нам не відома σ. Для цієї величини найкраще було б узяти значення $\sqrt{\sum e_i^n / n}$, але e_i – похибка щодо істинного значення X_n, і тому нам не відома. Спробуємо ці труднощі обійти, оперуючи з залишками.

Залишок – відхилення окремого обмірюваного значення від середнього серії вимірювання і являє собою

$$d_i = x_i - \overline{X} \tag{2.30}$$

На відміну від похибки залишок – відома величина. Позначивши середньоквадратичне значення n залишків через S, одержимо

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum d_i^2. \tag{2.31}$$

Величина S називається вибірковим середньоквадратичним відхиленням.

Між σ і S також існує проста залежність. Без доказу маємо

$$\sigma_m \approx \frac{S}{(n-1)^{1/2}}. \tag{2.32}$$

Тут усі величини відомі. Рівність наближена, так як її права частина залежить від обраної серії n вимірювання і не може бути точно рівної σ_m.

Середньоквадратичне вибіркове відхилення від середнього з n вимірів у $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ менше середньоквадратичної похибки окремого виміру

$$S = \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}. \tag{2.33}$$

З практичної точки зору співвідношення (2.33) некорисне, тому що ми не знаємо σ. Але воно нам завжди нагадує, що S у реальних випробуваннях ніколи не може точно характеризувати ні похибку середнього вимірювання, ні похибку окремого виміру в серії. До цього ми ще повернемося пізніше.

Таким чином, якщо ми будемо вирішувати задачі типу:

– який інтервал, у який потрапить 68 % відліків;

– яке максимальне відхилення може бути у кожного з 68 % вироблених відліків;

– у якому інтервалі буде знаходитися k відліків з n;

– скільки відліків буде знаходитися в заданому інтервалі і т. ін., – то варто знаходити вибіркове середньоквадратичне відхилення S, що допоможе дати потрібні відповіді.

Приклад 2.2. Таруванням (калібруванням) знайдено, що показання тахометра відносно 1000 об/хв відхиляється по нормальному закону з величиною середньоквадратичного відхилення S = ±17,7 об/хв. При цій швидкості обертання береться вибірка, що містить 20 відліків. Потрібно визначити:

1) інтервал, у який попадає 68, 95 і 99,7 % відліку;

2) скільки відліків з 20 попадає в інтервал $\overline{X}$ ±17,7 об/хв;

3) яке максимальне і мінімальне значення може бути в кожного з 68 % вироблених відліків;

4) у якому інтервалі будуть знаходитися 10 відліків з 20;

5) скільки відліків буде знаходитися, наприклад, в інтервалі від 990 до 1010 об/хв.

Рішення.

1. Інтервал, у якої попадає

68 % відліків $X_n \pm S = 1000 \pm 17{,}7$ об/хв;

95 $X_n \pm S = 1000 \pm 35{,}4$ об/хв;

99,7 $X_n \pm S = 1000 \pm 53{,}1$ об/хв.

2. В інтервалі $X_n \pm 17{,}7$ об/хв буде знаходитися

$$20 \cdot 0{,}68 = 14 \text{ відліків.}$$

3. Максимальне значення будь-якого окремого відліку з числа 68 % усіх вироблених відліків буде 1000 + 17,7 = 1017,7 об/хв; мінімальне – 1000 – 17,7 = = 982,3 об/хв.

4. Визначаємо імовірність улучення 10 відліків у шуканий інтервал $\pm d$:

$$\frac{10}{20} = 0{,}5.$$

У дод. 1 по імовірності $2\varphi(t) = 0{,}5$ знаходимо t = 0,67. З формули (2.18) $t = \dfrac{d}{\sigma}$, де $\sigma \approx S$, визначаємо відхилення $d = t\,\sigma$ = 0,67·17,7 = = 11,8 об/хв, тобто 10 відліків буде знаходитися в інтервалі 1000±11,8 об/хв.

5. Задане відхилення d = ±10 об/хв, $\sigma \approx S$ = 17,7 об/хв. Тоді $t = \dfrac{d}{\sigma} = \dfrac{10}{17{,}7} = 0{,}566$. З дод. 1 знаходимо $2\varphi(t) = 0{,}4313$. Таким чином, в інтервалі від 990 до 1010 об/хв буде знаходитися 20·0,43 = 8,6 = 9 або 8 відліків. А оскільки вибірка обсягу 20 відліків невелика, то в практиці при якому-небудь іспиті в інтервалі відхилень ±10 об/хв можуть виявитися 6-7 або 10-11 відліків.

Якщо ми знаходимо середнє $\overline{X}$ нас цікавить не точність будь-якого окремого значення вимірюваної величини, а точність цього середнього, то варто робити наступним чином:

1. При числі вимірювання $n \geq 15$ похибку середнього зручно і можна обчислити по співвідношеннях:

$$\left.\begin{aligned} \text{для} - \ \alpha = 0{,}68 \quad & \pm\frac{S}{\sqrt{n}}; \\ \alpha = 0{,}95 \quad & \pm\frac{2S}{\sqrt{n}}; \\ \alpha = 0{,}997 \quad & \pm\frac{3S}{\sqrt{n}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.34)$$

Тут α – імовірність того, що істинне значення вимірюваної величини X_n лежить від середнього $\overline{X}$ не далі приведених значень. Або, навпаки, кількість відліків вимірюваної величини, що виходять по своїй величині за межі, зазначені в (2.34), складає відповідно 0,32; 0,05; 0,003 повного числа відліків. Ці імовірності тоді називають довірчими імовірностям, або значимими.

Обчислення похибки середнього по (2.34) дають трохи завищену, але цілком прийнятну для абсолютної більшості інженерних досліджень величину. З (2.34) видно також, що якщо ми приймемо $n = 1$, тобто зробимо один вимір, то для цього єдиного відліку вираження (2.34) стають відповідно рівними:

$$\text{для} - \left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}68 \quad && \pm S; \\ \alpha &= 0{,}95 \quad && \pm 2S; \\ \alpha &= 0{,}997 \quad && \pm 3S. \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

Адже ви пам'ятаєте, що ми установили, що похибка середній $\sqrt{n}$ раз менше похибки єдиного відліку.

2. При кількості вимірювання n < 15 похибку середнього по (2.34) знаходити не можна. Її величина, обчислена по (2.34), виявляється менше, ніж вона є насправді.

Мається узагальнена методика оцінки точності середнього для будь-якого обсягу вибірки, з будь-якою імовірністю.

Позначимо точність наближеної рівності $X_n - \overline{X}$ літерою ε. Будемо визначати імовірність α того, що істинне значення X_n знаходиться в межах $\overline{X} \pm \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, тобто

$$P(\overline{X} - \varepsilon < X_n < \overline{X} + \varepsilon) = \alpha\,. \tag{2.36}$$

Для визначення імовірності α користуються розподілом величини

$$t = \frac{\left|\overline{X} - X_n\right|}{\sigma}. \tag{2.37}$$

Якщо генеральна сукупність має нормальний розподіл, то величина t при будь-якому n діє за законом розподілу Стьюдента. Для наших цілей немає потреби приводити досить громіздке аналітичне вираження щільності t-розподілу. Властивості цієї щільності добре видні на графіку рис. 10. Криві нагадують за формою щільності нормального розподілу, але при $t \to \pm\infty$ значно повільніше зближаються з віссю абсцис. При $k \to \infty$ вибіркове середньоквадратичне відхилення $S^2 \to \sigma^2$ тому розподіл Стьюдента зближається з нормальним; випадок $k = \infty$ узагалі відповідає нормальному розподілу. При малих же k (а $k = n - 1$) розподіл Стьюдента сильно відрізняється від нормального.

Разом з тим, похибка середнього при малій кількості відліків починають розподілятися скоріше по t-розподілу. Це стосується не тільки похибок вимірювання, але і будь-яких інших досліджуваних величин, що мають нормальну генеральну сукупність. Роль розподілу Стьюдента тому особливо велика в мікростатистиці або статистиці малих вибірок.

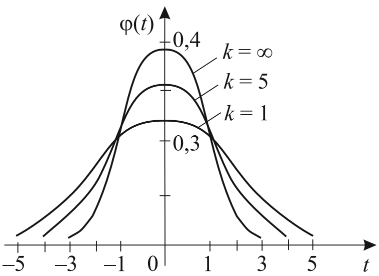

Рис. 10. Щільність t-розподілу Стьюдента в залежності від k – числа ступенів свободи

Заміняючи в (2.37) σ на S, без приведення висновку, остаточно маємо вираження довірчого інтервалу існування середнього

$$\overline{X} - \varepsilon < X_n < \overline{X} + \varepsilon, \tag{2.38}$$

де ε – точність середнього, обумовлена по формулі

$$\varepsilon = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{2.39}$$

t_α – позитивне число, обиране в табл. дод. 2 по імовірності α та числу ступенів свободи $k = n - 1$.

Розподіл Стьюдента дозволяє оцінювати генеральне середнє, коли генеральна дисперсія невідома при малому числі спостережень, навіть двом. Звичайно, при занадто малих вибірках довірчі границі виходять широкими. Тому скрізь, де тільки можна, потрібно намагатися збільшувати число ступенів свободи у вибіркового середньоквадратичного відхилення, залучаючи, хоча б, "поточні виміри". Уже при $n > 20$ можна у формулу (2.39) замість t_α представляти t з табл. дод. 1, тобто переходити до нормального розподілу, що завжди бажано. Покажемо на прикладі, як варіює точність при тому самому значенні середньоквадратичного відхилення, але різному числі вимірів.

Приклад 2.3.

1. $S = 0{,}8$, $n = 5$, $k = 4$, $\alpha = 0{,}99$. З табл. дод. 2 знаходимо $t_\alpha = 4{,}6$. Тоді

$$\varepsilon = 4{,}6 \frac{0{,}8}{\sqrt{5}} = 1{,}65.$$

2. $S = 0{,}8$, $n = 15$, $k = 14$, $\alpha = 0{,}99$. З таблиці $t_\alpha = 2{,}98$. Тоді

$$\varepsilon = 2{,}98 \frac{0{,}8}{\sqrt{15}} = 0{,}62.$$

При значенні n = 15 ми уже вправі використовувати співвідношення (2.34). Для $\alpha = 0{,}99$ потрібно брати $\frac{3S}{\sqrt{n}}$. Після підстановки одержуємо величину похибки середнього $3\frac{0{,}8}{\sqrt{15}} = 0{,}62$. Повний збіг.

3. $S = 0{,}8$, $n = 30$, $k = 29$, $\alpha = 0{,}99$. З таблиці дод. 2 t_α = 2,76. Тоді по Стьюденту

$$\varepsilon = 2{,}76\frac{0{,}8}{\sqrt{30}} = 0{,}4.$$

Похибка по співвідношенню (2.34)

$$\frac{3S}{\sqrt{n}} = 3\frac{0{,}8}{\sqrt{30}} = 0{,}44.$$

Разом з тим, вибірка досить велика, і ми можемо скористатися нормованою функцією нормального розподілу. По табл. дод. 1 знаходимо для тієї ж імовірності $\alpha = 0{,}99$, $t = 2{,}58$. Тоді

$$\varepsilon_{\text{по Гауссу}} = 2{,}58\frac{0{,}8}{\sqrt{30}} = 0{,}37.$$

У третьому прикладі при n = 30 нами отримане значення похибки середнього, складає приблизно половину середньоквадратичного відхилення $S = 0{,}8$, тоді як у першому прикладі похибка в два рази перевищує величину S.

Для практичних справ непогано запам'ятати, що при імовірності α = 0,995 відхилення середнього від істинного значення не перевищують $\pm S$, якщо ми зробимо 10 або більш відліків, тобто лише у виняткових випадках, число яких складає біля напіввідсотка, можливі відхилення, більші за $\pm S$. Це видно з наступного: при α = 0,995 похибка середнього складає $\pm\frac{3S}{\sqrt{n}} = \pm\frac{3S}{\sqrt{10}}$. Оскільки $3 \approx \sqrt{10}$, похибка приблизно дорівнює $\pm S$.

За допомогою табл. дод. 1 і 2 та співвідношень (2.38) і (2.39) можна визначити одне з трьох значень: імовірність α, точність ε або обсяг вибірки n, задаючись попередньо значеннями яких-небудь двох з цих величин.

Приклад 2.4. По вибірці обсягу n = 8 знайдене $\overline{X}$ = 3,3 і S = 0,07. Потрібно визначити істинне значення генеральної середньої X_n.

Рішення. Звертаючись до залежностей (2.38) і (2.39) (до виражень (2.34) удатися ми не можемо, тому що $n < 15$) і задаючись надійністю (імовірністю, з яким визначається інтервал), наприклад α = 0,95 (значимість q = 0,05), знаходимо t_α і ε. При $k = n - 1 = 7$ (по табл. дод. 2) t_α = 2,37.

Тому

$$\varepsilon = 2{,}37\frac{0{,}07}{\sqrt{8}} = 0{,}0586 \approx 0{,}06.$$

Отже,

$$(3{,}3 - 0{,}06) < X_n < (3{,}3 + 0{,}06);$$
$$3{,}24 < X_n < 3{,}36$$

або

$$3{,}2 < X_n < 3{,}4.$$

Похибка середнього приблизно 0,1 вимірюваної величини.

Приклад 2.5. При плануванні експерименту ми встановили, що генеральну середню деякої незалежної перемінний необхідно буде визначити з точністю $\varepsilon = \pm 3\sigma_m$ і імовірністю α = 0,99. По (2.29) $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sigma$ нам не відомо, тому його ми заміняємо на S приладу, що задумали використовувати в експерименті. Потрібно визначити кількість відліків, яке б задовольняло поставленим умовам вимірювання,

Рішення. Тому що $\varepsilon = t_\alpha \sigma_m$, то, отже, t_α = 3. По табл. дод. 2 для α = = 0,99 і t_α = 3 знаходимо k = 13, Але $k = n - 1$, тому n = 14.

Приклад 2.6. При вимірюванні незалежної перемінної в експерименті при n = 10 отримані $\overline{X}$ = 12, S = 0,18. Генеральна середня за умовами експерименту може лежати в інтервалі $11{,}8 < X_n < 12{,}2$. Необхідно визначити надійність цього інтервалу (тобто імовірність того, що істинне значення X_n не виходить за цей інтервал.

Скористаємося формулами (2.38) і (2.39). Тоді ε ±0,2 або

$$\varepsilon = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{і} \quad t_\alpha = \frac{0{,}2\sqrt{10}}{0{,}18} = 3{,}5.$$

По таблиці дод. 2 для $k = n - 1 = 9$ і t_α = 3,5 знаходимо α. У таблиці для k = 9 і t_α = 3,25 α = 0,99. Виходить, для t_α = 3,5 генеральна середня лежить у зазначеному інтервалі з надійністю вище, ніж α = 0,99.

2.6. Практичні правила визначення випадкової похибки вимірюваної системи

Якщо відомо, що відхилення показань приладу розподілені по нормальному закону та заданий один з показників точності, то можна легко оцінити роботу приладу в схемі даного експерименту. *У більшості практичних випадків жоден з цих видів інформації не заданий*.

Тоді варто керуватися наступними порадами:

1. Можна прокалібрувати (протарувати) прилад по строгому відомому еталоні, установивши при цьому середньоквадратичне відхилення і інтервали точності для різних імовірностей.

2. Можна задатися числом розподілів і підрахувати відсоток влучення відліків у даний інтервал. Якщо, наприклад, з 20 відліків 1 не попадає в цей інтервал, то, виходить, імовірність надання відліку усередині досліджуваних розподілів виявиться рівної приблизно 0,95.

3. Можна скористатися наближеним правилом: максимальна похибка дорівнює половині найменшого розподілу на шкалі приладу. Можна чекати при цьому 95%-у імовірність того, що похибка не перевищить 0,5 розподілу шкали, хіба що за винятком діапазону біля нуля, де точність звичайно нижче.

У кожнім експерименті потрібно прилад калібрувати. Крім числової точності, наприклад величини *S*, необхідно установити відповідність закону розподілу відхилень приладу функції щільності нормального розподілу. Тут доречно відзначить, що строгу відповідність розподілів необхідно враховувати лише в дуже строгих експериментах. У більшості інженерних робіт досить цілком виявляється одержання симетричного закону розподілу. У цьому випадку завжди можна користуватися арсеналом аналізу, узятого з теорії нормального закону. Доведено, що використання параметрів нормального розподілу, коли розподіл відхилень у дійсності інше, наприклад, рівної імовірності, то й тоді максимальна похибка, унаслідок такої довільності, не перевищує 20 %. Очевидно, так робити все-таки не можна, якщо ми маємо справу з граничними випадками, безпекою людей, моральними нормами. У цих випадках похибка, що могла б бути виключена, неприпустима.

Швидким способом перевірки на нормальність є нанесення відхилень на ***імовірнісний папір***. Нормально розподілена сукупність відліків на цьому папері утворить пряму лінію. Її легко виготовити.

На папері з лінійними шкалами по осі абсцис відкладаються відхилення. Нуль розташовується так, щоб вони усі помістилися (рис. 11). У середині шкали по осі ординат наноситься точка, що відповідає 50 %. Униз від неї відкладаються вісім рівних інтервалів у порядку, що убував: 38,8; 27,6; 19,8; 13,6; 7,9; 4,5; 2,4 і 1,2 %. Вище точки, позначеної 50 %, відкладаються також вісім інтервалів, але в порядку, що зростав: 61,2; 72,4; 80,2; 87,4; 92,1; 95,5; 97,6; 98,8%. Шкала по осі абсцис представляє відсоток відліків, що мають відхилення, менше даного значення (див. приклад 2.7).

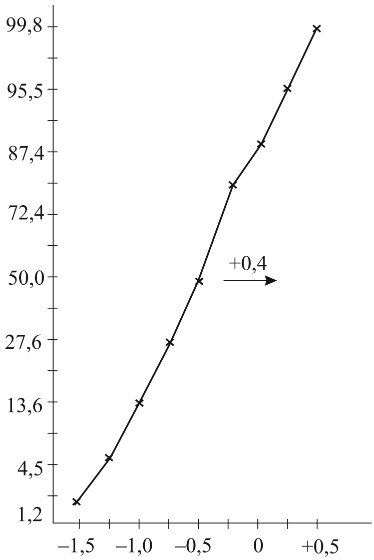

Рис. 11. До приклада 2.7. Дані нанесені на імовірнісний папір

Існує безліч способів перевірки розподілу на нормальність. Для інженерних цілей цілком достатня і зручна графічна перевірка. У допомогу вироблення судження про характер розподілу поміщаємо рис. 12.

Рис. 12. Графіки, побудовані на імовірнісному папері для наступних розподілів: A – нормальне; B – симетричне, більш плосковершинне, чим нормальне; C – симетричне, більш гостровершинне, чим нормальне; D – два асиметричних розподіли

Доказ того, що випадкові похибки приладу розподілені по нормальному закону, дозволяє по-новому глянути на проблему вимірів. За допомогою приладу, що має нормальні розподіли випадкових похибок, неможливо одержати більш точні відліки без його повної переробки, тоді як прилад, для якого розподіл з великою асиметрією (крива має більш крутий нахил в одну сторону щодо максимуму або в іншу) або вирізняється від нормального в іншім відношенні, можливо не справний або неправильно використовується, містить похибку метод вимірювання і т. д.

Одержання нормального розподілу, крім того, означає, що як найкраще значення вимірюваної величини нам можна вибирати середнє із серії вимірів.

Для всіх безупинно змінючих вимірюваних величин ми будемо користуватися нормальним розподілом, якщо форми практичних кривих розподілу більш-менш симетричні й відсутня багатовершинність. Це виправдано. По-перше, нормальний розподіл зручний для обчислень. По-друге, сама різка відмінність від цього розподілу не дає похибку більш 20 %. По-третє, ми це покажемо пізніше, похибка середньоквадратичного відхилення настільки значна, що цілком компенсує невизначеності форми розподілу.

Найпоширеніший випадок, коли нормальним розподілом користуватися неможливо, – випадок дискретної зміни вимірюваної величини (наприклад, число працюючих верстатів, число бракованих деталей і т. д.).

Приклад 2.7. У плановану експерименті довжину досліджуваного об'єкта можна вимірювати диференційним методом. З умов експерименту відомо, що похибка результату не може перевищувати $\Delta = \pm 0{,}01$ мм. Вимірювана величина і габарити об'єкта дозволяють здійснити вимірювання на приладах типу оптиметра, мініметра. Ціна розподілу приладу повинна бути не гірше $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ від похибки вимірюваних величин, що допускається. У нашому випадку ціна розподілу приладу повинна потрапити в інтервал

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\Delta = 0{,}003 + 0{,}002. \tag{2.40}$$

Ціна розподілу шкали оптиметра 0,001 ім. Не будемо ускладнювати вимірювання і виберемо мініметр із ціною розподілу 0,002 мм.

Такий мініметр мається. В атестаті зазначена систематична похибка шкали у виді виправлення $\Delta q = 0{,}0005$ мм у всьому діапазоні шкали. Характеристики розсіювання розмірів, через дію випадкових похибок, в атестаті не приведені.

Тому вирішуємо прокалібрувати прилад: калібрування провели за допомогою набору плиток номінального розміру 2,0 мм, що відрізняються друг від друга по розміру на 0,002 мм.

Це зручно, тому що ціна розподілу мініметра також 0,002 мм. Заміняючи плитки можна перевірити всю шкалу. Набір 1-го класу точності. Похибкою розміру плитки станемо зневажати.

На нуль прилад установлюємо по плитці 2,0 мм. Пройшовши всю шкалу, ми побачили, що, дійсно, при кожній зміні плитки (крок 0,002 мм) покажчик не доходив до відповідного розподілу приблизно на одну і ту саму величину.

За допомогою іншого, універсального, набору визначили цю постійну присутню похибку при будь-якому відліку. Вона виявилася рівній величині виправлення, зазначеної в атестаті – 0,0005 мм.

Величину виправлення будемо додавати до результатів вимірів.

По-іншому надійшли при знаходженні характеристики розсіювання розмірів, властивому заданому мініметру, для чого потрібно знати точність приладу також і по випадкової складової похибки. Це необхідно, щоб мати довіру до показань приладу.

Оскільки різні ділянки шкали можуть мати різні величини характеристики розсіювання і, не маючи інших цілей стосовно нашого мініметра, крім однієї, домогтися досить надійного вимірювання потрібної нам величини, перевіримо місцевість точки шкали, найбільш зручної для спостереження шуканої величини.

Поставивши на вимірювальний столик відповідну плитку, почнемо вимір. Робити відліки по половині розподілу неважко. Коль незабаром ми зайнялися такою тонкою роботою, як калібрування мініметра, то будемо робити відліки з точністю $\frac{1}{4}$ розподілу, щораз пам'ятаючи про паралакс. Одержимо наступну таблицю відхилень у мікронах. Усього 51 вимір.

–0,25	–0,25	–0,25	0	0	0
–0,50	–0,50	–0,50	–0,50	–0,50	–0,25
–0,50	–1,00	–0,50	0,00	+0,50	–1,25
–0,25	–1,50	–0,50	–0,25	+0,25	–1,25
–0,25	–0,75	–0,25	–0,75	–0,25	–0,50
–0,50	–0,50	–0,25	–0,75	–0,50	–0,50
–0,75	–0,50	–0,25	–0,75	–1,00	–0,25
–1,00	–0,75	+0,50	–0,25	–1,00	–0,50
+0,25	+0,25	–0,50			

Знайшли середнє значення відхилень:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{20{,}25}{51} = -0{,}4.$$

Ця величина зсуву середнього значення (центра групування) від ідеального $X_n = 0$ вказує на величину систематичної похибки. Дійсно, нами спочатку знайдена $\Delta q = 0{,}5$ мкм. Порядок величин той самий.

Перш ніж знаходити середньоквадратичне вибіркове відхилення, переконаємося в нормальності отриманого нами розподілу. На імовірнісну папір наносимо наші дані з таблиці й одержуємо криву (див. рис. 11).

Таблиця

Відхилення	Число відхилень, не перевищуюче дане	Відсоток відхилень, що не перевищують дане
–1,5	1	2
–1,25	3	6
–1,0	7	14
–0,75	12	24
–0,5	28	56
–0,25	41	82
0	45	90
+0,25	48	96
+0,5	51	100

Вид і положення кривої показує, що ми маємо справу з розподілом симетричним, але більш гостровершинним, ніж нормальне. Крива (після зсуву її на величину $\Delta' q = 0{,}4$ мкм) проходить близько від середини графіка (0; 50 %).

Знаходимо середньоквадратичне відхилення по формулам, виведеним для закону нормального розподілу. Тоді

$$\sum n_i (x_i - \overline{X})^2 = \sum n_i x_i^2.$$

Тому що наші відхилення отримані при $X_n = 0$, то

$$\sum n_i x_i^2 = 1{,}5^2 + 1{,}25^2 \cdot 2 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 0{,}75^2 + 19 \cdot 0{,}5^2 + 16 \cdot 0{,}25^2 =$$
$$= 2{,}25 + 1{,}55 \cdot 2 + 4 + 5 \cdot 0{,}55 + 19 \cdot 0{,}25 + 16 \cdot 0{,}0625 = 17{,}60;$$
$$S = \sqrt{\frac{17{,}60}{51}} = \sqrt{0{,}34} = 0{,}58 \text{ мкм},$$

тобто 68,3 % відхилень, якщо вибірка буде досить великой, виявиться в інтервалі ±0,58 мкм. Приблизно 95 % (20:1) відхилень буде лежати в межах ±1,16 мкм.

Як бачимо, величина похибки трохи більше рекомендованої практичним правилом (максимальна похибка – $\frac{1}{2}$ найменшого розподілу шкали приладу). У нашому випадку вона складає $\frac{0{,}002}{2} = \pm 0{,}001$ мм.

От чому при точному експерименті рекомендується прилад калібрувати (краще віддати на атестацію фахівцям).

Таким чином, ми установили величину систематичної похибки мініметра і середньоквадратичну похибку у вимірах, тобто область існування відліків при вимірюванні деякої величини з визначеним рівнем довіри (68; 95 %). На цьому етапі можна припинити роботу і користуватися отриманою інформацією в процесі експерименту і при обробці експериментальних даних. Але можна (а іноді і необхідно) продовжити подальші витяги статистичної інформації.

Природне запитання, що відразу ж виникає, це – наскільки можна довіряти отриманим значенням $\overline{X}$ і S? Яка їхня точність?

Точність середнього (похибка середнього)

Оскільки число відліків при дослідженні $n = 51$ досить велико, визначимо точність середнього по вираженню (2.33), а потім порівняємо результат з величинами, що дають формули (2.36) і (2.37):

1. $\alpha = 0{,}99$

$$\varepsilon = \pm \frac{3S}{\sqrt{n}} = \pm \frac{3 \cdot 0{,}58}{\sqrt{51}} = \pm 0{,}24 \text{ мкм}.$$

Тоді

$$-0{,}4 - 0{,}24 < X_n < -0{,}4 + 0{,}24; \quad -0{,}64 < X_n < -0{,}16.$$

Отримане значення містить також систематичну похибку. Якщо неї виключити, те залишиться величина випадкової похибки середнього. Так, якщо вважати, що відхилення від нуля нашого середнього $\overline{X} = -0{,}4$ є систематична похибка, то істинне значення вимірюваної величини в цьому діапазоні шкали буде знаходитися в інтервалі $-0{,}24 < X_n < 0{,}24$, якщо середнє цієї величини буде знаходитися по досить великій вибірці.

2. Знайдемо похибку середнього по формулах (2.36) і (2.37). Оскільки $n = 51$, то t_α станемо шукати по таблиці дод. 1 ($\alpha = 0{,}99$): $t_\alpha = 2{,}58$. Тоді

$$\varepsilon = \pm t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} = \pm 2{,}58 \frac{0{,}58}{\sqrt{51}} = \pm 0{,}21 \text{ мкм}.$$

Як ми і попереджали раніше, вираження (2.33) дають трохи завищену похибку.

Друге питання, наскільки точно визначене середньоквадратичне відхилення, поки ми вирішити не зможемо, тому що для цього потрібно проглянути наступний розділ.

Похибка у величині похибки

Якщо число спостережень дуже велико, то можна не чекатиме великої похибки $\varepsilon_S = \sigma - S$. При середніх і особливо при малих значеннях n похибка може бути великою.

Якщо опустити докази, то можна записати вираження, що дозволяє робити оцінки наближення розрахункових значень середньоквадратичного відхилення вибірки до генерального середньоквадратичного відхилення,

$$\sigma \approx S \pm \varepsilon_S \approx S \pm t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} = S \pm t_\alpha \frac{S}{\sqrt{2(n-1)}}, \qquad (2.41)$$

де n – обсяг вибірки, чисельність спостережень; t_α – коефіцієнт, що залежить від обраного рівня надійності (імовірності) α визначення похибки .

Тут доречно відзначити, що у формулі (2.41) член зі знаком плюс-мінус ($\pm$) являє собою похибку наближення, обчислену з імовірністю α, тоді як дріб $\frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}}$ є середнім квадратичним відхиленням статистичної характеристики S. Це відноситься, до речі, і до оцінки середнього. У формулі (2.41) t_α знаходиться по табл. дод. 1 (функція Лапласа) при $n > 20$ і по табл. дод. 2 (функція Стьюдента) при $n < 20$.

На рис. 13 представлений графік залежності $\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$ від n. Графік застерігає проти зайвої точності при обчисленні похибки. Наприклад, при $n = 9$ (досить багато відліків) обчислена похибка буде вірна лише з точністю до 20 %. А при числі відліків $n = 5$ точність знижується до 35 %.

