Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Ю. П. Буценко,
О. О. Диховичний,
О.А. Тимошенко

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

(Конспект лекцій)

Київ — 2014

Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

Електронне навчальне видання

Вища математика для економістів

Конспект лекцій

для студентів І курсу економічних спеціальностей

Укладачі: *Буценко Юрій Павлович*, канд. фіз-мат. наук, доц.

Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.

Тимошенко Олена Анатоліївна, ас.

Відповідальний редактор *О. І. Клесов*, д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти: *С. В. Єфіменко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Передмова

Конспект лекцій з вищої математики «Вища математика для економістів» складено на основі багаторічного досвіду викладання математики авторами на факультеті менеджменту і маркетингу. Він відповідає програмам з вищої математики бакалаврів першого курсу за напрямами підготовки: 6.030601 «Менеджмент», 6.030507 «Маркетинг», 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030503 «Міжнародна економіка».

Конспект призначений для організації самостійної роботи студентів з вивчення і систематизації знань за темами: лінійна алгебра, аналітична геометрія, функції однієї змінної, функції кількох змінних, невизначені та визначені інтеграли, диференціальні рівняння, ряди. Конспект містить розгорнутий теоретичний матеріал, який підкріплено широким спектром ретельно підібраних прикладів, корисного довідкового матеріалу.

Конспект є складовою навчального комплекту з вищої математики, який містить:

- конспект лекцій;
- практикум;
- збірник індивідуальних завдань.

Відмітимо, що у практикумі «Математичні моделі в економічних задачах», створеному тими ж авторами, зібрано економічні задачі, для яких побудовано математичні моделі та наведено їх розв'язання методами, які строго відповідають програмі даного курсу з вищої математики.

Зміст

Вступ

Як формулюють та записують твердження у математиці? Що таке множина? В які множини об'єднуються числа? Для чого потрібна абсолютна величина числа (модуль)? Якими властивостями наділено модуль числа?

А. Математична символіка

Для формулювання математичних тверджень, їх доведення та описання математичних методів використовують **математичну** або **символічну логіку** та відповідну **символіку**. Основним поняттям логіки є поняття **висловлення.**

Висловлення - це первинне (неозначуване) поняття, що запроваджується за допомогою опису і являє собою твердження, щодо якого можна з'ясувати, істинне воно чи хибне. Таким чином множину всіх висловлень (позначатимемо її S) можна поділити на два класи: T - **істинні** висловлення та F - **хибні** висловлення.

Рівносильними (логічно рівними: $p = q$) <u>називають</u> два висловлення p і q , якщо вони належать до одного класу (одночасно є істинними або хибними).

Мають місце наступні властивості рівносильних висловлень:

1. **Рефлексивність**: $p = p$.
2. **Симетричність**: з $p = q$ випливає $q = p$.
3. **Транзитивність**: з $p = q$ та $q = z$ випливає $p = z$.

Для висловлень запроваджуються наступні операції:

1. **Запереченням** p є висловлення $\overline{p}$ (**не** p), яке істинне, якщо p - хибне, і хибне, якщо p - істинне.
2. **Диз'юнкцією** або **логічною сумою** p і q є висловлення $p \vee q$ (p **або** q), яке є хибним тоді і тільки тоді, коли p і q хибні одночасно.
3. **Кон'юнкцією** або **логічним добутком** висловлення p і q є висловлення $p \wedge q$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинні одночасно p і q.
4. **Імплікацією** або **слідуванням** висловлень p і q є висловлення «якщо p, то q» ($p \Rightarrow q$), яке хибне тоді і тільки тоді, коли p - істинне, а q - хибне.
5. **Рівносильністю** або **еквіваленцією** висловлень є висловлення «p тоді і тільки тоді, коли q» ($p = q$ або $p \Leftrightarrow q$), яке істинне тоді і тільки тоді, коли p і q рівносильні.

Одним із основних об'єктів математики та інших природничих наук є **величини,** тобто об'єкти, які можуть бути охарактеризовані числовими значеннями. Розрізняють: **сталі величини** (які не змінюють своїх значень), **змінні величини** (значення яких можуть бути різними) та **параметри** (величини, які можуть приймати різні значення, але залишаються незмінними в певній конкретній ситуації). **Змінні величини**, які фігурують у певній задачі можуть бути **вільними** (незалежними між собою) або ж **залежними** (значення одних визначається значеннями інших).

Предикатом <u>*називається*</u> твердження, яке містить одну вільну змінну чи більше, і при заміні їх конкретними значеннями є висловленням. Рівності, рівняння, нерівності та їх системи, що розглядаються в математиці, є предикатами. В залежності від кількості вільних змінних розрізняють **одномісні**, **двомісні** і т.д. предикати.

Областю істинності <u>*називається*</u> множина значень вільних змінних, при яких предикат є істинним висловлюванням.

Для скороченого запису виразів , які найчастіше використовуються в словесному описанні математичних тверджень та міркувань, використовуються **квантори**.

Квантор загальності - $\forall$ - означає «для всіх», «для кожного», «яке б не було».

Квантор існування - $\exists$ - означає «існує», «знайдеться хоча б одне».

Серед математичних тверджень розрізняють такі, що не потребують доведення (**аксіоми**, **постулати**) та ті, істинність яких з'ясовується доведенням (**леми**, **теореми**). Формулювання твердження, яке потребує доведення складається з **умови** P та **висновку** Q, тобто є предикатом, який при всіх значеннях вільних невідомих перетворюється на імплікацію. Якщо такий предикат істинний при всіх значеннях вільних невідомих (тотожно), то теорема називається правильною, інакше-неправильною. Зауважимо, що для обґрунтування неправильності теореми досить навести **контрприклад** - тобто вказати хоча б одне значення вільних невідомих, при якому імплікація хибна.

Розрізняють чотири основних типи теорем (відносно умови P та висновку Q):

1. **Прямі теореми**: $P \Rightarrow Q$
2. **Обернені теореми**: $Q \Rightarrow P$
3. **Протилежні теореми**: $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$.
4. **Обернені до протилежних теорем**: $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Можна довести, що еквівалентними (одночасно правильними чи неправильними) є пряма та обернена до протилежної теореми, обернена та протилежна теореми.

Умови теорем можуть мати характер **достатніх** (з них випливає, що твердження істинне), **необхідних** (без виконання таких умов твердження неправильне), **необхідних та достатніх** (з них випливає, що твердження справедливе, причому тільки за виконання такої умови).

Б. Множини

Б.1 Основні поняття теорії множин

Поняття **множини** є ще одним не означуваним базовим поняттям математики. Воно є одним з найширших в математиці (за Г.Кантором, ***це – багато дечого, мислимого нами, як єдине).***

Елементами множини <u>*називаються*</u> об'єкти, що складають множину.

Порожньою <u>*називається*</u> множина, яка не містить жодного елементу.

Множини надалі в більшості випадків позначатимуться великими буквами латинського алфавіту, їх елементи – малими буквами. Якщо об'єкт a належить множині A, то пишуть $a \in A$, якщо об'єкт b не належить множині B, то пишуть $b \in B$. Порожня множина позначається символом $\varnothing$.

Підмножиною множини А <u>*називається*</u> така множина В, всі елементи якої є елементами множини A. Це позначають так: $B \subset A$ або $A \supset B$.

Слід пам'ятати, що задавання множини означає визначення того, що відрізняє її елементи від решти об'єктів. За означенням вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої іншої множини: $\varnothing \subset A, \ \forall A$.

Невласними підмножинами множини A <u>*називаються*</u> порожня множина $\varnothing$ та сама множина A, решта її підмножин – частинами A або **власними підмножинами**.

Важливо! ***Слід пам'ятати що, загальна кількість підмножин для множини*** A ***з*** n ***елементів складає*** 2^n.

Дві множини A та B <u>*називаються*</u> **рівними** $(A = B)$, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто одночасно $A \subset B$ та $B \subset A$. Символічний запис має вигляд: $\{A \subset B \wedge B \subset A\} \Leftrightarrow \{A = B\}$.

Основні операції над множинами визначаються так:

1) **перетином множин** A **та** B <u>*називається*</u> множина C, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B, позначається це так: $C = A \bigcap B$;
2) **об'єднанням множин** A **та** B <u>*називається*</u> множина D, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із цих множин, позначається це так: $D = A \bigcup B$;
3) **різницею множин** A **та** B <u>*називається*</u> множина E, яка складається з тих і тільки тих елементів A, які не належать B, позначається це так: $E = A \setminus B$;

4) **доповнення** множини B до множини A є частинним випадком різниці $A \setminus B$ коли $B \subset A$, в таких випадках пишуть $\overline{B}_A$ або просто $\overline{B}$ (коли множина A є очевидно зрозумілою).

Б.2. Числові множини

У курсі математики найчастіше використовуються **числові множини**. Це, по-перше, **множина натуральних чисел** $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$. Відзначимо, що такі числа виникають, якщо лічити певні об'єкти, ця множина **замкнена відносно операцій додавання та множення** (сума та добуток натуральних чисел також є натуральними числами). По-друге, розглядається **множина цілих чисел** Z, яка складається з натуральних чисел, протилежних їм чисел і нуля: $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots\}$. Зазначимо, що така множина **замкнена відносно операцій додавання, множення та віднімання**. По-третє, визначається **множина раціональних чисел** Q, що містить всі числа вигляду $\frac{p}{q}$, де $p \in Z$, $q \in N$. Для цієї множини має місце **замкненість відносно всіх чотирьох арифметичних дій** («заборонене» лише ділення на нуль).

Для подальшого розширення системи числових множин слід зауважити, що раціональні числа при використанні, наприклад, десяткової системи запису, є **скінченими** або ж **нескінченними періодичними десятковими дробами**. Числа ж, які записуються нескінченними неперіодичними десятковими дробами, <u>*називаються*</u> **ірраціональними.** Об'єднання множин **раціональних** та **ірраціональних** чисел складає **множину дійсних чисел** і позначається R. Таким чином, має місце ланцюг включень $N \subset Z \subset Q \subset R$, причому множина $\overline{Q} = R \setminus Q$ є множина ірраціональних чисел.

Принципово важливою є **геометрична властивість множини дійсних чисел**. Нехай на прямій лінії визначено **напрям** (називатимемо його додатним, а протилежний до нього – від'ємним), деяку точку O (**початок відліку** або **початок координат**) та **масштаб.** Тоді така пряма <u>*називається*</u> **числовою прямою** або **координатною віссю**. Положення будь-якої точки M на координатній осі визначається її **координатою** – числом, рівним відстані точки M до точки O , взятій зі знаком « + », якщо точка M

розміщена в додатному напрямі відносно початку координаті, або зі знаком « $-$» у протилежному випадку.

Важливо!

Кожній точці на числовій прямій відповідає дійсне число і це відношення взаємно-однозначне: кожному дійсному числу відповідає єдина точка і кожній точці – єдине число.

Така інтерпретація множини R, серед іншого, робить наочними такі три властивості дійсних чисел:

1) **упорядкованість** – для двох дійсних чисел a та b може бути справедливим тільки одне з трьох співвідношень: $a=b$, $a>b$, $a<b$;
2) **щільність** – між двома різними дійсними числами a та b обов'язково знайдеться дійсне число c: $a<c<b$;
3) **неперервність** – якщо поділити множину R на дві множини X та Y, які не перетинаються $X\bigcup Y=R$, та $\forall x\in X$ менше за $\forall y\in Y$, то можливі тільки два варіанти – або в множині X є найбільший елемент, а в множині Y найменшого немає, або ж серед елементів X немає свого найбільшого елементу, а Y містить свій найменший елемент.

До «найуживаніших» підмножин множини дійсних чисел (і, відповідно, множин точок на прямій), належать **замкнені інтервали** (сегменти) – множини $\{x: a\le x\le b\}$, **відкриті інтервали** – множини $\{x: a<x<b\}$, **напіввідкриті інтервали** – множини вигляду $\{x: a\le x<b\}$ та $\{x: a<x\le b\}$.

При цьому числа a та b називають **кінцями інтервалу**, а сам інтервал – **обмеженим**. До **нескінченних інтервалів** належать інтервали $(-\infty;a],(-\infty;a),(b;+\infty),[b;+\infty),(-\infty;+\infty)$.

С. Модуль дійсного числа

Модулем (абсолютною величиною) числа x <u>*називається*</u> число

$$|x|=\begin{cases} x, x>0; \\ -x, x<0; \\ 0, x=0. \end{cases}$$

Важливо!

Геометрично, модуль числа є відстань від початку координат до точки, що зображає це число на числовій прямій.

Модуль дійсного числа має наступні властивості:

1) рівні числа мають рівні модулі: $a = b \Rightarrow |a| = |b|$;
2) модуль числа завжди невід'ємний: $|a| \geq 0$;
4) число не перевищує свого модуля: $a \leq |a|$;
5) протилежні числа мають рівні модулі: $|a| = |-a|$;
6) модуль суми скінченої кількості доданків не перевищує суми їх модулів: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;
7) модуль різниці двох чисел не менший за різницю їх модулів: $|a - b| \geq |a| - |b|$;
8) модуль добутку скінченої кількості співмножників дорівнює добутку їх модулів: $|a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n| = |a_1| \times |a_2| \times \ldots \times |a_n|$;
9) модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

З поняттям модуля пов'язаний важливий різновид підмножин множини раціональних чисел (множин на числовій прямій) – **околи числа** (точки). Надалі називатимемо ε **– околом** ($\varepsilon > 0$) числа a (точки з координатою a на числовій прямій) сукупність чисел x (точок), які задовольняють нерівність $|x - a| < \varepsilon$. З геометричної точки зору, така множина на числовій прямій є відкритий інтервал довжини 2ε, середина якого знаходиться в точці з координатою a.

Контрольні запитання

1. Що таке висловлювання? Які висловлювання називаються рівносильними? Які властивості мають рівносильні висловлювання?
2. Які операції здійснюються над висловлюваннями?
3. Що таке предикат? Наведіть приклади предикатів.

4. Які існують квантори? Наведіть їх суть.
5. Наведіть приклади прямої, оберненої та протилежної до них теорем. Вкажіть, які з них є істинними?
6. Що таке достатні, необхідні, необхідні і достатні умови? Наведіть приклади.
7. Дайте означення об’єднання, перетину, різниці, доповнення множин.
8. Охарактеризуйте множини натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних чисел та числової осі. Наведіть їх властивості.
9. Дайте означення модуля(абсолютної величини) дійсного числа, наведіть властивості модуля. Що таке ε - окіл дійсного числа?

Тема 1. Матриці та дії над ними

1.1. Поняття матриці. Класифікація матриць
1.2. Дії над матрицями

Що таке матриці і якими вони бувають?. Які дії можна виконувати над матрицями?

1.1. Поняття матриці. Класифікація матриць

Числовою матрицею розмірності $n \times k$ <u>*називається*</u> прямокутна таблиця чисел із n рядків та k стовбців. При цьому числа <u>*називаються*</u> **елементами матриці**, сукупність елементів, розташованих на вертикальній (горизонтальній) прямій складає **стовпець** або, що те ж саме, **вектор-стовпець** (**рядок** або ж **вектор-рядок**) матриці. Місце, на якому знаходиться кожен елемент матриці, визначається номерами рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент, відповідно, a_{ij} є елемент, що стоїть в i -му рядку та j -му стовпці, а сама матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{Vmatrix}$$

Квадратною матрицею порядку n <u>*називається*</u> матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців $(n = k)$. Для квадратних матриць елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ складають **головну діагональ**, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ – **побічну діагональ**.