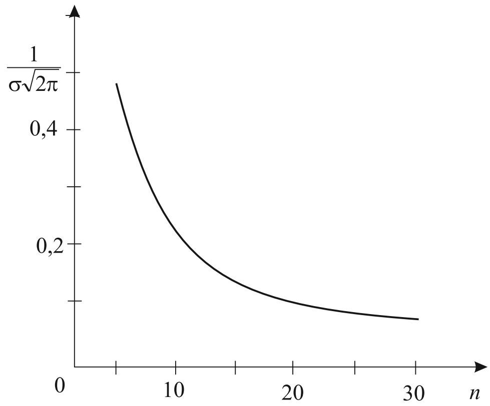

Рис. 13. Залежність величини $\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$, *рівної відносному середньоквадратичному відхиленню величини S від числа вимірювання n*

Тепер можна продовжити приклад 2.7. Для оцінки точності обчисленого $S = 0{,}58$ мм скористаємося формулою (2.41) і t_α (оскільки $n = 51 > 20$) будемо знаходити по функції Лапласа (дод. 1). Для імовірності (надійності) $\alpha = 99$ знаходимо $t_\alpha = 2{,}58$. Тоді

$$\varepsilon_S = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{2(n-1)}} = 2{,}58\frac{0{,}58}{\sqrt{2\cdot 50}} = \pm 0{,}15$$

або

$$0{,}58 - 0{,}15 < \sigma < 0{,}58 + 0{,}15; \quad 0{,}43 < \sigma < ,73.$$

Деякі зауваження по формулі середньоквадратичного вибіркового відхилення

У будь-якій задачі, зв'язаної з виконанням вимірів, можливі два способи одержання точного значення. Перший спосіб передбачає фіксування послідовності показань приладу, порівняння результатів з відомим або каліброваним значенням вхідної величини, що дає послідовність відхилень. Остання використовується для перебування середньоквадратичного вибіркового відхилення по формулі (2.32). Другий спосіб складається у визначенні середнього арифметичного по всім відлікам. У цьому випадку доцільно використовувати більш точну формулу для находження середньоквадратичного вибіркового відхилення

$$S = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\Sigma d)^2}{n}}{n-1}}. \qquad (2.42)$$

Але тоді формула (2.32) перетвориться і прийме вид

$$\sigma_m \approx \frac{S}{\sqrt{n}}. \qquad (2.43)$$

Зведення формул для обчислень

1. $$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}}. \qquad (2.44)$$

2. $$\sigma \approx S = \frac{5}{4}\frac{\sum |d|}{n-0{,}5}. \qquad (2.45)$$

3. $$\sigma \approx \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n(n-1)}}. \qquad (2.46)$$

4. $$\sigma \approx \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{5}{4}\frac{\sum |d|}{n}\frac{1}{\sqrt{n-1}}. \qquad (2.47)$$

Формули (2.45) і (2.47) не набагато гірше формул (2.44) і (2.46), але зручніше для обчислення.

Зауваження. Нерідко, в експерименті неможливо прокалібрувати вимірювальну систему. Тому сумарна дія систематичних і випадкових похибок розглядається як дія випадкових невизначеностей. Ця невизначеність має свій розподіл. Тому оцінюється вона звичайними статистичними методами.

Якщо прилад дає великий розкид показань, але розподіл похибки близько до нормального, то прилад придатний до роботи при можливості зняття повторних відліків. Якщо прилад має систематичну похибку, то його потрібно відрегулювати, ввести виправлення або викинути. Якщо експеримент своїми умовами допускає наявність похибки, що перевищує 2-3 середньоквадратичні відхилення, то досить одного відліку.

Коли допускаючи відхилення приблизно дорівнює середньоквадратичному відхиленню приладу, $\frac{1}{3}$ всіх відліків буде виходити за межі необхідної точності, при вимірюванні даних величин 4 рази очікується, що в середньому точність подвоїться в порівнянні з точністю одного відліку. Збільшенням числа відліків до 9 ми можемо підвищити точність у 3 рази, до 16 – у 4 і т. д. Якщо відхилення, що допускається, не перевищує 0,5σ, необхідно робити якнайбільше відліків або замінити прилад на більш точний.

Приклад 2.8. Партія мілкомодульних шестірень проходить іонне азотування. Оптичний пірометр установлений на світляний "свідок". Оператор намагається підтримувати температуру біля 600 ± 10 °C.

Отримано наступні результати:

Температура, °C	570	580	590	600	610	620
Число відліків n_i	1	6	10	10	5	3

Рішення. Середнє значення знаходимо в виді $600 - x_i$:

$600 - x_i$	30	20	10	0	–10	–20
Число відліків n_i	1	6	10	10	5	3
$n_i\,(600 - x_i)$	30	120	100	0	–50	–60

$\sum n_i(600 - x_i) = 140.$

Загальне число спостережень N = 35.

Тоді середнє значення різниці

$$\frac{\sum n_i(600 - x_i)}{N} = \frac{140}{35} = 4 \text{ °C}.$$

а отже,

$$\overline{X} = 604 \text{ °C}.$$

Відліки округлені з точністю до 10 °C, тому для подальших розрахунків ми вправі (через зручність) прийняти $\overline{X} = 600$ °C.

Знайдемо S:

d	30	20	10	0
d^2	900	400	100	0
m – число значень d^2	1	9	15	10
$m \cdot d^2$	900	3600	1500	0

$\sum d^2 = 6000.$

Тоді

$$S = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6000}{35-1}} = 13{,}3 \approx 13 \text{ °C}.$$

Таким чином, значення температури було 600±13 °C. У всякому разі ~68 % відліків лежать у цьому інтервалі, якщо вони складають нормальний розподіл. Переконаємося в нормальності розподіла. З цією метою нанесемо на імовірнісний папір значення відхилень (рис. 14) з таблиці:

Відхилення	Число відхилень, не перевищуючі дані	Відсоток відхилень, не перевищуючі дані
–20	3	8,7
–10	8	23,2
0	18	51,4
+10	28	80
+20	34	97,2
+30	35	100

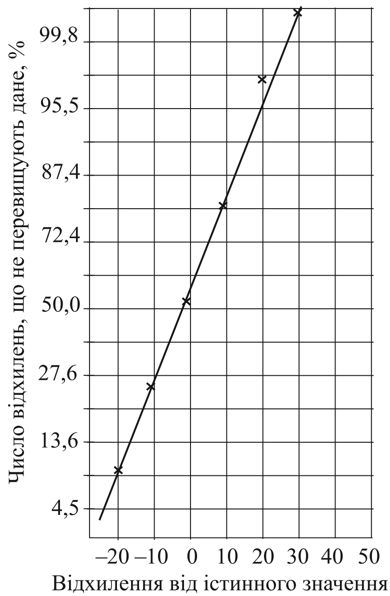

Рис. 14. До приклада 2.8. Розподіл нормальний: отримана пряма (верхні точки можна відкинути), і вона проходить через точку (0; 50 %)

З рисунка видно, що розподіл дійсно нормальний. Отриманої точності можна довіряти. І, якщо нас не влаштовує стабільність процесу, то варто звернути увагу на стабілізацію температури: перевірити сам пірометр на точність показань, пристрої підтримки заданої температури і т. п.

Глава третя
АНАЛІЗ ПОХИБОК ЕКСПЕРИМЕНТУ В ЦІЛОМУ

Інженерні експерименти звичайно зв'язані з виміром величин, що для одержання цікавлячого результату потім поєднують деяким чином за допомогою формул. Природно, можна чекати ситуації, коли вимірювані величини після обчислень дадуть такі похибки, що зведуть нанівець експеримент. На щастя, можна досліджувати очікувану точність результату і задати допустимі похибки вимірювання безпосередньо вимірюваних величин.

3.1. Функція однієї перемінної

Розглянемо випадок, коли Z – функція однієї величини x, наприклад

$$Z = x^n. \tag{3.1}$$

Якщо істинне значення первинної величини X_u, то істинне значення результату $Z_u = X_u^n$ (рис. 15).

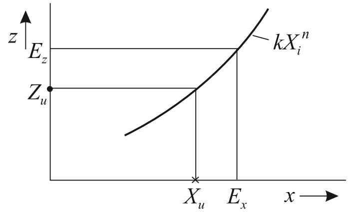

Рис. 15. Похибка результату як функції однієї перемінної

Похибка вимірюваного значення x

$$E_x = x - X_u.$$

Їй відповідає похибка у величині z

$$E_z = z(X_u + E_x) - z(X_u) \approx \frac{dz}{dx} E_x. \tag{3.2}$$

Похідна $\frac{dz}{dx}$ узята в точці $x = X_u$. Знак наближеної рівності (3.2) зв'язаний із припущенням, що в інтервалі обмірюваних значень x функцію $z(x)$ можна представити прямою лінією через малість похибки x. Ми одержали, що похибка у величині z пропорційна похибці у величині x. Коефіцієнт пропорційності

$$a_x = \left(\frac{dz}{dx}\right) X_u. \tag{3.3}$$

А якщо величина x змінюється відповідно до свого розподілу відносно $\bar{X}$?

Візьмемо середньоквадратичне відхилення від обох частин рівності (3.2)

$$S_z = a_x S_x. \tag{3.4}$$

Запам'ятаємо один важливий момент. При $z = x^n$ $a = nx^{n-1}$. Тоді

$$\frac{S_z}{z} = n\frac{S_x}{x}. \tag{3.5}$$

Відносна середньоквадратична похибка у величині результату z у n раз більше відносної середньоквадратичної похибки у величині x.

3.2. Похибка для довільної функції

Нижче дається загальний метод, що дозволяє аналізувати будь-яку функцію й одержати похибку результату. Розглянемо випадок, коли результат z є функцією двох вимірюваних перемінних x и y:

$$Z_u + z_1 = y(X_u + x_1, Y_u + y_1), \tag{3.6}$$

де u – індекс, що показує, що значення точне (істинне); z_1, x_1 y_1 – відхилення від відповідних точних значень.

Якщо функція (3.6) безперервна і має похідні, то її можна розкласти в **ряд Тейлора.** Розглядаючи тільки перші два члени ряду, маємо

$$Z_u + z_1 = \varphi(X_u, Y_u) + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial X_u}\right)_y \frac{X_u + x_1 - X_u}{1!} + \left(\frac{\partial z}{\partial Y_u}\right)_x \frac{Y_u + y_1 - Y_u}{1!}\right].$$

Але $Z_u = \varphi(X_u, Y_u)$, тому

$$z_1 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_u}\right)_y x_1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y_u}\right)_x y_1. \tag{3.7}$$

Аналогічно можна одержати $z_2, z_3, ..., z_n$ для n пар значень x_i, і y_i вибірки. Тоді

$$\sum Z_i^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_u}\right)_y^2 \sum x_i^2 + 2\left(\frac{\partial Z}{\partial X_u}\right)_y \left(\frac{\partial Z}{\partial Y_u}\right)_x \sum x_i y_i + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y_u}\right)_x^2 \sum y_i^2.$$

Оскільки $\sum x_i y_i$ прагне до нуля, а $S_z^2 = \sum \frac{Z_i^2}{n}$, остаточно одержимо

$$S_z^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_u}\right)_y^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y_u}\right)_x^2 S_y^2. \quad (3.8)$$

Відповідно для невизначеності

$$\omega_z^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_u}\right)_y^2 \omega_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y_u}\right)_x^2 \omega_y^2. \quad (3.9)$$

Приклад 3.1. При обробці круглих глухих отворів продуктивність електроімпульсного методу визначається по формулі

$$W = kD^2, \quad (3.10)$$

де $k = \frac{\pi h}{4t}$; h – глибина обробки; t – час обробки; D – діаметр отвору.

Чому буде дорівнює похибка у визначенні продуктивності, якщо середньоквадратичне відхилення заміряних діаметрів отворів складає 8 % номінального значення, а інші величини заміряні точно.

Рішення. З рівняння (3.8) знаходимо

$$\frac{\partial W}{\partial D} = 2kD; \quad (3.11)$$

$$S_W^2 = 2^2 k^2 D^2 S_D^2. \quad (3.12)$$

Завжди, коли тільки можливо, бажано знаходити відносну похибку. Розділивши (3.12) на вираження (3.10), зведене в квадрат, одержимо

$$\frac{S_W}{W} = 2\frac{S_D}{D} \quad (3.13)$$

або

$$\frac{S_W}{W} = 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}16.$$

Корисно знати, що якщо показник ступеня менше одиниці, то похибка результату буде менше похибки вимірюваної величини.

У табл. 3.1 приведені формули похибок результату для основних функцій.

Таблиця 3.1.

Обчислення похибок результату

Функція z	Похибка результату S_z
1. $k(x+y)$ $k(x-y)$	$(S_x^2+S_y^2)^{1/2}$
2. $\left.\begin{array}{l} kxy \\ \dfrac{kx}{y} \end{array}\right\}$	$z\left[\left(\dfrac{S_x}{x}\right)^2+\left(\dfrac{S_y}{y}\right)^2\right]^{1/2}$
3. kx^n	$\dfrac{nzS_x}{x}$
4. ke^x	zS_x
5. $k\cdot\ln x$	$\dfrac{S_x}{z}$
6. $k\sin x$	$\dfrac{zS_x}{\operatorname{tg} x}$
7. $k\dfrac{xy}{x+y}$	$z\left[\left(\dfrac{y}{x+y}\right)\dfrac{S_x^2}{x^2}+\left(\dfrac{x}{x+y}\right)\dfrac{S_y^2}{y^2}\right]$

Деякі з цих формул вимагають обережного застосування. Наприклад, вираження похибки результату для функції ke^x не підходить для функції ke^{-x}.

Використоємо ще одну формулу в прикладі.

Приклад 3.2. Повний коефіцієнт тепловіддачі системи, де дві рідини розділені стінкою з зневажливо малим тепловим опором, має вигляд

$$k=\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)^{-1}=\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}. \qquad (3.14)$$

де h_1 і h_2 – коефіцієнти теплопередачі кожної з цих рідин.

Якщо h_1 = 75 ккал/(м^2·год.·град) із середньоквадратичним відхиленням 7,5 %, а h_2 = 110 ккал/(м^2·год.·град) із середньоквадратичним відхиленням 4,5 %, то яким буде середньоквадратичне відхилення для k?

Рішення. По формулі 7 з табл. 3.1 знаходимо

$$\left(\frac{S_k}{k}\right)^2=\left(\frac{110}{75+110}\right)^2 0{,}075^2+\left(\frac{75}{75+110}\right)^2 0{,}045; \qquad (3.15)$$

$$\frac{S_k}{k}=4{,}8\ \%.$$

3.3. Практичні прийоми роботи з похибками. Похибка складних функцій

Обчислення часток похідних у формулах (3.3) і (3.9) нерідко виявляється скрутною справою. Укажемо простий спосіб, що полегшує їх обчислення.

Приклад 3.3. Нехай результат заданий функцією $Z = kxy$, де $k = 1;\ \overline{X} = 3;\ \overline{Y} = 5$ і відповідно, $S_x = 1;\ S_y = 2$. Звичайно, ця функція не складна, але ми на цьому прикладі даємо загальний метод.

Рішення. Похибка перемінної x не що інше, як зміна x на S_x при постійному y. Тому її можна обчислити по формулі (3.15), спочатку підставляючи $x = \overline{X}$ і $y = \overline{Y}$, а потім $x = \overline{X} + S_x$ і $y = \overline{Y}$. Різниця дає $S_{z(x)}$. Аналогічним шляхом знаходиться $S_{z(y)}$ при $x = \overline{X}$ і $y = \overline{Y} + S_y$. Об'єднання похибок $S_{z(x)}$ і $S_{z(y)}$ виконується звичайним способом:

$$S_{z(x)} = \left(\overline{X} + S_x\right)\overline{Y} - \overline{X}\overline{Y} = \overline{Y}S_x; \tag{3.16}$$

$$S_{z(y)} = \left(\overline{Y} + S_y\right)\overline{X} - \overline{X}\overline{Y} = \overline{X}S_y. \tag{3.17}$$

Підставляючи в (3.16) і (3.17) відповідні дані, маємо

$$S_{z(x)} = 5 \cdot 1 = 5; \quad S_{z(y)} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Сумарна похибка

$$S_z = \sqrt{S_{z(x)}^2 + S_{z(y)}^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} = 7{,}8.$$

Величина похибки, обчислена по формулі 3 табл. 3.1, також складає 7,8:

$$S_z = z\left[\left(\frac{S_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{S_y}{y}\right)^2\right]^{1/2} = z\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = 15\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{25}} = 15 \cdot 0{,}52 \cong 7{,}8.$$

Такий збіг спостерігається не завжди. Більш точне значення дає описаний метод, а не формула.

Визначення похибок результату за допомогою графіків і таблиць

Дотепер передбачалося, що функціональна залежність між первинними величинами і результатом відома або спочатку знаходиться, а потім по формулах табл. 3.1 або по співвідношеннях (3.8) і (3.9) обчислюються похибки. У багатьох випадках показання приладів обробляються за допомогою функціональних співвідношень, представлених у виді таблиць, номограм, графіків, шкал і т. п. У таких випадках раціонально застосовувати метод кінцевих різностей, що ілюструється рис. 16. Дійсно, якщо в експерименті отриманий графік $z = y(x)$, а відлік x має невизначеність $\omega(x)$, то частинну похідну dZ / dX_u для формули (3.9) – $\omega_z = \dfrac{dZ}{dX_u} = \omega_x$ одержуємо як тангенс кута нахилу дотичної в точці $M(z_1, x_1)$.

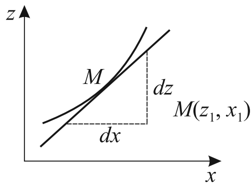

Рис. 16. Визначення похідної dz / dx в точці $M(z_1, x_1)$ при визначенні похибки результату z

Очевидно, метод кінцевих різностей застосуємо і для таблиць. Наприклад, потрібно обчислити частинну похідну ентальпії (кал/г) при тиску 1,055 кгс/см^2, температурі 115 °С. Функціональна залежність задана таблицею.

Тиск, кгс/см^2	Температура, °С		
	105	115	125
0,985	642,0	647,4	652,8
1,055	641,8	647,2	652,6
1,125	641,5	647,0	652,4

З таблиці

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta T}\right)_P = \frac{652{,}6 - 641{,}8}{20} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P \approx 0{,}54;$$

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta P}\right)_T = \frac{647{,}4 - 647{,}0}{0{,}14} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T \approx 2{,}86.$$

Варто мати на увазі, що згладжена експериментальна крива вносить похибку, якщо навіть показання приладу абсолютно точні. Те ж відноситься і до таблиць. Ці похибки враховуються при загальному аналізі похибок експерименту.

Похибки постійних. Похибки результату з ненормальним розподілом величин

Часто визначена фіксована величина або константа входить в усі формули. Це, наприклад, фізичні і механічні константи (питома теплоємність, модулі пружності), постійні (швидкість світла, прискорення сили ваги), один раз обміртовані величини (плече важеля, тароване зусилля). Хоча ці величини власне кажучи не випадкові, можна з достатньою імовірністю припустити, що вони все-таки мають деякі коливання, тобто мають розподіл відхилень. В окремих випадках ця обставина повинна враховуватися.

Для законів розподілу, що відрізняються від нормального, можна застосувати описані методи обчислення похибок результату. Виключенням будуть розподілення, настільки асиметричні, що при великому n сума членів, що містять Σxy, не буде рівної нулю (при висновку (3.8)).

Об'єднання похибок

Похибка повинна показувати, якою мірою значимо кінцевий результат. Тому на практиці звичайно не потрібно обчислювати похибки з точністю, більшої 25 %.

З формул (3.8) і (3.9) випливає, що внаслідок зведення в квадрат деякі похибки можуть виявитися зневажливо малими в порівнянні з іншими. На приклад [38] маємо функцію суми

$$z = x + y. \tag{3.18}$$

Середньоквадратичні відхилення первинних величин відповідно дорівнюють: $S_x = 2$ і $S_y = 1$. З табл. 3.1 по формулі 1 знаходимо

$$S_z = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2{,}24.$$

Але якщо зневажити похибкою $S_y = 1$, ми одержимо $S_z \approx 2$, що усього на 12 % відрізняється від дійсної похибки.

Коли Z являє собою кілька величин, майже завжди можна знехтувати похибками, що мають величину, меншу 1/3 величини максимальної похибки. Іноді можна знехтувати похибкою величини, що набагато відрізняється від іншої величини. Наприклад, у (3.18) $x = 100 \pm 6$, $y = 5 \pm ?$ Похибкою у величині y можна знехтувати, якщо вона не перевищує 3, що складає 60 % від y, тобто похибку у величині y варто враховувати лише при її грубому вимірі.

Для функцій добутку і частки можна знехтувати усіма відносними похибками, що не перевищують 1/3 від максимальної.

Істотні і несуттєві похибки

Вимірювана величина називається такою що *вносить* або *не вносить* похибку в залежності від того, вносить або не вносить її похибка помітний внесок у похибку результату. Величина може виявитися такою що не вносить похибку по двох причинах:

- величина точно обмірювана;
- величина складає малу добавку до великої величини.

Якщо передбачається, що деяка величина не вносить похибку, то її похибку можна оцінювати грубо, але обов'язково з завищенням. Якщо вона, завищена, усе-таки мала, то нею знехтують спокійно, якщо ні, то варто переміряти і визначити похибку заново, більш ретельно. Наприклад, зважування того самого зразка дали сукупність величин:

50,3853 г,
50,3846 г,
50,3847 г,
50,3849 г.

На око вибираємо найкраще значення ваги 50,3849±0,0003 г. У межах похибки ±0,0003 г лежить три з чотирьох відліків, тобто ця величина майже напевно більше похибки середнього. Та й ні чого робити стомлюючі підрахунки середнього і середньоквадратичного відхилення.

Остаточна похибка

Істотні випадкові похибки обчислюють по формулах середньоквадратичного відхилення (гл. 2). Інші похибки грубо оцінюють з деяким завищенням і перевіряють, чи дійсно вони знехтувано малі.

Потім всі істотні похибки поєднують по формулах табл. 3.1 або по вираженнях (3.8) і (3.9) і одержують остаточну похибку. Ця величина являє собою найкраще середньоквадратичне відхилення (невизначеність) для розподілу результатів, що повинні виходити при багаторазовому повторенні експерименту з тими самими подібними приладами. Вона служить мірою загальної відтворюваності результату.

3.4. Похибки і планування експерименту

Дослідник завжди повинний прагнути використовувати недороге устаткування, прилади потрібної, а не завищеної точності, робити стільки відліків, скільки це потрібно (не більше і не менше) для досягнення точності вимірюваної величини. Часто умовами експерименту задана точність не первинної вимірюваної величини, а остаточного результату. Знаючи похибку результату, потрібно розумно поділити її між складовими результат первинними величинами. Невиправдане застосування приладів зайвої точності, методів зайво точних, планування завищеної кількості іспитів, – усе це позбавляє науковий підрозділ, де діє автор невдалого проекту експерименту, тих засобів, що могли б бути використані на нові дослідження. Матеріал другого і третього розділів допоможе молодим дослідникам вдумливо підходити до будь-якому експерименту.

Застосування аналізу похибок при плануванні експерименту покажемо на прикладі.

Приклад 3.4. Отримана проба суміші газів невідомої пропорції. Потрібно визначити постійну $\frac{R}{M}$ для даної суміші.

Рівняння стану ідеального газу

$$PV = \left(\frac{R}{M}\right)T,$$

де P – тиск; T – абсолютна температура; V – питомий обсяг; R – газова постійна; M – маса газу. Використовуваний манометр має шкалу від 0 до 10 кгс/см^2, половина найменшого розподілу шкали складає 0,1 кгс/см^2 (припустимо, що цей інтервал охоплює 95 % усіх відхилень). При температурі 40 °С (277 К) очікувана похибка складає ±7 К. Внутрішній обсяг посудини точно відомий – 0,028 м^3. Питомий обсяг газів дорівнює 62,4 см^3/г. З якою точністю необхідно визначити всі проби, щоб у, 19 випадках з 20 похибка у визначенні $\frac{R}{M}$ не перевищувала 3 %.

Рішення. $\frac{R}{M}$ дорівнює $\frac{PV}{T}$. З табл. 3.1 (формула 3) одержуємо

$$\frac{\omega_z}{Z} = \left[\left(\frac{\omega_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\omega_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\omega_T}{T}\right)^2\right]^{1/2},$$

де ω – похибка або невизначеність.

Знайдемо $\frac{\omega_V}{V}$, з огляду на то, що манометр дає самі точні показання при 10 кгс/см^2:

$$\frac{\omega_V}{V} = (0{,}03^2 - 0{,}01^2 - 0{,}02^2)^{1/2} = 0{,}02.$$

Якщо V = 62,4 см^3/г. то ймовірна похибка (50 % імовірність) у визначенні V і, отже, ваги не повинна перевищувати 18 г. Судина, що містить 0,028 м^3 газу при тиску 10 кгс/см^2, буде досить важкою (~25 кг), тому визначити її вагу необхідно дуже ретельно.

Інформацію про необхідну точність виміру первинних величин можна почерпнути з виду функціональної залежності що їх об'єднує.

Якщо z зв'язаний з первинними величинами x і y співвідношеннями

$$z = xy \quad \text{або} \quad \frac{x}{y},$$

то похибка на i % у величині x або y приводить до похибки на ті ж i % у результаті z. Тому величини x і y варто вимірювати приблизно з однаковою точністю, хоча б вони і сильно розрізнялися. Інша справа, якщо

$$z = x + y \quad \text{або} \quad x - y.$$

Тут усе залежить від ступеня розходження x і y. Розглянемо два приклада:

1. $x = 10000 \pm 1$;
   $y = 100 \pm 5$
   $z = x + y = 10100 \pm 5$.

У даному випадку велика величина x відома з високою точністю, тоді як величина y обмірювана з точністю 5 %. Остаточна ж величина z визначена з точністю 0,05 %.

2. $x = +100 \pm 2$;
   $y = 96 \pm 2$
   $z = x - y = 4 \pm 3$.

Обидві первинні величини визначені з точністю 2 %, а погрішність результату дорівнює 75 %. Обчислюючи різницю двох близьких первинних величин, ми зіштовхуємося з принциповою неприємністю: похибка результату сильно зростає. Тому потрібно прагнути до першого випадку й уникати другого.

А тепер припустимо, що остаточний результат знаходиться у виді $z = \frac{x}{y}$. Серія вимірів привела до таких значень первинних величин:

$$x = 1000 \pm 20;$$
$$y = 10 \pm 1.$$

Отже, $\frac{S_x}{x} = 2$ %, $\frac{S_y}{y} = 10$ % і $\frac{S_z}{z} = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10{,}2$ %.

Потрібно відповісти на запитання: якщо є потреба підвищити точність результату, то за рахунок якої з двох первинних величин ми повинні це здійснити? Припустимо, точність однієї з величин росте вдвічі. Тоді, якщо час затратити на вимір величини x, одержимо $\frac{S_x}{x} = 1\,\%$, що приведе до $\frac{S_z}{z} = \sqrt{1^2 + 10^2} = 10{,}0\ \%$. Якщо уточнити y, то $\frac{S_y}{y} = 5\ \%$, а виходить, $\frac{S_z}{z} = 2\sqrt{1^2 + 5^2} = 5{,}4\ \%$.

Отже, основну увагу потрібно приділяти тим величинам, що дають найбільший внесок в остаточну похибку.

Добре спланований експеримент не дозволяє ні однієї з величин вносити в похибку результату частку, що значно перевищує частку інших первинних величин. Тому в попередньому прикладі представлений погано спланований експеримент. Очевидно, потрібно було затратити більше часу на вимір величини y за рахунок скорочення часу виміру величини x або придбати для виміру величини y більш точний прилад.

Глава четверта
МЕТОДИ УДОСКОНАЛЮВАННЯ ТА РАЦІОНАЛІЗАЦІЇ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Ціль планування експерименту складається в досягненні максимального обсягу корисної інформації при мінімальних матеріальних і часових витратах, оптимальному контролі та відповідних експерименту методах обробки даних.

Сама головна ланка планування розібрана в гл. 2 і 3. Якщо на рівні планування не усунуті потенційні похибки або вони надмірно великі, то ніяка винахідливість і тонкість інших частин плану не допоможуть. У цій главі ми спробуємо запропонувати методи, що дозволяють зменшувати набір перемінних в експерименті. Зрозуміло, що в такий спосіб можливо впливати як на вартість експерименту, так і на його точність (шляхом виключення первинної величини, що вносить велику частку в похибку результату). Крім того, об'єднання перемінних у деякі комплекси нерідко приводить до важливих фізичних критеріїв.

4.1. Попередні зауваження

Ми вже говорили, що одиниці виміру підрозділяються на основні і похідні. Основні величини вибираються довільно, але обов'язково незалежно друг від друга. Одиниці виміру інших, вторинних величин виражають через основні. Формула, що вказує залежність одиниці виміру похідної величини від основних одиниць виміру, називається *розмірністю* цієї величини.

Розмірність вторинної величини знаходиться за допомогою означального рівняння, що служить визначенням цієї величини в математичній формі. Наприклад, означальним рівнянням для сили можна вважати другий закон Ньютона

$$F = ma. \tag{4.1}$$

Тоді

$$[F] = [M][L][T]^{-2}. \tag{4.2}$$

Обчислення розмірності полегшується двома правилами:

1. Якщо $Z = PQ$, то $[Z] = [P]\,[Q]$. (4.3)
2. Якщо $Z = P/Q$, то $[Z] = [P]/[Q]$. (4.4)

Показники розмірності можуть бути як позитивними, так і негативними і дробовими.

Розмовляючи про розмірність, ми завжди маємо на увазі розмірність у деякій системі основних величин. Так, вираження (4.2) отримано для системи довжина, маса, час. Для системи довжина, час, сила розмірність, наприклад, маси буде

$$[m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{F}{LT^{-2}} = L^{-1}T^{2}F. \tag{4.5}$$

Якщо рівність зв'язує фізичні величини, то всі члени рівності мають ту саму розмірність. Цю властивість фізичних формул називають *однорідністю*. Іншими словами, форма однорідного рівняння відносно розмірностей не залежить від вибору основних одиниць.

Відзначимо ще одну істотну обставину: розмірність будь-якої фізичної величини являє собою добуток зведених у ступінь розмірностей первинних величин.

Застосування теорії розмірностей зв'язано з вибором основних одиниць. Від правильності вибору основних одиниць та їх числа нерідко залежить як хід рішення, так і глибина та якість результату. До речі, зараз мова йде не про основні одиниці якоїсь системи (наприклад, у системі СІ їх всього шість), а про довільно (пізніше вкажемо обмеження) обираних основних одиницях для цілей вирішення деякої конкретної задачі. Отож, таких основних одиниць може бути як завгодно багато.

Нехай первинні величини – маса, час, довжина. Якщо силу прийняти за вторинну величину, то означальне рівняння – другий закон Ньютона $F = ma$. Якщо ж силу прийняти за четверту первинну величину з довільно обираною одиницею її виміру $[F] = f$, то другий закон Ньютона варто виразити так:

$$F = k_1 ma, \tag{4.6}$$

де k_1 – розмірний коефіцієнт, обумовлений по вираженню

$$[k_1] = \frac{[F]}{[m][a]} \tag{4.7}$$

або

$$[k_1] = [F][M]^{-1}[L]^{-1}[T]^{2}. \tag{4.8}$$

З додаванням кожної нової основної одиниці вводиться в розгляд нова розмірна постійна. І навпаки, з відкиданням деякої основної одиниці відкидається деякий розмірний коефіцієнт.

4.2. Метод розмірностей

Нехай величина z знаходиться у функціональній залежності від величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{4.9}$$

де z – шуканий в експерименті результат; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – фундаментальні перемінні – будь-які величини, що роблять вплив на результат і здатні змінюватися незалежно від інших перемінних. Будемо думати, що величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z володіють розмірностями, а залежність (4.9) справедлива в будь-якій системі одиниць. У цьому випадку функція (4.9) не може бути довільною, а повинна бути такою, щоб виконувалася рівність

$$[f] = [z]. \tag{4.10}$$

Це обставина істотно звужує клас можливих функцій і дозволяє деякою мірою "передбачати" фізичні залежності.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 4.1. У судину перетину S_1 налита ідеальна рідина (не грузла) щільністю ρ. Потрібно визначити час t витікання рідини через отвір перетину S_2 (рис. 17).

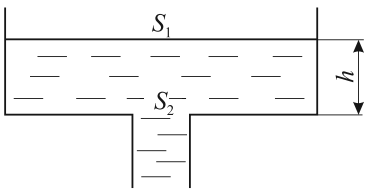

Рис. 17. До прикладу 4.1. Визначення часу t витікання рідини через отвір перетину S_2

Рішення. Знаходимо фундаментальні перемінні для цього явища. Очевидно, час витікання залежить від перетинів судини й отвору S_1 і S_2, від рівня рідини h. Очевидний зв'язок з g – прискоренням сили ваги. Дуже можливо, що t залежить також і від щільності рідини ρ.

Складемо таблицю перемінних і розмірностей

Фундаментальна перемінна	Позначення	Формула розмірності
Час витікання	t	T
Перетин судини	S_1	L^2
Перетин отвору	S_2	L^2
Прискорення сили ваги	g	LT^{-2}
Щільність рідини	ρ	ML^{-3}
Рівень рідини	h	L

Покладемо, що час витікання рідини підкоряється функції

$$t = \varphi(S_1, S_2, g, \rho, h), \tag{4.11}$$

значення перемінних якої представлені у вищенаведеній таблиці.

Функція φ повинна задовольняти умові

$$[\varphi(S_1, S_2, g, \rho, h)] = [t] = T. \tag{4.12}$$

Спробуємо представити шуканий час у виді статечної функції виду

$$t = \varphi(S_1^a, S_2^b, g^c, \rho^d, h^e), \tag{4.13}$$

де a, b, c, d, e – підлягаючі визначенню показники ступені.

Підставимо в (4.13) замість символів розмірності з таблиці:

$$\left[(L^2)^a, (L^2)^b, (LT^{-2})^c, (ML^{-3})^d, (L)^e\right] = T. \tag{4.14}$$

Щоб це рівняння було однорідним відносно розмірностей, повинні бути рівні показники ступенів лівої і правої частини. Одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\text{для } T \quad -2c = 1; \\ &\text{для } L \quad 2a + 2b + c - 3d + e = 0; \\ &\text{для } H \quad d - 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Маємо три рівняння з п'ятьма невідомими. Але два показники відомі:

$$d = 0 \quad \text{и} \quad c = -\frac{1}{2}, \tag{4.16}$$

тобто час витікання ідеальної рідини не залежить від її щільності та обернено пропорційний кореню квадратному з прискорення сили ваги.

Для визначення інших показників ступеня потрібно або мати додаткові дані, або робити якісь допущення.

Зробимо допущення, що час витікання рідини пропорційно перетину судини S_1 і обернено пропорційно перетину отвору S_2, тобто показники a і b

рівні відповідно 1 та –1. Тоді визначається останній показник $e = \frac{1}{2}$, і можна остаточно записати:

$$t = c\sqrt{\frac{h}{g}}\varphi\left(\frac{S_1}{S_2}\right). \qquad (4.17)$$

Коефіцієнт c і функцію $\varphi\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ аналізом розмірностей визначити не можна. Вони знаходяться або теоретично (строге рішення задачі), або експериментальним шляхом. Однак і те, що отримано порівняно легко методом розмірностей, безумовно виправдовує його застосування. Так, якщо ставити експеримент для перебування залежності (4.11), необхідно варіювати шістьма перемінними, тоді як експеримент, планований по залежності (4.17), припускає варіації по двох розмірних величинах: t і $\sqrt{\frac{h}{g}}$ – й одним безрозмірним комплексом $\frac{S_1}{S_2}$.

Можна ще більш раціоналізувати аналіз розмірностей у цьому прикладі. Будемо прагнути одержати в аргументі функції безрозмірних співвідношень. Перший з безрозмірних комплексів очевидний при швидкому розгляді залежності (4.11). Це $\frac{S_1}{S_2}$. Такі безрозмірні відносини, що вводяться в аргумент функції, виходячи з логіки явища називають *симплексами*. Звернемо також більше уваги на формули розмірностей. Маса входить тільки у формулу розмірності щільності. Ясно, що в такій ситуації вона не може ввійти в безрозмірний комплекс (не з чим скоротитися). Тому, мабуть, щільність не впливає на витікання рідини.

Тоді співвідношення (4.11) можна переписати в наступній формі:

$$t = \varphi\left(\frac{S_1}{S_2}\right), g^a, h^b, \qquad (4.18)$$

а (4.13) у виді

$$\varphi\left[\left(LT^{-2}\right)^a, L^b\right] = T. \qquad (4.19)$$

Симплекс тимчасово виключаємо з розгляду. Складемо рівняння для показників ступенів:

для T $\quad -2a = 1;$

$$\text{для } L \; a + b = 0 \tag{4.20}$$

відкіля

$$a = -\frac{1}{2}; \qquad b = \frac{1}{2},$$

тобто остаточно приходимо до виду (4.17).

Можна досягти підвищення визначеності й іншим шляхом – уведенням ще однієї основної одиниці, наприклад одиниці площі S (не зв'язуючи її з одиницею довжини). Тоді можна записати

$$T = \varphi\left[\left(LT^{-2}\right)^a, L^b, \left(ML^{-3}\right)^c, S^d, S^e\right] \tag{4.21}$$

Рівняння для показників ступенів:

для T $\quad -2a = 1$;

для L $\quad a + b - 3c = 0$;

для M $\quad c = 0$;

для S $\quad d + e = 0$

або

$$a = -\frac{1}{2}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad d = -e.$$

Отже, ми обійшлися без припущень:

$$t = c\sqrt{\frac{h}{g}}\,\varphi\left(\frac{S_1}{S_2}\right). \tag{4.22}$$

Приклад 4.2. Потік нестисливої ідеальної рідини обтікає кулю (рис. 18) діаметром d зі швидкістю v. Куля випробує силу лобового опору P. Складемо таблицю:

Фундаментальна перемінна	Позначення	Формула розмірності
Сила лобового опору	P	MLT^{-2}
Швидкість рідини	v	LT^{-1}
Діаметр кулі	d	L
Щільність рідини	ρ	ML^{-3}

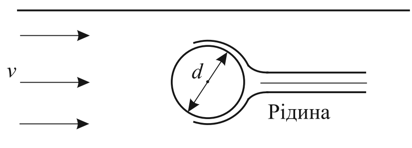

Рис. 18. До прикладу 4.2

Розмірність сили узята по другому закону Ньютона, тому що як основні одиниці обрані маса, час, довжина. Представимо функцію в статечному виді:

$$P = \varphi(v^a, d^b, \rho^c) \tag{4.23}$$

або

$$\varphi\left[\left(LT^{-1}\right)^a, L^b, \left(ML^{-3}\right)^c\right] = MLT^{-2}. \tag{4.24}$$

Складемо рівняння для показників ступеня:

для T $-a = -2$; $a = 2$;

для L $a + b - 3c = 1$;

для M $c = 1$,

тобто $a = 2$; $b = 2$; $c = 1$. Тоді

$$P = \varphi(v^2, d^2, \rho) \tag{4.25}$$

Отже,

$$\frac{P}{d^2 v^2 \rho} = \text{const} = k. \tag{4.26}$$

Отримано відомий коефіцієнт лобового опору тіла, обтічного ідеальною рідиною.

Як у прикладі 4.1, так і в прикладі 4.2, використовувалися три основних одиниці виміру. У прикладі 4.1 отримані дві безрозмірні комбінації при п'ятьох фундаментальних перемінних, у прикладі 4.2 – одна комбінація при чотирьох змінах. Можна строго довести наступні два важливі правила.

Якщо рівняння, що описує явище, однорідне відносно розмірностей, то його можна перетворити до набору безрозмірних комбінацій величин.

Якщо існує однозначне співвідношення $\varphi(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ ***між n фізичними величинами, для опису яких використовується k основних одиниць, то існує також співвідношення***

$$\varphi'(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-1}) = 0 \tag{4.27}$$

між $(n - k)$ безрозмірними комбінаціями, складеними з цих фізичних величин. Звідси випливає, що якщо нам не удається скласти безрозмірні комбінації по обраним фундаментальним перемінним, то це вірна ознака, що щось нами не враховано, пропущено. Необхідно завжди пам'ятати, що незалежно від того, зможемо ми знайти однорідне рівняння явища (а виходить, змогли одержати безрозмірні комплекси) чи ні, це рівняння існує незалежно від нас.

Приклад 4.3. Умови приклада 4.2 змінимо лише в тому, що рідина має в'язкість μ (замість сфери можна розглядати підвідний човен, торпеду, глибоководний апарат і т.п. з характеристичним розміром d). Складемо таблицю фундаментальних перемінних і їх розмірностей, використовуючи основні одиниці – масу, довжину, час:

Фундаментальна перемінна	Позначення	Формула розмірності
Сила лобового опору	P	MLT^{-2}
Характеристичний розмір	d	L
Швидкість рідини	v	LT^{-1}
Щільність рідини	ρ	ML^{-3}
В'язкість рідини	μ	$MT^{-1}L^{-1}$

Використовуючи правила, приведені вище, можемо вивести:

1) якщо набір фундаментальних перемінних достатній і вірний, то можна з них скласти набір безрозмірних комбінацій;

2) число безрозмірних комбінацій дорівнює $n - k$, тобто $5 - 3 = 2$. Як і колись, шукаємо функцію у виді набору перемінних у тім або іншому ступені:

$$P = \varphi(v^a, d^b, \rho^c, \mu^d) \tag{4.28}$$

або

$$\varphi\left[\left(LT^{-1}\right)^a, L^b, \left(ML^{-3}\right)^c, \left(MT^{-1}L^{-1}\right)^d\right] = MLT^{-2}. \tag{4.29}$$

Складемо рівняння для показників ступеня:

для T $-a - d = -2$;

для L $a + b - 3c - d = 1$;

для M $c + d = 1$.

Виразимо показники ступеня через d:

$a = 2 - d$; $b = 2 - d$; $c = 1 - d$.

Тоді рівняння (4.28) приймає вид

$$P = \varphi(v^a, d^b, \rho^c, \mu^d)$$

Поєднуючи перемінні з однаковими показниками ступеня, маємо

$$P = \varphi\left[\left(\frac{\mu}{vd\rho}\right)^{d}, \left(v^2 d^2 \rho\right)\right] \qquad (4.30)$$

або, переносячи другий член ліворуч, одержуємо два безрозмірних комплекси:

$$\frac{P}{v^2 d^2 \rho} = \varphi'\left(\frac{\mu}{vd\rho}\right). \qquad (4.31)$$

Таким чином, коефіцієнт лобового опору тіла з характеристичним розміром d, що рухається в грузлої рідини, залежить тільки від числа Рейнольдса, тому що $\frac{\mu}{vd\rho} = \mathrm{Re}$.

Зауваження 1. Після одержання вираження (4.31) відпала необхідність одержувати окремі залежності лобового опору від кожного з параметрів: v, d, ρ і μ, – досить побудувати одну криву залежності лобового опору від Re. Це приводить до різкого зменшення обсягу експериментальної роботи.

Зауваження 2. Залежність (4.31) справедлива для різних подібних явищ. Вибравши як середовище рідину щільністю ρ з в'язкістю μ, подобу можна одержувати, призначаючи такі характеристичні розміри і швидкості, щоб $\frac{\mu}{vd\rho}$ виявлялося постійним у кожнім випадку. Ця обставина відкриває можливості для здійснення модельних експериментів.

Заміна натури моделлю також приведе до раціоналізації і здешевлення експерименту.

Зауваження 3. Отримана залежність (4.31) справедлива лише для геометрично подібних апаратів. Єдиний характеристичний параметр d подає інформацію лише про розмір апарату і нічого не говорить про форму, обтічність і т. п. Для опису реальних особливостей об'єкта потрібні доповнення, часом досить суттєві, громіздкі і, однак, зовсім необхідні. Тому залежності, одержувані шляхом аналізу розмірностей, варто обережно залучати до широких узагальнень.

Зауваження 4. Нарешті, метод розмірностей не має однаковості застосування до будь-якого явища, особливо при великому числі фундаментальних перемінних. Він служить лише дороговказною ниткою на шляху визначення рівнянь явища. Не приводячи до одержання дійсної залежності, метод дозволяє одержувати важливі зведення про окремі сторони цієї залежності і, саме головне, раціоналізувати експеримент. Аналіз розмірностей у кожному конкретному випадку залишається творчою, мало формалізованою роботою.

У цьому і сильна, і слабка сторона методу. Результати аналізу багато в чому залежать від вибору фундаментальних перемінних, основних одиниць і їх кількості, вибору безрозмірних комбінацій (вирішення рівнянь для показників ступенів щодо одного або іншого ступеня), залучення важливих розмірних постійних і т. п.

4.3. Вибір фундаментальних перемінних, основних одиниць і безрозмірних комплексів

Неможливо дати досить загальні правила дій при використанні методу розмірностей. Проілюструємо прикладом лише деякі, часто використовувані, способи застосування методу.

Приклад 4.4. Однорідний циліндр масою m котиться по горизонтальній площині під дією сили P. Визначити прискорення центра циліндра при відсутності ковзання.

Рішення. Складемо таблицю фундаментальних перемінних і їх розмірностей, вибравши основними одиницями силу, час і довжину:

Фундаментальна перемінна	Позначення	Формула розмірності
Прискорення	a	LT^{-2}
Сила	P	MLT^{-2}
Маса циліндра	m	M
Діаметр циліндра	d	L

Шукаємо функцію

$$a = \varphi(P, m, d) \tag{4.32}$$

як набір перемінних, зведених у ступені:

$$a = \varphi(P^a, m^b, d^c) \tag{4.33}$$

або

$$\varphi\left[\left(MLT^{-2}\right)^a, (M)^b, (L)^c\right] = LT^{-2}. \tag{4.34}$$

Складемо рівняння для показників ступеня:

для T $\quad -2a = -2;$

$M \quad a + b = 0;$

$L \quad a + c = 1.$

Звідси $a = 1; \quad c = 0; \quad b = -1.$

Тоді рівняння (4.32) приймає вид

$$a = \varphi(P^1, m^{-1}, d^0) \tag{4.35}$$

Отже,

$$a = c\frac{P}{m}, \tag{4.36}$$

де c – деяка, невизначувана методом розмірностей, постійна.

Отже, ми одержали, що прискорення не залежить від радіуса циліндра при заданій масі.

Покажемо, що метод розмірностей не байдужий до системи застосовуваних основних одиниць. Знайдемо прискорення в системі одиниць, де одиниця сили визначається не другим законом Ньютона, а законом всесвітнього тяжіння. У цій системі розмірність сили

$$[P] = L^{-2}M^2. \tag{4.37}$$

Рівняння розмірності, аналогічно (4.34), запишеться у виді

$$\varphi\left[\left(M^2L^{-2}\right)^a, (M)^b, (L)^c\right] = LT^{-2}. \tag{4.38}$$

Як бачимо, вираження абсурдне, тому що в обумовленої перемінної розмірність часу в ступені –2, тоді як у лівій частині воно взагалі відсутнє.

У чому ж справа? Справа в тім, що суть явища – прискорення під дією зовнішньої сили – вимагає для опису застосування другого закону Ньютона. Щоб задовольнити цій вимозі, необхідно в прийнятій нами системі одиниць у вираз для другого закону Ньютона додати інерційну постійну

$$[k_i] = L^{-3}MT^2. \tag{4.39}$$

Складемо нову таблицю фундаментальних перемінних:

Фундаментальна перемінна	Позначення	Формула розмірності
Прискорення	a	LT^{-2}
Сила	P	M^2L^{-2}
Маса циліндра	m	M
Діаметр циліндра	d	L
Інерційна постійна	k_i	$ML^{-3}T^{-2}$

Запишемо

$$a = \varphi(P^a, m^b, d^c, k_i^d) \tag{4.40}$$

і відповідно

$$\varphi\left[\left(M^2L^{-2}\right)^a,\ (M)^b,\ L^c,\ \left(ML^{-3}T^2\right)^d\right] = LT^{-2}. \qquad (4.41)$$

Складемо рівняння для показників ступеня:

для T $2d = -2$;

M $2a + b + d = 0$;

L $-2a + c - 3d = 1$.

Для чотирьох невідомих маємо три рівняння. Спростимо їх, виключивши b, c и d. Тоді $d = -1$; $b = 1 - 2a$; $c = 2a - 2$.

Підставляючи ці співвідношення у формулу (4.40), одержуємо

$$a = \varphi(P^a,\ m^{1-2a},\ d^{2a-2},\ k_i^{-1}). \qquad (4.42)$$

Поєднуючи перемінні з однаковими показниками ступеня, маємо безрозмірні комбінації

$$a = \left(\frac{m}{d^2k_i}\right)\varphi\left(\frac{Pd^2}{m^2}\right)^a. \qquad (4.43)$$

Звідси не очевидно, що діаметр циліндра не впливає на прискорення, як це нами отримано в (4.35). Ми ускладнили справу, невдало застосувавши основну систему одиниць.

Положення можна поправити, якщо внести ще одну основну одиницю, наприклад одиницю сили. Позначивши її розмірність через F, одержимо розмірність інерційної постійної:

$$[k_i] = FT^2M^{-1}L^{-1}. \qquad (4.44)$$

Вчиняючи звичайним способом, знаходимо

$$a = \varphi(P^a,\ m^b,\ d^c,\ k_i^d); \qquad (4.45)$$

$$\varphi\left[F^a,\ M^b,\ L^c,\ \left(L^{-1}M^{-1}T^2F\right)^d\right] = LT^{-2}. \qquad (4.46)$$

Склавши і вирішивши систему рівнянь, одержуємо

$$a = 1;\quad b = -1;\quad c = 0;\quad d = -1.$$

І остаточно –

$$a = C\,\frac{P}{mk_i}. \qquad (4.47)$$

Не можна думати, що введення додатково нових основних розмірностей завжди приведе до позитивного ефекту. І тут неможливо вказати яких-небудь постійно діючих рекомендацій. Швидше за все розумно порадити набратися терпіння для розгляду декількох варіантів.

Звернемося знову до приклада 4.3. Припустимо, що ми вирішили виразити показники ступеня через c, а не через d. Тоді одержуємо

$$d = 1 - c, \quad a = 1 + c; \quad b = 1 + c.$$

Підставляючи ці значення у формулу (4.28), знаходимо

$$\frac{P}{vd\mu} = \varphi'' \frac{vd\rho}{\mu}. \tag{4.48}$$

Формула так само вірна, як і (4.31), вона теж задовольняє π-теоремі, однак явно програє у фізичному змісті, тому що комбінація перемінних $P/(vd\mu)$ мало що виражає. Добуток в'язкості, довжини і швидкості й незвичайно, і незрозуміло. Розв'язання рівнянь щодо показника ступеня a дає ще одну мало корисну комбінацію $\rho D/\mu^2$.

Словом, потрібно ніколи не забувати, що багато розмірних систем можуть мати кілька рішень. Рішення усі будуть правильні, але їхня цінність неоднакова.

Іноді безрозмірні комбінації без особливої праці вдається одержати безпосереднім їх підбором виходячи з фізичного змісту. При цьому кожна перемінна повинна з'явитися хоча б один раз.

При аналізі та підборі фундаментальних перемінних, що характеризують явище, сигнал про неблагополуччя подає перемінна, котра має у своїй формулі розмірності основну одиницю, яка більш не зустрічається у формулах розмірності інших перемінних. Або ця перемінна зайва, або необхідно ввести якусь ще, пропущену величину, перемінну або розмірну постійну.

Багато в чому може допомогти введення в розгляд замість перемінних безрозмірних відносин параметрів – симплексів або безрозмірних величин. Наприклад, кутові величини, одинична деформація, відношення площин, діаметрів і т. п.

4.4. Підвищення точності експерименту за допомогою аналізу розмірностей

Отже, аналіз розмірностей дозволяє:

- зменшити число перемінних в експерименті;
- одержати деяке уявлення про характер взаємодії між перемінними. Тип функції цим методом визначити не можна;
- замінити натурний експеримент модельним.

В експериментальній роботі є один критерій, що впливає на всі дії та рішення – це точність. Яким образом точність впливає на набір безрозмірних комплексів?

У прикладі 4.3 можна було б одержати одну з трьох безрозмірних комбінацій: $P/(\rho v^2 d^2)$, $P/(vd\mu)$ або $\rho D/\mu^2$. Усі комплекси безрозмірні й правильні. Найбільш зручна в інженерній практиці перша комбінація. Розглянемо її переваги з погляду точності.

Покладемо, що співвідношення між комбінацією, що містить лобовий опір, і числом Рейнольдса є показовою функцією:

$$\frac{P}{\rho v^2 d^2} = k_1 \left(\frac{vd\rho}{\mu} \right)^a ; \tag{4.49}$$

$$\frac{P}{vd\mu} = k_2 \left(\frac{vd\rho}{\mu} \right)^b ; \tag{4.50}$$

$$\frac{\rho P}{\mu^2} = k_3 \left(\frac{vd\rho}{\mu} \right)^c . \tag{4.51}$$

де a, b і c – показники ступеня, а k_1, k_2 і k_3 – погоджувальні постійні.

Кожне з цих співвідношень неважко перетворити в будь-яке інше, наприклад: формулу (4.51) до виду

$$\frac{\mu^2}{v^2 d^2 \rho^2} \frac{\rho P}{\mu^2} = k_3 \left(\frac{vd\rho}{\mu} \right)^c \frac{\mu^2}{v^2 d^2 \rho^2} ,$$

$$\frac{P}{\rho v^2 d^2} = k_3 \left(\frac{vd\rho}{\mu} \right)^{c-2} .$$

Отримана рівність ідентична (4.49) при $k_1 = k_3$ і $a = c - 2$. Якщо ці умови виконуються, то завжди $k = \mu^a P / \left(\rho^{a+1} v^{a+2} d^{a+2} \right)$, і вибір будь-якої комбінації не робить впливу на обчислення k при будь-якій точності вимірів, якщо k визначається чисельним методом.

Звичайно на графік наноситься сукупність експериментальних точок. По сукупності знаходять вид функції. Точки усереднюються у виді найкращої кривої. Крива потім використовується для визначення показників ступеня та погоджувальних постійних. Найбільше точно криву можна побудувати методом найменших квадратів (НК) (див. гл. 7). Один з методів НК зв'язаний зі спрощенням: помилка або невизначеність зв'язана з однієї з перемінних – x або y, а не з обома перемінними. Використовуємо дану обставину – станемо вибирати безрозмірні комбінації таким чином, щоб усі помилки були сконцентровані в одному з комплексів. Цього завжди потрібно прагнути, хоча це й не завжди можливо. Так, якщо найбільш невизначеною величиною є в'язкість, то варто віддати перевагу комбінаціям формули (4.49): комплекс $\frac{P}{\rho v^2 d^2}$ не містить μ. Аналогічно для v віддається перевага (4.51).

Звичайно, в остаточному документі криву варто побудувати в координатах, найбільш зручних або традиційно прийнятих.

Глава п'ята
ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

5.1. Попередній експеримент

В експериментаторській роботі завжди варто передбачати час на пробні досліди. Ця початкова частина експерименту переслідує наступні цілі:

– знайомство дослідника з практикою експерименту і тренаж. Методика експерименту містить у собі набір інструкцій поведінки з об'єктом дослідження й апаратурою. Необхідно потренуватися у виконанні повторюваних операцій. Найчастіше відліки вимірів, які вироблені після тренажу, виявляються більш точними;

– перевірку роботи вузлів установки і вимірювального комплексу;

– визначення послідовності й інтервалів зняття даних, що безпосередньо впливає на точність результатів, зниження ефекту зовнішніх впливів;

– оцінку можливих похибок первинних вимірюваних величин і результату експерименту в цілому.

Останні два пункти прямо впливають на стратегію експерименту, його план. Оцінка похибок і деякі способи зменшення їх величини або виключення з розгляду нами запропоновані в гл. 2-4.

5.2. Послідовність і інтервали зняття даних

У багатьох експериментах можливість вибору послідовності зняття даних або мала, або відсутня. Така ситуація найчастіше виникає в натурних і природних експериментах. В інженерній справі, навпаки, майже завжди ми зустрічаємося з невідтворним експериментом. Такий експеримент неможливо змінити або повторити. Наприклад, перевірка на знос, на витривалість і т. п., коли властивості зразка прогресуюче погіршуються. Узагалі кажучи, всі експерименти невідтворні. Проте, будемо вважати експеримент відтвореним, якщо зміни, внесені в процес експерименту, настільки малі, що їх неможливо знайти. Думаємо, що в такому експерименті за бажанням прилад можна повернути в будь-який попередній стан. У такому експерименті допускається вибір послідовності умов експерименту і, відповідно, зняття даних.

Плани можуть бути двох видів:

– *послідовний*, при якому спочатку береться верхнє або нижнє граничне значення незалежної випадкової величини, потім воно міняється через визначені інтервали до досягнення другого граничного значення;

– *випадковий*, при якому обрані значення варіюються випадковим образом (рандомізіровано), беручи то менше, то більше значення.

В даний час інженери майже у всіх випадках віддають перевагу послідовному плану. Очевидно, цей план доцільно застосовувати при випробуваннях матеріалів, деяких технологічних перевірках, перевірках в умовах радіації та т. ін.

І все-таки, для багатьох інженерних експериментів найкраще підходить частково або цілком випадковий план. Рандомізірований план дозволяє виключати вплив зовнішніх умов на експеримент, що не підвладно послідовному плану. Природні ефекти можуть виявляти тенденцію до зміни в процесі експерименту (атмосферний тиск, температура, вологість повітря і т. п.). Якщо незалежна перемінна x змінює своє значення послідовно, то залежна перемінна z може змінюватися як унаслідок зміни x, так і внаслідок зміни зовнішніх умов. Якщо ж в експерименті x змінювати випадковим образом, то виключається можливість помилково прийняти вплив зовнішнього впливання на вплив перемінної x.

Таким чином, можна виключати вплив на результат: зростаючої з плином часу навички експериментатора й утоми наприкінці роботи; механічних впливів (наприклад, "заїдання" у приладі); теплових полів, унаслідок несталих станів, і т. п. Тому послідовний план доцільно застосовувати лише у випадках, коли або експеримент невідтворний, або якщо послідовність повинна включатися в число основних факторів експерименту для виявлення деякого ефекту, що буде схований при рандомізірованом плані (наприклад, переходи в гистерезисах, переходи від турбулентності до ламінарного потоку і т. ін.), або коли рандомізація недоцільна з причин вартості, тривалості або складності експерименту. В усіх інших випадках варто віддавати перевагу рандомізірованим експериментам. Для рандомізації експериментів прийнятний "ігровий" метод. Наприклад, обрані комбінації умов пронумерувати та провести жеребкування або кидати гральні кісти. Цілком логічно застосовувати таблиці випадкових чисел.

Знайдена послідовність зняття відліків в експерименті ще нічого не говорить про інтервали між відліками, а виходить, і про необхідний обсяг експериментального матеріалу. Точний обсяг установити складно: при занадто малому обсязі неможливо установити залежність, при занадто великому – можна втратити, не помітити, деякий слабкий ефект. Крім того, експеримент обходиться дорого, тривалість впливає на точність.

Задача полягає у виборі з нескінченного числа окремих точок кривої шуканої залежності деякого кінцевого практично прийнятного числа точок, що представляють дану функцію. Очевидно, вибір експериментальних точок починається з визначення екстремальних показань вимірювальної апаратури, тобто з одержання *області досліджуваних значень*, що охоплює всю сукупність даних. До числа типових обмежень, що накладаються на устаткування, відносяться: граничний тиск, створюваний компресором, температура насичування при термодифузійній обробці, гранична швидкість обертання, границі виміру зусиль динамометром та ін. Вони зазвичай відомі до експерименту й уточнюються в попередньому експерименті.