Вектором-рядком <u>*називається*</u> матриця, яка має єдиний рядок $(n = 1)$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \end{pmatrix},$$

Вектором-стовпцем <u>*називається*</u> матриця, яка має єдиний стовпець:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}.$$

Нульовою *<u>називається</u>* матриця (позначається O), в якій всі її елементи – нулі:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Діагональною *<u>називається</u>* матриця, в якій всі елементи, розташовані поза головною діагоналлю - нулі:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одиничною *<u>називається</u>* діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, позначається E (або I):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Симетричною *<u>називається</u>* квадратна матриця S, для всіх елементів якої S_{ij} виконується рівність $S_{ij} = S_{ji}$:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & & & \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рівними *<u>називаються</u>* матриці A та B , якщо

а) вони мають однакову розмірність;

б) всі відповідні елементи цих матриць рівні: $a_{ij} = b_{ij}$.

1.2. Дії над матрицями

А) Транспонуванням матриць *<u>називається</u>* заміна її рядків на відповідні стовпці (що еквівалентно заміні стовпців на відповідні рядки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Важливо!

<u>При транспонуванні</u>:

а) розмірність матриці змінюється з $n \times k$ на $k \times n$;

б) елементи головної діагоналі квадратних матриць залишаються незмінними;

в) симетричні матриці залишаються незмінними.

В) Додавання матриць. Сумою матриць A і B однакової розмірності *<u>називається</u>* матриця C такої ж розмірності, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \ldots & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix}$$

Важливо!

При додаванні:

а) ***додавання матриць є комутативною операцією:*** $A+B=B+A$***;***

б) ***нульова матриця є нейтральним елементом при додаванні***: $A+O=A$

В) Добутком матриці на число *називається* матриця, всі елементи якої дорівнюють відповідним елементам вихідної матриці, помноженим на число:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix},\ \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nk} \end{pmatrix}$$

Важливо!

При множенні матриці на число:

а) ***матриця*** $(-1)\cdot A=-A$ ***називається протилежною до матриці*** A***,*** $A+(-A)=0$***;***

б) ***добуток матриці на число має розподільну (дистрибутивну)властивість:***
$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$***;***

в) ***якщо*** $\alpha=0$***,*** то $0\cdot A=O$.

Г) Добутком матриць A, розмірності $m\times k$, та B, розмірності $k\times l$, кількість стовпців матриці A обов’язково дорівнює кількості рядків матриці B, тобто матриці є **узгодженими,** *називається* матриця C, кожний елемент c_{ij} якої є сума добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kl} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$, $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le l.$.

Важливо!

***При множенні матриць*:**

а) добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею нульову є нульовою матрицею:

$$O \cdot A = A \cdot O = O;$$

б) добуток будь-якої квадратної матриці на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює даній матриці:

$$E \cdot A = A \cdot E = A;$$

в) добуток матриць не є комутативним, тобто в загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$ (можливо навіть, що один з цих добутків існує, а інший – ні);

г) мають місце рівності:

$$\alpha(A \cdot B) = \alpha A \cdot B = A \cdot (\alpha B),$$

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

$$A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

(за умови, що всі відповідні додавання та множення матриць є допустимими);

д) має місце рівність для узгодження матриць:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Приклад 1.2.1. Додати дві матриці.

$$A + B =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+0 & 3+1 \\ 4+2 & 5+(-3) & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2.2. Помножити матрицю на число.

$$2A=2\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot(-2)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3\\ 2\cdot(-4) & 2\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 6\\ -8 & 10\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2.3. Перемножити матриці.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 2\ \ 3}\\ 1\ \ 0\ \ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & \boxed{4} & 5\\ 6 & \boxed{0} & -2\\ 7 & \boxed{1} & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 6+3\cdot 7 & \boxed{1\cdot 4+2\cdot 0+3\cdot 1} & 1\cdot 5+2\cdot(-2)+3\cdot 8\\ 1\cdot 3+0\cdot 6+(-1)\cdot 7 & 1\cdot 4+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

Контрольні запитання

1) Дайте означення матриці. Що називається її розмірністю, стовпцем, рядком?
2) Що таке квадратна, нульова, одинична матриці? Матриця-рядок? Матриця-стовпець?
3) Як виконується транспонування матриць? Як при цьому змінюються діагональна, симетрична матриці?
4) Що таке добуток матриці на число і матриці на матрицю? Коли дві матриці можна додати і як виконується ця операція?
5) В якому випадку дві матриці можна перемножити? Як виконується множення матриць? Які властивості цієї операції?

Тема 2. Визначники матриць. Ранг матриці. Обернена матриця

2.1. Означення визначника
2.2. Властивості визначників та їх обчислення
2.3. Ранг матриці та його обчислення
2.4. Обернена матриця

Що таке визначник? Для яких матриць і як його обчислюють? Властивості визначників, що полегшують їх обчислення. Ранг матриці та його зв'язок з визначниками. Що таке обернена матриця, коли вона існує і як обчислюється?

2.1. Означення визначника

Нехай $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - квадратна матриця порядку n.

Кожній такій матриці можна поставити у відповідність число, яке *називається* **визначником** або **детермінантом** матриці. При цьому використовується позначення:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{vmatrix}.$$

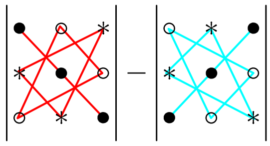
Порядком визначника *називається* розмірність відповідної квадратної матриці, тобто визначник квадратної матриці n -го порядку є визначник є n -го порядку.

Розглянемо обчислення визначників у найпростіших випадках:

1. при $n=1$, $A=(a_{11})$, $detA=a_{11}$;
2. при $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $detA=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$;

3. при $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{32} =$$



.

Для розгляду визначників вищих порядків корисні наступні поняття:

Мінором M_{ij} **порядку** $(n-1)$ **елемента** a_{ij} **квадратної матриці** A n**-го порядку** *називається* визначник матриці, отриманої викресленням з матриці A її i-го рядка та j-го стовпця:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням (ад'юнктом) елемента a_{ij} **квадратної матриці** A n**-го порядку** *називається* число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$;

Справджується наступна **теорема про розклад визначника за рядком (стовпцем).**

Теорема

Для кожної квадратної матриці A n***-го порядку при довільному*** i $(1 \le i \le n)$ ***виконано***:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik};$$

та при довільному j $(1 \le j \le n)$ —

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

Важливо!

Формула розкладу дозволяє:

а) використовувати для розкладу будь-який рядок (стовпець);

б) запроваджувати визначник n***-го порядку індуктивно (тобто за допомогою визначників*** $(n-1)$ ***порядку), наприклад, визначник четвертого порядку – через визначник 3 порядку і т.д.***

Приклад 2.1.1. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (2 \cdot (-3) - 0 \cdot 5) - 3((-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 1) + ((-1) \cdot 5 - 2 \cdot 1) =$$
$$= -6 - 9 - 7 = -22.$$

2.2. Властивості визначників та їх обчислення:

1) Визначник не змінюється при транспонуванні матриці:

$$|A| = |A^T|$$

(ця властивість означає рівноправність рядків та стовпців матриці).

2) Якщо поміняти місцями два рядки (стовпці) матриці, то він змінить свій знак на протилежний.
3) Визначник, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.
 Дійсно, відповідно до попередньої властивості, такий визначник не змінюватиметься при зміні знаку на протилежний.
4) Якщо елементи деякого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5) Визначник, відповідні елементи двох рядків (стовпців) якого пропорційні, рівний нулю.
 Дійсно, така властивість випливає з послідовного застосування третьої та четвертої властивостей.
6) Якщо кожний елемент певного рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких відповідні рядки (стовпці) складені з доданків, а решта збігається з рядками (стовпцями) первинного визначника.
7) Визначник не змінюється, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати помножені на відповідний сталий множник відповідні елементи іншого рядка (стовпця).Ця властивість випливає з шостої та п’ятої.
8) Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця), дорівнює нулю.
 Ця властивість випливає з третьої властивості та основної формули для обчислення визначників.
9) Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників.

Трикутною *називається* квадратна матриця, у якої всі елементи, розташовані нижче головної діагоналі (a_{ij} =0 при $i > j$) .

Важливо!

Як випливає з основної формули для обчислення визначників, визначник трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів.

Приміром,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

Елементарними перетвореннями матриці будемо <u>*називати*</u> такі дії над матрицями, як транспонування, переміна місцями двох її рядків (стовпців), додавання до рядка (стовпця) іншого рядка (стовпця) помноженого на число.

Важливо!

Властивості визначників свідчать, що при здійсненні елементарних перетворень матриці її визначник змінює знак на протилежний або взагалі не змінюється. В той же час, за допомогою елементарних перетворень будь-яка матриця може бути зведена до трикутного вигляду, що радикально спрощує знаходження її визначника.

Цей метод знаходження визначників називається **методом елементарних перетворень** та в багатьох випадках є істотно менш трудомістким, ніж за допомогою використання основної формули.

Приклад 2.2.1. Обчислити визначник методом елементарних перетворень.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -4\mathrm{I} \\ \\ -5\mathrm{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{II} \\ +2\mathrm{II} \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +2\mathrm{III} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2)(-14) = 28.$$

2.3. Ранг матриці та його обчислення

Проводячи елементарні перетворення матриці A (не обов'язково квадратної), можна зробити всі її рядки (стовпці), які є «комбінаціями» інших, нульовими. Якщо після цього викреслити всі нульові рядки та стовпці отриманої матриці, то залишиться квадратна матриця B.

Базисними рядками та **стовпцями** *<u>називаються</u>* відповідно рядки та стовпці, що належать, матриці B , а її порядок – **рангом матриці** A.

Ранг матриці можна визначити і іншим способом.

Мінором k **-го порядку** довільної матриці A *<u>назвемо</u>* визначник, складений з елементів, які стоять на перетині певних k стовпців та k рядків такої матриці. В такому випадку ранг матриці *<u>визначається</u>* як **найбільший порядок відмінного від нуля мінора** (отримане значення буде таким самим, як і попереднє). Цей мінор *<u>називається</u>* **базисним**

Для знаходження рангів матриць часто використовується також наступна **теорема про обвідні мінори**:

Теорема

Якщо матриця A містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$***-го порядку, що обводять цей мінор (містять всі його рядки та стовпці) дорівнюють нулю, то*** r ***є рангом матриці.***

Приклад 2.3.1. Обчислити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, всі мінори порядку 3 дорівнюють нулеві. Отже, $\operatorname{rang} A = 2$.

2.4. Обернена матриця

Матрицею, оберненою до квадратної матриці A *<u>називається</u>* така матриця A^{-1}, для якої виконуються рівності:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Невиродженою <u>*називається*</u> матриця, визначник якої відмінний від нуля, інакше – **виродженою**.

Важливо!

Обернена матриця A^{-1} існує тоді і тільки тоді, коли A – не вироджена.

Властивості обернених матриць:

1) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$;

3) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

4) $\left(A^{n}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{n}$.

Правило знаходження оберненої матриці:

Алгоритм

1) ***Знаходять визначник даної матриці, якщо він відмінний від нуля, то матриця невироджена, тобто має обернену;***
2) ***складають матрицю з алгебраїчних доповнень всіх елементів даної матриці;***
3) ***матрицю з алгебраїчних доповнень транспонують, кожний її елемент ділять на визначник даної матриці;***
4) ***перевіряють, чи дійсно є знайдена у попередньому пункті матриця є оберненою до даної, шляхом множення її на дану.***

Приклад 2.4.1. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$$

1) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{vmatrix}=1\ \Rightarrow$ матриця A має обернену(є невиродженою).

2)

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -7 & 3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -7\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -7 & 3\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -7\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=2.$$

3) $$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

4) Перевірка:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено вірно.

Контрольні запитання

1. Як обчислюються визначники другого і третього порядків?
2. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента матриці?
3. Запишіть формулу розкладу визначника за елементами рядка(стовпця).
4. Сформулюйте властивості визначників.

5. Що таке елементарні перетворення матриць? Як їх використовують для обчислення визначників? Чому дорівнюють визначники діагональної та трикутної матриць?
6. Що називають рангом матриці і як він може бути обчислений?
7. Що таке обернена матриця і для матриць вона існує? Наведіть її властивості.
8. Як обчислюється обернена матриця?

Тема 3.Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), методи їх розв'язання.

Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь? Як її записати за допомогою матриць? Що називається розв'язком такої системи і скільки розв'язків може мати система? Як знаходять розв'язки? Як можна узагальнити метод Гаусса? Якій множині належать розв'язки системи з n невідомими? Як матриця діє на вектор?

3.1. Загальні відомості

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь з k невідомими <u>*називається*</u> система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}.$$

Числа $a_{11},\ldots,a_{nk}$ <u>*називаються*</u> **коефіцієнтами системи,** праві частини рівнянь - $b_1,\ldots,b_n$ **– *її* вільними членами,** $x_1,\ldots,x_k$ **– невідомі.**

Розв'язати систему – *означає знайти всі такі впорядковані набори чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, які при підстановці їх замість $x_1,\ldots,x_k$ перетворюють всі рівняння системи на тотожності.*

Якщо запровадити матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$, та вектори-стовпці $\overline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, $\overline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, то виникає можливість запису системи у **векторно-матричній формі**:

$$A\cdot\overline{x}=\overline{b},$$

де рівність має сенс рівності відповідних матриць(вектор-стовпців)

Почнемо розглядати СЛАР із випадку, коли $n=k$, тобто матриця A є квадратною, кількості рівнянь та невідомих рівні.

3.2. Матричний метод

Якщо матриця A є невиродженою, то для розв'язання системи може бути використаний **матричний метод (метод оберненої матриці)**:

$$A\overline{x}=\overline{b}\Rightarrow A^{-1}A\overline{x}=A^{-1}\overline{b}\Rightarrow\overline{x}=A^{-1}\overline{b}\ .$$

Важливо!

До недоліків такого методу належать обмеженість сфери його використання (тільки квадратна і до того ж невироджена матриця A) та відносно великий об'єм обчислень.

Приклад 3.2.1. Розв'язати систему $A\vec{x}=\vec{b}$, методом оберненої матриці, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0,$$

то матриця A - невироджена. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15, \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Отже, $$A^{-1} = \frac{1}{-29}\begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 29 \\ -87 \\ -145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3.3. Метод Крамера

Запровадимо матриці $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які відрізняються від матриці А заміною у ній відповідно першого, другого і т. д. до n-го стовпців стовпцем вільних членів. Якщо позначити $|A| = \Delta$, $|A_1| = \Delta_1, |A_2| = \Delta_2, \ldots, |A_n| = \Delta_n$ і знову припустити, що $\Delta \neq 0$, то справедливі **формули Крамера**

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta, \ x_2 = \Delta_2 / \Delta \ , \ \ldots \ x_n = \Delta_n / \Delta.$$

Важливо!