У випадку функції *xy* усі точки знаходяться між двома граничними точками кривої. Область завдання функції *xyz* – ділянка площини, якою можна представити як множену функцій *xy* (рис. 20). Вибір інтервалів між точками функції *xy* здійснюється на основі двох критеріїв:

– відносна точність даних на різних ділянках області досліджуваних значень;

– характер експериментальної функції.

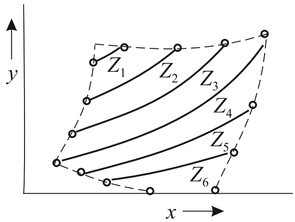

Рис. 20. Завдання області функції xyz

Відносна точність на всьому протязі кривої повинна бути однакової. Тому, якщо аналіз похибок (гл. 2 і 3) указав ділянку з найменшою точністю, то варто заповнити цю ділянку великою кількістю точок. При цьому, очевидно, можна користуватися правилом: чотири точки дають подвійну точність, при дев'ятьох точках точність зростає в три рази і т. ін.

Характер експериментальної функції в інженерних експериментах часто відомий. Тому, якщо аналіз похибок не накладає своїх вимог, те розумно вибрати однакові інтервали між точками кривої. При цьому інтервали значень незалежної та залежної перемінних, як правило, не однакові.

Якщо ΔS – відрізок кривої, то для будь-якої безперервної диференційованої функції загальне вираження для ΔS має вигляд

$$\Delta S = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \Delta x. \tag{5.1}$$

Визначаючи таким чином інтервал за інтервалом, одержують компактний, логічно обґрунтований графік (рис. 21).

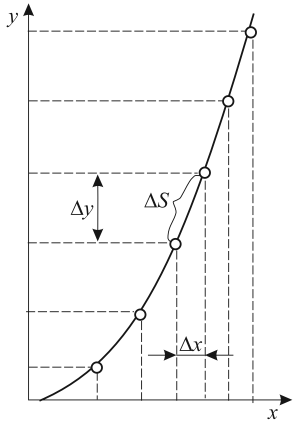

Рис. 21. Графік з однаковими інтервалами між експериментальними точками

Доречно помітити, що часом раціонально призначати однаковими інтервали між значеннями незалежної перемінної та залежної. Але частіше в таких випадках одержуємо занадто мало точок або на початку, або наприкінці кривої.

На жаль, метод і формула (5.1) можуть бути застосовані далеко не для усякої функції. В експерименті звичайно ставиться задача находження коефіцієнта зв'язку. Тому при використанні формули (5.1) необхідно знати цей коефіцієнт. І якщо він не відомий, то варто застосовувати інші методи, які не потребують повного знання досліджуваної функції, наприклад: методи перетворення функції до лінійного виду.

Єдиною причиною розгляду інтервалів між точками є прагнення до того, щоб у будь-якій частині експериментальній кривій або площині мати таку ж точність, як і в будь-який іншій.

5.3. Виключення впливу зовнішніх перемінних

При будь-якій кількості факторів в експерименті на результат впливають також непрогнозовані зовнішні фактори. У тих випадках, коли нам вдається ідентифікувати дискретні зовнішні перемінні, для виключення (зменшення) їх впливу можливо використовувати методи рандомізації [2].

Припустимо, необхідно визначити оптимальну швидкість обробки для нового різця у виробничих умовах: максимальний вихід продукції, відсоток браку заданий. Це однофакторний експеримент: швидкість обробки незалежна перемінна, вихід продукції – залежна. Однією з зовнішніх перемінних виступає робітник, що відрізняється друг від друга за майстерністю, темпераменту, фізичній силі і т. п. Тому вибір єдиного, "середнього", робітника для проведення експерименту не має смислу. Тоді виберемо випадковим образом чотирьох робітників, кожний з яких буде працювати повну зміну при заданій швидкості обробки. Щоб збалансувати експеримент, виберемо чотири різні швидкості обробки для того, щоб кожен робітник за чотири дні випробував кожну з чотирьох швидкостей; результати, отримані для кожної швидкості, можна усереднити. Цим досягається рандомізація експерименту за такою зовнішньою перемінною, як робітник. Позначивши швидкості цифрами 1, 2, 3 і 4, а робітників – буквами *A*, *B*, *C* и *D*, можна одержати наступний план:

Робітник	Дні тижня			
	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер
A	1	2	3	4
B	1	2	3	4
C	1	2	3	4
D	1	2	3	4

Такий план, безумовно, недосконалий, тому що не враховує впливу послідовності зміни умов експерименту. Інтерес, боязкість, що викликані в робітника новим інструментом у понеділок, до четверга можуть ослабнути, з'являться навички – і з цієї причини продуктивність може закономірно змінитися. Виходить, потрібно провести рандомізацію за днями тижня. Для цього досить провести жеребкування номерів швидкості обробки, тобто установити послідовність застосування тієї або іншої швидкості:

Робітник	Дні тижня			
	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер
A	4	2	1	3
B	2	3	1	4
C	3	2	1	4
D	1	3	4	2

Це більш досконалий план, але його можна поліпшити. При рандомізації за методом "промах-влучення" швидкості 1 і 4 випали в основному на останні два дні. Отже, ослаблення інтересу до завершуючого етапу експерименту може привести до підвищення продуктивності на середніх швидкостях, що фактично взагалі не зв'язані зі зміною швидкості. Зробимо повну рандомізацію експерименту таким чином, щоб у даний день кожна швидкість обробки зустрічалася тільки один раз і щоб жоден робітник не використовував ту саму швидкість обробки більше одного дня:

Робітник	Дні тижня			
	Понеділок	Вівто-рок	Середа	Четвер
A	1	2	3	4
B	3	4	1	2
C	2	1	4	3
D	4	3	2	1

Ми одержали так називаний латинський квадрат.

Можна ще далі удосконалити експеримент. Якщо кожного робітника закріпити за даним верстатом (верстати можуть значно відрізнятися друг від друга), то внаслідок розходжень між верстатами може з'явитися систематична похибка. Позначаючи верстати *X*, *Y*, *Z* і *W*, розподілимо умови експерименту між верстатами таким чином, щоб кожен робітник обслуговував кожен верстат тільки один день і щоб на кожній швидкості кожен верстат працював тільки один день:

Робітник	Дні тижня			
	Понедель-ник	Вторник	Среда	Четверг
A	1*W*	2*X*	3*Z*	4*Y*
B	3*X*	4*W*	1*Y*	2*Z*
C	2*Y*	1*Z*	4*X*	3*W*
D	4*Z*	3*Y*	2*W*	1*X*

Ми одержали так називаний греко-латинський квадрат.

Часто для звичайних інженерних експериментів цілком достатньо побудувати план за методом греко-латинського квадрата 3×3. Наприклад, при швидкостях різання 1, 2, 3, 4, 5 і 6, робітників *A*, *B* і *C* і верстатах *X*, *Y* і *Z* можна скоротити час експерименту вдвічі, побудувавши два квадрати 3×3:

Робітник	Дні тижня					
	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця	Субота
A	1*X*	3*Z*	5*Y*	2*X*	4*Z*	6*Y*
B	3*Y*	5*X*	1*Z*	4*Y*	6*X*	2*Z*
C	5*Z*	1*Y*	3*X*	5*Z*	2*Y*	4*X*

Тут шість швидкостей розподілені між двома блоками з визначеним перекриттям. Цей план не є таким же рандомізірованим, як один квадрат з 36 осередками, складений для шести робітників, шести верстатів і шести робочих днів, але цілком задовільний.

5.4. Багатофакторні експерименти (класичні плани)

У багатофакторних експериментах можливий вибір плану одного з двох типів: класичного або факторного. Класичний план застосовується у всіх областях. Факторний план часто буває коротше, завжди точніше (при однаковій тривалості експерименту), але знаходить менш широке застосування. Класичний план полягає в тому, що всі незалежні перемінні, крім однієї, вважають постійними, а ця одна перемінна змінюється у всьому інтервалі значень. Знаходиться залежність Z від змінюваної перемінної (наприклад, X). Змінюючи наступну перемінну (наприклад Y), вважаючи інші перемінні постійними, знаходять залежність Z від Y, тобто класичний багатофакторний експеримент являє собою послідовність однофакторних експериментів. Таким шляхом знаходяться порівняно прості функції:

$$Z = AY^n + BX^m;\ \ Z = AY^nX^m;\ \ Z = AYB^{cx}\ \text{ і т. ін.}$$

План двохфакторного експерименту, у якому кожен фактор береться на п'ятьох рівнях, схематично можна представити так:

Рівні перемінної Y

Рівні перемінної X	1	2	3	4	5
5			×		
4			×		
3	×	×	×	×	×
2			×		
1			×		

Зірочка позначає комбінації умов, при яких повинен проводитися експеримент. У випадку більш складних функцій малоймовірно, що за допомогою обмеженого плану, коли обидві перемінні X і Y по черзі беруться на одному рівні, удається визначити ці залежності. Необхідно розглянути кілька рівнів X и Y, наприклад:

Рівні перемінної Y

Рівні перемінної X	1	2	3	4	5
5	×	×	×	×	×
4			×		×
3	×	×	×	×	×
2	×		×		×
1	×	×	×	×	×

При класичному експерименті – частковому або повному – план може бути незбалансованим. Так, якщо залежність Z від перемінної X більш істотна, чим від Y, то можна, наприклад, узяти десять рівнів перемінної X і усього три рівні перемінної Y.

5.5. Багатофакторні експерименти (факторні плани)

У п. 5.3 показано використання греко-латинського квадрата в однофакторному експерименті з декількома зовнішніми експериментами. Ці плани можна застосовувати також для інженерних експериментів з декількома факторами. Застосування факторних планів обмежені двома класами робочих формул:

– *перший клас* – формули, у яких залежна перемінна Z є сумою функцій від незалежних перемінних:

$$Z = f_1(X) + f_2(Y) + f_3(W), \tag{5.2}$$

де f_1, f_2 і f_3 – функції будь-якої складності. Цей клас формул рідко застосовується в інженерній практиці;

– *другий клас* – формули, що представляють собою добуток окремих функцій незалежних перемінних:

$$Z = f_1(X) f_2(Y) f_3(W), \tag{5.3}$$

Другий клас застосовується часто та є найбільш важливим загальним співвідношенням у наукових дослідженнях.

Розглянемо план факторного експерименту. Нехай у збалансованому експерименті перемінні X, Y і W беруться на трьох рівнях, і латинський квадрат має вигляд

	Y_1	Y_2	Y_3
X_3	W_1	W_2	W_3
X_2	W_2	W_3	W_1
X_1	W_3	W_1	W_2

Нехай нам відомо (з теорії, за інтуїцією або з минулого досвіду), що формула (5.3) є загальним співвідношенням, що описує вплив перемінних X, Y і W на Z. Запишемо три логарифмічних рівняння для рядка, що містить X_1:

$$(\lg R)_a = \lg f_1(X_1) + \lg f_2(Y_1) + \lg f_3(W_3); \tag{5.4а}$$

$$(\lg R)_b = \lg f_1(X_1) + \lg f_2(Y_2) + \lg f_3(W_1); \tag{5.4б}$$

$$(\lg R)_c = \lg f_1(X_1) + \lg f_2(Y_3) + \lg f_3(W_2). \tag{5.4в}$$

Підсумовуючи ці три рівняння, одержуємо

$$\sum \lg R_{X_1} = 3\lg f_1(X_1) + \lg[f_2(Y_1) f_2(Y_2) f_2(Y_3)] + \lg[f_3(W_3) f_3(W_2) f_3(W_1)].$$

Цю же процедуру можна повторити для середнього рядка, що містить X_2:

$$\sum \lg R_{X_2} = 3\lg f_1(X_2) + \lg[f_2(Y_1) f_2(Y_2) f_2(Y_3)] + \lg[f_3(W_2) f_3(W_3) f_3(W_1)].$$

Аналогічне рівняння знаходиться і для рядка, що містить X_3.

Отримані рівняння можна записати в наступному виді:

$$\lg f_1(X_1) = \frac{\sum \lg Z_{X_1}}{n} - \text{const}\ ; \tag{5.5а}$$

$$\lg f_1(X_2) = \frac{\sum \lg Z_{X_2}}{n} - \text{const}\ ; \tag{5.5б}$$

$$\lg f_1(X_3) = \frac{\sum \lg Z_{X_3}}{n} - \text{const}\ . \tag{5.5в}$$

Для квадрата 3×3 $n = 3$, для квадратів більш високого порядку n дорівнює числу рівнів. Таким чином, якщо логарифми результатів усереднюються за яким-небудь одному рівні перемінних X, Y або Z, то вплив змінюваних факторів (Y і Z у даному випадку) залишається незмінним при переході від одного рівня X до іншого, тобто всі зміни усередненого логарифма результату повністю обумовлені впливом лише однієї перемінної X. Очевидно, те ж можна зробити і для перемінної Y, і для перемінної W. Якщо додати ще одну перемінну, наприклад V, то одержимо греко-латинський квадрат, а вплив її на результат Z підкоряється цьому ж правилу.

Якщо до початку експерименту відомо, що робоча формула має вигляд суми (5.2), то вплив перемінних на результат знаходиться шляхом усереднення відповідних значень Z, а не $\lg Z$. Якщо не відомо, до якого класу відноситься функція, то рекомендується не проводити факторний експеримент, а застосовувати традиційний класичний метод.

Аналіз різних функцій можна виконувати за допомогою графіків залежності $\lg Z_{ср}$ від $\lg X$ або беручи антилогарифми та досліджуючи залежність $Z_{ср}$ від X чисельними методами.

Нехай отримані таблиці або криві для Z як функції кожної з перемінних X, Y, W окремо. Відповідно до формул (5.5) за допомогою таких кривих або таблиць одержимо

$$Z_X = kf_1(X);$$
$$Z_Y = k'f_2(Y);$$
$$Z_W = k''f_3(W),$$

де Z – антилогарифм $\sum \lg Z_X / n$; k – постійна, вхідна у формули (5.5), складена зі значень Y і W, що виключаються при використанні латинського квадрата, а $f_1(X)$ – функція перемінної X.

Якщо вирішити ці три рівняння відносно $f_1(X)$, $f_2(Y)$ й $f_3(W)$ і підставити їх у формулу (5.3), то одержимо

$$Z = k(Z_X)(Z_Y)(Z_W), \tag{5.6}$$

де $k = (k\,k'\,k'')^{-1}$. Якщо відомо остаточний результат Z і за допомогою кривих або таблиць для перемінних X, Y і W можна визначити окремі значення Z, то можна обчислити і k.

Приклад 5.1. Група студентів вивчає вплив швидкості, навантаження і температури води в системі охолодження на робочі характеристики двигуна внутрішнього згоряння, установленого на іспитовому стенді. Попередньо встановлено, що досліджувані характеристики зв'язані співвідношенням типу (5.3), тому можливим планом експерименту є латинський квадрат з усередненими логарифмами результатів. Як скласти план цього експерименту і яких даних можуть бути отримані?

Рішення. Студенти вибрали квадрат 4×4, що має наступну структуру:

Навантаження на динамометр, кг	Частота обертання			
	1400	1600	1800	2000
	Температура, °С			
87,5	43	57	71	93
66,0	93	43	57	71
44,0	71	93	43	57
22,0	57	71	93	43

Спочатку необхідно переконатися, що всі 16 режимів роботи двигуна прийнятні для дослідницького устаткування. Помітимо, що не всі латинські квадрати практично можливі. Квадрат, у якому у верхньому рядку буде така послідовність значень температури, як 93, 71, 57 і 43 °С, неможливий, тому що система охолодження не в змозі підтримувати мінімальну температуру 43 °С при максимальному навантаженні та максимальній швидкості.

Після проведення експерименту при зазначених 16 комбінаціях умов був складений квадрат, що містить значення залежної перемінної, котрою є витрати пального в кг/год.:

21,2	24,5	28	29
14	16	19	22
8	11	14	16
6	8	8	12

Якщо даному експерименту відповідає загальне співвідношення (5.3), то необхідно обчислити середній логарифм, а потім визначити антилогарифми, тобто знайти витрату пального.

Зміна навантаження

	Логарифм витрати пального				Сума	Середнє	Антилогарифми
T = 43 °С	1,326	1,392	1,747	1,462	5,625	1,406	25,5
T = 93 °С	1,146	1,204	1,279	1,342	4,971	1,243	17,5
T = 71 °С	0,903	1,041	1,146	1,204	4,295	1,072	11,9
T = 57 °С	0,778	0,903	0,903	1,079	3,664	0,916	8,2

Сума	4,154	4,538	4,775	5,088	4,755	1,189	15,5...43 °С
Середнє	1,038	1,135	1,194	1,272	4,653	1,163	14,5...57 °С
Антилогарифми	10,9	10,9	10,9	10,9	4,595	1,149	14,1...71 °С
	Зміна швидкості				4,552	1,138	13,8...93 °С

Зміна температури

Після цього знаходяться витрата пального, питома витрата пального, коефіцієнт корисної дії та будуються графіки (рис. 22–24). Ці криві не можна використовувати безпосередньо для визначення, наприклад, коефіцієнта корисної дії при даному навантаженні, оскільки вони дають усереднені, а не дискретні значення. За допомогою формули (5.6) обчислимо постійну k, а потім скористаємося цією формулою для інтерпретації кривих. У верхньому рядку і другому ліворуч стовпці латинського квадрата отримані дані: навантаження 87,5 кг, частота обертання 1600 об/хв, температура 57 °С, витрата палива при такій комбінації умов складає 24,5 кг/год. З кривих для витрати пального або на основі аналізу квадрата можна знайти, що при навантаженні 87,5 кг середня витрата пального складає 25,5 кг/год і що ця витрата отримана в результаті усереднення логарифмів, унаслідок чого, як було показано, виключається вплив змін частоти обертання і температури. Аналогічно, середня витрата пального при 1600 об/хв складає 13,6 кг/год, а при 57 °С – 14,5 кг/год. Таким чином, за формулою (5.6) знаходимо

$$k = \frac{24{,}5}{25{,}5 \cdot 13{,}6 \cdot 14{,}5} = 0{,}00488.$$

Дане значення k можна перевірити, повторивши обчислення для будь-якої іншої комбінації умов, узятої з латинського квадрата. Наприклад, для комбінації умов, записаної в нижньому рядку і крайньому правому стовпці (2000 об/хв, 43 °С, 22,0 кг)

$$k = \frac{12}{8{,}2 \cdot 18{,}7 \cdot 15{,}5} = 0{,}0051.$$

Значення постійної k, обчислені для всіх 16 комбінацій умов, приводяться в наступній таблиці:

0,0049	0,0049	0,0050	0,0044
0,0053	0,0043	0,0048	0,0048
0,0044	0,0046	0,0049	0,0050
0,0048	0,0051	0,0052	0,0051

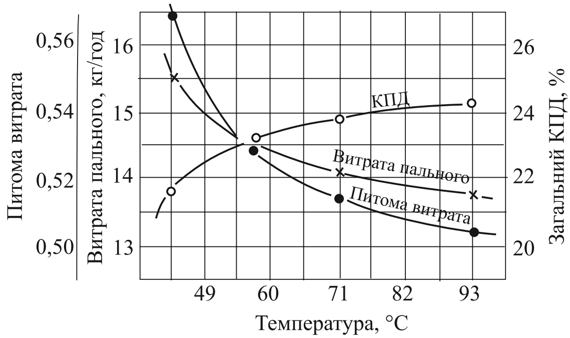

Рис. 22. До приклада 5.1

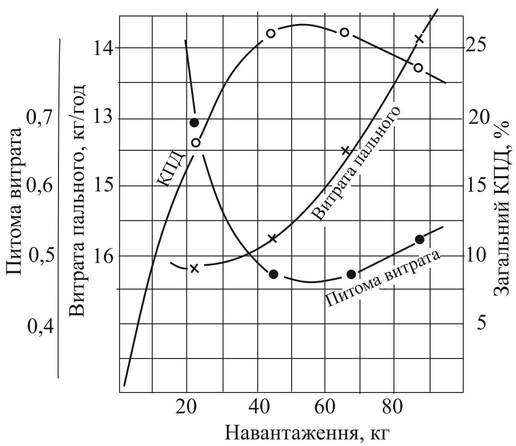

Рис. 23. До приклада 5.1

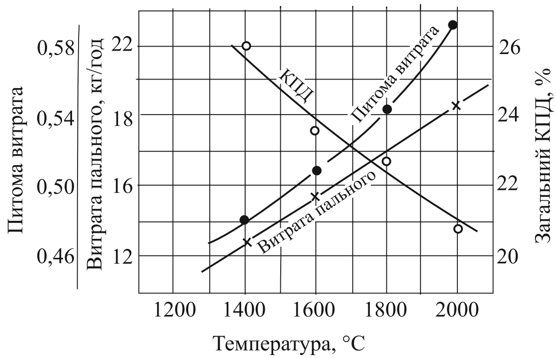

Рис. 24. До приклада 5.1

Коливання значення постійної k свідчать про те, що отримані дані істотно відрізняються від теоретичного результату, обумовленого за формулою (5.3). Ці відхилення можуть викликатися тим, що або формула (5.3) не є точним функціональним співвідношенням між перемінними, або значення перемінних не фіксуються точно на заданих рівнях, або точність виміру недостатня. Середнє значення постійної k для цих 16 комбінацій умов дорівнює 0,00485, а максимальне відхилення щодо середнього складає 0,00055, або 11 %. В експерименті відхилення, видимо, обумовлені, головним чином, труднощами контролю за частотою обертання і температурою при одержанні даних про витрату пального. За допомогою цього середнього значення k можна тепер одержати відповідь на ряд питань, зв'язаних з роботою двигуна. Наприклад, максимальна витрата пального має місце при максимальній частоті обертання 2000 об/хв, мінімальній температурі 43°С и максимальному навантаженню 87,5 кг і складає

$$G_{\max} = 0{,}00485 \cdot 25{,}5 \cdot 15{,}5 \cdot 18{,}7 = 35{,}6 \text{ кг/год.}$$

У дійсності ж така комбінація умов не розглядалася. Невизначеність результату складає біля ±11 %, і ця погрішність характеризує, очевидно, 90...95 % усіх даних.

Основною перевагою багатофакторних експериментів при факторному плануванні є більш висока точність при такому ж або трохи більшому обсязі експерименту.

Основним недоліком є те, що вибір великого числа комбінацій умов, при яких потім проводиться експеримент, здійснюється при відсутності даних про робочу область, а також неможливість застосування одержуваних графіків без переходу до загальних функціональних співвідношень.

Глава шоста
СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ В ЕКСПЕРИМЕНТІ

Перш ніж приступати до опису методів статистичного аналізу, необхідно зробити деякі зауваження, які зв'язані з перевіркою та виключенням даних, що значимо відрізняються.

Єдиним способом попередження появи серйозних похибок є планування декількох перевірок точності й прийнятності одержуваних даних.

6.1. Виявлення й усунення грубих і систематичних похибок

Симетрія апаратури

Якщо вам здається, що в апаратурі мається якась симетрія, тобто заміна однієї величини на протилежну або перестановка двох її частин не повинна приводити до якої-небудь зміни або повинна приводити до ефекту, який передбачається, то обов'язково зробіть таку заміну чи перестановку:

1. Допустимо, що за допомогою потенціометра проводиться порівняння двох опорів і нам нічого не відомо про термоелектричний ефект. Здається, схема повинна бути симетричної щодо напрямку струму, тобто при зміні напрямку струмів в обох ланцюгах баланс не повинний порушуватися. Але на ділі це виявляється не так. Тим самим виявляється наявність чогось, що нами не враховується. При дослідженні знаходимо причину – термо-е.д.с, що не залежить від напрямку основних струмів у схемі. Тоді усунути похибку можна простим усередненням відліків, що відповідають двом станам балансу.

2. При вимірюванні теплопровідності матеріалу потрібно вимірювати різницю температур $\Delta\theta$ між P и N безпосередньо в даних точках, двома термометрами. У силу симетрії, помінявши термометри місцями, ми не повинні змінити результату. Але переконуємося, що це не так, виявляючи тим самим хибність показників. Якщо різниця $\Delta\theta$ мала, то її величина, яка отримана на підставі однієї лише пари показань термометрів, буде істотно перекрученою. Помінявши термометри місцями і взявши потім середнє з двох значень $\Delta\theta$, ми помітно зменшимо похибку.

Рівняння балансу

Найбільш широке застосування при перевірках знаходять рівняння балансу і рівняння збереження: енергії (першій закон термодинаміки), маси, кількості руху і т. п.

До числа досліджень, де можливе використання рівнянь балансу, відносяться наступні: потік енергії в теплообмінниках, у зоні різання металів, струм в електричних ланцюгах, збереження загальної маси в гідравлічних системах і т. ін.

Приклад 6.1. Ваговий дозатор показує витрату, рівну 6,80 кг води в 1 хв (ρ = 1,0 г/см^3), а об'ємний витратомір, встановлений у тому же трубопроводі, показує 7,65 дм^3/хв. Потрібно знайти ступінь порушення балансу і відносну похибку, думаючи, що показання вагового дозатора точні.

Рішення. Рівняння збереження маси має вигляд

$$\text{Час} \times \text{Вага} = \text{Об'ємна витрата} \times \text{Щільність}$$

або $1{\cdot}6{,}80 = 7{,}65{\cdot}1{,}0$; $6{,}80 \neq 7{,}65$, тобто відхилення показань складає 7,65 – 6,80 = = 0,85 кг/хв, а відносна похибка дорівнює 0,85/6,80 = 12,5 %.

За допомогою рівнянь балансу можна визначити також і джерела похибок [44].

Перевірка похибок методом екстраполяції

Навіть до проведення експерименту, тобто до одержання експериментальної кривій, часто можливо одержати достовірні точки, керуючись теорією та здоровим глуздом. Так, ККД будь-якої машини при нульовому навантаженні завжди дорівнює нулю, незалежно від того, яке значення він приймає в інших умовах. Відомо, що, зменшуючи або збільшуючи зміст компонентів сплавів *A* і *B*, можна оцінити властивості обох компонентів. У будь-яких пристроях вимірювання витрати, де витрата залежить від величини напору, крива залежності витрати від напору повинна проходити через початок координат. Незважаючи на невизначеність і можливі похибки, неминучі при екстраполяції, часто цей метод дозволяє досить надійно перевіряти відповідність отриманих даних. Графік варто будувати як можна точніше. Система координат звичайно вибирається так, щоб функція стала лінійною. Основним недоліком екстраполяції є неможливість визначити кривизну графіка за межами області даних. Тут може допомогти тільки знання фізичного змісту функції, інакше похибки начебто вказівок на рис. 25 неминучі.

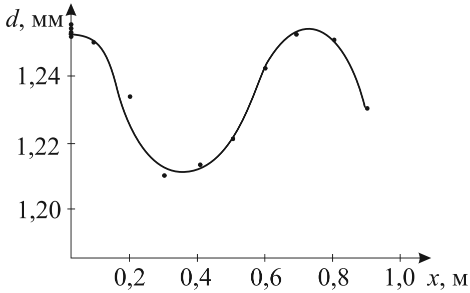

Рис. 25. До приклада 6.1

Повторення вимірів і похибка старіння

Найбільш розповсюдженим методом перевірки відповідності експериментальних даних є проведення повторних вимірів при незмінних умовах експерименту.

На заняттях у лабораторії технічних вимірів до викладача звертається студент. Він виміряв оптичним кутоміром кутову міру й одержав такі результати:

$$36°30' \quad і \quad 36°5'.$$

Точність вимірів він оцінює приблизно в 5' і робить висновок, що один з результатів не вірний. Студент запитує викладача, який із двох результатів варто вважати правильним. Але таке питання не має смислу: ціль експерименту – що-небудь знайти. Студент же так нічого і не знайшов (цілком можливо, що обидва результати не вірні). У подібних випадках необхідно провести додаткові вимірювання. Вимірювання варто повторювати до тих пір, поки результати не придбають якийсь смисл. Якщо наступний вимір дає 36°25', то можна буде подумати, що, імовірно, не вірний другий результат. Близький до цих значень третій результат майже цілком переконає вас у правильності першого відліку. Але ж, не подумавши, ви могли просто усереднити два значення й одержати невірний результат.

Таким чином, вимірювання окремої величини необхідно повторити принаймні ще один раз. Але при здійсненні вимірювання пари величин *X* і *Y*, по яких хочемо визначити криву або нахил прямій і т. п., немає необхідності робити повторні відліки, тому що мірою похибки служить розкид точок відносно "найкращої" лінії, хоча для перевірки непогано повторити кілька разів вимірювання величини *Y* при декількох значеннях *X*. Іноді кориснiше буває для виключення похибки старіння, дрейфу в приладі "прогнати" вимірювання в зворотному напрямку. До речі, якщо відомо, що для приладу суттєві ефекти старіння, то його ставлять на випробування по витривалості, довговічності і т. ін. Повторні вимірювання для виключення ефекту старіння або для інших цілей неважко вводити в рандомізіровану схему. В цьому випадку спочатку рандомізірують основну послідовність комбінацій умов, а потім з рівними інтервалами розташовують повторні випробування.

Нехай потрібно рандомізіровать експеримент (комбінація умов пронумеровані):

Рівні перемінної *Y*

		1			
		2			
6	7	3	8	9	Рівні перемінної *X*
		4			
		5			

За допомогою ігрового методу або за допомогою таблиць випадкових чисел отримана наступна послідовність:6, 2, 8, 4, 9, 5, 1, 3, 7. Додамо повторні вимірювання, наприклад 1′, 6′, 9' і 5′. Остаточно план експерименту має вигляд 6, 2, 1′, 8, 4, 6′, 9, 5, 9′, 1, 3, 5', 7.