Недоліки* методу Крамера, *який полягає у знаходженні невідомих за цими формулами, ті ж, що й у матричного методу.

В той же час, в процесі їх обґрунтування було доведено **теорему Крамера**:

Теорема Крамера

Якщо СЛАР має рівні кількості невідомих та рівнянь, то:

1) ***якщо*** Δ ***(головний визначник системи)*** $\neq 0$, ***то система має єдиний розв'язок (сумісна і однозначно розв'язана);***
2) ***якщо*** $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$, ***то система має безліч розв'язків (сумісна і недовизначена);***
3) ***якщо*** $\Delta = 0$, ***а серед визначників*** $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ***знайдеться хоча б один відмінний від нуля, то система не має розв'язків (є несумісною);***

Приклад 3.3.1. Розв'язати методом Крамера СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 - 1 - 1 - 6 + 15 = 26.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 45 + 1 - 5 - 15 = 26.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 0 + 5 + 1 - 0 + 30 = 26.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 + 0 + 0 + 15 - 2 = 26.$$

$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 26/26 = 1,$

$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 26/26 = 1,$

$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 26/26 = 1.$

3.4 Теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо загальний метод дослідження та розв'язання СЛАР. Нехай A^* є **розширена матриця системи,**

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & b_k \end{pmatrix},$$

тоді справедлива **теорема Кронекера-Капеллі:**

Теорема Кронекера-Капеллі

Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранги її основної та розширеної матриць рівні.

3.5. Метод Гаусса

Вказана теорема дає можливість визначати сумісність довільної системи. Знаходження ж її розв'язків (єдиного чи нескінченної множини) можливе за допомогою **методу послідовного виключення невідомих – методу Гаусса. Алгоритм** цього методу складається з двох частин:

1) **Прямий хід** методу Гаусса полягає в одночасному визначенні рангів матриць A (основної) та A^* (розширеної) за допомогою **елементарних перетворень рядків:** припустивши, що елемент $a_{11} \neq 0$ (інакше здійснюється перестановка рядків), всі інші елементи першого стовпця A робляться нульовими шляхом додавання до відповідних рядків першого, помноженого на $\left(-\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right)$, далі припускаємо, що $a_{22} \neq 0$ і повторюємо процедуру для другого стовпця і т. д. Після здійснення прямого ходу методу Гаусса, за допомогою теореми Кронекера-Капеллі, встановлюється тип системи.

Важливо!

Якщо** $r(A) \neq r(A^*)$ **- система несумісна, алгоритм обривається, якщо ж** $r(A) = r(A^*) = k$**, система має єдиний розв'язок, якщо ж** $r(A) = r(A^*) = m < k$**, то система має безліч розв'язків, її невідомі поділяються на** m **базисних та** $(k-m)$ **вільних.

Якщо розв'язків безліч, то базисними невідомими вважаються ті, стовпці яких належать до визначеного прямим ходом методу Гаусса ненульового мінора порядку m, решта невідомих – вільні – можуть приймати довільні дійсні значення незалежно одна від одної.

2) Зворотний хід методу Гаусса полягає у послідовному знаходженні значень невідомих (якщо система має єдиний розв'язок), або у послідовному вираженні базисних невідомих через вільні(якщо розв'язків безліч).

До переваг методу Гаусса належать його універсальність (можливість дослідження і розв'язання будь-яких СЛАР) та менша, порівняно з іншими методами, кількість обчислювальних операцій.

Приклад 3.5.1. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛАР:

$$\text{а)}\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18, \end{cases}$$

$$\text{б)}\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

а) **Прямий хід:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 = \overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_1 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_3 + \overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_2 = -\dfrac{1}{7}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 + \dfrac{1}{7}\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 3 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 3 \end{array}$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

Зворотній хід:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3.$$

б) **Прямий хід:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2&7&3&1&6\\ 3&5&2&2&4\\ 9&4&1&7&2\end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1=\frac{1}{2}\overleftarrow{a}_1\\ \overleftarrow{b}_2=\overleftarrow{a}^2-\frac{3}{2}\overleftarrow{a}_1\\ \overleftarrow{b}_3=\overleftarrow{a}^3-\frac{9}{2}\overleftarrow{a}_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&\frac{7}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&3\\ 0&-\frac{11}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-5\\ 0&-\frac{55}{2}&-\frac{25}{2}&\frac{5}{2}&-25\end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_1=\overleftarrow{b}_1+\frac{7}{11}\overleftarrow{b}_2\\ \overleftarrow{c}_2=-\frac{2}{11}\overleftarrow{b}_2\\ \overleftarrow{c}_3=\overleftarrow{b}_3-5\overleftarrow{b}_2\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&-\frac{1}{11}&\frac{9}{11}&-\frac{2}{11}\\ 0&1&\frac{5}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{10}{11}\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right) \begin{array}{l} \operatorname{rang} A=2\\ \operatorname{rang}\ A\,|\,\vec{b}\ =2\end{array}$$

x_1, x_2 - базисні змінні, x_3, x_4 - вільні змінні. Отже,

$$\begin{cases} x_1=-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}C_1-\frac{9}{11}C_2,\\ x_2=\frac{10}{11}-\frac{5}{11}C_1+\frac{1}{11}C_2,\\ x_3=C_1,\\ x_4=C_2, C_1, C_2\in R.\end{cases}$$

3.6. Метод Йордана-Гаусса

Важливою модифікацією **методу Гаусса** є **метод Йордана-Гаусса**, що дозволяє одночасно здійснювати прямий та обернений ходи методу Гаусса.

Алгоритм перетворення Йордана-Гаусса

1) ***Вибирається елемент матриці системи*** $a_{ij}\neq 0$.
2) ***Елементи*** i ***-го (розв'язувального) рядка ділимо на*** a_{ij} ***і записуємо як*** i ***-й рядок розрахункової таблиці.***
3) ***У*** j ***-му розв'язувальному стовпці розрахункової таблиці замість*** a_{ij} ***записуємо 1, замість решти елементів – нулі.***
4) ***Решту елементів розрахункової таблиці знаходимо за формулами*** $\bar{a}_{ke}=\dfrac{a_{ij}a_{ke}-a_{kj}a_{ie}}{a_{ij}}$ ***,*** $1\le k\le m,\ 1\le l\le n.$

3.7. Деякі додаткові питання теорії СЛАР

Системою в базисному вигляді <u>*називають*</u> таблицю, яка отримана після максимально-можливої кількості таких кроків та викреслення нульових або пропорційних рядків**.** Її запис дозволяє визначити ранги основної та розширеної матриць, поділити невідомі на базисні та вільні, виразити базисні невідомі через вільні.

3.7.1. Арифметичний n-вимірний простір. Структура загального роз'вязку СЛАР

Раніше нам часто доводилося мати справу з упорядкованими наборами з певної кількості дійсних чисел (вектори-рядки, вектори-стовпці, вектор невідомих, вектор вільних членів).

Арифметичним n-вимірним простором R^n <u>*називається*</u> сукупність усіх упорядкованих наборів з n дійсних чисел $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, при цьому елементи такого простору <u>*називаються*</u> n **-вимірними векторами**, n **-розмірністю простору**, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – **компонентами вектора**. При цьому:

а) **два n-вимірних вектори рівні** тоді і тільки тоді, коли у них рівні всі відповідні координати:

$$\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \overline{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}, \ \overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases};$$

б) **сумою двох n-вимірних векторів** <u>*називається*</u> n-вимірний вектор, кожна компонента якого є сумою відповідних доданків компонента:

$$\begin{matrix} \overline{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \\ \overline{y} = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\} \end{matrix}, \quad \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n\}.$$

в) **добутком вектора на дійсне число** <u>*називається*</u> вектор тієї ж розмірності, кожна компонента якого дорівнює відповідній компоненті вихідного вектора, помноженого на це число:

$$\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \ \alpha\overline{x} = \{\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n\}.$$

Зазначимо, що:

1) операція додавання є комутативною

$$\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x};$$

2) операція додавання є асоціативною

$$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z};$$

3) операція множення на число також асоціативна

$$\alpha\left(\beta\bar{x}\right)=(\alpha\beta)\bar{x};$$

4) має місце дистрибутивна властивість

$$\alpha\left(\bar{x}+\bar{y}\right)=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y};$$

5) існують нульовий елемент $0=\{0;0;\ldots;0\}$ та протилежний $(-\bar{x})$ елемент для довільного елемента $\bar{x}$:

$$\bar{x}+\left(-\bar{x}\right)=0;$$

6) $1\times\bar{x}=\bar{x}$ для будь-якого вектора $\bar{x}$.

Лінійним простором <u>*називається*</u> сукупність елементів, для яких визначені дії *а), б), в)* та мають місце властивості 1) – 6) .
Як для n-вимірних просторів, так і для лінійних просторів взагалі, має місце наступне поняття:

Лінійною комбінацією елементів <u>*називається*</u> елемент $x=\alpha_1\bar{x}_1+\ldots+\alpha_m\bar{x}_m$, де $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$ – елементи простору, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – дійсні числа,числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ - <u>*називаються*</u> **коефіцієнтами лінійної комбінації.**

Лінійно незалежними <u>*називаються*</u> вектори $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$, для яких з рівності їх лінійної комбінації нулю випливає рівність нулю всіх її коефіцієнтів, якщо ж знайдуться такі коефіцієнти $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, які не всі рівні нулю, і в той же час $\alpha_1\bar{x}_1+...+\alpha_m\bar{x}_m=\bar{0}$, то $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$ <u>*називаються*</u> **лінійно залежними**.

Можна показати, що:

а) якщо вектори лінійно залежні, то принаймні один з них може бути виражений через решту (записаний як їх лінійна комбінація);

б) якщо серед елементів $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$ є нульовий, то вони лінійно залежні;

в) якщо частина векторів серед $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m$ лінійно залежні, то лінійно залежні і всі ці вектори.

Важливо!

Відповідно до раніше розглянутого поняття рангу матриці, він є максимальною кількістю лінійно незалежних векторів-рядків (або, що те ж саме, векторів-стовпців).

n **-вимірним лінійним простором** *<u>називається</u>* лінійний простір, в якому максимально можлива кількість лінійно незалежних елементів дорівнює n , а сама сукупність n лінійно незалежних елементів – *<u>називається</u>* **базисом простору**. Основна властивість базису – будь-який елемент простору є лінійною комбінацією елементів базису, при цьому коефіцієнти такої лінійної комбінації *<u>називають</u>* **координатами елемента**.

Прикладом базису є сукупність рядків (стовпців) базисного мінору матриці (решта рядків (стовпців) є їх лінійними комбінаціями).

Якщо СЛАР є однорідною ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), то така система напевне є сумісною ($x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ є її розв'язком). Якщо ж ОСЛАР має безліч розв'язків, то її **загальний розв'язок** $\overline{x_{з.о.}}$ можна розглядати як лінійну комбінацію (з довільними коефіцієнтами) деяких **частинних розв'язків**. Це пов'язано з тим, що , як легко перевірити, для системи $A\overline{x} = \overline{0}$, вектори $\alpha\,\overline{x}$, $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ є розв'язками, якщо $\overline{x}$, $\overline{x_1}$ та $\overline{x_2}$ – розв'язки , тобто множина розв'язків однорідної системи є **лінійним простором** . Базис такого простору *<u>називається</u>* **фундаментальною системою розв'язків**, розмірність його дорівнює $k - r$ (k – кількість невідомих, r – ранг), побудувати його можна, наприклад, послідовно покладаючи одну з вільних невідомих 1, а решту – нулю. Таким чином, $\overline{x_{з.о.}} = c_1\,\overline{x_1} + \ldots + c_{k-r}\,\overline{x_{k-r}}$, де $c_1, c_2, \ldots, c_{k-r}$ – довільні дійсні числа.

У випадку неоднорідної системи із нескінченною множиною розв'язків $A\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$, її загальний розв'язок $\overline{x_{з.н.}}$ являє собою суму загального розв'язку $\overline{x_{з.о.}}$ відповідної однорідної системи $A\overline{x} = \overline{0}$ та **частинного розв'язку неоднорідної системи** $\overline{x_{ч.н.}}$, який можна отримати, наприклад, поклавши всі вільні невідомі рівними нулю. З точки зору лінійних просторів, розв'язання системи $A\bar{x}=\bar{b}$ можна розглядати як знаходження елемента $\bar{x}$, який при перетворенні шляхом множення на матрицю A виявляється рівним даному вектору $\bar{b}$.

Приклад 3.7.1.1. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Записуємо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Зводимо елементарними перетвореннями рядків розширену матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \operatorname{rang} A = 2 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 2 \end{array}.$$

Оскільки $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2$, то система сумісна. Далі

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, x_1 та x_3 — базисні змінні, а $x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$ — вільні змінні, яким надано довільних значень $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Виписуємо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці, і виражаємо з неї базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 + 2C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 1, \\ x_3 - \frac{2}{3}C_2 + C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2, \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3. \end{cases}$$

Записуємо загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1-2C_1+\frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Перепишімо загальний розв'язок заданої системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1-2C_1+\frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{частинний} \\ \text{розв'язок} \\ \text{неоднорідної} \\ \text{СЛАР}}} + \underbrace{C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{загальний розв'язок однорідної СЛАР}}. \bullet$$

3.7.2. Власні числа і власні вектори

В багатьох випадках виявляється актуальною задача про пошук **власних векторів матриці** A, тобто векторів $\overline{x} \neq \overline{0}$, які задовольняють рівності $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$, де $\lambda \neq 0$ – **власне число**, що відповідає власному вектору $\overline{x}$.

Знаходження власних чисел та власних векторів здійснюються наступним чином: рівність $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ переписується у вигляді $(A-\lambda E)\overline{x} = 0$. Це – однорідна СЛАР, яка має ненульові розв'язки $\overline{x}$ тільки якщо її розв'язків безліч. Останнє можливо тільки якщо $|A-\lambda E| = 0$, що дозволяє визначити власні числа λ. Підставляючи послідовно отримані значення λ в систему $(A-\lambda E)\overline{x} = 0$, знаходимо відповідні їм ненульові власні вектори $\overline{x}$. Відзначимо, що ці вектори знаходяться з точністю до сталих множників.

Приклад 3.7.2.1.Знайти власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$

1) $\lambda_1 = 1,$ йому відповідає система $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Загальний розв'язок якої $\overrightarrow{X}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1 \in R.$ є власним вектором з власним числом $\lambda_1 = 1$.

2) $\lambda_2 = 2,$ йому відповідає система $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Загальний розв'язок якої $\overrightarrow{X}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 \in R$ є власним вектором з власним числом $\lambda_2 = 2$.

2) $\lambda_3 = 3,$ йому відповідає система $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Загальний розв’язок якої $\overrightarrow{X}_3 = C_3 \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_3 \in R$ є власним вектором з власним числом $\lambda_3 = 3$.

Контрольні запитання

1. Як записується СЛАР у векторно-матричній формі?
2. У чому полягає матричний метод розв’язання СЛАР? Які його недоліки?
3. У чому полягає метод Крамера розв’язання СЛАР? Сформулюйте теорему Крамера. Чому метод Крамера можна використовувати не для всіх СЛАР?
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
5. У чому полягають прямий та зворотній ходи метода Гаусса?
6. У чому полягає особливість методу Йордана-Гаусса?
7. Що таке арифметичний n-вимірний простір, лінійний простір?
8. Що таке лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору (векторів)? Наведіть приклади
9. Що таке базис простору та координати його елемента? Наведіть приклади.
10. Що таке частинний та загальний роз’вязки СЛАР? Чому ОСЛАР завжди сумісна? Яка структура загальних розв’язків ОСЛАР та СЛАР?
11. Що таке власний вектор та власне число матриці? Як їх шукають?

Тема 4. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Що таке вектор і як його зображають? Які дії можна виконувати над векторами? Як запроваджують координатні осі, системи координат, задають координати векторів? Які дії і яким чином можна виконувати над векторами, заданими їх координатами? Що є предметом вивчення аналітичною геометрією? Які найпростіші задачі аналітичної геометрії і як вони розв'язуються? Пряма на площині як лінійний геометричний образ. Які типи рівнянь прямої на площині? Площина та пряма у просторі як лінійні геометричні об'єкти у просторі. Які їх рівняння? Коло, еліпс, гіпербола, парабола, як найпростіші нелінійні геометричні об'єкти на площині. Найпростіші нелінійні геометричні об'єкти у просторі - поверхні циліндричні, конічні, обертання. Приклади криволінійних систем координат. Аналітична геометрія n*-вимірного простору*

4.1. Елементи векторної алгебри

Вектором *<u>називається</u>* величина, яка характеризується не тільки своїм **числовим значенням** (що називається також **довжиною** або **модулем вектора**), але й **напрямом**.

Геометрично вектор зображують, як **напрямлений відрізок**, а позначають $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, або $\overline{AB}, \overline{MN}$ і т.д. (в останньому випадку перша літера позначає **точку початку вектора**, а друга – **точку його кінця**) (Рис 4.1.1).

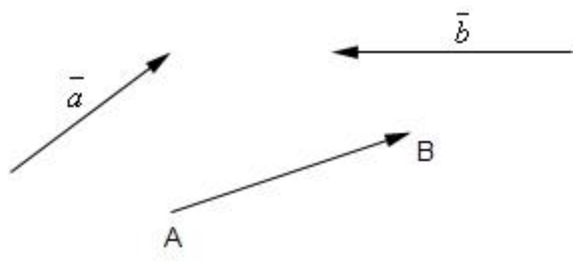


Рис 4.1.1.

Довжини (модулі) векторів позначають $|\bar{a}|$, $|\overline{AB}|$.

Нульовим вектором *називають* вектор, початок і кінець якого збігаються (тобто такий, який має нульову довжину), його позначають 0.

Вектори *називаються*:

- **рівними** ($\bar{a} = \bar{b}$), якщо вони мають однакові величини та напрямки;
- **колінеарними** ($\bar{a} \| \bar{b}$), якщо вони розташовані на одній прямій або паралельних прямих;
- **протилежними** ($\bar{a} = -\bar{b}$), якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та протилежні напрями;
- **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині (два вектори завжди компланарні, три вектори можуть бути як компланарними, так і не компланарними).

Ортом вектора $\bar{a}$ *називається* однаково з ним напрямлений вектор одиничної довжини $\bar{a}_0$. В таких випадках пишуть $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}_0$.

4.2. Системи координат, вектори в координатній формі та дії над ними

Раніше було запроваджене поняття координатної осі.

Декартовою системою координат на площині *називають* дві взаємно перпендикулярні координатні (числові) осі із спільним початком координат 0 у двовимірному просторі R^2 (рис. 4.2.1)

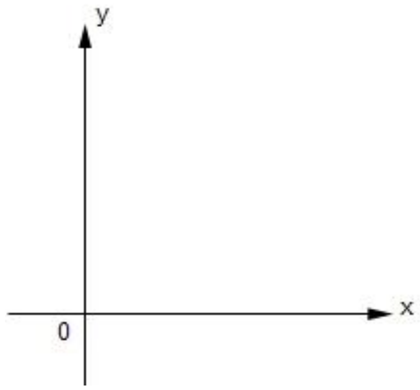


Рис. 4.2.1

Прямокутною декартовою системою координат у просторі <u>*називають*</u> три взаємно перпендикулярні координатні осі із спільним початком координат 0 у тривимірному просторі R^3 (рис. 4.2.2).

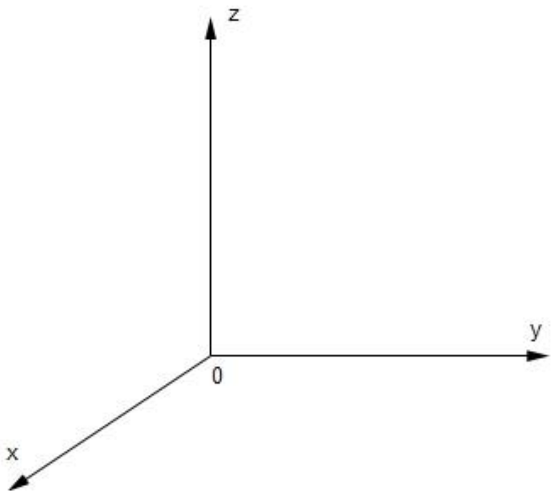


Рис 4.2.2

Вісь Ox <u>*називають*</u> **віссю абсцис** (її орт позначають i), вісь Oy - **віссю ординат** (орт - j), вісь Oz - **віссю аплікат** (орт -k).

Координати проекцій точки M на осі Ox та Oy (або, у просторі, на Ox ,Oy та Oz) <u>*називають*</u> **координатами** цієї **точки на площині** (у просторі), відповідно, координатами точки на площині (у просторі) є упорядкована пара (трійка) дійсних чисел.

Важливо!

Аналогічно до того, як існує взаємно-однозначна відповідність між точками осі та всіма дійсними числами, існують взаємно-однозначні відповідності між точками на площині (у просторі) та упорядкованими парами (трійками) дійсних чисел.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l <u>*називається*</u> довжина відрізка між проекціями його точок A_l та B_l, взята зі знаком «+», якщо напрям A_lB_l співпадає з напрямом осі, і зі знаком «-» у протилежному випадку.

Координатами вектора на площині (у просторі) <u>*називають*</u> упорядковану пару (трійку) його проекцій на координатні осі.

Оскільки проекція вектора на координатну вісь є різниця відповідних координат його кінця та початку, то для $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ маємо $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. З теореми Піфагора випливає, що:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ **- довжина(модуль) вектора**;

взагалі, для вектора $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\,.$$

Приклад 4.2.1. $A(2,3,5)$, $B(2,6,1)$, $|\overline{AB}| = \sqrt{(2-2)^2 + (6-3)^2 + (1-5)^2} = 5$.

Кутом α **між двома векторами** (або між **вектором** та **віссю**) називають **найменший кут між їх напрямами** за умови, що ці вектори (або вектор та орт осі) зведені до спільного початку

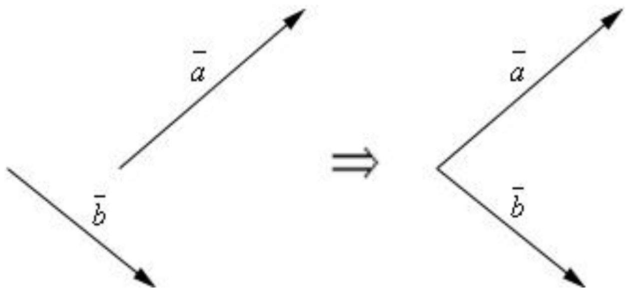


Рис. 4.2.3

У випадку проекції вектора $\overline{a}$ на вісь l маємо

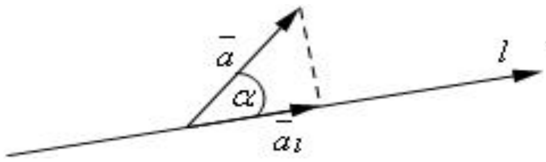


Рис. 4.2.4

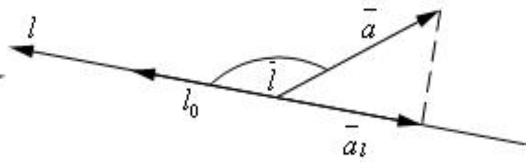


Рис.4.2.5

Напрямними косинусами _називають_ косинуси кутів α, β, γ , утворених вектором з відповідними координатними осями. Таким чином, якщо: $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,

то

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}}, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 4.2.2. $\overline{a} = \{-3, 0, 4\}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$. Очевидно, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Важливо!

Надалі будемо вважати, що вектор не змінюється при паралельному переносі, оскільки при цьому не змінюються його координати.

Вектор $\overline{OA}$ (де O - початок координат) _називають_ **радіус-вектором** точки A і позначають r_A , його координати співпадають з координатами точки A.

Розглянемо дії над векторами як з точки зору їх геометричного смислу, так і в координатній формі.

Сумою векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ _називають_ вектор $\overline{c}$, який сполучає початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ при умові, що початок вектора $\overline{b}$ співпадає з кінцем вектора a (рис. 4.2.6).

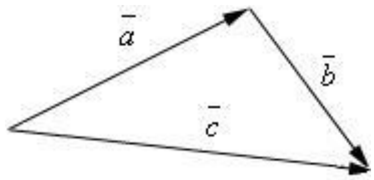


Рис. 4.2.6

при цьому, якщо $\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то $\overline{c}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$.

Зауважимо, що аналогічно може здійснюватись додавання і більшої ніж два, кількості векторів.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число k *<u>називають</u>* вектор $\overline{b}=k\cdot\overline{a}$, який колінеарнй з вектором a, має довжину $\left|\overline{b}\right|=|k|\cdot\left|\overline{a}\right|$ і напрям такий самий, як $\overline{a}$ (при $k>0$) або протилежний напряму $\overline{a}$ (при $k<0$).

Зауважимо, що при $k=0$ отримуємо нульовий вектор, а при $k=-1$ - вектор протилежний до вектора $\overline{a}$. В координатній формі ця дія виглядає так:

$\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\overline{b}=k\overline{a}=\{ka_x,ka_y,ka_z\}$

Приклад 4.2.3. Нехай $\overline{a}=\{2,-3,4\},\overline{b}=\{0,-3,2\}$.

Тоді

$$2\overline{a}+3\overline{b}=\{2\cdot2+3\cdot0,2\cdot(-3)+3\cdot(-3),2\cdot(-5)+3\cdot4\}=\{4,-15,2\}.$$

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ *<u>називають</u>* число, рівне добутку модулів (довжин) цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a}\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi.$$

В координатній формі маємо при

$$\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\ \overline{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

$$\overline{a}\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Важливо! ***За допомогою скалярного добутку можна, насамперед, визначити кут між векторами.***

Дійсно, оскільки $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$, то

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Приклад 4.2.4. Знайти кут між векторами

$$\overline{a} = (1;-1;-1), \overline{b} = (2;0;2).$$

$$\cos\gamma = \frac{1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}} = 0,\ \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки вектори на площині та у просторі є елементами лінійних просторів R^2 та R^3 відповідно, то виникає питання про базиси таких просторів та розклад довільних векторів по цих базисах.

Найуживанішими є базиси, складені з координатних ортів: на площині – $\overline{i}, \overline{j}$; $\overline{i} = \{1;0\}, \overline{j} = \{0;1\}$, у просторі $-\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$; $\overline{i} = \{1;0;0\}, \overline{j} = \{0;1;0\}, \overline{k} = \{0;0;1\}$. В той же час, базис на площині може складатись з будь-яких двох неколінеарних векторів – $\overline{a}, \overline{b} - \overline{a} \neq k\overline{b}$, базис у просторі – з будь-яких трьох некомпланарних векторів a, b, c.

Якщо при цьому відомі координати векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ в деякому іншому базисі, то некомпланарність означає, що ранг матриці, складеної (по рядках чи стовпцях) з координат цих векторів дорівнює 3 (або, що те ж саме, визначник цієї матриці ненульовий). Базис може бути **ортогональним** (базисні вектори взаємно перпендикулярні), **ортонормованим** (ортогональним з векторів одиничної довжини), або загального вигляду. Якщо базис складається з векторів:

$$\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\},\ \overline{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

а розкладу підлягає вектор $\overline{d}=\{d_x,d_y,d_z\}$, то розклад його по базису $d=\alpha a+\beta b+\gamma c$ означає знаходження коефіцієнтів α,β,γ з системи

$$\begin{cases}\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=d_x,\\ \alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3=d_y,\\ \alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3=d_z.\end{cases}$$

Приклад 4.2.5. Розкласти вектор $\overline{d}=\{-1;3;4\}$ за базисом

$$\overline{a}=\{4;1;-1\},\ \overline{b}=\{3;-1;0\},\ \overline{c}=\{-1;1;1\}.$$

Треба знайти числа α,β,γ, такі що

$$\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}.$$

В координатній формі

$$\begin{cases}4\alpha+3\beta-\gamma=-1,\\ \alpha-\beta+\gamma=3,\\ -\alpha+\gamma=4.\end{cases}$$

Розв’яжемо систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-4-3-0+1-3-0=-9.$$

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+12-0-4-9-0=0.$$

$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{vmatrix}=12+1-4-3+1-16=-9.$$

$$\Delta_\gamma=\begin{vmatrix}4 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=-16-9-0+1-12+0=-36.$$

Отже, $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 4 \Leftrightarrow \bar{d} = 0 \cdot \bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}$.

4.3. Найпростіші поняття аналітичної геометрії

Геометрією називають галузь математики, для якої первинно предметом вивчення були геометричні об'єкти, аналітична геометрія вивчає такі об'єкти алгебраїчними методами, встановлюючи зв'язок між ними та числами і рівняннями за допомогою методу координат: точці відповідають її координати, множині точок – співвідношення, якими задовольняють координати всіх цих точок.

Основними задачами аналітичної геометрії є:

Важливо!

1) ***Знаходження рівняння геометричного об'єкту, що розглядається як сукупність точок.***
2) ***Дослідження властивостей геометричного об'єкту та його побудова за відомим рівнянням.***

Історично найпершими і найпростішими задачами аналітичної геометрії вважаються задачі про знаходження відстані між двома точками (була розглянута раніше в зв'язку з визначенням довжини вектора за його координатами) та задача поділу відрізку у заданому відношенні: нехай відрізок M_1M_2 обмежений точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, треба знайти точку $M(x, y, z)$ таку, що $\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda$, де $\lambda > 0$ – задане число. Для розв'язання цієї задачі зауважимо, що вектори $\overline{MM_1}$ та $\overline{MM_2}$ є колінеарними, а, отже

$$\overline{MM_1} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \lambda \overline{MM_2} = \lambda\{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$

звідки

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases}$$

таким чином

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Приклад 4.3.1. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, середини відрізка BC і точки перетину медіан M трикутника ABC з вершинами $A(2;1;3)$, $B(4;3;4), C(8;-1;4)$ (рис. 4.3.1).