Виключення значимих відліків

Рідкий експеримент обходиться без того, щоб не з'явилося хоча б одне значення, яке різко виділяється від інших або точка, що відхиляється, і відразу ж підозрюється як помилкова.

Існує достатня кількість критеріїв для оцінки права на виключення точки. Загальним для них варто вважати то, що якщо критерій обраний, то з його допомогою варто перевіряти всі точки, навіть ті, котрі здаються цілком благополучними. Крім того, можна досить рішуче відкидати точки, що відхиляються, у середині кривій і, навпаки, дуже обережно виключати точки по кінцях кривої: може виявитися, що ці відхилення зв'язані з початком нової гілці кривій. Очевидно, наступне правило можна взяти за основу:

Точки, що відхиляються, варто виключати, користуючись статистичним критерієм, і тільки в тому випадку, якщо вони знаходяться в середній частині графіка.

Нижче приводяться кілька критеріїв, що мають як фізичну, так і статистичну природу.

1. Незадовільний контроль. Виключення точки розумно, якщо вона відповідає зафіксованим моментам підтримки умов експерименту: короткочасне збільшення напруги в мережі, тиску в трубопроводі й т. п.

2. Явна несправність приладу. Якщо останні кілька точок, отримані у визначений день або у визначеній серії випробувань, різко відхиляються і, крім того, розподілені випадковим образом (у рандомізірованому експерименті), то можна чекати, що вимірювання були виконані неправильно і точки треба відкинути.

3. Порушення статистичного критерію. Критерій Романовського. Якщо в ряді вимірів X_1, X_2, ..., X_k, ... X_n результат вимірювання є грубим, то варто знайти середнє вибірки X і середньоквадратичне відхилення S для групи (n – 1) ряду вимірів. Потім визначаємо вираження

$$\frac{\left(X_k - \overline{X}\right)}{S}. \tag{6.1}$$

Для спрощення практичних розрахунків використовується таблиця значень величини t_β (дод. 3). Користуючись цією таблицею, можна знайти такі значення $\varepsilon = t'_\beta S$, для яких

$$P\left[\left(X_k - \overline{X}\right) \geq \varepsilon\right] = \beta, \tag{6.2}$$

тобто задаючись імовірністю β, що забезпечує практичну неможливість події, можна знайти величину інтервалу ε, що є критерієм грубої похибки.

Приклад 6.2 [5]. При вимірюванні товщини покриття кремнієвих пластин отримані наступні результати, мкм:

3,68	5,08	2,81	4,43
3,11	2,95	4,65	3,43
4,76	$\boxed{6{,}35}$	3,27	3,26
2,75	3,78	4,06	2,48
4,15	4,49	4,51	4,84

Результат 6,35 мкм викликає сумніву в його випадковості.

Рішення. Після виключення цього результату знаходимо по відлікам, що залишились $\overline{X}$ і S:

$$\overline{X} = \frac{72{,}51}{19} = 3{,}82 \text{ мкм};$$

$$S = \sqrt{\frac{11{,}6851}{19}} = 0{,}784 \text{ мкм}.$$

Визначаємо

$$t_\beta = \frac{\left(X_к - \overline{X}\right)}{S} = \frac{6{,}35 - 3{,}82}{0{,}784} = 3{,}227.$$

По табл. дод. 3 для $n = 19$ і $\beta = 0{,}01$ знаходимо значення $t'_{\beta} = 2{,}953$, отже,

$$P\left[\left(X_{к} - \overline{X}\right) \geq 2{,}953S\right] = 0{,}01.$$

Але для $t_{\beta} = 3{,}227$ $\beta < 0{,}005$. Тому $P\left[\left(X_{к} - \overline{X}\right) \geq 3{,}227S\right] < 0{,}005$. Значимість досить мала, щоб вважати, що значення 6,35 не могло бути отримане тільки в силу випадкової похибки і його потрібно відкинути.

6.2. Здоровий глузд при визначенні середнього та середньоквадратичного відхилення

Нижче в таблиці представлені дані вимірювання діаметра d проводу в різних точках x його довжини [38]. Потрібно визначити найкраще значення діаметра та середньоквадратичну похибку окремого вимірювання.

Довжина, м	Діаметр, мм	Довжина, м	Діаметр, мм
0,0	1,259	0,3	1,209
0,0	1,263	0,4	1,214
0,0	1,259	0,5	1,225
0,0	1,261	0,6	1,246
0,0	1,258	0,7	1,258
0,1	1,252	0,8	1,256
0,2	1,234	0,9	1,233

У студента *X* немає ніяких сумнівів. Йому говорили, що найкраще значення деякої величини – середнє із серії вимірів, і в нього є формула для обчислення середньоквадратичної похибки. Він радий старатися, і дотримує цим правилам. Він знаходить середнє з усіх значень діаметра, що виявилося рівним 1,245 мм, і обчислює величину середньоквадратичного відхилення, що виявилася рівної 0,020 мм.

А от студент *Y* зауважує, що результати вимірів змінюються не випадковим образом, і тому будує графік (див. рис. 25). Тепер ясно, що зміни носять деякий систематичний характер. Йому зрозуміло, що середнє по усіх вимірах не має смислу. При $x = 0$ діаметр був обмірюваний 5 разів, так що значення при $x = 0$ було б узяте з занадто великою вагою. Тому п'ять значень він заміняє їх середнім, рівним 1,260. Тепер він має набір з десяти величин і, узявши їхнє середнє значення, одержує як найкращу оцінку 1,239 мм. Але він йде ще далі. Оскільки діаметр явно змінюється по довжині проводу, розкид значень d у всьому інтервалі зміни x не має нічого загального із середньоквадратичною похибкою окремого виміру. Щоб знайти останню, він визначає розкид п'яти значень, отриманих при $x = 0$, і як оцінку σ одержує величину 0,002 мм.

6.3. Перевірка значимості за допомогою χ^2-критерію

У гл. 2 показане застосування математичної статистики у вимірюваннях. Тут приведемо деякі методи як засіб аналізу всього експерименту. Уведемо поняття *значимості* експерименту. Можна затверджувати, що експеримент, у якому 20 зразків сталі марки А зруйнувалися при напрузі вигину $\sigma = 4200 \pm 350$ кг/см^2, а 20 зразків зі сталі марки В зруйнувалися при напрузі $\sigma_1 = 5600 \pm 350$ кг/см^2, високозначим, оскільки він доводить, що сталь марки В має більш високу міцність. Математик же порекомендував би зробити перевірку значимості. Перш ніж перейти до опису методу такої перевірки, укажемо на можливі похибки, які можна допускати, використовуючи цей метод.

Похибка першого роду – розходженням, що спостерігаються, приписується деякий реальний ефект, якого в дійсності немає. Наприклад, сталь В міцніше сталі А, а насправді при більш масовому випробуванні це твердження виявиться помилковим.

Похибка другого роду – ігнорується реальний ефект або розходження, що у дійсності існує.

У багатьох випадках дані, одержувані в експерименті, особливо в технологічному, являють собою число об'єктів. Наприклад, визначене число деталей може бути прийняте або забраковано при прийманні, пройти випробування на довговічність або вийти з ладу раніше терміну. При прийманні може бути пропущене деяке число бракованих деталей і виявлені дефекти в деяких інших, або може бути забраковане деяке число справних деталей і прийняте деяке інше число справних деталей. Може розглядатися число деталей, виготовлених за дану зміну або визначеним робітником або на даному верстаті або складальній лінії, або за допомогою деякого виробничого методу і т. ін. Багато випробувань такого роду можна перевіряти на значимість за допомогою χ^2-критерію. Критерій обчислюється по формулі

$$\chi^2 = \sum \frac{(N - M)^2}{M}, \qquad (6.3)$$

де N – число подій, що спостерігається, (наприклад, відмовлень, забракованих виробів, випробувань, часток випромінювання, виготовлених машин, правильних відповідей і т. п.); M – математичне чекання числа цих подій, тобто розглядається так називана "нульова гіпотеза" про відсутність розходження між емпіричним розподілом і теоретичним нормальним або гіпотеза про те, що дана вибірка узята з нормальної сукупності. Гіпотеза може виявитися вірною або помилковою. Наприклад, нам потрібно довідатися, на якому токарному верстаті – новому або старому – ми одержимо більше якісних деталей. Для цього на кожному верстаті виготовляється однакова кількість деталей і перевіряється одна з, наприклад, двох гіпотез:

- обидва верстати випускають однакову кількість якісних деталей;
- на новому верстаті одержуємо якісних деталей на одну третину більше, ніж на старому.

Щоб здійснити перевірку по χ^2-критерію, необхідно знати число ступенів свободи, зв'язаних з експериментом. Число ступенів свободи – це число незалежних груп спостережень, що охоплюються гіпотезою.

Приклад 6.3. При виготовленні важкооброблюваних деталей застосовується чотири методи: *A*, *B*, *C* і *D*. Отримано наступні дані про число забракованих деталей:

Ознака	Метод			
	A	*B*	*C*	*D*
Загальне число виготовлених деталей	8	10	9	13
Число забракованих деталей	5	8	9	10

Потрібно перевірити справедливість гіпотези про те, що методи не розрізняються по нормі бракованих деталей.

Рішення. Загальне число забракованих деталей

$$m_a + m_b + m_c + m_d = 32.$$

Тоді очікуване (норма) число забракованих деталей для будь-якого методу

$$M = \frac{m_a + m_b + m_c + m_d}{4} = 8.$$

Знайдемо χ^2-критерій:

$$\chi^2 = \frac{(8-8)^2}{8} + \frac{(10-8)^2}{8} + \frac{(9-8)^2}{8} + \frac{(13-8)^2}{8} = 3{,}75.$$

Якщо ми з чотирьох чисел: m_a, m_b, m_c і m_d – призначимо (виберемо) три, то четверте вийде саме собою як різниця загального результату і суми трьох чисел. Тому ми маємо три незалежні групи спостережень, тобто три ступені волі.

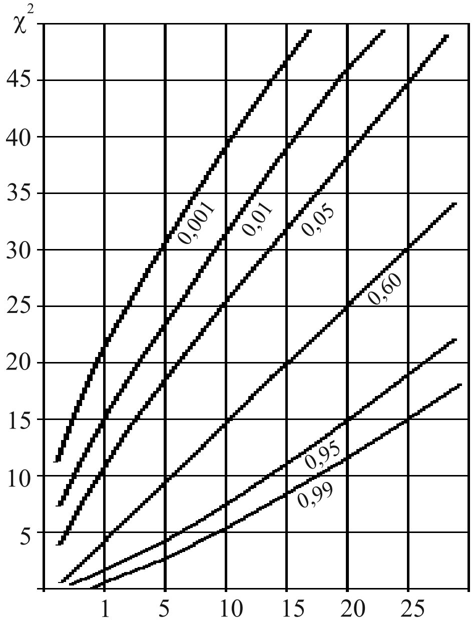

Рис. 26. Графік значень χ^2 як функції від числа ступенів свободи для різних імовірностей появи x^2

Звернемося до рис. 26 і знайдемо, що імовірність правильності нашої гіпотези значно більше, ніж 0,05 (5 %) (точка з $k = 3$ і $\chi = 3{,}75$ лежить десь посередині між кривими з імовірностями 0,05 і 0,5). Тому гіпотеза не відкидається.

При відсутності графіка залежності χ^2-критерію від k – числа ступенів свободи або відповідних таблиць можна скористатися наступним правилом [39]. Визначається величина

$$A = \frac{\left|\chi^2 - k\right|}{\sqrt{2k}}. \tag{6.4}$$

Якщо $A \geq 3$, то нульова гіпотеза бракується, якщо $A < 3$, то вона приймається.

Знайдемо A для приклада 6.3:

$$A = \frac{\left|3{,}75 - 3\right|}{\sqrt{2 \cdot 3}} = \frac{0{,}75}{2{,}45}.$$

Величина *А* значно менше числа 3, тому гіпотеза не відкидається.

Приклад 6.4. Проводиться експеримент по хронометруванню роботи і простою верстатів на механічній ділянці. Перша зміна знімає половину всіх даних і робить N_1 похибок; друга зміна – третю частину всіх даних і робить N_2 похибок, а третя зміна знімає шосту частину всіх даних і допускає N_3 похибок. Усього зроблено N похибок. Перевіряємо гіпотезу: зміни не відрізняються друг від друга по похибках, що допускаються. Якщо така гіпотеза вірна, то обране очікуване число похибок для першої зміни складе – $N/2$, тому що зняття половини відліків означає, що в першій зміні зроблена половина всіх похибок. Відповідно для другої зміни – $N/3$ похибок, а для третьої зміни залишається $N/6$ похибок, оскільки сума всіх похибок дорівнює N. Таким чином, тут число ступенів свободи дорівнює двом і вираження для χ^2-критерію приймає вид

$$\chi^2 = \frac{(N_1 - N/2)^2}{N/2} + \frac{(N_2 - N/3)^2}{N/3} + \frac{(N_3 - N/6)^2}{N/6}.$$

Іноді отримані дані відносяться до двох сукупностей або безліч подій, що відрізняються друг від друга деяким показником, і необхідно довідатися, чи мають у цих двох випадках відмовлення (несправності) значимі розходження.

Приклад 6.5. Нехай випробувані зразки сталі 40Х на визначеному рівні навантаження в кількості $m_a = 12$. З них $m'_a = 5$ зразків зруйнувалося. Друга партія зразків, виготовлених з цієї ж сталі, була зміцнена кульковим ротаційним обкатуванням у кількості $n_a = 15$. При випробуванні на тім же рівні навантаження $n'_a = 3$ зразка зруйнувалося. Потрібно перевірити гіпотезу: "Поверхневе зміцнення кульковим обкатуванням не зробило впливу на міцність". Складемо дві таблиці:

Фактичні результати

Матеріали зразків	Кількість зразків		
	Усього	Зруйнувалося	Цілі
Сталь незміцнена	$m_a = 12$	$m'_a = 5$	$m_a - m'_a = 7 = m$
Сталь зміцнена	$n_a = 15$	$n'_a = 3$	$n_a - n'_a = 12 = n$
Усього	$m_a + n_a = 27$	$m'_a + n'_a = 8$	$m_a - m'_a + n_a - n'_a = 19$

Очікувані результати

Матеріали зразків	Кількість зразків		
	Усього	Зруйнувалося	Цілі
Сталь незміцнена	$m_a = 12$	$\dfrac{m_a}{m_a + n_a}(m'_a + n'_a) = k$	$m_a - k = D$
Сталь зміцнена	$n_a = 15$	$\dfrac{n_a}{m_a + n_a}(m'_a + n'_a) = L$	$n_a - L = C$
Усього	$m_a + n_a = 27$	$m'_a + n'_a = 8$	$m_a - m'_a + n_a - n'_a = 19$

Тут

$$k = \frac{12}{12+15}(5+3) = 3{,}555 \approx 3;$$

$$L = \frac{15}{12+15}(5+3) = 4{,}444 \approx 4;$$

$$D = 12 - 3 = 9; \quad C = 15 - 4 = 11.$$

Тоді

$$\chi^2 = \frac{(m-D)^2}{D} + \frac{(n-C)^2}{C} + \frac{(m'_a - k)^2}{k} + \frac{(n'_a - L)^2}{L}.$$

Оскільки застосовувати χ^2-критерій заборонено при значенні математичного чекання $M < 5$, то прийдеться об'єднати третій і четвертий члени:

$$\chi^2 = \frac{(7-9)^2}{9} + \frac{(12-11)^2}{11} + \frac{(8-7)^2}{7} =$$

$$= 0{,}444 + 0{,}090 + 0{,}143 = 0{,}677.$$

У таблиці для очікуваних результатів усі чотири суми повинні бути такими ж, як і в таблиці емпіричних даних. Це обмеження дозволяє вибрати тільки один елемент із чотирьох елементів таблиці. Коли цей елемент обраний, суми дозволяють визначити значення трьох інших елементів, тобто маємо одну ступінь свободи. Звертаючись до графіка рис. 26, знаходимо, що імовірність справедливості вашої гіпотези більше 0,05. Це значить, що гіпотеза не відкидається.

Таким чином, маючи значення χ^2-критерію і k, знаходять імовірність того, що значення χ^2-критерію не менше знайденого. Якщо ця імовірність дорівнює 10, 20, 30 %, значить гіпотеза прийнятна. У всякому разі, такі значення імовірності говорять про те, що дані, які отримані в експерименті, і дані, які засновані на гіпотезі, не належать різним сукупностям. Імовірність, що рівна 5 %, викликає сумнів у справедливості висунутої гіпотези. Наприклад, імовірність 5 % показує, що отримані дані або дані, що мають ще більшу розбіжність, можуть не відповідати гіпотетичному розподілу не менш, ніж в одному випадку з двадцяти. При рівні значимості критерію, рівному 1 %, ця подія можлива лише в одному випадку зі ста. Рівень значимості називає також довірчим рівнем імовірності. Довірчі рівні імовірності відповідають класифікації явища на рідкі (0,05), дуже рідкі (0,01) і надзвичайно рідкі (0,001). Вибираючи той або інший рівень значимості критерію або рівень довірчої імовірності, ми тим самим встановлюємо й область припустимих його значень, що виражається імовірністю $\alpha = 1 - q$, де q – довірчий рівень імовірності,

Вибір рівня значимості – складне питання, що залежить від характеру експерименту, його призначення й обсягу наявних даних. Узагалі говорячи, при 7%-ном рівні значимості ваше знання наближається до вірогідності. Разом з тим, статистичні прийоми перевірки гіпотез не мають порожню визначеність. Якщо критерій попадає в область припустимих значень, то не можна ще зробити висновок про правильність гіпотези, а можна лише укласти, що значення критерію, що спостерігається, не суперечить цій гіпотезі. Тому статистичними методами не можна користуватися формально, а необхідно їх сполучити з аналізом фізичної сутності досліджуваного явища.

Крім того, χ^2-критерій досить чуттєвий до обсягу вибірки, і для одержання дійсно значимого результату необхідно мати великий обсяг даних.

Нарешті, процес дослідження не завершується статистичним аналізом даних. Статистичний аналіз дозволяє лише одержати деякі загальні або частково сформовані представлення, щоб надалі зосередити на них увагу або цілком від них відмовитися.

6.4. Перевірка гіпотез за допомогою критерію Стьюдента

Критерій t Стьюдента, на відміну від χ^2-критерія, дозволяє використовувати відсотки, дробові числа і т. ін. Найбільше широко критерій застосовується в інженерній практиці при розгляді гіпотези: "Середні двох вибірок відносяться до одній і тій же сукупності". Формула для критерію має вигляд

$$t = \frac{X_A - \overline{X}_B}{S_{\text{сум}}\sqrt{\dfrac{1}{n_A} + \dfrac{1}{n_B}}}, \tag{6.5}$$

де X_A – середнє для вибірки A, рівне $\left(X_{A_1} + X_{A_2} + ... + X_{A_n}\right)$; $\overline{X}_B$ – середнє для вибірки B; n_A і n_B – обсяги вибірок A и B; $S_{\text{сум}}$ – відоме середньоквадратичне відхилення для обох, вибірок, розглянутих спільно:

$$S_{\text{сум}} = \left(\frac{\sum d_a^2 + \sum d_b^2}{n_A + n_B - 2}\right)^{1/2}. \tag{6.6}$$

Для даної гіпотези число ступенів свободи дорівнює $(n_A + n_B - 2)$. Знаючи t і число ступенів свободи, за допомогою графіка рис. 27 знаходимо імовірність появи даного (або більшого) значення t, якщо обидві ці середні значення відносяться до одній і тій же сукупності. Імовірність 0,05 означає, що отримане (або більше) значення t може з'явитися випадковим образом лише в одному випадку з 20, якщо ці дві вибірки відносяться до одній і тій же генеральній сукупності. Імовірність 0,01 означає, що дана подія може з'явитися лише в одному випадку зі ста. Для цих рівнів значимості справедливо все сказане при розгляді χ^2-критерію. Імовірність 0,05 ще дає підставу сумніватися в справедливості гіпотези, а імовірність 0,01 переконує, що ці дві вибірки дійсно відносяться до різних сукупностей.

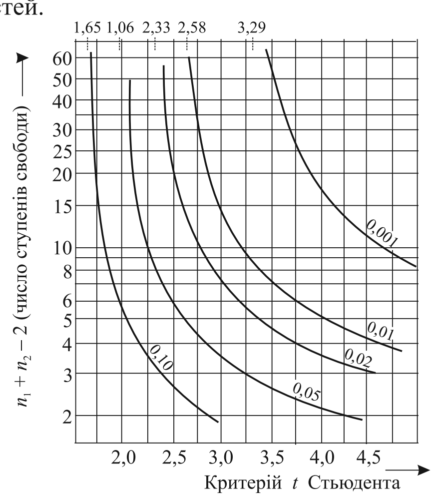

Рис. 27. Критерій t щодо числа ступенів свободи для двох сукупностей

Приклад 6.6. З одної поставки сталі 18ХНВА виготовили зразки для визначення тимчасового опору σ_b. З першої штанги узято 9 зразків, із другий – 18. Методика випробувань однакова. Отримано наступні дані:

1 партія: 121,5; 100.3; 107,5; 87,4; 87,6; 90,0; 81,4; 91,9; 90,0 кг/мм^2.

2 партія: 119,4; 93,2; 109,0; 109,0; 151,0; 125; 120; 97,6; 35,5; 111,4; 30,5; 95,6; 126,5; 140,1; 109,8; 108,1; 137,2; 120,2 кг/мм^2.

Потрібно визначити, чи відносяться ці дві групи даних до однієї сукупності.

Рішення. Застосуємо критерій Стьюдента. Для першої вибірки $\overline{X}_k = 95{,}3$ кг/мм^2, а для другий $\overline{X}_m = 95{,}3$ кг/мм^2. Обчислимо середньоквадратичне відхилення для обох вибірок.

X_k, кг/мм^2	$(\overline{X}_k - X_k)^2 = d_k^2$	X_m, кг/мм^2	$(\overline{X}_m - X_m)^2 = d_m^2$
121,5	688,0	119,4	37,2
100,3	25,0	93,2	405,0
107,5	149,0	109,0	18,3
87,4	62,5	109,0	18,3
87,6	59,4	151,0	1422,0
90,0	28,1	125,0	137,0
81,4	194,0	120,0	45,0
91,9	11,6	97,6	246,0
90,0	28,1	135,5	494,0
		111,4	3,6
		130,5	296,0
		95,6	314,0
		126,5	174,0
		140,1	720,0
		109,8	12,2
		108,1	27,1
		137,2	572,0
		120,2	47,7
$\sum d_k^2 = 1245{,}7$		$\sum d_m^2 = 4989{,}4$	

По формулі (6.6) знаходимо

$$S = \left(\frac{1245{,}7 + 4989{,}4}{9 + 18 - 2}\right)^{1/2} = (249{,}4)^{1/2} = 15{,}8 \text{ кг/мм}^2,$$

по формулі (6.5) –

$$t = \frac{113{,}3 - 95{,}3}{15{,}8\sqrt{1/9 + 1/18}} = \frac{18 \cdot 4{,}24}{15{,}8 \cdot 1{,}73} = 2{,}8.$$

Число ступенів свободи $k = (n_k + n_m - 2) = 25$. Тоді за графіком рис. 27 визначаємо, що при даному значенні критерію імовірність того, що зразки обох партій належать до одній і тій же сукупності, значно менше 0,01. Значить прийняти гіпотезу не можна.

6.5. Пуассоновський розподіл

Для перевірки випадковості появи групи подій або деякого числа об'єктів емпіричний розподіл перевіряється на відповідність пуассоновському розподілу. Якщо емпіричний розподіл за формою близький до пуассоновського, то можна думати, що великі числа, які випадково з'являються не незвичайні, а являють собою вибірку з відповідної сукупності, розподіленої по пуассоновському закону.

Нехай P – загальне число подій, об'єктів, несправностей, випадків; N – загальне число розглянутих інтервалів часу або ділянок на шліфі під мікроскопом, карті і т. п. (частина яких може містити нульове число подій). Тоді середнє число подій у визначеному інтервалі часу (або число об'єктів на визначеній ділянці) буде $m = P / N$. Імовірності появи визначеного числа подій при пуассоновському законі розподілу приводяться в наступній таблиці:

Число подій в одному інтервалі часу, число об'єктів на даній ділянці і т. п.	Імовірність появи даного числа подій (об'єктів)
0	e^{-m}
1	$me^{-m} / 1!$
2	$m^2e^{-m} / 2!$
3	$m^3e^{-m} / 3!$
$\vdots$	$\vdots$
n	$m^ne^{-m} / n!$

Ці члени утворять пуассоновський ряд, сума членів якого дорівнює одиниці. Якщо $m < 1$, то імовірність максимальна при нульовому числі події. При $1 < m < 2$ максимальною є імовірність появи однієї події і т. д. Для перевірки на відповідність пуассоновському розподілу обчислюється кожен член ряду і за допомогою χ^2-критерію ці члени порівнюються з членами емпіричного ряду. Для інженерної практики часто користуються графічним методом.

Ігноруючи член, що виражає імовірність відсутності подій, знаходимо, що фактичне число очікуваних інтервалів часу і ділянок для *n-го* члена E_n визначається з вираження

$$E_n = \frac{Nm^n}{e^m \cdot n!}. \tag{6.7}$$

Тому, якщо графік залежності $E_n \cdot n!$ від n являє собою пряму ($E_n \cdot n!$ відкладається на логарифмічній шкалі, а n – на лінійній) або близький до неї, то можна припустити, що розглянутий ряд є пуассоновським (помітимо, що 0! = 1).

Приклад 6.7. За допомогою χ^2-критерію перевірити відповідність пуассоновському розподілу бракованих виробів за 51 зміну:

Число бракованих виробів за одну зміну n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Число змін з n бракованими виробами	3	7	9	12	9	6	3	2	0

Рішення. Представимо дані у виді наступної таблиці:

n	$n!$	Число змін E_n	$E_n \cdot n!$
0	1	3	3
1	1	7	7
2	2	3	18
3	6	12	72
4	24	9	216
5	120	6	720
6	720	3	2160
7	5040	2	10080
8	40320	0	0

Побудуємо графік, відкладаючи на лінійнії осі абсцис значення n, а на логарифмічній осі ординат – значення $E_n \cdot n!$ як показано на рис. 28. Перші шість точок розташовуються поблизу прямій. Нижні значення найбільш значимі, що говорить про добру відповідність пуассоновському розподілу. Більш строго перевіряємо по χ^2-критерії.

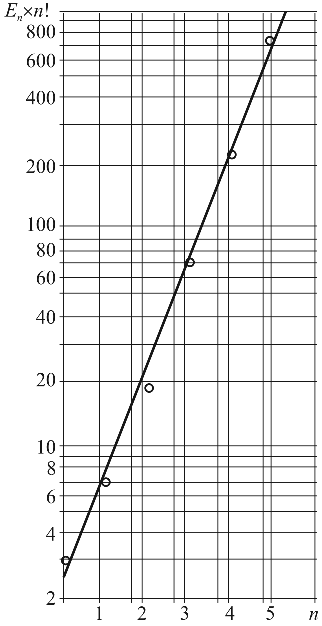

Рис. 28. До прикладу 6.7

Середнє число подій $m = \dfrac{159}{51} = 3{,}11$. Знаючи цю величину, по формулі (6.7) обчислюємо значення, що прогнозується, E_n для кожного n:

n	Значення, що спостерігається, E_n	Значення E_n, що прогнозується пуассоновським розподілом
0	3	2,27
1	7	7,06
2	9	10,97
3	12	11,39
4	9	8,85
5	6	5,51
6	3	2,86
7	2	1,26
8	0	0,5
Сума	51	

Зміни з однією бракованою деталлю і зміни, що пройшли без браку, поєднуємо (правило п'яти). По тій же причині поєднуємо дані змін з п'ятьма і більш бракованими деталями. Тоді χ^2-критерій буде

$$\chi^2 = \frac{(10-9)^2}{9} + \frac{(9-11)^2}{11} + \frac{(12-11)^2}{11} + \frac{(9-9)^2}{9} + \frac{(11-10)^2}{10} = 0{,}66.$$

Число ступенів свободи дорівнює чотирьом. З рис. 26 знаходимо, що імовірність появи такого або більшого значення χ^2-критерію складає значно більше 0,5. Тому гіпотеза про те, що ряд бракованих деталей являє собою випадкову, а саме – пуассоновську сукупність, не повинна відкидатися.

Приклад 6.8. На ділянці механічного цеху 65 однакових верстатів. Шляхом хронометрування їх роботи в передобідні 60 хв отримані наступні дані:

Число непрацюючих верстатів в інтервалі 60 хв, n	0	1	2	3	4	6 і більш
Число інтервалів тривалістю 60 хв, у яких спостерігалося непрацюючих верстатів, E_n	4	10	11	7	3	0

Адміністрацію цеху цікавить, чи випадкові отримані дані або детерміновані. Якщо статистичний аналіз покаже, що дані не випадкові, то необхідно буде розкривати й усувати причини простою устаткування.

Отже, перевіряємо гіпотезу "дані, представлені в таблиці, є чисто випадковими й утворюють пуассоновський ряд".

Рішення. Складемо відому таблицю:

n	$n!$	E_n	$E_n \cdot n!$
0	1	4	4
1	1	10	10
2	2	11	22
3	6	7	42
4	24	3	72
5	120	1	120
6	720	0	0

Відкладемо на лінійній осі абсцис значення n, а на логарифмічній шкалі ординат значення $E_n \cdot n!$ (рис. 29), Дані цілком можна апроксимувати прямій, що показує задовільну відповідність їх пуассоновському раду.

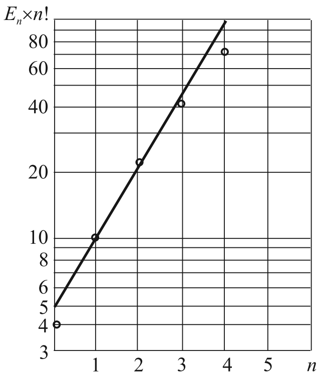

Рис. 29. До приклада 6.8

Більш строго перевірку здійснюємо по χ^2-критерії. Середнє число подій $m = \dfrac{70}{36} = 1{,}94$. Обчислимо по формулі (6.7) значення E_n для кожного n. Результати зведені в таблицю:

n	Значення з експерименту	Розрахункове E_n, що прогнозується пуассоновським розподілом
0	4	5,18~5
1	10	10,06~10
2	11	9,75~10
3	7	6,31~6
4	3	3,29~3
5	1	2,26~2
6	0	0,384~0
Сума	36	36

Тоді

$$\chi^2 = \frac{(4-5)^2}{5} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(7-6)^2}{6} + \frac{(4-5)^2}{5} = 0{,}7.$$

Число ступенів свободи дорівнює 4. По рис. 26 визначаємо імовірність того, що цей розподіл збігається з пуассоновским. Він виявляється більше 0,5, тому гіпотеза не відкидається. Як бачите, ми ніколи не говоримо, що гіпотеза вірна (точна): вона лише може бути вірна, і це можна однозначно визначити тільки при вивченні явища іншими методами.

Глава сьома
ГРАФІЧНИЙ І АНАЛІТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ

Перед будь-яким графічним аналізом корисно нанести отримані дані на графік, від руки провести передбачувану криву. При цьому потрібно прагнути використовувати, крім експериментальних точок, фізичний зміст залежності, подивитися, як поводиться крива при значеннях аргументу, близьких або рівних нулю, великих значеннях, чи перетинає крива осі координат, може бути торкається і т. п. При цьому звичайно виявляються сумнівні дані, визначається вид формули.

7.1. Підбор формул методом найменших квадратів

Це один зі стандартних методів статистики.

У результаті експерименту отримані дані перемінної y:

$$y_1, y_2, ..., y_n$$

– при варіюванні незалежної перемінний x:

$$x_1, x_2, ..., x_n.$$

Будемо вважати, що величини перемінної x встановлювалися в експерименті точно. Результати досвіду – величини перемінної y – мають похибки експерименту.

Задачею поставимо знаходження такої функції $y = f(x)$, значення якої при $x = x_1, x_2, ..., x_n$ якнайменше відрізнялися б від експериментальних даних $y_1, y_2, ..., y_n$. Природно крива цієї гіпотетичної функції пройде поблизу дослідних точок, а не через усі дослідницькі точки.

Якщо вид функції очевидний, то приступають безпосередньо до обчислень. Коли важко установити однозначність виду функції, то випробовують одну з простих функцій:

– багаточлен заданого ступеня

$$y = a + bx + cx^2 + ... + nx^n;$$

– дрібно-лінійну функцію

$$y = \frac{a + bx}{c + dx},$$

або інші елементарні функції при невеликому числі параметрів.

Близьке наближення функції $y = f(x)$ до дослідних даних досяжне (і це можна показати) у тому випадку, якщо сума квадратів відхилень розрахункових даних

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$$

від експериментальних

$$y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n$$

буде найменшою. У цьому суть методу. Принцип найменших квадратів полягає в тому, щоб зробити найменшої величину

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - f(x_k) \right]^2. \tag{7.1}$$

Різниця $y_k - f(x_k)$ є відстань по ординаті дослідної точки від шуканої кривій (рис. 30).

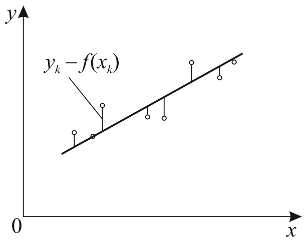

Рис. 30. До методу найменших квадратів.
Пряма побудована з умови $\sum \left[y_k - f(x_k) \right]^2$ *– мінімальна*

Умова (7.1) дозволяє визначити параметри функції $f(x)$, якщо вид функції відомий або обраний.

Для нелінійних функцій $f(x)$ метод найменших квадратів варто застосовувати лише при машинному підрахунку з залученням апарата визначників.

Якщо $f(x)$ лінійно залежить від трьох параметрів:

$$f(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + A_3\varphi_3(x),$$

де функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ задані, – то для перебування найменшого значення

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[y_k - A_1\varphi_1(x) - A_2\varphi_2(x) - A_3\varphi_3(x) \right]^2$$

дорівняємо нулю частки похідні величини S по параметрах A_1, A_2 і A_3

$$\frac{\partial S}{\partial A_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial A_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial A_3} = 0. \tag{7.2}$$

Із цих трьох лінійних рівнянь знаходимо параметри A_1, A_2 і A_3.

Якщо задана пряма

$$Y = aX + b \tag{7.3}$$

і мається n експериментальних пар $y = f(x)$, то з рівнянь (7.2) будемо мати

$$nb + a\Sigma X = \Sigma Y; \quad (7.4)$$

$$b\Sigma X + a\Sigma X^2 = \Sigma XY, \quad (7.5)$$

відкіля

$$a = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X\Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}; \quad (7.6)$$

$$b = \frac{\Sigma X^2\Sigma Y - \Sigma X\Sigma XY}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}. \quad (7.7)$$

Якщо шукана функція проходить через початок координат, то $b = 0$ і

$$a = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}. \quad (7.8)$$

Приклад 7.1. Д.Д. Паншевим [32] отримані дані впливу глибини наклепу, набутого сталлю 45 у процесі різання, на предел витривалості.

Глибина наклепу n, мкм	40	50	60	70	80
Підвищення пределу витривалості		1,58	1,93	2,27	2,27
$\Delta\sigma$, кгс/мм^2	0,92	1,73	2,79	2,88	3,17

Потрібно знайти формулу, побудувати "найліпшу" криву методом найменших квадратів і визначити середньоквадратичне відхилення експериментальних відліків від точок, знятих із кривої.

Рішення. Нанесемо отримані дані на графік (рис. 31). Досить імовірно, що функцію можна апроксимувати лінійною залежністю. Крім того, при $h = 0$ $\Delta\sigma = 0$, тобто функція проходить через початок координат. Тоді $b = 0$ і рівняння має вигляд

$$\Delta\sigma = ah.$$

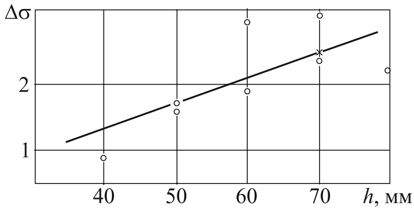

Рис.31. Крива, побудована методом найменших квадратів

По формулі (7.8) знаходимо постійну

$$a = \frac{1281{,}2}{36400} = 0{,}035.$$

Остаточно,

$$\Delta\sigma = 0{,}035h \,. \tag{7.9}$$

Проведемо по даній залежності шукану пряму для тих же значень h, що фіксувалися в експерименті.

А тепер признаємося. Строго кажучи, шукати залежність $\Delta\sigma = f(h)$ методом найменших квадратів у тім виді, як це нами робилося, не дуже правомірно.

Справа в тім, що форма методу, яка викладена вище, знайдена при двох істотних допущеннях:

- усі випадкові похибки сконцентровані в перемінній y, тобто незалежна перемінна x варіюється без похибок, приймає точні значення;
- розподіл випадкових похибок однаковий при будь-яких значеннях y.

Раніше було показано, що нерідко вимірювана перемінна має різну точність у різних областях існування, а незалежна перемінна звичайно має випадкову похибку, тобто допущення не виконуються! І, все ж, метод працює. Його уточнення зв'язане з занадто великим збільшенням обчислювальних робіт, тому прагнуть мати справу з "неточним" методом.

У прикладі 7.1 ми зробили так, як робить більшість дослідників. Адже, знаючи методики визначення глибини неклепкового шару, ми ніяк не можемо припускати, що ця незалежна перемінна не має випадкових похибок. Не можемо ми, з великою імовірністю, розраховувати також і на те, що отримані $\Delta\sigma$ однаково точні у всьому діапазоні своїх значень.

Подивимося, яка точність положення кривій серед сукупності даних. Вірні значення $\Delta\sigma$ будемо вважати відповідними кривій. Знайшовши відхилення будь-якої експериментальної точки від цій прямій, визначимо середньоквадратичне відхилення по формулі

$$S = \left(\frac{\Sigma x_i^2}{n-1} \right)^{1/2}, \tag{7.10}$$

де x_i – відхилення експериментальної точки щодо найкращого значення.

При цьому знову згадаємо, що до оцінки нам необхідно буде підходити з обережністю, оскільки наша модель не задовольняє основної моделі. У цьому випадку оцінка може бути незадовільної або ввести в оману.

Складемо нову таблицю даних, один зі стовпчиків якої буде містити істинні [обчислені по формулі (7.10)] значення:

h	$\Delta\sigma_{роз} = 0{,}035h$	$\Delta\sigma_{вим}$	$(\Delta\sigma_{роз} - \Delta\sigma_{вим})^2$
40	1,40	0,92	0,2304
50	1,75	1,58 1,73	0,0289 0,0004
60	2,10	1,93 2,79	0,0289 0,4761
70	2,45	2,27 1,87 2,88	0,0324 0,3364 0,1849
80	2,80	2,27 3,17	0,2809 0,1369
Сума			1,7358

Звідси

$$S = \sqrt{\frac{1{,}7358}{10-1}} \cong 0{,}44 \text{ кгс/мм}^2.$$

Іншими словами приблизно 68 % отриманих даних має похибки, не перевищуючі ±0,44 кгс/мм^2.

Строго кажучи, якщо не удасться сконцентрувати випадкову похибку у вимірюваній величині y і вона спостерігається також і для x, то варто застосовувати більш складний і трудомісткий метод найменших квадратів з виходом на машинний підрахунок.

Якщо точність перемінної y міняється в різних областях існування функції, то у відповідних частинах області завдання дані повинні мати різну вагу.

7.2. Зважування результатів

Нехай шукана величина обмірювана n раз і отримані значення $x_1, x_2, ..., x_n$. З них група обмірюваній в кількості m вимірів проведена в один час, а інша група вимірів ($n - m$) зроблена іншим часом.

Середні цих груп вимірів

$$\overline{X}_m = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + ... + x_m); \tag{7.11}$$

$$\overline{X}_{n-m} = \frac{1}{n-m}(x_{m+1} + x_{m+2} + ... + x_n). \tag{7.12}$$

Найкращим значенням для всіх n вимірів буде величина

$$\overline{X}_b = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n), \tag{7.13}$$

яка очевидно не збігається із середніми $\overline{X}_m$ і $\overline{X}_{n-m}$.

Якщо ці величини використовувати, то потрібно написати

$$\overline{X}_b = \frac{m\overline{X}_m + (n-m)\overline{X}_{n-m}}{n}. \qquad (7.14)$$

Числа m і $(n - m)$ називаються статистичною вагою величин $\overline{X}_m$ і $\overline{X}_{n-m}$

У загальному випадку, для N величин $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N$ з відповідними статистичними вагами $W_1, W_2, ..., W_n$ найкраще значення

$$\overline{X}_b = \frac{\sum W_i X_i}{\sum W_i}. \qquad (7.15)$$

Далі приймемо, що ми маємо також N обмірюваних величин $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N$, напевно, кожне зі своєю середньоквадратичною похибкою

$$\overline{X}_1 \pm S_1, \overline{X}_2 \pm S_2, ..., \overline{X}_n \pm S_n.$$

Яку вагу варто призначити кожному значенню $\overline{X}_i$, щоб одержати найкраще значення $\overline{X}_b$ з цих вимірів?

На початку даної глави було показано, що якщо $\overline{X}_i$ – середнє n_i обмірюваних значень, то його вага W_i пропорційна n_i.

Зверніть увагу, при цьому передбачалося, що усі вихідні обмірювані значення не мають переваг відносно один одного, вони мають однакові ваги. Іншими словами, усі вони відносяться до того ж самого розподілу із середньоквадратичною похибкою σ. Тому можна розглядати кожне $\overline{X}_i$ як середнє n_i вихідних значень розподілу із середньоквадратичною похибкою σ і додати кожному $\overline{X}_i$ вагу n_i.

Тоді найкраще значення (зважене) і його середньоквадратична похибка

$$\overline{X}_b = \frac{\left(\frac{1}{S_i}\right)^2 \overline{X}_i}{\left(\frac{1}{S_i}\right)^2} \pm \frac{1}{\left[\sum\left(\frac{1}{S_i^2}\right)\right]^{1/2}} \qquad (7.17)$$

або, що теж (без значення похибки),

$$\overline{X}_b = \frac{\Sigma n_i \overline{X}_i}{N}. \qquad (7.16)$$

Варто нагадати, що середнє характеризує результат, що дається методикою експерименту, а дисперсія або середньоквадратичне відхилення – точність цього результату, точність методики.

Це дозволяє одержувати інформацію з так званих "поточних вимірів". У практичній роботі не завжди є можливість проведення досить великого числа спостережень. Разом з тим дослідник нерідко має у своєму розпорядженні великі сукупності вимірів, у яких незмінні тільки дисперсія або тільки середнє.

Наприклад, тимчасовий опір розриву нової марки сплаву визначається в різних лабораторіях (усі зразки виготовлені зі штанг однієї плавки). Очевидно, точність методики (середньоквадратичне відхилення) не буде однакова, але середнє, при відсутності систематичних або грубих похибок, те саме;

Виявляється, зміна одного з чисел (середнє, дисперсія) не заважає використовувати усі виміри для находження другого, якщо воно залишається незмінним.

При обчисленні середнього зміною дисперсії можна зневажити або користуватися формулою (7.17). При обчисленні дисперсії усі виміри розбивають на окремі вибірки, у кожній з яких середнє можна вважати незмінним. Якщо часткові вибірки мають обсяги $n_1, n_2, ..., n_k$ і часткові дисперсії для кожної окремої вибірки відповідно $S_1^2, S_2^2, ..., S_k^2,$, то середньозважену дисперсію всіх спостережень зручніше знаходити по формулі

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + ... + (n_k - 1)S_k^2}{(n_1 + n_2 + ... + n_k) - k}. \qquad (7.18)$$

У знаменнику стоїть загальне число ступенів свободи для спільної вибірки. Кожна окрема вибірка має свій зв'язок, тобто усього k зв'язків.

Приклад 7.2 [31]. Спектральний метод визначення фосфору в чавуні по різних зразках дав значення (у %-му змісті фосфору). Обчислимо середньоквадратичне відхилення з урахуванням ваг окремих вибіркових дисперсій.

Номер спостереження j	Номер зразка i				
	I	2	3	4	5
1	0,42	0,26	0,09	0,60	0,47
2	0,38	0,24	0,08	0,64	0,44
3	0,39	0,21	0,08	0,62	0,46
4	0,36	0,23	0,09	0,62	0,47
5	0,41	–	0,12	0,64	0,49
6	0,39	–	0,08	0,59	0,45
7	0,40	–	–	0,61	0,48
8	0,41	–	–	0,63	–
$\sum x_j$	3,16	0,94	0,54	4,95	3,26
$\sum x_j^2$	1,2508	0,2222	0,0498	3,0651	1,5200
n_i	8	4	6	8	7

Для формули (7.18) знаходимо:

$$(n_i - 1)S_i^2 = \sum x_j^2 - \frac{\left(\sum x_j\right)^2}{n_i};$$

$$(n_1 - 1)S_1^2 = 0{,}0026; \quad (n_2 - 1)S_2^2 = 0{,}0013;$$
$$(n_3 - 1)S_3^2 = 0{,}0012; \quad (n_4 - 1)S_4^2 = 0{,}0023;$$

$$(n_5 - 1)S_5^2 = 0{,}0018.$$

Загальне число ступенів свободи тут буде

$$8 + 4 + 6 + 8 + 7\text{-}5 = 28.$$

Тоді

$$S^2 = \frac{0{,}0026 + 0{,}0013 + 0{,}0012 + 0{,}0023 + 0{,}0018}{28} = 0{,}00033;$$

$$S = 0{,}018.$$

Число ступенів свободи в середньозважених дисперсій S^2 значно більше, ніж у вибіркової дисперсії S_j^2 окремо. Тому S набагато точніше представляє середньоквадратичне відхилення σ.

Використовуючи метод зважування значень, можна узагальнити метод найменших квадратів, приведений у п. 7.1, на випадок різних ваг. Якщо парі (x_i, y_i) відповідає вага W_i, то варто мінімізувати суму

$$S_W = \sum W_i (y_i - a x_i - b)^2. \tag{7.19}$$

Тоді рівняння відносно a і b здобувають вид:

$$a \sum W_i x_i^2 + b \sum W_i x_i = \sum W_i x_i y_i; \tag{7.20}$$

$$a \sum W_i x_i + b \sum W_i = \sum W_i y_i. \tag{7.21}$$

7.3. Два прийоми, що полегшують обчислення, які зв'язані з застосуванням методу найменших квадратів

Перенос початку координат у центральну точку розподілу

Знаходимо середні значення X_m і Y_m. Вибираємо перетворені перемінні X' і Y':

$$X' = X - X_m;$$
$$Y' = Y - Y_m.$$

Оскільки початок координат XY тимчасово попадає в центральну точку розподілу, X, Y і X^2 скорочуються.

Оцінка постійних за допомогою наближеної прямої

Цей прийом полягає в тому, що на око проводиться наближена пряма і за допомогою цієї прямої оцінюються наближені значення постійних.

Нехай відомо наближене рівняння

$$U' = AX' + B, \tag{7.22}$$

за допомогою якого одержимо рівняння для різниці ($Y' - U'$). З формул (7.3) і (7.22) знаходимо

$$U' - Y' = (A - a)X' + B - b. \tag{7.23}$$

Підставимо у формули (7.6) і (7.7) різницю ($Y' - U'$) замість Y, а X залишимо без зміни. Замість a і b одержимо $(A - a)$ і $(B - b)$. Це невеликі числа, що полегшує долю обчислення.

Покажемо застосування обох прийомів на прикладах.

Приклад 7.3. При ремонті одного з заводських буксирів знята залежність зниження температури в трубі парового опалення від її довжини:

Вимір температури ΔT, °C	5	7	15	20	22
Довжина L, м	4	8	12	16	20

Знайдемо формулу та побудуємо графіки методом найменших квадратів, використовуючи прийоми, викладені вище.

Рішення. 1. Використовуємо перший прийом. Як завжди, спочатку вибираємо параметр графіка (гл. 6) і наносимо експериментальні дані (рис. 32).

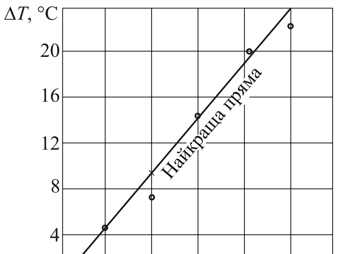

Рис. 32. Графічне зображення даних із приклада 7.3. Найкраща пряма побудована при використанні першого прийому. Розрахункові точки

Не без підстави будемо вважати, що довжина L обміряна точно (незалежна перемінна X – згадайте допущення до висновку лінійного методу найменших квадратів). У значеннях ΔT (залежна перемінна Y) можливі флуктуації через наявність градієнтів у будь-якому поперечному перерізі. На цій підставі будемо використовувати метод найменших квадратів, причому його лінійний варіант, тому що доречно по розташуванню точок випробувати для апроксимації пряму. Очевидно також, що пряма повинна проходити через початок координат: при нульовій довжині труби немає змін температури. Покладемо, що ми не знаємо цього і подивимося реакцію випробовуваного прийому.

Знайдемо середні значення X_m і Y_m:

$$X_m = \frac{4+8+12+16+20}{5} = 12;$$

$$Y_m = \frac{5+7+15+20+22}{5} = 13{,}8.$$

Для підрахунків членів формул (7.6) і (7.7) використовуємо таблицю

X	$X' = X - X_m$	Y	$Y' = Y - Y_m$	$(X')^2$	$X'Y'$
4	4 – 12 = –8	5	5 – 13,8 = –8,8	64	70,4
8	8 – 12 = -4	7	7 – 13,8 = –6,8	16	27,2
12	12 – 12 = 0	15	15 – 13,8 = –1,2	0	0
16	16 – 12 = 4	20	20 – 13,8 = 6,2	16	24,8
20	20 – 12 = 8	22	22 – 13,8 = 8,2	64	65,6
	$\Sigma X' = 0$		$\Sigma Y' = 0$	$\sum (X')^2 = 160$	$\Sigma X'Y' = 188$
	$(\Sigma X')^2 = 0$				

Визначимо постійні:

$$a = \frac{5 \cdot 188 - 0 \cdot 0}{5 \cdot 160 - 0} = \frac{188}{160} = 1{,}178 \approx 1{,}18; \quad b = \frac{160 \cdot 0 - 0 \cdot 188}{5 \cdot 160 - 0} = 0.$$

Усе правильно: $b = 0$, крива проходить через початок координат. А рівняння її виглядає так:

$$\Delta T = 1{,}18L.$$

Побудуємо криву на графіку по двох розрахункових точках: $L_1 = 8;\ L_2 = 16$. Відповідно $\Delta T_1 = 9{,}42;\ \Delta T_2 = 18{,}85$. Можна взяти замість однієї з точок значення $L_0 = 0;\ \Delta T_0 = 0$. Але ми хочемо цю точку зберегти для перевірки побудованої прямої.

Так само, як це робилося в прикладі 7.1, можна визначити середньоквадратичне відхилення або знайти довірчі інтервали. Залишаємо це читачу для вправи.

2. Використуємо другий прийом. Нанесемо ті ж дані на інший графік (рис. 33). Проведемо наближену пряму через початок координат, тому що іс-

тинна крива повинна пройти саме так. Проте, формулою (7.8) не скористаємося: обчислимо значення b (яке повинно дорівнювати нулю, якщо всі обчислення правильні) як частковий показник точності. Причому, проведемо цю пряму під кутом 45°, щоб кутовий коефіцієнт дорівнював одиниці. Наближене рівняння (7.22) виглядає так:

$$u = 1 \cdot L + 0,$$

де u – температура, °С, а L – довжина труби, м.

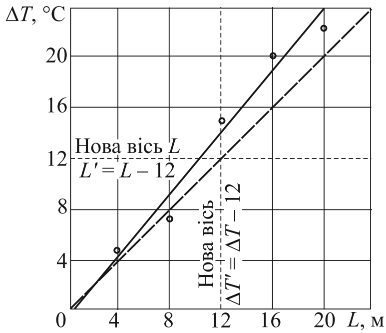

Рис. 33. Той же графік, що і рис. 32, але для іншого прийому

Рівняння (7.23) перетвориться:

$$\Delta u - \Delta T = (1 - a) \cdot L + (0 - b),$$

тому що для наближеній прямій $a = 1$ і $b = 0$.

Для полегшення обчислень перенесемо осі координат $-\Delta T' = \Delta T - 12$, $\Delta u' = \Delta U - 12$ і $L' = L - 12$. Таблиця обчислень прийме вид:

ΔT	L	$\Delta U = 1L$	$\Delta T - 12 = \Delta T'$	$\Delta U - 12 = \Delta U'$	$L - 12 = L'(x)$	$(\Delta U' - \Delta T') = (y)$	$(L')^2 (x)^2$	$L'(\Delta U' - \Delta T') = (xy)$
5	4	4	-7	-8	-8	-I	64	8
7	8	8	-5	-4	-4	I	16	-4
15	12	12	3	0	0	-3	0	0
20	16	16	8	4	4	-4	16	-16
22	20	20	10	8	8	-2	64	-16
$n = 5$					$\Sigma X = 0$	$\Sigma y = -9$	$\Sigma x^2 = 160$	$\Sigma xy = -28$

За допомогою формул (7.6) і (7.7) одержуємо

$$0-b=\frac{160(-9)-0(-28)}{5\cdot 160-0}=-\frac{9}{5}=-1{,}8;$$

$$1-a=\frac{5(-28)-0(-9)}{5\cdot 160-0}=-\frac{28}{160}=-0{,}18;$$

$$a=1{,}18;\qquad b=1{,}8.$$

Ці числа відносяться до перетворених координат. Запишемо ΔT – 12 = = 1,18 (L – 12) + 1,8 або ΔT = 1,18 L + 12 – 14,18 + 1,8. Остаточно,

$$\Delta T = 1{,}18L - 0{,}4.$$

Тут $b \neq 0$, як слід було сподіватися. Величина –0,4 показує деяку точність кривої. Багато це чи мало? Потрібно подивитися, з якою точністю отримані в експерименті ΔT. Бачимо, що похибка складає 1 °С. Тому при b = 0,4 °С ці дані можна вважати цілком задовільними.

Побудуємо найліпшу криву по розрахункових точках (на осі ординат крива відтинає відрізок b = –0,4) і перейдемо до наступних розділів, відкіля довідаємося, як можна, не застосовуючи все-таки досить трудомісткого методу найменших квадратів, отримати найкращі криві по дослідним даним.

7.4. Графічні способи підбора формул до побудови найкращих кривих для лінійних функцій

Обмежимося розглядом лінійних залежностей, що грають виняткову роль в інженерній практиці. У рівнянні прямої $Y = ax + b$ побудовані a і b мають ясний геометричний зміст: b – відрізок, що відтинається прямій на осі ординат; a – тангенс кута α нахилу прямій до осі абсцис. Пряма проводиться по точках найбільш просто і надійно. Тому нелінійні функції часто прагнуть представити в лінійному виді, щоб використовувати переваги роботи з прямою. Нижче ми покажемо це.

Побудова найліпшої прямої за допомогою лінійки

Мається залежність $y = ax + b$. Нанесемо експериментальні точки на графік. Наклавши на графік прозору лінійку і пересуваючи її, проводимо пряму, до якої експериментальні точки лежать ближче усього (рис. 34). З графіка визначаємо b і $a = y / x$.

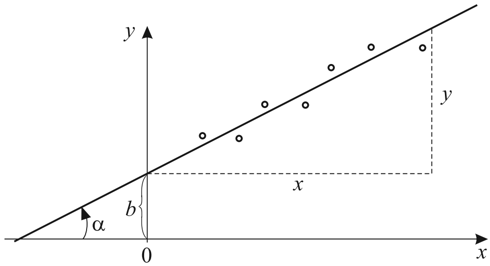

Рис. 34. Побудова кривої за допомогою лінійки

Цей метод дуже наочний. Тут відразу ж видні сумнівні точки. Не важко помітити також нелінійність розташування точок. І не потрібні довгі розрахунки. У багатьох випадках величини a і b, визначені цим способом, мало відрізняються від значень, обчислених по методу найменших квадратів.

Метод парних точок

Мається 8 точок, що лежать приблизно на одній прямій. Знайдемо найліпше значення тангенса кута нахилу прямій a і його похибку. Пронумеруємо точки (рис. 35). Беручи точки попарно, визначимо чотири значення тангенса кута нахилу. Як найкраще значення a знайдемо середнє $\bar{a}$. Звичайним шляхом визначимо його середньоквадратичну похибку.

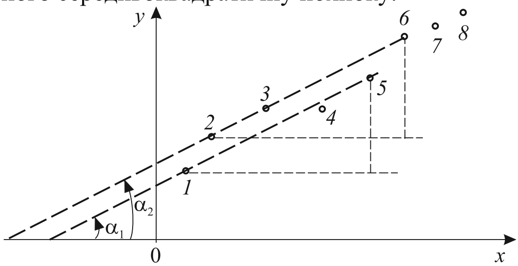

Рис. 35. Метод парних точок. Кожна пара точок (1–5, 2–6 і т. д.) дає деяке значення нахилу. Середнє з них беруть у кількості найліпшого значення

Метод парних точок дає цілком задовільні результати, коли величини $(x_6 - x_1)$, $(x_6 - x_2)$, $(x_6 - x_3)$ і т. д. приблизно однакові. У противному випадку статистичні ваги значень тангенса кута нахилу будуть неоднакові.

Пряму будуємо через точку x_m і y_m (середні значення) з кутовим коефіцієнтом a. Якщо очевидно, що пряма проходить через початок координат, то можна використовувати цю точку. Перетинання прямої з віссю ординат дає коефіцієнт *b*. Частіше, однак, цей метод використовують тоді, коли потрібно знайти лише кутовий коефіцієнт

Метод угруповання

Це різновид попереднього методу. Тут також потрібно, щоб аргумент змінювався на однакову величину, і повинна бути відома хоча б одна точка прямої, тому що визначається тільки кутовий коефіцієнт. Помітимо, що для цього методу не обов'язково, щоб випадкову похибку мала тільки перемінна y.

Якщо отримано ряд експериментальних значень з координатами x і y, то кутовий коефіцієнт прямої, що апроксимує ці дані, обчислюється по формулі .

$$a = \frac{\Sigma y - \Sigma y'}{\Sigma x - \Sigma x'}, \tag{7.24}$$

де x і y – координати k точок, згрупованих в одній частині графіка, а y' і x' – координати k точок, що знаходяться в іншій частині графіка.

Правило групування приблизно таке. Якщо інтервали між значеннями x порівняно однакові, то наявні дані поділяємо на три рівні групи. Відкидаємо середню групу точок, а по верхній групі (x, y) і по нижній групі (x', y') будуємо криву. Але тоді, якщо ми упевнені, що вид залежності повинний бути лінійним, при плануванні експерименту середні значення можна пропустити. Так і роблять, коли заздалегідь передбачають обробляти дані описаним способом.

Графічний спосіб побудови кривих методом найменших квадратів

Метод також найбільше застосовується, коли інтервали між значеннями перемінної x однакові. Це можна заздалегідь спланувати, причому, можна відійти від рівності інтервалів між значеннями x, а спроектувати експеримент так, щоб рівні інтервали виходили на експериментальній прямій (див. гл. 6).