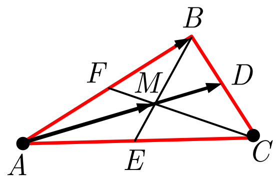


Рис. 4.3.1

❍Координати вектора $\overline{AB} = \{4-2, 3-1, 4-3\} = \{2,2,1\}$

Середина відрізка BC точка D має координати:

$$\left. \begin{aligned} x_D &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+8}{2} = 6; \\ y_D &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3-1}{2} = 1; \\ z_D &= \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4. \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(6;1;4).$$

Точка M поділяє відрізок AD у відношенні $\lambda = 2$. Отже, точка M має координати:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + 2x_D}{1+2} = \dfrac{2+2\cdot 6}{3} = \dfrac{14}{3}; \\ y_M = \dfrac{y_A + 2y_D}{1+2} = \dfrac{1+2\cdot 1}{3} = 1; \\ z_M = \dfrac{z_A + 2z_D}{1+2} = \dfrac{3+2\cdot 4}{3} = \dfrac{11}{3}. \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{14}{3};1;\frac{11}{3}\right). \bullet$$

Зауважимо нарешті, що припущення про те, що $\lambda > 0$ дозволяє знайти точку M, яка лежить на відрізку M_1M_2 між точками M_1 та M_2, а використовуючи знайдені формули у випадку $\lambda < 0$ отримуватимемо точки, які лежать на продовженні цього відрізку.

4.4. Лінійні геометричні образи на площині

Під **рівнянням лінії на площині** *Oxy* розумітимемо рівняння, якому задовольняють координати x та y кожної точки даної лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії. Таке рівняння може бути записано у вигляді $y = f(x)$ - явний вигляд, або $F\left(x, y\right) = 0$ - неявний вигляд.

Біжучою точкою на лінії *називається* точка $M(x, y)$, яка рухається по лінії (може займати на ній довільне положення), а її координати – **біжучими координатами**. Якщо рівняння лінійне – $Ax + By + C = 0$ або $y = ax + b$, то маємо **лінійний геометричний образ на площині**, при цьому, вважаючи, що A і B одночасно не рівні нулю, маємо **загальне рівняння прямої на площині**, рівняння ж $y = ax + b$ завжди відповідає деякій прямій на площині.

Відзначимо при цьому, що при $C = 0$ маємо рівняння прямої, що проходить через початок координат (рис. 4.4.1), при $A = 0$ - рівняння прямої, паралельної осі абсцис (рис. 4.4.2), а при $B = 0$ - рівняння прямої, паралельної осі ординат (рис. 4.4.3).

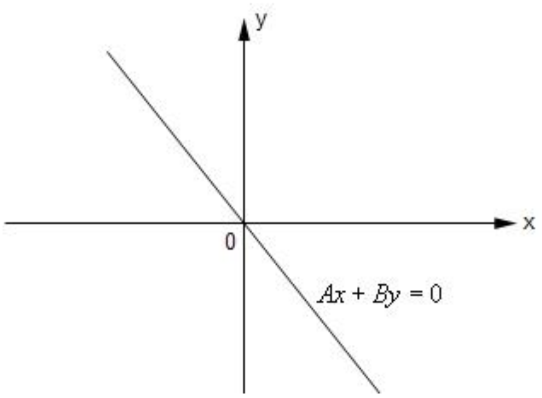


Рис. 4.4.1.

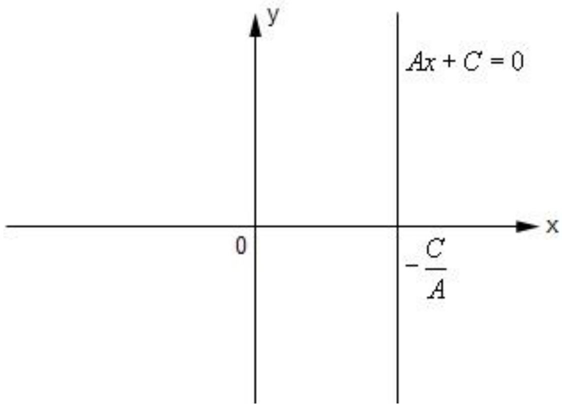


Рис. 4.4.2

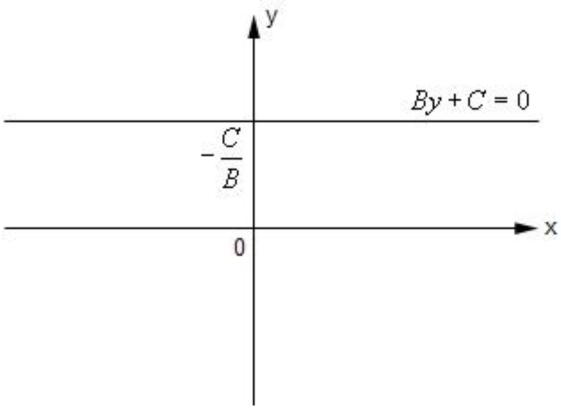


Рис. 4.4.3

У рівнянні $y = ax + b$ коефіцієнт a має геометричний сенс тангенса кута α нахилу прямої до осі абсцис, b - ордината точки її перетину з віссю ординат (рис. 4.4.4).

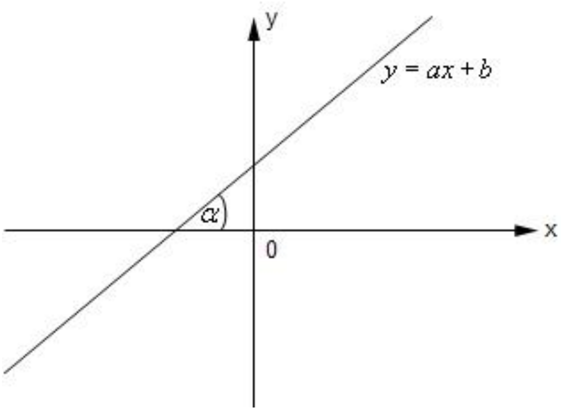


Рис. 4.4.4

Кутовим коефіцієнтом прямої *називають* коефіцієнт a, і в цьому випадку, рівняння прямої записують у вигляді $y = kx + b$, $k = tg\alpha$.

Якщо пряма проходить через $M_0(x_0, y_0)$ у заданому напрямі (тобто під даним кутом до осі абсцис), то її рівняння записують у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = tg\alpha$ (рис. 4.4.5).

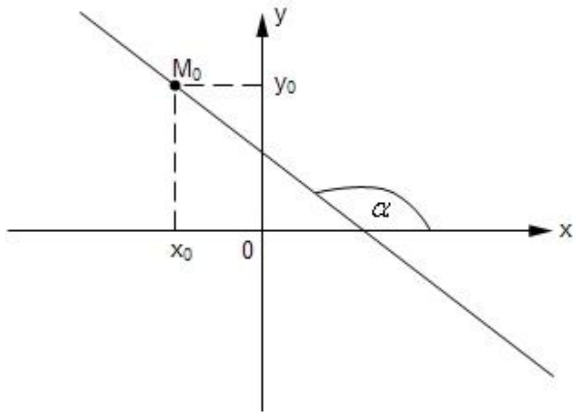


Рис. 4.4.5

Приклад 4.4.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2,3)$ з кутовим коефіцієнтом $k = -1$**.**

Так, $y - 3 = -1(x - 2)$, $x + y - 5 = 0$.

Якщо нас цікавить описання всіх прямих, що проходить через точку M_0, то маємо $y - y_0 = p(x - x_0)$, де параметр p може змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$. Така сукупність прямих *називається* **в'язкою.** Рівняння прямої, проведеної через дану точку у даному напрямі, може бути записано також у вигляді $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, де $\bar{l} = \{m; n\}$ - **напрямний вектор** (вектор паралельний прямій).

Останнє рівняння, в свою чергу, може бути записане в **параметричному вигляді** $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$, параметр t може змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$, кожній точці на прямій відповідає «своє» значення параметра.

Якщо пряма проходить через дві дані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$, то її рівняння має вигляд $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ (рис. 4.4.6).

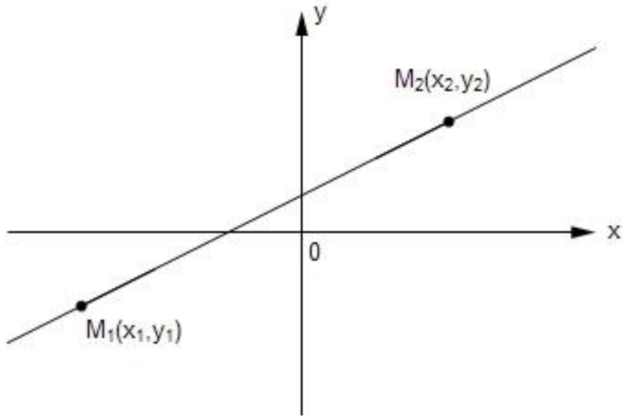


Рис. 4.4.6

Приклад 4.4.2 . Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(1;0)$, $M_2(5;4)$. $\dfrac{x-0}{4-0}=\dfrac{y-1}{5-1}$, $x-y+1=0$.

Найзручнішим типом рівняння прямої з точки зору її побудови є **рівняння у відрізках** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, де a - абсциса точки перетину прямої з віссю абсцис; b - координата точки перетину прямої з віссю ординат(Рис. 4.4.7).

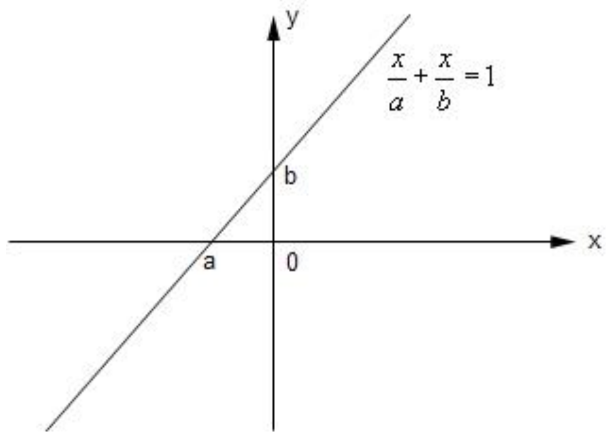


Рис. 4.4.7

Приклад 4.4.3. Записати рівняння прямої $2x+3y-6=0$ у вигляді рівняння у відрізках .

Переносячи вільний член $c=6$ у праву частину і ділячи на нього обидві частини рівності , маємо рівняння: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

Практично важливим є питання про визначення кута між прямими (в тому числі, з’ясування, коли вони є паралельними або перпендикулярними). При цьому слід пам’ятати, що пряма, задана рівнянням $Ax+By+C=0$ має **нормальний вектор** (тобто, вектор перпендикулярний до неї) $n=\{A;B\}$ і, таким чином, кут між двома прямими може бути визначений як кут між їх нормальними векторами. Найзручніше для визначення кута між прямими використовувати їх кутові коефіцієнти: якщо дві прямі мають кутові коефіцієнти k_1 та k_2 , то кут α між ними визначається з рівності $\alpha = arctg\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, при чому умовою паралельності є $k_1=k_2$, а перпендикулярності - $k_1k_2=-1$.

Приклад 4.4.4. Визначити кут між прямими $x+3y=2$, $3y-x=4$.

Кутові коефіцієнти $k_1=-\frac{1}{3}$, $k_2=3$. Отже, $k_1k_2=-1$ - прямі перпендикулярні.

4.5. Геометричні образи другого порядку на площині

Аналогічно до попереднього, геометричним образом другого порядку на площині є множина точок, координати яких задовольняють рівняння другого порядку:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a=0$$

Можливі **випадки виродження** цього геометричного образу, наприклад:

- $x^2+y^2+1=0$ – пуста множина,
- $x^2+y^2=0$ – одна точка $(M(0;0))$,
- $x^2-y^2=0$ – дві прямі, що перетинаються $(y=x, y=-x)$,
- $x^2+2xy+y^2=0$ – одна пряма $y=-x$,

- $x^2 + x = 0$ – дві паралельні прямі $x = 0$ та $x = -1$.

Виявляється, що єдиними **невиродженими геометричними образами другого порядку** є **криві другого порядку – еліпс, гіпербола, парабола**.

Найпростішою кривою другого порядку є **коло**. Якщо центр кола – точка $M_0(x_0, y_0)$, а радіус – R, то, враховуючи, що відстань від центру до біжучої точки $M(x, y)$ рівна R, маємо **рівняння кола** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (Рис.4.5.1):

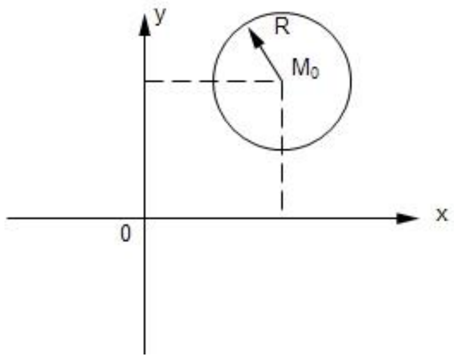


Рис. 4.5.1

Еліпсом <u>*називають*</u> геометричне місце точок, для яких **сума відстаней до двох даних точок (фокусів)** F_1 **та** F_2 **є величина стала**. Якщо фокуси знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, то маємо канонічне рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис. 4.5.2) .

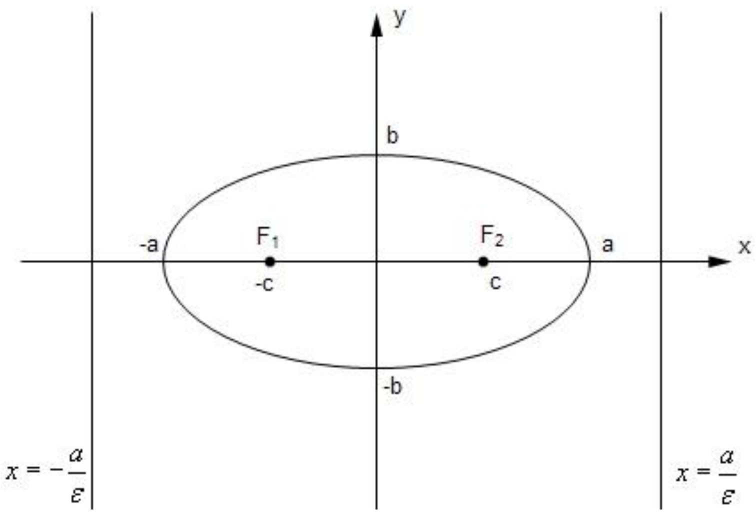


Рис. 4.5.2

Більшою та **меншою піввісями еліпса** <u>*називаються*</u> величини $a>0$ та $b>0$ ($a>b$), відповідно, . Якщо абсциси фокусів – $\pm c$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}$, а величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$ <u>*називається*</u> **ексцентриситетом еліпса**. Зазначимо, що $0\le\varepsilon<1$ при $\varepsilon=0$ маємо $c=0$ (тобто фокуси співпадають) і еліпс перетворюється на коло (таким чином, він може розглядатись як результат певної деформації кола). Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ <u>*називаються*</u> **директрисами еліпса** і мають наступну властивість: відношення відстаней довільної точки еліпса до ближчого фокусу та ближчої директриси дорівнює ексцентриситету.

Еліпс має також цікаву **оптичну властивість**. Якщо у його фокусі розмістити джерело світла, то промінь, після відображення від еліпса, пройде через другий полюс (Рис. 4.5.3).

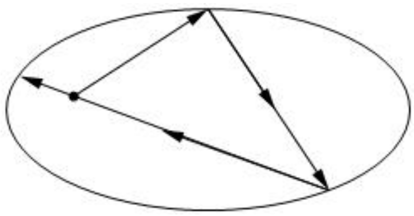


Рис. 4.5.3

Приклад 4.5.1. Знайти осі, вершини, фокуси і ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2-36=0$.

Перетворімо рівняння $4x^2+9y^2-36=0$ таким чином:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

З 61держанного канонічного рівняння еліпса знаходимо, що осі еліпса $(a=3,b=2)$

$$2a=6,2b=4;$$

вершини еліпса

$$A_1(-3,0),A_2(0,3),B_1(0,-2),B_2(0,2).$$

Далі знаходимо

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}.$$

Отже, фокуси $F_1(-\sqrt{5},0), F_2(\sqrt{5},0)$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Нехай знову маємо два полюси, розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

Гіперболою *називається* геометричне місце точок, для яких **модуль різниці відстаней до полюсів є величина стала,** її **канонічне рівняння**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис. 4.5.4).

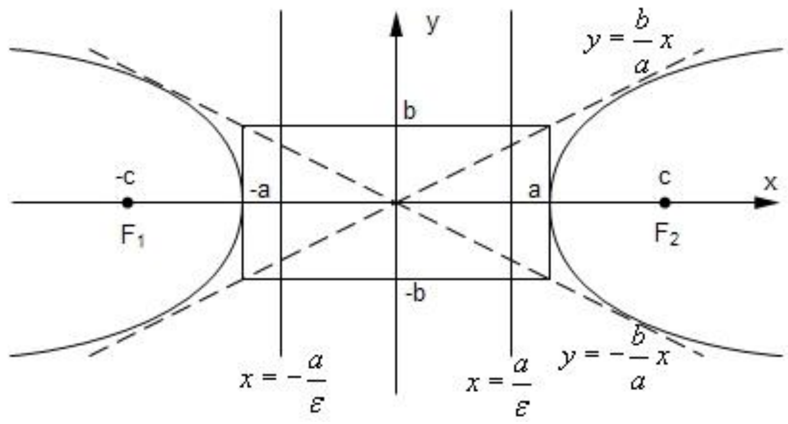


Рис. 4.5.4

Дійсною та **уявною півосями гіперболи** *називаються* відповідно величини $a > 0$ та $b > 0$. Якщо позначити сталу величину модуля різниці відстаней точки гіперболи до її фокусів через $2c$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, **ексцентриситет гіперболи** визначається з рівності $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$. Аналогічно до того, що мало місце у випадку еліпса відношення відстаней довільної точки лінії до ближчих директриси та фокуса (останні знову визначаються рівностями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$) дорівнює ексцентриситету.

Зазначимо, що на відміну від еліпса, який є замкненою лінією, гіпербола складається з **двох гілок (лівої** та правої) та має **асимптоти** $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Оптична властивість гіперболи полягає в тому, що промінь світла з джерела, яке знаходиться у фокусі, після відображення від лінії рухатиметься по прямій, що з’єднує точку йог о контакту з лінією з іншим полюсом.

Приклад 4.5.2. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично щодо початку координат, якщо відомо рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і віддаль між фокусами $2c = 20$.

Розміщення фокусів є канонічним, отже, рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

У цьому разі рівняння асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$ і $c^2 = a^2 + b^2$. З умов задачі випливає, що $c = 10, \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$

Розв’язуючи систему щодо параметрів a і b:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

маємо $a = 6, b = 8.$ Тоді шукане рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Нехай, нарешті, маємо на осі абсцис точку $F(0;0)$ та перпендикулярну цій осі пряму $x = -\frac{p}{2}$.

Параболою *<u>називається</u>* геометричне місце точок рівновіддалених від цієї точки (фокуса) та прямої директриси (Рис.4.5.5)

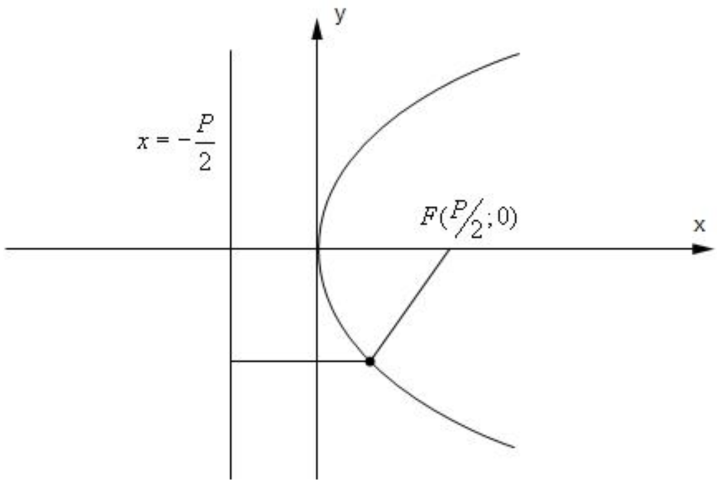


Рис 4.5.5

Канонічне рівняння параболи є $y^2 = 2p$, її ексцентриситет, за аналогією з попереднім, дорівнює 1 (це вказує на те, що парабола може розглядатись як проміжна ланка між еліпсом і гіперболою).

Оптична властивість параболи полягає в тому, що промінь світла з фокуса після відображення від неї рухається паралельно осі симетрії цієї лінії (Рис. 4.5.6).

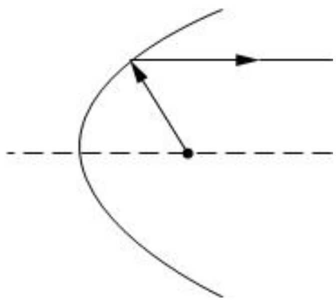


Рис. 4.5.6

Важливо!

Криві другого порядку мають також назву конічних перерізів, оскільки можуть виникати при перетині площини та конічної поверхні.

4.6. Лінійні геометричні образи у просторі

Розглянемо спочатку геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C не всі рівні нулю).

Це геометричне місце точок є площиною, а саме рівняння називається **загальним рівнянням площини**. Аналогічно до того, як це робиться при розгляді прямої на площині, варто розглянути частинні випадки цього рівняння:

- при $D=0$ площина проходить через початок координат;
- при $A=0$ або $B=0$ або $C=0$ площина паралельна відповідно осі Ox, або осі Oy, або осі Oz;
- при рівності нулю одночасно двох коефіцієнтів (A та B, або B та C, або A та C) площина паралельна відповідно координатним площинам Oxy, Oxz або Oyz).

Приклад 4.6.1. Площина $z-2=0$ паралельна площині Oxy і знаходиться над нею на відстані двох одиниць.

Площина однозначно визначається при заданні належної їй точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та перпендикулярного їй вектора (**нормального вектора**) $\overline{n}=\{A,B,C\}$.

Якщо біжуча точка $M(x,y,z)$, то умова перпендикулярності векторів MM_0 та $\overline{n}$ має вигляд $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Таке рівняння називається рівнянням **площини, проведеної через дану точку перпендикулярно заданому вектору.**

Приклад 4.6.2. Записати рівняння площини, перпендикулярної вектору $\overline{n}=\{2,0,-1\}$ і яка проходить через точку $M_0(0,-1,3)$.

Маємо:

$$2(x-0)+0(y+1)+1(z-3)=0,$$

Звідси рівняння площини: $2x+z-3=0$.

Три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, які не лежать на одній прямій, також однозначно визначають площину, якій належать.
Рівняння **площини, проведеної через дані три точки** має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 4.6.3. Записати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(1,3,1)$, $M_2(-1,2,0)$, $M_3(0,1,0)$.

Маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ -1-1 & 2-3 & 0-1 \\ 0-1 & 1-3 & 0-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-1)+(y-3)+4(z-1)-(z-1)-2(y-3)-2(x-1)=-x-y+3z+2=0.$$

Найзручнішим (з точки зору графічного зображення площини) є **рівняння площини у відрізках**:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

де a , b , c - відповідно абсциса, ордината та апліката точок перетину площини з координатними осями (рис. 4.4.1).

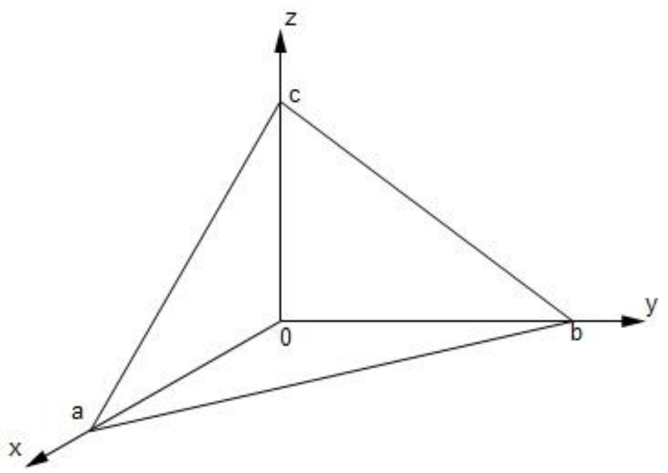


Рис . 4.6.1

Приклад 4.6.4. Записати рівняння площини $2x+3y+5z-30=0$ у відрізках.

Маємо: $\dfrac{x}{15}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{z}{6}=1.$

Важливими формулами, що стосуються площин у просторі, є формула відстані d від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

та формула для знаходження кута α між площинами $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ та $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0$:

$$\alpha = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Очевидно, що остання формула спирається на знаходження кута між площинами як кута між їх нормальними векторами.

Приклад 4.6.5. Знайти кут між площинами $x + 3y + 5z + 7 = 0$ та $x - 2y + z + 71 = 0$.

Маємо

$$\alpha = \arccos \frac{1 - 6 + 5}{\sqrt{1 + 9 + 25}\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\pi}{2} .$$

Пряма у просторі може визначатись як **лінія перетину двох площин**

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0 \end{cases},$$

така система *<u>називається</u>* **загальними рівняннями прямої у просторі**.

Якщо пряма задається за допомогою точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та паралельного їй **напрямного вектора** $\bar{l} = \{m, n, p\}$, то її рівняння мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

і *<u>називаються</u>* **канонічними**.

Приклад 4.6.6. Записати канонічне рівняння прямої $\bar{l} = \{3, 0, -2\}$, $M_0(2, -3, 0)$. Маємо:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{0}=\frac{z}{-2}.$$

Якщо задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$, що належать прямій, то **рівняння прямої, що проходить через дві точки** записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Приклад 4.6.7. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1,2,3)$ та $M_2(4,5,6)$.

Маємо

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-3}{6-3}, \text{ або}$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3}.$$

З канонічних рівнянь прямої випливають **параметричні**:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+nt, \end{cases}, t\in(-\infty,\infty).$$

Останній тип рівнянь зручний, наприклад, для знаходження точки перетину прямої з площиною.

Приклад 4.6.8. Знайти точку перетину прямої

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=4t, \\ z=2-5t, \end{cases}, t\in(-\infty,\infty).$$

з площиною $2x+3y+z-15=0$. Маємо

$$2(1+2t)+12t+2-5t-15=0.$$

Звідки $t=1$, отже $\begin{cases} x=3, \\ y=4, \\ z=-3. \end{cases}$.

Кути між прямими визначаються як кути між їх напрямними векторами:

$$\varphi = \arccos \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

де φ – кут між прямими, напрямні вектори яких $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$
.

4.7. Найпростіші нелінійні геометричні образи у просторі

Зрозуміло , що поверхня другого порядкує поверхнею, рівняння якої містить хоча б одну з координат x, y, z у другому степені, а решту у першому або нульовому. Найпростішою нетривіальною (тобто такою, що не зводиться до площин та більш простих геометричних образів) поверхнею другого порядку є сфера – **геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки-** її центра. Якщо центр сфери – точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а радіус R, то рівняння сфери має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Циліндричною поверхнею *називається* така поверхня, яка утворена рухом прямої (**твірної)** паралельно до заданої лінії L з одночасним перетином заданої лінії l (**напрямної**).

Якщо, наприклад, напрямна є коло $x^2 + y^2 = R^2$ на площині Oxy і рух відбувається паралельно осі аплікат, то отримуємо **пряму кругову циліндричну поверхню**, рівняння якої є $x^2 + y^2 = R^2$ (Рис. 6.7.1)

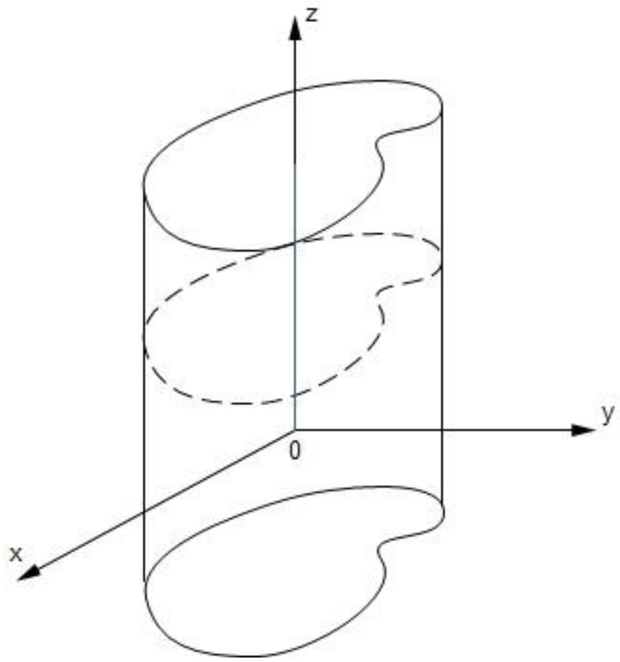


Рис. 4.7.1.

Конічною поверхнею <u>*називається*</u> поверхня, утворена рухом прямої (**твірної),** яка перетинає **напрямну** і проходить через задану точку – **вершину конічної поверхні**.

Нехай напрямною є знову ж таки коло $x^2 + y^2 = R^2$, а вершиною - $M_0(0;0;1)$, тоді маємо **пряму кругову конічну поверхню**, рівняння якої $x^2 + y^2 = R^2(z-1)^2$ (Рис. 4.7.2).