Використовуючи індекси рис. 36, опишемо метод. З'єднуємо точки *1* і *2* прямою. Рухаючись убік точки *2* по відрізку, робимо оцінку на відстані 2/3S по абсцисі. З'єднуємо цю оцінку з точкою *3*; рухаючись убік точки *3*, знову проходимо відстань, що відповідає 2/3S, і робимо знову оцінку. Повторюємо цю операцію до одержання останньої точки. Ця точка лежить на найліпшій прямій, тобто прямій найменших квадратів. Другу точку знаходимо шляхом аналогічних побудов, починаючи процес із протилежного кінця.

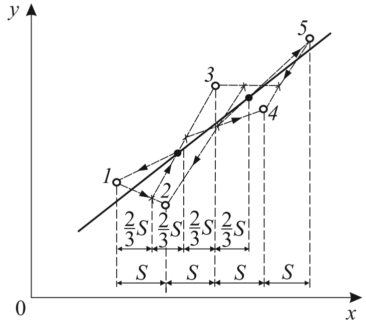

Рис. 36. Побудова прямої графічним методом найменших квадратів:
о – експериментальні точки; × – точки, що відповідають 2/3S;
• – точки на прямій, побудованої цим методом

Для перевірки побудову прямій можна зробити з іншого кінця, відкладаючи відрізки, що відповідають 1/3*S*. Третя отримана точка також буде лежати на прямій. Цей метод не наближений, якщо по осі абсцис відкладаються зовсім однакові відрізки. Він має ті ж допущення, що і класичний метод найменших квадратів; тільки перемінна *y* може мати похибку, графік повинний бути лінійним, усі дані повинні мати однакову точність. Кількісні показники точності методу обчислюються в такий же спосіб, як це описано для інших випадків раніше.

Приклад 7.4. За даними приклада 7.1 знайдемо прямі графічними методами.

1. Використовуємо метод парних точок. Пронумеруємо точки на графіку (рис. 37). Складемо й обчислимо таблицю:

Пари точок	$x_{(6-10)} - x_{(1-5)}$	$y_{(6-10)} - y_{(1-5)}$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y_{(6-10)} - y_{(1-5)}}{x_{(6-10)} - x_{(1-5)}}$
1–6	70 – 40 = 30	2,88 – 0,92 = 1,96	1,96/30 = 0,0653
2–7	70 – 50 = 20	2,27 – 1,73 = 0,54	0,54/20 = 0,0270
3–8	70 – 50 = 20	1,87 – 1,58 = 0,29	0,29/20 = 0,0145
4–9	80 – 60 = 20	3,17 – 2,79 = 0,38	0,30/20 = 0,0190
5–10	80 – 60 = 20	2,27 – 1,93 = 0,34	0,34/20 = 0,0170
$n_{\text{пар}} = 5$			$\Sigma\mathrm{tg}\alpha = 0,1428$

Звідси тангенс кута нахилу прямій

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Sigma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{n} = \frac{0{,}1428}{5} = 0{,}0286;$$

$$\alpha = 15°57' \approx 16°.$$

Знайдемо одну з точок прямої з координатами x_m і y_m (середні значення x і y):

$$x = \frac{40 + 50 + 50 + 60 + 60 + 70 + 70 + 70 + 80 + 80}{10} = 63;$$

$$y = \frac{0{,}92 + 1{,}73 + 1{,}58 + 2{,}79 + 1{,}93 + 2{,}88 + 2{,}27 + 1{,}87 + 3{,}17 + 2{,}27}{10} 2{,}16;$$

$$x_m = 63 \quad \text{та} \quad y_m = 2{,}16.$$

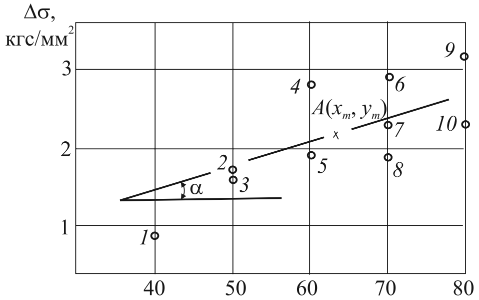

Рис. 37. Пряма побудована методом парних точок:
о – експериментальні точки; $\times$ *– точка* $A(x_m, y_m)$
і кут α *цілком задають положення прямої*

Нанесемо на графік точку $A(x_m, y_m)$. Через цю точку під кутом $\alpha = 16°$ проведемо шукану пряму.

2. Використовуємо метод угруповання. Для цілей використання цього методу спочатку усереднимо значення $\Delta\sigma$, що мають однакові h, і нанесемо дані на графік (рис. 38). Розглядаючи графік, неважко побачити, що ці дані можна інтерпретувати прямою.

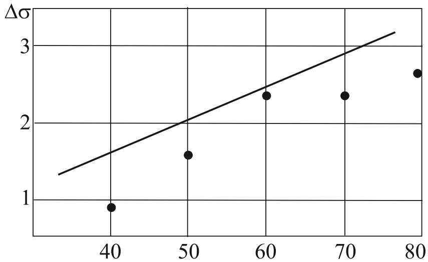

Рис. 38. Пряма побудована методом угруповання

Дотримуючись правил, відкидаємо середню точку, а по двох групах [(h = 40 і h = 50) і (h = 70 і h = 80)] знаходимо кутовий коефіцієнт прямої по формулі (7.24):

$$a = \frac{(2{,}34 + 2{,}72) - (1{,}65 + 0{,}92)}{(70 + 80) - (40 + 50)} = \frac{5{,}06 - 2{,}57}{60} = \frac{2{,}49}{60},$$

$$a = 0{,}0415.$$

Формула прийме вид

$$\Delta\sigma = 0{,}041h. \qquad (7.25)$$

Порівнюючи кутовий коефіцієнт, отриманий методом найменших квадратів (7,24), a = 0,035 з коефіцієнтом, обчисленим методом угруповання, бачимо, що вони відрізняються друг від друга досить істотно – на 17 %. Це – інформація до міркування. Може бути не варто беззастережно вірити точності методу найменших квадратів або засумніватися в коефіцієнті a = 0,041. Ще в таблиці дані Δσ для h = 60 змушували задуматися про свої значення. Точка Δσ (рис. 38) при h = 60 явно відводе дані від лінійності. Відкинувши цю точку, ми одержимо кутовий коефіцієнт, що різко відрізняється від його значень, отриманих з урахуванням цієї точки. У нас є гарна можливість перевірити істинність отриманої прямої, досить згадати, що вона повинна проходити через початок координат.

Знайдемо по (7.25) Δσ для аргументів h = 40 і h = 70 і по цих точках проведемо пряму. Що ж, вона дійсно проходить через початок координат, але назвати її найкращої ніяк не можна. Цей приклад наочно показує, що кожний з методів обробки результатів потрібно застосовувати вдумливо й обережно, знаючи або згадуючи допущення, на яких метод заснований, його переваги і недоліки, умови застосування і т. п. Що ж стосується результату, зображеного на рис. 38, то велику похибку можна було передбачати, оскільки метод дуже чуттєвий до кількості точок. Йому потрібні 2-3 десятка точок, щоб він запрацював з досить надійною точністю.

Так, якщо з графіка рис. 31 використовувати інші дві групи точок:

1) дві точки при h = 80 і одна середня точка при h = 70;

2) дві точки при h = 50 і одна точка при h = 40, а середню групу при h = 60 і дві крайні точки при h = 70 відкинути, то вже це збільшення точок дає практично точне значення кутового коефіцієнта прямій a = 0,0342.

3. Використовуємо графічний спосіб побудови кривій методом найменших квадратів. Застосування цього способу можливо для побудови прямої, оскільки збільшення n здійснюється на ту саму величину. Побудова показана на рис. 39.

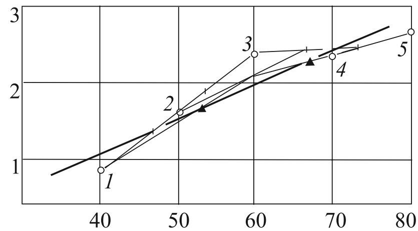

Рис. 39. Пряма побудована графічним методом:
о – точки на прямій

При розташуванні точок, коли їхній розкид від передбачуваної прямої невеликий, як на цьому рисунку, побудова неточна. Отримана пряма досить значно відрізняється від прямої, побудованої по методу найменших квадратів аналітичним шляхом. При доброму розташуванні точок збіг практично повний.

7.5. Підбор формул графічними методами для нелінійних функцій

Загальна ідея графічного методу підбора формул для нелінійних функцій полягає в тім, що треба вибрати, перетворити координати або перемінні таким чином, щоб функція ставала лінійною. Наприклад:

1. Залежність така, що при $x = 0$ $y = 0$, але експериментальні дані не лягають на пряму. У цьому випадку може виявитися підходяща формула

$$y = ax + bx^2. \tag{7.26}$$

Розділивши всі члени на x, одержимо $\frac{y}{x} = a + bx$. Увівши нову перемінну $\frac{y}{x} = z$, одержимо лінійну залежність z від x:

$$z = a + bx. \tag{7.27}$$

Для цього випадку можна випробувати і формулу

$$y = ax^n. \tag{7.28}$$

Прологаріфмуємо обидві частини:

$$\lg y = n \lg x + \lg a. \tag{7.29}$$

Увівши нові перемінні $z = \lg y$; $t = \lg x$, одержимо лінійну залежність

$$z = \lg a + nt.$$

Можна не вводити перемінні, зупинитися на вираженні (7,28) і покласти його на графік у логарифмічних координатах (на логарифмічному папері).

2. Залежність така, що при $x = 0$ $y = a$, тобто маємо поліноміальну функцію

$$y = a + bx + cx^2. \tag{7.30}$$

При декількох екстремумах на кривій уводяться додаткові члени. При трьох членах – рівняння параболи – можна декількома способами прийти до лінійного графіка.

Спосіб 1. Візьмемо на побудованій по експериментальним даним кривій деяку точку (x_1, y_1). Тоді

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2.$$

Віднімаючи це рівняння з (7.30), одержуємо

$$y - y_1 = b(x - x_1) + c(x^2 - x_1^2).$$

Розділивши кожен член на $(x - x_1)$, знайдемо

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = b + c(x + x_1),$$

де $(b + cx_1)$ – постійна. Якщо це рівняння задовольняє експериментальним даним, то графік залежності $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ від x буде лінійним.

Спосіб 2. Диференціюючи рівняння (7.30), одержимо

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx.$$

При рівних значеннях інтервалу між x графік $\frac{dy}{dx}$ від x також буде мати вигляд прямої лінії.

3. Випробуючи формулу

$$y = ke^{-Wx}, \tag{7.31}$$

прологаріфмуємо обидві частини:

$$\ln y = \ln k - Wx. \tag{7.32}$$

Це пряма лінія, якщо формула (7.31) підходить для опису експериментальних даних, у координатах x, $y = \ln k$. Якщо зупинитися на формулі (7.31), то дані потрібно наносити на напівлогарифмічний папір: x – по лінійній шкалі; y – по логарифмічній.

4. При дослідженні залежності якої-небудь величини y від температури часто можна випробувати формулу виду

$$y = Be^{-\frac{A}{kT}}. \tag{7.33}$$

Логарифмуючи (7.33), одержимо

$$\ln y = \ln B - \frac{A}{k}\frac{1}{T}. \tag{7.34}$$

Залежність перетвориться в лінійну, вважаючи $x = -\frac{1}{T}$ і $z = \ln y$:

$$z = \ln B - \frac{A}{k}x. \tag{7.35}$$

А якщо в нових перемінних (або на функціональному папері) дані все-таки не лягають на пряму? Як ні сумно, але це означає, що вид формули обраний невдало. Потрібно починати все спочатку.

Найбільше виправдано методика підбору формул виглядає в такий спосіб:

- дані наносяться на графік у лінійних координатах;
- через точки проводиться плавна крива;
- вибирається найбільш підходяща функція для апроксимації кривої;
- на кривій беруться контрольні точки (у всіх областях кривої) для перевірки складання обраної функції.

Нарешті, кілька порад:

- потрібно вважати удачею, якщо навіть для частини даних можна побудувати лінійний графік (наприклад, класична крива зносу має два перегини, але на всьому протязі експлуатаційного періоду залежність лінійна);
- залежності часто характеризують собою результат взаємодії двох або декількох факторів. Зміна нахилу прямій у різних областях існування функції звичайно зв'язана з тим, що один з факторів починає переважати над іншим. Найбільший інтерес представляє саме точка переходу одній кривій в іншу (той же графік зносу показує: перша точка перегину є завершення неізотермічного припрацьовочного зносу і перехід у знос динамічної рівноваги, друга точка перегину свідчить про початок катастрофічних явищ у роботі вузла тертя).

Ці точки переходу – знахідка для дослідника, потенційна можливість відкриття; точки переходу найчастіше не лежать на поверхні, їх потрібно шукати. Рецепта в цьому немає, шляхів багато: і зміна масштабу графіків, і варіювання кількістю даних, і виробництво математичних операцій різного змісту. Один із методів аналізу даних – це розглянуті вище перетворення координат. Проілюструємо це рис. 40 без коментарів.

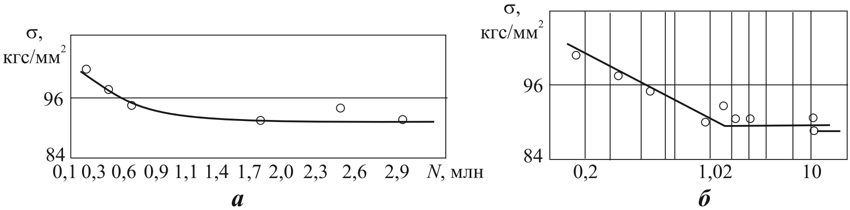

Рис. 40. Залежність утоми зразків сталі ШХ15 після загартування і відпуска при 150°: ***а*** *– лінійні шкали;* ***б*** *– напівлогарифмічний графік (помітна чітко виражена границя витривалості)*

Деяку допомогу молодим дослідникам зробить таблиця способів побудови лінійних графіків:

Функція	Прийоми одержання на графіку прямої
1. $y = ax + b$	y від x будується в лінійних координатах
2. $y = kx^a$	y від x будується на логарифмічному папері
3. $y = ke^x$	y від x будується на напівлогарифмічному папері (вісь x – лінійна; y – логарифмічна)
4. $y = \dfrac{x}{a + bx}$ або $\dfrac{1}{y} = \dfrac{a}{x} + b$	$\dfrac{1}{y}$ від $\dfrac{1}{x}$ або $\dfrac{x}{y}$ від x будується в лінійних координатах
5. $y = a + bx + cx^2$	$\dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ від x будується в лінійних координатах
6. $y = \dfrac{x}{a + bx} + c$	$\dfrac{x - x_1}{y - y_1}$ від x будується в лінійних координатах
7. $y = ke^{bx+cx^2}$	$(y - y_1)$ від x будується в лінійних координатах
8. $y = ke^{\frac{1}{x}}$	y від $\dfrac{1}{x}$ будується на напівлогарифмічному папері (вісь x – лінійна; y – логарифмічна)

7.6. Зменшення погрішності (невизначеності) при графічному аналізі

Графіки, криві, як і вимірювальні прилади, дають свою, властиву їм, зв'язану з їх застосуванням невизначеність. Находження кутових коефіцієнтів нахилу прямій, відрізків, що відтинаються останньої на осях координат, обчислення постійних по координатах точок, нанесеним на графік, – усе це, очевидно, збільшує наявну невизначеність даних.

Деякі загальні правила, що сприяють зменшенню невизначеності при використанні графіків, сформульовані і застосовуються багатьма дослідниками. На окремих з них зупинимося.

Про масштаби шкал графічного папера

Інтервал розподілу рівномірної шкали повинний бути не менш 1 мм. Якщо шкала нерівномірна, то ця умова повинна дотримуватися для найменшого інтервалу. Дуже важливо вибрати розумно ціну розподілу шкали. Частіше усього доцільність витримується, якщо ціна розподілу шкали буде відповідати ймовірній похибки вимірюваної величини. Очевидно, при недотриманні цієї умови або величина розкиду даних утруднить установлення закономірності, або не дозволить побачити показник точності даних (рис. 41) [38]. Звичайно, забезпечити висловлені умови не завжди вдається, але потрібно прагнути до цього правила.

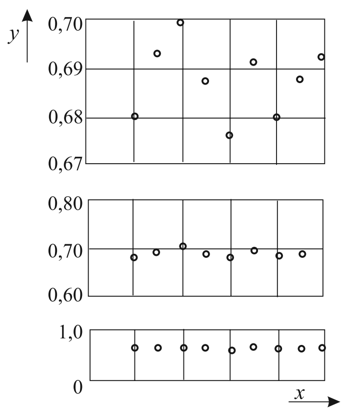

Рис. 41. Ймовірна похибка при визначенні y ~ 0,01. Середній графік правильний

Об подаванні даних у лінійному виді

Важко переоцінити цей прийом виходячи з можливостей скорочення невизначеності. Пряму легко підібрати. Для визначення рівняння прямій із графіка знімається усього дві величини. Розкид, відхилення легше знайти, маючи графік у виді прямої. Полегшується екстраполювання, обчислення статистичних показників. Усе це, разом узяте, гасить потенційне джерело невизначеностей.

Про формат графіка

Не слід прагнути до квадратного графіка. Використовуючи папір формату 279×216 мм, варто займати весь лист, оскільки зі збільшенням нахилу прямій легше знайти випадкову похибку, що різко відхиляється від точки, тому що в цьому випадку масштаб відхилення збільшується. З метою підвищення точності побудови прямий графічним методом найменших квадратів формат збільшують.

Прикладні поради

Необхідно стежити, щоб штрихові міри довжини на всьому протязі роботи з графіками не мінялися. Віддавати перевагу графічному паперу, виконаному типографським способом. Працювати тонко відточеним олівцем. Застосовувати вимірювач. Пам'ятати, що методи найменших квадратів вимагають, щоб незалежна перемінна не мала істотної випадкової погрішності – це відноситься і до нанесення даних на графік. Не "звикати" до одного методу одержання прямій у всіх випадках обробки даних.

7.7. Аналітичний аналіз даних

Методи аналітичного аналізу необмежені. Тут ми приведемо лише деякі, що мають загальний характер, зручні в застосуванні та часто використовувані.

Основні правила наближених обчислень

1. При додаванні (відніманні) наближених чисел у результаті зберігається стільки десяткових знаків, скільки їх мається в доданку з найменшим числом десяткових знаків.

2. При множенні (діленні) у результаті зберігається стільки значущих цифр, скільки їх має наближене число з найменшим числом значущих цифр.

Примітка. Значущими цифрами називаються всі його цифри, крім нулів на кінці числа, що виходять у результаті округлення, або ж – крім нулів, що лежать лівіше першої, відмінної від нуля, цифри (для десяткових дробів).

Наприклад: 1730000 – три значущі цифри; 170850 – п'ять значущих цифр; 0,00875 – три значущі цифри; 8,756 – чотири значущі цифри і т.д.

3. При зведенні в квадрат (або куб) у результаті варто зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має піднесене в ступінь наближене число.

4. При добуванні квадратного (або кубічного) кореня в результаті варто зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневе наближене число.

5. В усіх проміжних результатах варто залишати однією цифрою більш, ніж указують попередні правила, відкидаючи її в остаточному результаті.

6. Якщо вихідні дані можна брати з довільною точністю, то їх варто взяти з числом цифр на одну більше, ніж потрібно одержати у відповіді; у процесі обчислень дотримується правило 5.

7. При обчисленні за допомогою логарифмів одночленного вираження з таблиць логарифми беруться з числом десяткових знаків на один більше числа значущих цифр у наближеному числі з найменшим числом значущих цифр.

Інтерполяція й екстраполяція

Можна знайти проміжні точки, знайшовши спочатку рівняння кривій (гл. 6). У факторному експерименті нерідко важко визначати деякі проміжні значення. Є чимало методів інтерполяції, за допомогою яких можна поправити справу.

Інтерполяційна формула n-го порядку апроксимує функцію $y(x)$ багаточленом n-го ступеня y_x, що задовольняє умовам $Y(X_k) = y(x_k) = y_k$ у $(n+1)$ точках інтерполяції x_k $(k = 0, 1, 2, ..., n)$. Такі формули Ньютона, Бесселя, ітераційно-інтерполяційний метод, формула Лагранжа і т. ін.

Приведемо використання інтерполяційної формули Лагранжа [21]. Вона приваблива тим, що в підборі шуканого значення бере участь уся система експериментальних даних. В експерименті отримали точки (x_1, y_1), $(x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$. Необхідно знайти пропущену точку y при значенні x, не заданому апаратурі під час експерименту.

Тоді формула Лагранжа прийме вид:

$$Y = y\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\cdots\frac{x-x_n}{x_1-x_n} + y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\cdots\frac{x-x_n}{x_2-x_n} + \\ + y_n\frac{x-x_1}{x_n-x_1}\frac{x-x_2}{x_n-x_2}\cdots\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}. \quad (7.36)$$

При великих значеннях n варто прибігати до обчислювальної машини. Для цього потрібно в програму включити формулу Лагранжа, а в пам'ять машини ввести число експериментальних відліків.

Приклад 7.5. Приведені дані, що зв'язують підвищення границі витривалості та наклеп, що здобувається поверхнею в процесі різання:

Наклеп, мкм	40	50	60	70	80
$\Delta\sigma$, кгс/мм^2	1,36	1,70	2,04	2,38	2,72

Припустивши, наприклад, що при h = 60 мкм дані отримані явно неточні (або взагалі ця точка не розглядалася експериментально), спробуємо знайти $\Delta\sigma_{h=60}$ по формулі Лагранжа.

Рішення. Позначимо дані по символіці (7.36).

Наклеп	40(x_4)	50(x_3)	70(x_2)	80(x_1)
Напруга	1,36(y_4)	1,70(y_3)	2,38(y_2)	2,78(y_1)

Одержимо:

$$y = 2{,}72\,\frac{60-70}{80-70}\times\frac{60-50}{80-50}\times\frac{60-40}{80-40} + 2{,}38\,\frac{60-80}{70-80}\times\frac{60-50}{70-50}\times\frac{60-60}{70-40} +$$

$$+1{,}70\,\frac{60-80}{50-80}\times\frac{60-70}{50-70}\times\frac{60-40}{50-40} + 1{,}36\,\frac{60-80}{40-80}\times\frac{60-70}{40-70}\times\frac{60-50}{450};$$

$$y = –0{,}2308 + 1{,}577 + 1{,}132 – 0{,}272 = 2{,}216.$$

Величина $\Delta\sigma$ для h = 60 мкм, що підрахована по формулі, отриманої методом найменших квадратів, буде $\Delta\sigma$ = 2,04. Величини, зняті в експерименті: $\Delta\sigma_1$ = 1,93 і $\Delta\sigma_2$ = 2,79. Значення, отримане інтерполяцією, цілком прийнятно.

Перевага аналітичної інтерполяції складається в можливості автоматичного застосування і, у надзвичайних випадках, визначеному екстраполюванні за інтервал експериментальних даних. Наприклад, при відсутності $\Delta\sigma$ для h = 80 можна було по формулі (7.36) знайти відсутній результат. Цей прийом математично не обґрунтований. Але якщо інтервал екстраполяції не великий, то одержувана точність цілком достатня, і прийом може виявитися плодотворніше, ніж графічна екстраполяція, здійснювана на око.

Підбор формул по дослідницьким даним

У випадках, коли неможливо використовувати лінійну залежність, можна спробувати підібрати багаточлен, що має (n + 1) членів:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots + nx^n. \qquad (7.37)$$

Тут два члени дають рівняння прямої, три – параболи. Збільшуючи число членів, беручи тільки парні або тільки непарні ступені, можна апроксимувати криві великої складності.

При підборі багаточлена виду (7.37) на кривій використовується число точок, рівне числу побудованих, і вирішується система (n + 1) рівнянь. Загальне правило вибору точок полягає в тому, що на ділянках кривої, що мають підвищену кривизну, у порівнянні з іншими ділянками, точки перегину і т. п., необхідно брати більшу кількість точок.

Точність підбора перевіряється шляхом підстановки в рівняння багаточлена координат контрольних точок, знятих з різних ділянок кривої. Якщо точність не задовольняє, то або збільшують n, або призначають інші точки на кривій, по яких відшукується новий багаточлен колишнього ступеня.

Крива, що проходить через початок координат, описується багаточленом (7.37), де $a = 0$, тобто система має на одне рівняння менше. Це завжди вигідно, тому що рішення систем з $n \geq 3$ будь-якими методами, включаючи визначники, вимагає великих викладень.

Досить перенести центр координат у початкову точку кривої, щоб домогтися бажаного.

Приклад 7.6. Приведена залежність шорсткості Rz від величини зазублин на ріжучий крайці різця h, що отримана в експерименті. Потрібно знайти формулу кривій (рис. 42).

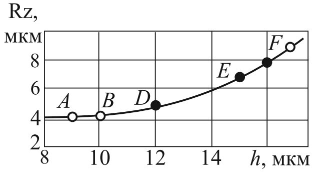

Рис. 42. До приклада 7.6

Рішення. Криву, очевидно, можна задати багаточленом другого порядку, оскільки на ній відсутні екстремуми, перегини.

Перенесемо центр координат у точку A (9.4). У новій системі $h' = h - 9$; $\mathrm{Rz}' = \mathrm{Rz} - 4$; $a = 0$.

Тоді рівняння другого порядку запишеться

$$\mathrm{Rz} - 4 = b'(x - 9) + c'(x - 9)^2.$$

Вибираємо на кривої точки b (10, 4, 1) і c (17, 9) і одержуємо систему рівнянь:

$$0{,}1 = b + c,$$

$$5 = 8b' + 64c,$$

з якої $b' = 0{,}025$; $c' = 0{,}075$.

Шукане рівняння кривої має вигляд

$$\mathrm{Rz} = 7{,}5 \cdot 10^{-2} h^2 - 1{,}325h + 10{,}05.$$

Визначаємо похибки відповідності формули кривій по контрольних точках D, E і F:

Точки	Значення кривої, мкм		Rz, мкм (по формулі)	Похибки	
	h	A		абсолютні, мкм	відносні, %
D	12	4,68	4,67	0,01	0,2
E	15	6,80	7,04	0,24	3,4
F	16	7,90	8,05	0,15	1,8

При ретельному підборі рівняння похибка може бути менше 0,5 % по всій кривій.

Перебування емпіричних формул для функції двох перемінних

Більшість з розроблених у даний час алгоритмів апроксимації табличних функцій двох перемінних обмежується побудовою багаточлена фіксованого ступеня від двох перемінних, котре раціонально проводити за допомогою ЕОМ.

Однак на практиці існують методи находження емпіричних формул для функції, що залежить від двох перемінних способами, зазначеними в п. 7.5.

Будемо вважати x і y незалежними перемінними, а z – їх функцією.

Загальний метод рішення таких задач полягає в наступному. Вважаючи x = const, зв'яжемо залежністю z з y, або вважаючи y = const, зв'язуємо функціональною залежністю x з z. Наприклад, для функції z, що задана наступною таблицею, визначимо

$$\Phi(z) = a + bF(y),$$

застосовуючи один з вище розглянутих методів

x	y				a	b
	2	3	4	5		
1	0,9091	0,1111	1,25	1,351	0,5	1,2
2	0,3125	0,3571	0,3846	0,4032	2,0	2,4
3	0,1587	0,1754	0,1852	0,1916	4,5	3,6
4	0,0961	0,1042	0,1087	0,1116	8,0	4,8

Числа a і b є функціями від x, які потрібно знайти емпірично. Побудувавши графік значення z відносно y для чотирьох значень x, ми побачимо, що характер їх відповідає встановленню між $\frac{1}{z}$ і $\frac{1}{y}$ лінійної залежності виду

$$\frac{1}{z}=a+\frac{b}{y}.$$

Фіксуючи x, вносимо сюди табличні значення y і z. Для кожного x одержимо систему чотирьох рівнянь із двома невідомими a і b. Вирішуючи їх відносно a і b, знайдемо для них значення, поміщені в останніх двох стовпцях таблиці.

Будуючи залежність a від x, переконаємося, що залежність між ними нелінійна, однак на логарифмічній сітці вона прямолінійна. Отже,

$$a = mx^n;$$

$$\lg a=\lg m+n\lg x.$$

Знаходячи значення способом, описаним вище, одержимо

$$m=0{,}5;\;\; n=2;\;\; a=0{,}5x^2.$$

Між b і x існує лінійна залежність $b = f + gx$, усереднюя яку, одержимо $f = 0$, $g = 1{,}2$, $b = 1{,}2x$.

Підставляючи значення a і b у рівняння

$$\frac{1}{2}=a+\frac{b}{y},\;\; \text{одержимо}\;\; \frac{1}{z}=0{,}5x^2+\frac{1{,}2x}{y}$$

або остаточно

$$z=\frac{y}{1{,}2x+0{,}5x^2y}.$$

Природно, що в кожнім конкретному випадку, вид залежностей міняється, але загальний принцип фіксації однієї з незалежних перемінних, находження залежності від другої незалежної перемінної та визначення буквених параметрів, що міняються відповідно першої, залишається тим самим.

Номограми

Слово "номографія" – грецьке (номос – закон, графо – креслю). Буквальний переклад – "креслення закону". Номограма дозволяє визначати чисельне значення шуканої величини за чисельним значенням інших величин, що входять у дану формулу. У виді номограм має сенс представляти остаточні наукові результати, що призначаються для багаторазового використання.

Основою побудови номограм будь-яких видів служить функціональна шкала.

Нехай задана безперервна, однозначна монотонна функція $y = f(v)$, у межах зміни v від v_0 до v_n. Для особистих значень v_0, v_1, v_2, …, v_n відповідні значення функції

$$y_0 = f(v_0);\ y_1 = f(v_1);\ \ y_2 = f(v_2);\ ...;\ y_n = f(v_n).$$

На осі x (рис. 43) з початком відліку 0 відкладемо, використовуючи одиницю – відрізок довжиною λ, мм, – відрізки $x_0 = \lambda f(v_0)$; $x_1 = \lambda f(v_1)$; $x_2 = \lambda f(v_2)$; ...; $x_n = \lambda f(v_n)$. Знак $f(v)$ укаже напрямок відкладання відрізків.