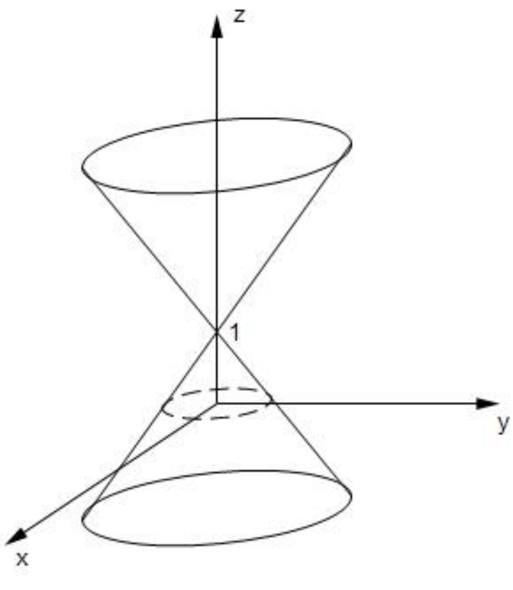


Рис. 4.7.2

Поверхнею обертання *називають* поверхню, яка утворена обертанням (рухом по колу) всіх точок деякої лінії навколо заданої **осі обертання**. Нехай, наприклад, маємо параболу $y^2 = 2px$ на площині Oxy, а вісь обертання – вісь абсцис. Тоді при обертанні утворюється круговий параболоїд, рівняння якого є $y^2 + z^2 = 2px$(Рис 4.7.3).

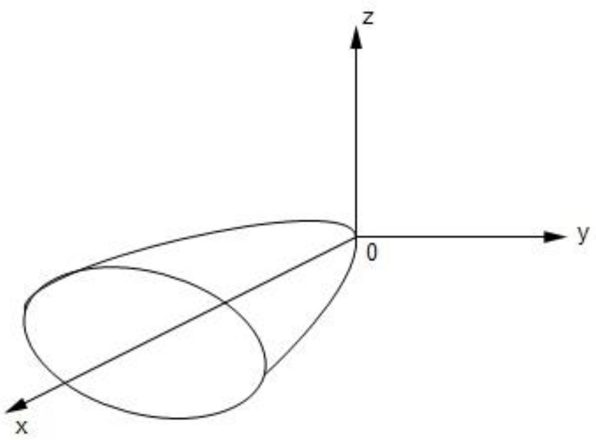


Рис. 4.7.3

Рівняння поверхні обертання навколо однієї з координатних осей записується за **наступним правилом**:

Алгоритм

1) ***В рівнянні лінії обертання координата, однойменна з віссю обертання залишається незмінною;***
2) ***Другу координату в рівнянні лінії обертання замінюють на плюс-мінус корінь квадратний із суми квадратів решти (крім згаданої в першому пункті) координат.***

Наприклад, при обертанні еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі Oy отримуємо еліпсоїд обертання з рівнянням $\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$(Рис.4.7.4).

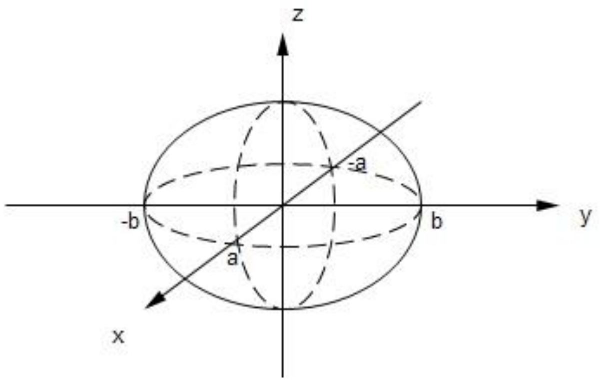


Рис. 4.7.4

4.8. Деякі додаткові питання аналітичної геометрії

4.8.1. Деякі криволінійні системи координат на площині та у просторі

Полярна система координат на площині задається за допомогою довільної точки O – **полюсу** і **променя** OP і має масштабну одиницю, що виходить з цієї точки – **полярної осі** (Рис. 4.8.1.1) .

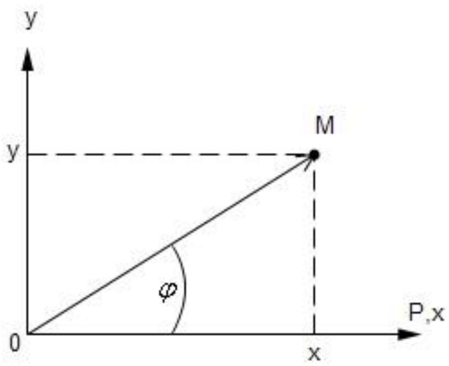


Рис. 4.8.1.1

Положення довільної точки M на площині однозначно визначається її **полярними координатами** (Рис. 4.8.1.2): довжиною відрізка OM - **полярним радіусом**, та кутом між полярною віссю та вектором OM (**полярним кутом**, обчислюється проти годинникової стрілки). Ясно, що $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Якщо розмістити на площині одночасно полярну систему координат та прямокутну декартову, сумістивши полюс з початком координат, а полярну вісь – із додатною піввіссю абсцис, то маємо наступний розв’язок між полярними та декартовими координатами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, і навпаки $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \textit{при } y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \textit{при } y < 0 \end{cases}$.

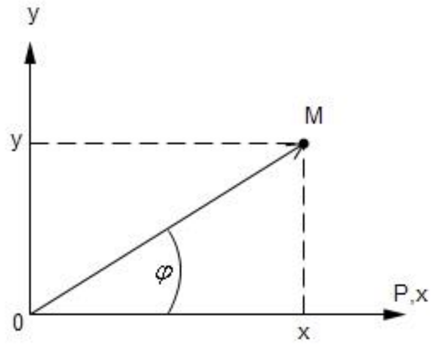


Рис. 4..8.1.2

Деякі лінії зручно задавати саме за допомогою полярних координат , тобто рівняннями $\rho = f(\varphi)$. Наприклад, рівняння кола радіуса R з центром в початку координат має вигляд $\rho = R$ (Рис.4.8.1.3).

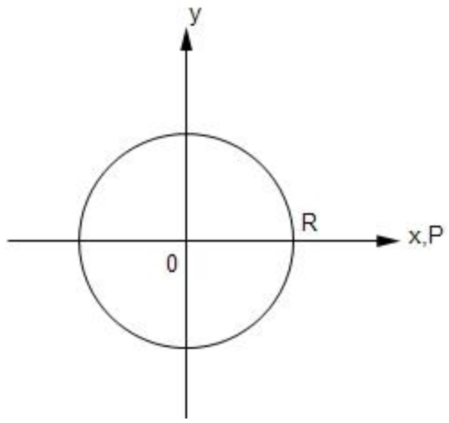


Рис. 4.8.1.3

Рівняння $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$ **Лемніскати Бернуллі** $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (Рис. 4.8.1.4).

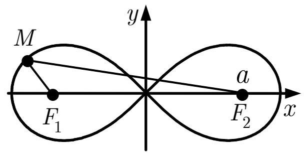


Рис. 4.8.1.4

Зрозуміло, що **поверхня другого порядку** є поверхня, рівняння якої містить хоча б одну з координат x, y, z в другому степені, а решту – в першому або нульовому. Найпростішою нетривіальною (тобто такою, що не зводиться до площин та більш простих геометричних образів) поверхнею другого порядку є **сфера – геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки** – її. Якщо центр сфери – точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а радіус R, то рівняння сфери має вигляд: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$

Циліндрична система координат у просторі визначається за допомогою полярної системи координат на площині та осі аплікат. Таким чином, координати точки в просторі є ρ, φ, z. Наприклад, рівняння циліндра $x^2+y^2=R^2$ (Рис. 4.8.1.5) в цій системі координат матиме вигляд $\rho = R$, а рівняння конуса $x^2+y^2=z^2$ – $\rho = \pm z$ (Рис. 4.8.1.6).

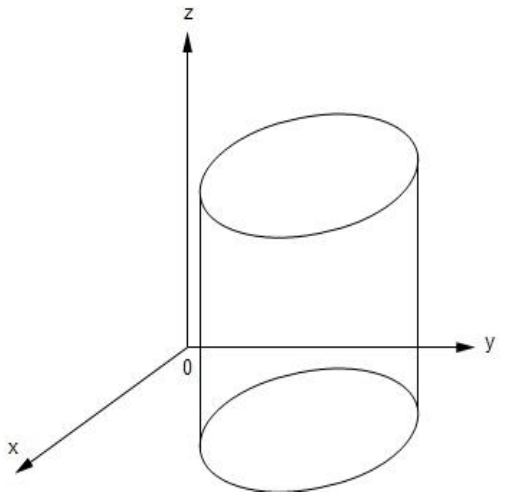


Рис. 4.8.1.5

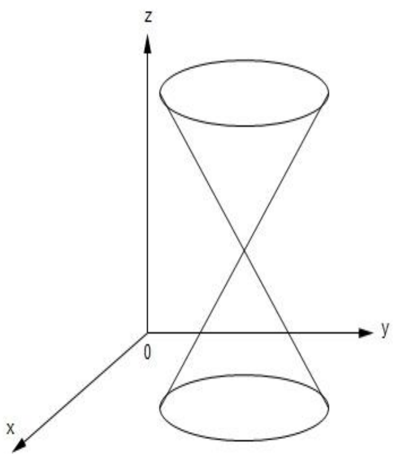


Рис. 4.8.1.6

Сферична система координат у просторі запроваджується за допомогою фіксованої точки O (полюса), полярної осі OP та полярної площини, на якій лежить полярна вісь (та, відповідно, полюс). Положення довільної точки M (Рис. 4.8.1.7) у просторі визначається довжиною r вектора $\overline{OM}$ (полярним радіусом) і кутом θ (між $\overline{OM}$ та полярною лощиною) та φ (між полярною віссю та проекцією $\overline{OM}$ на полярну площину). Якщо сумістити початок прямокутної декартової системи координат з полюсом, а полярну вісь з віссю абсцис, то маємо

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \sin\varphi\sin\theta \quad , r \ge 0, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \\ z = r\sin\theta. \end{cases}$$

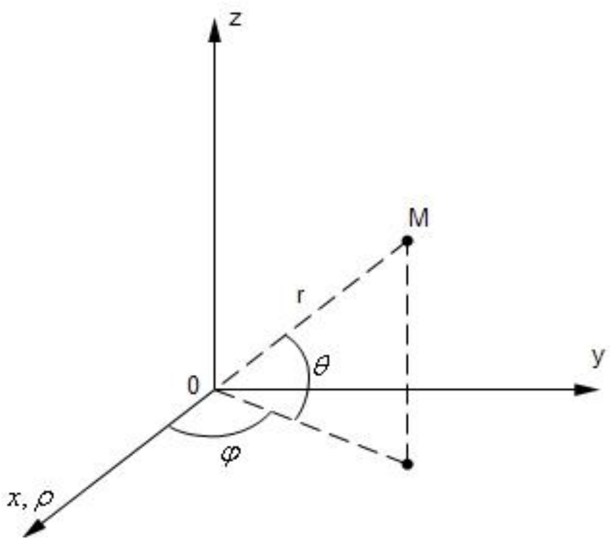


Рис. 4.8.1.7

У сферичній системі координат, наприклад, рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ має вигляд $r = R$.

4.8.2. Аналітична геометрія в $\underline{n}$-вимірному просторі

Нехай в n-вимірному просторі R^n запроваджено скалярний добуток: якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = \{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n\}$.

Запроваджена таким чином операція має властивості комутативності, дистрибутивності і $(\overline{a} \cdot \overline{a}) > 0$, якщо $\overline{a}$ – не нульовий елемент.

Будемо називати простір R^n, в якому запроваджений скалярний добуток, **евклідовим n-вимірним простором** і позначати E^n.

Для евклідових просторів можна визначати **норму елемента** (аналог довжини вектора) за формулою $\left\|\overline{a}\right\| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$. При цьому:

1. $\overline{a} = 0$ тільки якщо $\overline{a} = \overline{0}$.

2. $\left\|\lambda\bar{a}\right\| = |\lambda| \cdot \left\|\bar{a}\right\|$, де μ – дійсне число.

3. $\left\|\bar{a} \cdot \bar{b}\right\| \le \left\|\bar{a}\right\| \cdot \left\|\bar{b}\right\|$ – нерівність Коші-Буняковського.

4. $\left\|\bar{a} + \bar{b}\right\| \le \left\|\bar{a}\right\| + \left\|\bar{b}\right\|$ – нерівність трикутника.

Виходячи з цих властивостей та згадуючи найпростіші задачі аналітичної геометрії можна визначити **відстань між елементами** $\bar{a}$ **та** $\bar{b}$**:**

$$d_{\bar{a},\bar{b}} = \left\|\bar{a} - \bar{b}\right\|,$$

кут α **між елементами** $\bar{a}$**,** $\bar{b}$**:**

$$\alpha = \arccos\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{b}},$$

при цьому елементи <u>*називаються*</u> **ортогональними**, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ та **колінеарними**, якщо $\alpha = 0$.

Геометричним образом в такому просторі є, наприклад, **гіперплощина** – сукупність елементів (точок) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ для яких $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$, де $a_1, \ldots, a_n, b$ – деякі дійсні числа.

Контрольні запитання

1. Що таке вектор і як він характеризується? Які вектори називаються рівними, колінеарними, компланарними, протилежними? Що таке орт вектора?

2. Як визначають прямокутну декартову систему координат на площині і у просторі? Що називається координатами точки, вектора? Запишіть формули для координат вектора, який є добутком даного вектора на число, сумою даних векторів?

   Що таке скалярний добуток векторів? Для чого він використовується?

   Як обчислюється довжина вектора? Що таке напрямні косинуси вектора і як їх обчислюють?

3. Запишіть формули для координат точки, що ділить даний відрізок у даному співвідношенні.

4. Що таке рівняння лінії? Яким є загальне рівняння прямої на площині? Що таке кутовий коефіцієнт прямої, в яких рівняннях прямої він використовується? Записати параметричні рівняння прямої та пояснити їх зміст. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві точки? У чому практична зручність рівняння прямої у відрізках? Записати його. Як виглядає формула кута між прямими? Записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

5. Що таке геометричні образи другого порядку? Наведіть приклади вироджених геометричних образів другого порядку. Запишіть рівняння кола,наведіть геометричний зміст параметрів, що входять в нього. Що таке еліпс, якими параметрами він задається? Зобразіть еліпс, укажіть його півосі, фокуси, директриси. Що таке гіпербола, якими параметрами вона задається? Зобразіть гіперболу, вкажіть її піосі, фокуси, директриси, асимптоти. Що таке парабола? Зобразіть її, вкажіть її фокус і директрису. В чому полягають оптичні властивості кривих другого порядку? Чому їх називають конічними перерізами?

6. Який вигляд має загальне рівняння площини у просторі? Записати рівняння площини, яка проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора? Який вигляд має рівняння площини, проведеної через три точки, рівняння площини у відрізках? За якими формулами знаходять відстань між точкою і площиною, кут між двома площинами? Як задається пряма у просторі, Що таке загальне рівняння прямої? Записати рівняння прямої, проведеної через дві задані точки. Який вигляд параметричного та канонічного рівнянь прямої? Запишіть формулу кута між двома прямим у просторі.

7. Запишіть рівняння сфери, поясніть геометричний сенс його параметрів. Дайте означення циліндричної поверхні, наведіть приклади. Що таке конічна поверхня? Наведіть приклади. Що таке поверхня обертання? За яким правилом знаходять рівняння поверхні обертання у найпростішому випадку?

8. Що таке полярна система координат? Наведіть приклади рівнянь лінії в цій системі координат. Що таке циліндрична система координат? Наведіть приклади її використання. Що таке сферична система координат? Коли її використовують?