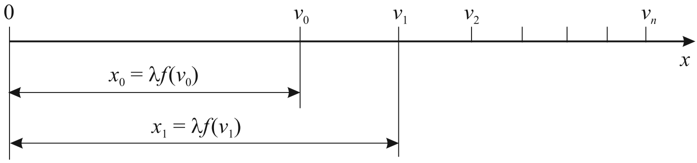

Рис. 43. Номограми. Функціональна шкала

Пряма 0x з відзначеними значеннями функції в прийнятому масштабі і з зазначеними біля цих позначок значеннями аргументу називається прямолінійною *функціональною шкалою функції* $f(v)$. Число λ називається *модулем шкали*. Рівняння $x = \lambda f(v)$ – рівнянням функціональної шкали. Пряма 0x без позначок називається опорою шкали. Значення v_0, v_1, v_2, …, v_n вибираються по арифметичній прогресії. Різниця арифметичної прогресії називається ступінню шкали, а відстань між суміжними позначками v_i і v_{i+1} – графічним інтервалом. Останній з умов зручності повинний бути не менш одного міліметра.

Приклад 7.7. Побудувати шкалу функції

$$y = 3 + 3v + v^2$$

у межах зміни v від 1 до 10.

Знайдемо функцію для різних значень v:

v	y	$l_k = \lambda[f(v_k) - f(v_0)]$	v	y	$l_k = \lambda[f(v_k) - f(v_0)]$
1	7	0	6	57	50
2	13	6	7	73	66
3	21	14	8	91	84
4	31	24	9	111	104
5	43	36	10	133	126

Найбільше значення функції $y = 133$. Щоб отримати компактну шкалу, знайдемо λ (без доказу), задавши довжиною шкали l:

$$\lambda = \frac{1}{f(v_n) - f(v_0)}. \tag{7.38}$$

Оскільки в знаменнику одержуємо число 126, то зручно довжину призначити $l = 126$ мм. Тоді $\lambda = 1$ мм.

По третьому і шостому стовпчиках таблиці будуємо функціональну шкалу шуканої функції (рис. 44), приймаючи за початок відліку $v_0 = 1$ по рівнянню:

$$l_k = \lambda[f(v_k) - f(v_0)]. \tag{7.39}$$

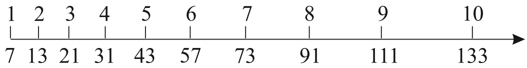

Рис. 44. Номограма рівняння $y = 3 + 3v + v^2$

Представлену функціональну шкалу з оцінками значень і аргументу функції можна розглядати як найпростішу номограму. Тут ступінь шкали – 10; найменший графічний інтервал (між оцінками 1 і 2) – 6 мм; найбільший графічний інтервал – 22 мм.

Незважаючи на відносну молодість номографії, існують номограми усіляких видів, знайомство з якими природно продовжити по спеціальній літературі. Зупинимося на правилах побудови (без доказу) номограми з трьома рівнобіжними шкалами.

Для побудови номограми рівняння

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w), \tag{7.40}$$

проводимо дві рівнобіжні лінії. Вибравши модулі функції $f_1(i)$ і $f_2(v)$ відповідно рівними λ_1 і λ_2, поділяємо відстань між цими паралелями у відношенні, рівному відношенню модулів, і проводимо третю рівнобіжну лінію. На проведених лініях будуємо шкали функцій, приймаючи початки шкал з урахуванням знака функцій. Шкала $f_1(i)$ будується на першій лінії по рівнянню $x = \lambda_i f_i(u)$; шкала $f_2(v)$ – на протилежній крайній лінії по $y = \lambda_2 f_2(v)$; шкала – $f_3(w)$ – на середній лінії по $z = \lambda_3 f_3(w)$, де

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Точка перетинання прямій, що з'єднує задані позначки на двох шкалах із третьою шкалою, указує значення третьому перемінному, задовольняючому вищенаведеному рівнянню (рис. 45).

На рисунку побудована номограма формули $a = 12\sqrt[4]{\dfrac{N}{n}}$ за умови:

$$1 \le N \le 300; \quad 25 \le n \le 1000.$$

Логарифмуючи вираження

$$d = 12\left(\frac{n}{N}\right)^{-\frac{1}{4}},$$

одержуємо

$$\lg d - \lg 12 = -\frac{1}{4}\lg N + \frac{1}{4}\lg n.$$

Поклавши

$$-0{,}25\lg N = f_1(u);$$
$$0{,}25\lg n = f_2(v);$$
$$\lg d - \lg 12 = f_3(w).$$

приходимо до типу формули, для якого можливо добудувати номограму з трьома рівнобіжними шкалами.

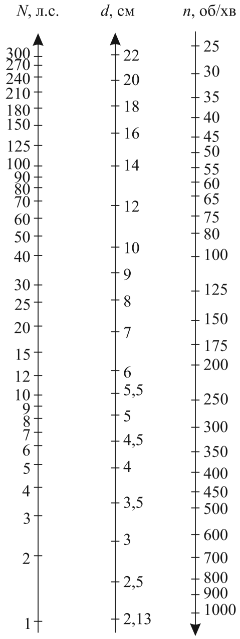

Рис. 45. Побудова номограми на трьох паралелях

Для більшості досліджень по операційному нормуванню результати можуть бути представлені логарифмічною номограмою з однією прямою лінією.

Наприклад, залежність

$$t_{\text{маш}} = kD^2,$$

де k – коефіцієнт, що характеризує сталість умов обробки; D – діаметр оброблюваної поверхні, для деталей типу тіл обертання можна виразити на логарифмічній сітці прямою лінією, що проходить під кутом α до осі ординат. Тангенс цього кута дорівнює ступеню при D, $\text{tg}\alpha = 2$. Тут коефіцієнт k прийнятий побудованим. Це значить, номограма обслуговує обробку однохарактерних поверхонь групи деталей нормалізованого або типового технологічного процесу (рис. 46).

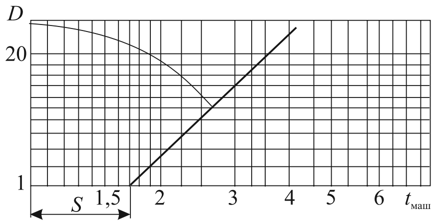

Рис. 46. Побудова логарифмічної номограми з однієї прямої

Правило користування номограмою очевидно з рисунка.

Застосовуючи номограми, потрібно пам'ятати, що номографічна обробка результатів віднімає в дослідника визначений час, не будучи методом аналізу чи узагальнення. Тому звертатися до номографії слід лише тоді, коли можна чекати економію в часі від її особистого застосування в проміжних дослідженнях або коли ця форма для кінцевого результату вигідна споживачу.

Етапи підготовки задач на ЕОМ

При рішенні задач за допомогою ЕОМ необхідно зрозуміти, що машина не вирішує задачу, а виконує заданий обчислювально-логічний процес. Використання ЕОМ не зменшує необхідності повного і детального розуміння людиною сутності розв'язуваної задачі.

Академік В.М. Глушков пише: "...рішення задачі за допомогою ЕОМ має для людини не тільки одні переваги. Усі достоїнства обчислювальної машини виявляються головним чином на етапах здійснення плану рішення та перевірки його правильності. Що ж стосується етапів ознайомлення та складання плану рішення, то застосування ЕОМ, як правило, ускладнює їхнє виконання. Це зв'язано, насамперед, з тим, що в обчислювальних машинах відсутні можливості підсвідомого рішення задач, і тому весь хід рішення повинний цілком усвідомлюватися людиною, що працює з ЕОМ. Адже вихідна заснова застосування обчислювальної машини для рішення задач може бути сформульована в такий спосіб: якщо вам удається розбити спосіб рішення задачі на таку послідовність окремих, чітко сформульованих команд, що може бути виконана вашим помічником, що не знає суті задачі, але точно буде іти заданої інструкції, не робить похибок і володіє дуже великою працездатністю, то ця ж задача може бути вирішена і на ЕОМ".

Таким чином, під рішенням задачі на ЕОМ мають на увазі щось більше, ніж роботу, виконувану машиною.

Перш ніж приступити до програмування, необхідно ознайомитися з існуючим математичним забезпеченням обраної ЕОМ.

Конкретизуючи вищесказане, коротко охарактеризуємо кожний з етапів постановки задач на ЕОМ.

1. *Постановка задачі*. На цьому етапі розглядається її опис, зроблене фахівцями в самому загальному виді з застосуванням методів, характерних для даної області, приймається рішення про те, яким цілям повинна задовольняти та або інша технічна система, і визначення умов, при яких ця система буде працювати. Необхідно вказати:

– кількість і характер вихідних даних і межі їх зміни;

– фактори, що впливають на кінцевий результат або на хід обчислень.

2. *Математичний опис системи*. У результаті роботи на цьому етапі повинна бути побудована математична модель, що враховує головні сторони системи. Необхідно переконатися в існуванні й одиничності рішення того математичного рівняння (або системи рівнянь), що вийшли при описі фізичного явища.

3. *Вибір чисельного методу*. Необхідно виписати обчислювальну схему обраного методу рішення, з огляду на всі умови й обмеження.

Одночасно підбирається простий приклад рівняння, рішення якого відомо або може бути легко отримане для того, щоб перевірити роботу майбутньої програми. Цей приклад називається контрольним.

4. *Програмування задачі*. Обчислювальна схема чисельного методу записується мовою обраної ЕОМ.

5. *Налагодження програми*. При налагодженні необхідно знайти похибки і цілком перевірити програму. Ціль перевірки – установлення факту, що програма реалізує саме ту обчислювальну схему, що була обрана, і усунення синтаксичних похибок. Для цієї мети використовується контрольний приклад. Якщо програма задачі велика, то доцільно відкладку проводити вроздріб.

6. *Рахунок задачі*. Після відкладки програма разом з реальними вихідними даними вводиться в машину і виробляється рахунок задачі. У такий спосіб одержуємо результат.

Результат, отриманий на машині, повинний бути перевірений підстановкою в рівняння. Цю підстановку можна зробити як за допомогою машини, так і олівцем на папері. Тільки після такої підстановки можна бути упевненим у тім, що чисельний метод і програма дали рішення математичної задачі.

7. *Обробка результатів*. На цьому етапі аналізуються, наскільки добре результати рішення математичної моделі відповідають дійсному поводженню реальної системи.

Додаток 1

ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА

$$2\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \text{та} \quad \Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$
0,00	$0_4$0000	0,000	0,50	0,3829	0,I9I5	1,00	0,6827	0,3415
0,01	0,0080	0,004	0,51	0,3899	0,1950	1,01	0,6875	0,3440
0,02	0,0160	0,008	0,52	0,3969	0,1985	1,02	0,6923	0,3460
0,03	0,0239	0,012	0,53	0,4039	0,2020	1,03	0,6970	0,3485
0,04	0,0319	0,016	0,54	0,4108	0,2055	1,04	0,7017	0,3510
0,06	0,0399	0,020	0,55	0,4177	0,2090	1,05	0,7063	0,3530
0,06	0,0478	0,024	0,56	0,4245	0,2125	1,06	0,7109	0,3555
0,07	0,0558	0,028	0,57	0,4313	0,2155	1,07	0,7154	0,3575
0,08	0,0638	0,032	0,58	0,4381	0,2190	1,08	0,7199	0,3600
0,09	0,0717	0,036	0,59	0,4448	0,2225	1,09	0,7243	0,3620
0,10	0,0797	0,040	0,60	0,4515	0,2255	1,10	0,7287	0,3645
0,11	0,0876	0,044	0,61	0,4581	0,2290	1,11	0,7330	0,3665
0,12	0,0955	0,048	0,62	0,4647	0,2325	1,12	0,7373	0,3685
0,13	0,1034	0,0515	0,63	0,4713	0,2355	1,13	0,7415	0,3710
0,14	0,1113	0,0555	0,64	0,4778	0,2390	I,I4	0,7457	0,3730
0,15	0,1192	0,0595	0,65	0,4843	0,2420	1,15	0,7499	0,3740
0,16	0,1271	0,0635	0,66	0,4907	0,2455	1,16	0,7540	0,3770
0,17	0,1350	0,0675	0,67	0,4971	0,2485	1,17	0,7580	0,3790
0,18	0,1428	0,0715	0,68	0,5035	0,2520	1,18	0,7620	0,3810
0,19	0,1507	0,0755	0,69	0,5098	0,2550	1,19	0,7660	0,3830
0,20	0,1585	0,0795	0,70	0,5161	0,2580	1,20	0,7699	0,3850
0,21	0,1663	0,0830	0,71	0,5223	0,2610	1,21	0,7737	0,3870
0,22	0,1741	0,0870	0/72	0,5285	0,2640	1,22	0,7775	0,3890
0,23	0,1810	0,0910	0,73	0,531S	0,2675	1,23	0,7813	0,3905
0,24	0,1897	0,0950	0,74	0,5407	0,2705	1,24	0,7850	0,3925
0,25	0,1974	0,0985	0,75	0,5467	0,2735	1,25	0,7887	0,3945
0,26	0,2051	0,1025	0,76	0,5527	0,2765	1,26	0,7923	0,3960
0,27	0,2128	0,1065	0,77	0,5587	0,2795	1,27	0,7959	0,3960
0,28	0,2205	0,1105	0,78	0,5646	0,2825	1,28	0,7995	0,4000
0,29	0,2282	0,1140	0,79	0,5705	0,2850	1,29	0,8030	0,4015

t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$
0,30	0,2358	0,1180	0,80	0,5763	0,2880	1,30	0,8064	0,4030
0,31	0,2434	0,1215	0,81	0,5821	0,2910	1,31	0,8098	0,4050
0,32	0,2510	0,1255	0,82	0,5878	0,2940	1,32	0,8132	0,4065
0,33	0,2586	0,1295	0,83	0,5935	0,2965	1,33	0,8165	0,4080
0,34	0,2661	0,1330	0,84	0,5991	0,2995	1,34	0,8197	0,4100
0,35	0,2737	0,1370	0,85	0,6047	0,3025	1,35	0,8230	0,4115
0,36	0,2812	0,1405	0,86	0,6102	0,3050	1,36	0,8262	0,4130
0,37	0,2836	0,1445	0,87	0,6157	0,3080	1,37	0,8293	0,4145
0,38	0,2961	0,1480	0,88	0,6211	0,3105	1,38	0,8324	0,4160
0,39	0,3035	0,1515	0,89	0,6265	0,3135	1,39	0,8355	0,4175
0,40	0,3108	0,1555	0,90	0,6319	0,3160	1,40	0,8385	0,4190
0,41	0,3182	0,1590	0,91	0,6372	0,3180	1,41	0,8415	0,4205
0,42	0,3255	0,1630	0,92	0,6424	0,3210	1,42	0,8444	0,4220
0,43	0,3328	0,1665	0,93	0,6476	0,3240	1,43	0,8473	0,4235
0,44	0,3401	0,1700	0,94	0,6528	0,3265	1,44	0,8501	0,4250
0,45	0,3473	0,1735	0,95	0,6579	0,3290	1,45	0,8529	0,4265
0,46	0,3545	0,1770	0,96	0,6629	0,3315	1,46	0,8557	0,4280
0,47	0,3616	0,1810	0,97	0,6680	0,3340	1,47	0,8584	0,4290
0,48	0,3688	0,1845	0,98	0,6729	0,3365	1,48	0,8611	0,4305
0,49	0,3759	0,1880	0,99	0,6778	0,3390	1,49	0,8633	0,4320
1,50	0,8664	0,4330	2,04	0,9587	0,4795	2,58	0,9901	0,4950
1,51	0,8690	0,4335	2,05	0,9600	0,4800	2,59	0,9901	0,4950
1,52	0,8715	0,4355	2,06	0,9606	0,4805	2,60	0,9907	0,4955
1,53	0,8740	0,4370	2,07	0,9620	0,4810	2,61	0,9907	0,4955
1,54	0,8764	0,4390	2,08	0,9625	0,4810	2,62	0,9912	0,4955
1,55	0,8789	0,4395	2,09	0,9630	0,4815	2,63	0,9912	0,4955
1,56	0,6812	0,4405	2,10	0,9643	0,4820	2,64	0,9917	0,4960
1,57	0,8836	0,4420	2,11	0,9650	0,4825	2,65	0,9917	0,4960
1,58	0,8859	0,4430	2,12	0,9660	0,4830	2,66	0,9922	0,4960
1,59	0,8882	0,4440	2,13	0,9670	0,4835	2,67	0,9922	0,4960
1,60	0,3904	0,4450	2,14	0,9676	0,4840	2,68	0,9926	0,4965
1,61	0,8926	0,4465	2,15	0,9680	0,4840	2,69	0,9926	0,4965
1,62	0,8948	0,4475	2,16	0,9692	0,4845	2,70	0,9931	0,4965
1,63	0,8909	0,4485	2,17	0,9700	0,4850	2,71	0,9931	0,4965
1,64	0,8890	0,4495	2,18	0,9707	0,4855	2,72	0,9935	0,4965
1,65	0,9011	0,4505	2,19	0,9710	0,4855	2,73	0,9935	0,4965
1,66	0,9031	0,4515	2,20	0,9722	0,4860	2,74	0,9939	0,4970

t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$	t	$2\Phi(t)$	$\Phi(t)$
1,67	0,9041	0,4526	2,21	0,9730	0,4865	2,75	0,9939	0,4970
1,68	0,9070	0,4535	2,22	0,9736	0,4870	2,76	0,9942	0,4970
1,69	0,9090	0,4545	2,23	0,9740	0,4870	2,77	0,9942	0,4970
1,70	0,9109	0,4555	2,24	0,9749	0,4675	2,78	0,9946	0,4975
1,71	0,9127	0,4565	2,25	0,9760	0,4880	2,79	0,9946	0,4975
1,72	0,9146	0,4575	2,26	0,9762	0,4880	2,80	0,9949	0,4975
1,73	0,9164	0,4580	2,27	0,9770	0,4885	2,81	0,9949	0,4975
1,74	0,9181	0,4590	2,28	0,9774	0,4885	2,82	0,9952	0,4975
1,75	0,9199	0,4600	2,29	0,9780	0,4890	2,83	0,9952	0,4975
1,76	0,9216	0,4610	2,30	0,9786	0,4895	2,84	0,9955	0,4975
1,77	0,9233	0,4615	2,31	0,9790	0,4895	2,85	0,9955	0,4975
1,78	0,9249	0,4625	2,32	0,9797	0,4900	2,86	0,9958	0,4980
1,79	0,9265	0,4635	2,33	0,9800	0,4900	2,87	0,9958	0,4980
1,80	0,9231	0,4640	2,34	0,9807	0,4905	2,88	0,9960	0,4980
1,81	0,9297	0,4650	2,35	0,9810	0,4905	2,89	0,9960	0,4980
1,82	0,9312	0,4655	2,36	0,9817	0,4910	2,90	0,9962	0,4980
1,83	0,9328	0,4665	2,37	0,9820	0,4910	2,91	0,9362	0,4980
1,84	0,9342	0,4670	2,38	0,9827	0,4915	2,92	0,9965	0,4980
1,85	0,9357	0,4680	2,39	0,9830	0,4915	2,93	0,9965	0,4980
1,86	0,9371	0,4685	2,40	0,9836	0,4920	2,94	0,9967	0,4985
1,87	0,9385	0,4695	2,41	0,9840	0,4920	2,95	0,9967	0,4985
1,88	0,9399	0,4700	2,42	0,9845	0,4920	2,96	0,9969	0,4985
1,89	0,9412	0,4705	2,43	0,9850	0,4925	2,97	0,9969	0,4985
1,90	0,9426	0,4715	2,44	0,9853	0,4925	2,98	0,9971	0,4985
1,91	0,9439	0,4720	2,45	0,9860	0,4930	2,99	0,9971	0,4985
1,92	0,9451	0,4725	2,46	0,9861	0,4930	3,00	0,9973	0,4986
1,93	0,9464	0,4730	2,47	0,9861	0,4930	3,10	0,9973	0,4986
1,94	0,9476	0,4740	2,48	0,9869	0,4935	3,20	0,9986	0,4993
1,95	0,9498	0,4745	2,49	0,9870	0,4935	3,30	0,9966	0,4993
1,96	0,9500	0,4750	2,50	0,9876	0,4940	3,40	0,9090	0,4995
1,97	0,9512	0,4755	2,51	0,9880	0,4940	3,50	0,9993	0,4996
1,98	0,9523	0,4760	2,52	0,9883	0,4940	3,55	0,9995	0,4597
1,99	0,9534	0,4765	2,53	0,9889	0,4945	3,60	0,9997	0,4998
2,00	0,9545	0,4775	2,54	0,9889	0,4945	3,65	0,9998	0,4999
2,01	0,9560	0,4780	2,55	0,9889	0,4945	3,70	0,9999	0,4999
2,02	0,9566	0,4785	2,56	0,9895	0,4950	3,75	0,99999	0,4999
2,03	0,9580	0,4790	2,57	3,9895	0,4950	3,80	0,99999	0,49999

Додаток 2

ЗНАЧЕННЯ t_a, ДЛЯ ЯКИХ ІМОВІРНІСТЬ

$P(-t_a < t < t_a) = a$

k	Імовірність a					k	Імовірність a				
	0,9	0,95	0,96	0,99	0,999		3,9	0,95	0,98	0,99	0,99 9
1	6,31	12,71	31,82	63,66 1	636,2	18	1,73	2Д0	2,55	2,88	3,92
2	2,02	4,30	6,97	9,93	31,60	19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94	20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61	21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
5	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86	22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
6	1,94	2,45	3,14	3,70	5,96	23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,40	24	І,7І	2,06	2,49	2,80	3,75
8	1,86	2,30	2,90	3,36	5,04	25	1,П	2,06	2,49	2,79	3,72
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78	26	І,7І	2,06	2,48	2,78	3,71
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59	27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,49	28	1,70	2,06	2,47	2,76	3,67
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32	29	1,70	2,06	2,46	2,76	3,66
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22	30	1,70	2,04	2,46	2,45	3,65
14	1,76	2,14	2,62	2,Э8	4,14	40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07	60	1,67	2,00	2,39	2,66	6,46
16	1,75	2,12	2,58	3,92	4,02	120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97		1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Додаток 3

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ t'_β

n	β				*n*	β			
	0,05	0,02	0,01	0,001		0,05	0,02	0,01	0,001
2	15,5611	38,973	77,964	779,696	19	2,156	2,6181	2,953	14,024
3	4,969	8,042	11,460	36,486	20	2,145	2,602:	2,932	13,979
4	3,558	5,077	6,530	14,468	21	2,135	2,5871	2,912	13,941
5	3,041	4,105	5,043	9,432	22	2,127	2,5751	2,895	3,905
6	2,777	3,635	4,355	7,409	23	2,119	2,5621	2,880	3,874
7	2,616	3,360	3,963	6,370	24	2,122	2,5521	2,865	3,845
8	2,508	3,180	3,711	5,733	25	2,105	2,541	2,852	3,819
9	2,431	3,053	3,536	5,314	26	2,099	2,532	2,840	3,796
10	2,372	2,959	3,409	5,014	27	2,094	2,5241	2,830	3,775
11	3,327	2,887	3,310	4,791	28	2,088	2,517	2,820	3,755
12	2,291	2,829	3,233	4,618	29	2,083	2,509	2,810	3,737
13	2,261	2,782	3,170	4,481	30	2,079	2,503	2,802	3,719
14	2,236	2,743	3,118	4,369	40	2,048	2,456	2,742	3,602
15	2,215	2,710	3,075	4,276	60	2,018	2,411	2,683	3,402
16	2,197	2,683	3,038	4,198	120	1,988	2,368	2,628	3,388
17	2,181	2,658	3,006	4,131		1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,168	2,637	2,997	4,074					

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алабужев П.М. и др.* Теория подобия и размерностей. Моделирование. – М.: Высшая школа, 1968. – 206 с.
2. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе: О детерминистическом подходе к турбулентности. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
3. *Бериллий.* Наука и технология / Под ред. Д. Вебстера. – М.: Металлургия, 1984. – 624 с.
4. *Бирюков Б.Н., Евдокимов В.Д., Левандашев Л.О.* Моделирование температурных полей цилиндро-поршневой группы дизелей. – Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах, № 1, 2001. – С. 199–202.
5. *Браунли К.А.* Статистические исследования в производстве. М.: ИЛ, 1949. – 222 с.
6. *Веников В.А., Веников Г.В.* Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1984. – 439 с.
7. *Взаимозаменяемость*, стандартизация и технические измерения: Учебник для втузов / А.И. Якушев, Л.Н. Воронцов, Н.М. Федотов. – 6-е изд., перераб. и дополн. – М.: Машиностроение, 1987. – 352 с.
8. *Гавра Д.Л.* Основы номографии с примерами из машиностроения. – М.: Машгиз, 1962.
9. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
10. *Дейменд С.* Мир вероятностей. Статистика в науке. – М.: Статистика, 1970. – 155 с.
11. *Демкин Н.Б., Рыжов Э.В.* Качество поверхности и контакт деталей машин. – М.: Машиностроение, 1981. – 244 с.
12. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. – М.: Наука, 1986. – 248 с.
13. *Длин А.М.* Математическая статистика в технике. – М.: Советская наука, 1949. – 224 с.
14. *Дроздов Ю.Н. и др.* Трение и износ в экстремальных условиях: Справочник. – М.: Машиностроение, 1986. – 224 с.
15. *Евдокимов Ю.А., Колесников В.И., Тетерин А.И.* Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа. – М.: Наука, 1980. – 228 с.

16. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1965. – 615 с.
17. *Ишлинский А.Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. – М.: Наука, 1985. – 624 с.
18. *Качество* машин: Справочник: В 2 т / А.Г. Суслов, Э.Д. Браун, Н.А.Виткевич и др. – М.: Машиностроение, 1995. – Т. 1. – 256 с.
19. *Капица П.Л.* Эксперимент, теория, практика. – М.: Наука, 1981. – 496 с.
20. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
21. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978. – 780 с.
22. *Мишарин Ю.А.* Применение методов подобия и размерностей в экспериментальном исследовании контактно-гидродинамического трения // Машиностроение, № 5, 1965. – С. 89–100.
23. *Мухин В.С., Смыслов А.М., Боровский С.М.* Модифицирование поверхностей деталей ГТД по условим эксплуатации. – М.: Машиностроение, 1995. – 256 с.
24. *Научные* основы материаловедения / Б.Н. Арзамасцев, А.И. Крашенников, Ж.П. Пастухова, А.Г. Рахштадт. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. – 366 с.
25. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
26. *Проников А.С.* Надежность машин. – М.: Машиностроение, 1978. – 592 с.
27. *Пустыльник Е.И.* Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, 1968. – 288 с.
28. *Рыжов Э.В., Аверченков В.И.* Оптимизация технологических процессов механической обработки. – К.: Наук. думка, 1989. – 192 с.
29. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 328 с.
30. *Сена Л.А.* Единица физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1969. – 304 с.
31. *Сигорский Б.П.* Математический аппарат инженера. – К.: Техника, 1977. – 768 с.
32. *Синергетика* и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова, А.С. Баланкин, Б.П. Чемисов и др. – Мн.: ФТИ; Полоцк: ПГУ, 2000. – 172 с.

33. *Синергетические* аспекты физико-химических методов обработки / А.И. Гордиенко, М.Л. Хейфец, И.Ж. Бунин, А.А. Оксогоев. – М.: Наука, 1994. – 383 с.
34. *Соловьев С.Н.* Основы научных исследований. – Николаев: НКИ, 1974. – 176 с.
35. *Солонин И.С.* Математическая статистика в технологии машиностроения. – М.: Машиностроение, 1972. – 210 с.
36. *Справочник* по триботехнике / Под общ. ред. М. Хебды, А.В. Чичинадзе. В 3 т. Т. 1. Теоретические основы. – М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.
37. *Технологические* основы высокоэффективных методов обработки / П.И. Ящерицин, М.Л. Хейфец, Б.П. Чемисов и др. – Новополоцк: ПГУ, 1996. – 136 с.
38. *Технологические* основы управления качеством машин / А.С. Васильев, А.М. Дальский, С.А. Клименко и др. – М.: Машиностроение, 2003. – 256 с.
39. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
40. *Тихонов С.А., Герасимов С.А., Прохорова И.И.* Применение эффекта памяти формы в современном машиностроении. – М.: Машиностроение, 1981. – 79 с.
41. *Триботехнология*: Словарь-справочник / Под общ. ред. С.Н. Соловьева. Николаев: Изд-во НГГУ им. П. Могилы, 2003. – 384 с.
42. *Хейфец М.Л., Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А.* Процессы самоорганизации при формировании поверхностей. – Гомель: ИММС НАНБ, 1999.
43. *Цейтлин В.И., Волков В.И., Кузнецов Н.Д.* Технологические методы повышения надежности деталей машин: Справочник. – М.: "Машиностроение", 1993. – 304 с.
44. *Чихос Х.* Системный анализ в трибонике. – М.: Мир, 1982. – 351 с.
45. *Шенк Х.* Теория инженерного эксперимента. – М.: Мир, 1972. – 381 с.
46. *Шор Я.Б.* Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. – М.: Советское радио, 1964. – 289 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Станіслав Миколайович Соловйов

ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів – *Б.А. Сладкевич*
Друкується в авторській редакції
Комп'ютерний набір і верстка – *І.В. Авраменко*
Дизайн обкладинки – *Б.В. Борисов*

Підписано до друку 30.01.2007. Формат 60х84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.
Умовн. друк. арк. 11.

Видавництво "Центр учбової літератури"
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA

Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006