9. Що таке евклідів n- вимірний евклідів простір? Як знаходиться норма його елемента,відстань та кут між елементами?

Тема 5. Вступ до математичного аналізу

Що таке функція?Для чого її впроваджують і як вона задається? Які спільні властивості мають функції?Які функції називають елементарними? Що таке числова послідовність? Як вона записується? Як означується границя числової послідовності? Як її знаходять?Що таке границя функції в точці? Як її находять?Як розкривають невизначеності при обчисленні границь? Які границі називають примітними? Які функції вважають неперервними і які властивості вони мають? Що називають формулою бінома Ньютона?

5.1. Функції

5.1.1. Поняття функції та способи її завдання.

Під **математичним аналізом** зазвичай розуміють галузь математики, яка розвинулася з вивченням функцій.

Коли кожному елементу х множини X ($x \in X$) ставиться у відповідність визначений елемент y множини Y $(y \in Y)$, то кажуть, що на множині X задано **функцію** $y = f(x)$.

Графічна інтерпретація функціональної залежності (графік функції) зображено на рис 5.1.1.1

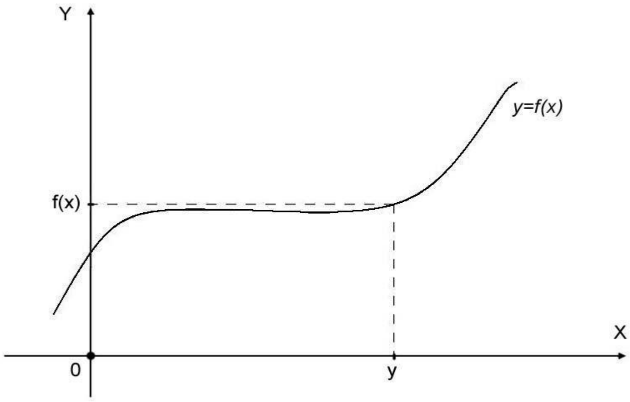


Рис. 5.1.1.1

При цьому <u>*називають*</u>:

- x – **незалежною змінною (аргументом);**
- X – **множиною визначення (існування) функції, позначається** $D(y)$ **;**
- y – **залежною змінною;**
- Y – **областю значень функції;**
- f – **символом функціональної залежності.**

Функція може задаватися (тобто конкретизуватись в алгоритмі пошуку y за даним x) наступними способами:

- **таблично** (задається таблиця, в якій значенням x відповідають значення y, такий спосіб може використовуватись у випадку невеликої кількості можливих значень аргументу);

Приклад 5.1.1.1. При вивченні залежності об'ємів продаж протягом дня прохолоджу вальних напоїв V торгівельною точкою (у літрах) від температури повітря t (у градусах Цельсія) отримали наступні результати:

T	18	19	22	24	28
V	150	160	280	450	600

Маємо, таким чином, таблично задану функцію $V(t)$.

- **словесно** (наприклад, функція Діріхлє: $f(x)=1$, якщо x – раціональне число, $f(x)=0$, якщо x – ірраціональне);
- **графічно** (на координатній площині зображується лінія, для кожної точки якої ордината вважається значенням функції, яке відповідає значенню абсциси);

Приклад 5.1.1.2. Наведений приклад демонструє залежність рівня відтворення акустичного сигналу A в залежності від частоти ω (вимірюється у герцах) характерний для звукозаписуючого пристрою невисокого класу (рис. 5.1.1.2).

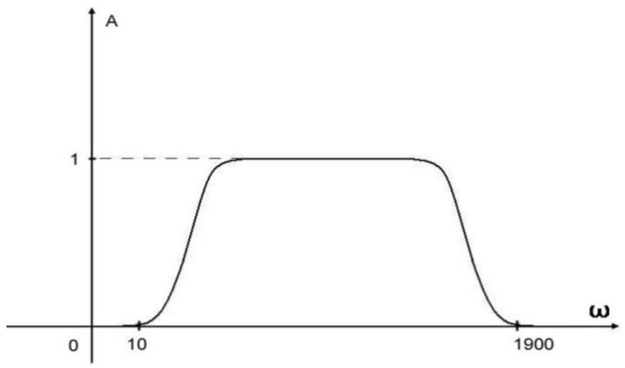


Рис. 5.1.1.2

- **аналітично** (якщо значення функції знаходиться з рівності або рівностей, які пов'язують x та y):

$$y = x,\ y = \sin x.$$

В подальшому найчастіше використовуватимемо аналітичний спосіб задавання функції. Можливі наступні його варіанти:

а) **явне задавання функції** співвідношенням $y = f(x)$; Такий спосіб задавання використовується при вивченні шкільної математичної програми.

б) **неявне задавання функції** співвідношенням $f(x,y)=0$, $y(x,1)$ знаходиться як корінь рівняння $f(x_1, y(x_1))=0$ для всіх x_1 з області визначення;

Приклад 5.1.1.3. Розглянемо множину пар чисел (x,y), які задовольняють рівняння

$$x^3y + y^2 + 3x^2y + 4xy = 0.$$

Її можна розглядати як спосіб задавання неявної функції $y = f(x)$. При $x = 0$ - $y = 0$, при $x = 1$ маємо $y^2 + 4y + 4 = 0$ тобто $y = -2$.

в) **параметричне спадання функції системою співвідношень**: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, де t – параметр, y_1 вважається значенням функції, що відповідає x_1, якщо обидва ці значення відповідають одному і тому ж значенню параметра (рис 5.1.1.3) t_1: $\begin{cases} x_1 = \varphi(t_1), \\ y_1 = \psi(t_1). \end{cases}$

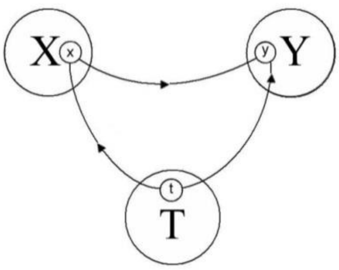


Рис 5.1.1.3

Приклад 5.1.1.4. Розгляньмо систему співвідношень:

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^4 + 2t^2. \end{cases}$$

Вона задає параметрично залежність y від x. Зауважимо також, що у даному випадку можна задати таку функцію явно: $y = x^2 - 1$.

5.1.2. Основні типи функцій

Розглянемо основні властивості функцій:

1. **Парність та непарність.**

Парною <u>*називається*</u> функція $y = f(x)$, така що для $\forall x \in D(x)$, число (-x) також належить $D(x)$ і $f(x) = f(-x)$, і, відповідно, **непарною,** якщо для $\forall x \in D(x)$, $(-x) \in D(x)$, проте $f(-x) = -f(x)$. Функція, яка не є а ні парною а ні непарною <u>*називається*</u> **функцією загального вигляду** (або **загального положення**).

Важливо!

Слід пам'ятати, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклад 5.1.2.1. До парних функцій належать, наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$, до непарних - $y = x$, $y = \sin x$, функція $y = 2^x$ може розглядатись як приклад функції загального положення.

2. **Монотонність.**

Зростаючою (спадною) <u>*називається*</u> функція, для якої на проміжку X **більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції**. Зростаючі та спадні функції <u>*називаються*</u> **строго монотонними**. Якщо ж більшому значенню аргументу відповідає не менше (не більше), ніж попереднє, то функція <u>*називається*</u> **неспадною (незростаючою)**.

Монотонними <u>*називаються*</u> функції, які є неспадними або ж незростаючими.

Приклад 5.1.2.2. Функція $y = x^2$ (рис. 5.1.2.1)зростає для всіх $x \in [0,\infty)$.

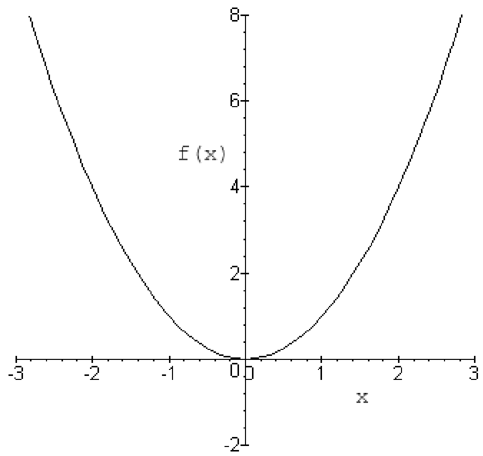


Рис. 5.1.2.1

Приклад 5.1.2.3. Функція $y = ctgx$ (рис. 5.1.2.2) спадає для всіх x.

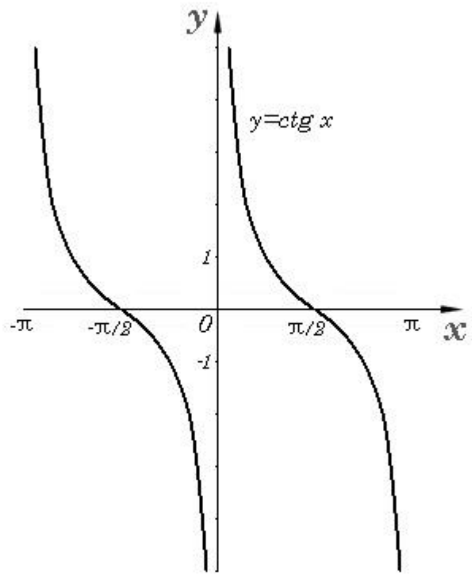


Рис. 5.1.2.2

Приклад 5.1.2.4. Функція $y = |x+1| - |x|$ (рис. 5.1.2.3) є неспадною x.

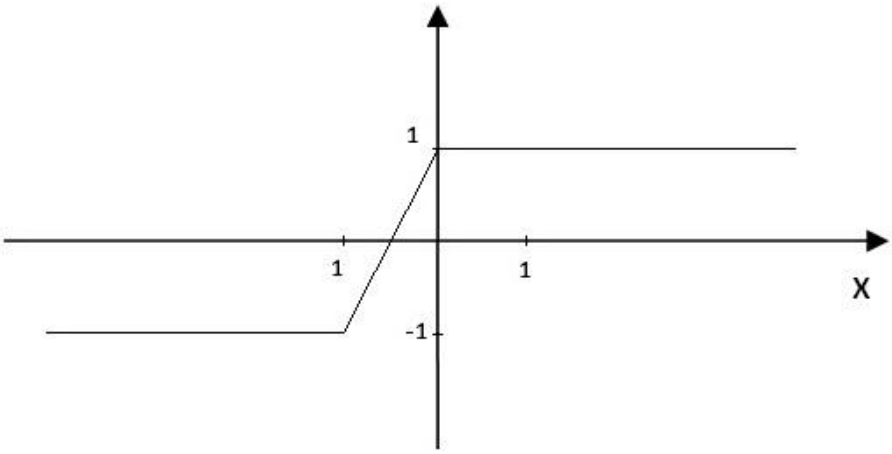


Рис. 5.1.2.3

3. Обмеженість.

Обмеженою на множині X *<u>називається</u>* функція**,** для якої існує таке число M , що $|f(x)| \le M$ для всіх $x \in X$.

Приклад 5.1.2.4 Функція $y = \sin x$ (рис. 5.1.2.4) є обмеженою для всіх x : $\sin x \in [-1;1]$.

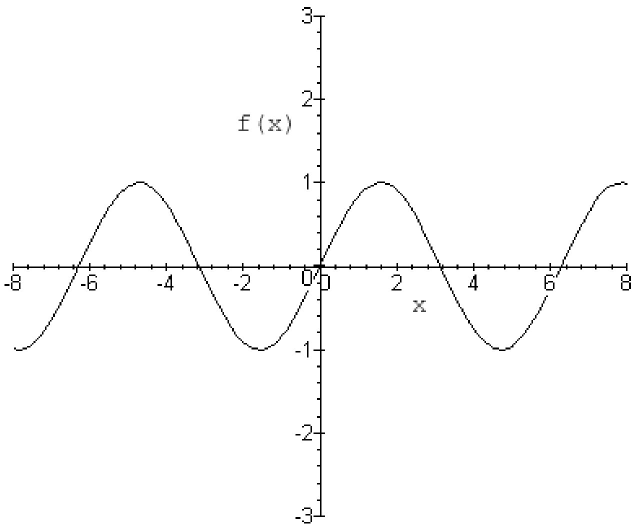


Рис. 5.1.2.4

4. Періодичність.

Періодичною <u>*називається*</u> функція , для якої існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(x)$ виконується рівність $f(x) = f(x+T)$, при цьому **періодом функції** <u>*називається*</u> найменше додатне число Т, яке задовольняє цій умові.

Приклад 5.1.2.5. Періодичними є, наприклад, тригонометричні функції $y = \sin x \, (T = 2\pi)$, $y = \cos x, (T = 2\pi)$, $y = tgx, (T = \pi), y = tgx, (T = \pi)$.

Нетривіальним прикладом періодичної функції є **дробова числа (мантіса)**

Приклад 5.1.2.6. $y = \{x\} = x - [x]$, де $[x]$- ціла частина, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x. Графік такої функції представлений на рисунку 5.1.1.4

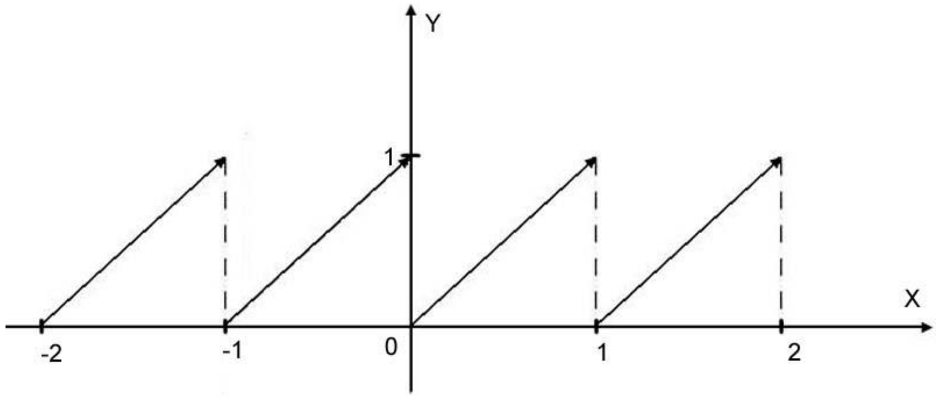


Рис 5.1.1.4

Разом з функцією $y = f(x)$ часто доводиться розглядати **обернену** до неї **функцію**: якщо значенню $y \in E(y)$ ставиться у відповідність **єдине** x таке, що $f(x) = y$ то отриману функцію називають оберненою до y=f(x) позначають $x = f^{-1}(y)$.

Приклад 5.1.2.7. Для функції $y = x^2$, $(x \in R, y \geq 0)$ оберненою є функція $y = \sqrt{x}$, $(x \geq 0, y \geq 0)$, а для функції $y = \sin x$, $(x \in R, y \in [0;1])$ - функція $y = arcs\mathrm{in}\, x$, $\left(x \in [-1;1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$.

Часто доводиться розглядати також **складні функції (суперпозиції функцій)**: нехай $y = f(u)$, де $u \in D(u)$, а множина $D(u)$ є областю значень функції $u = \varphi(x)$. Тоді кажуть, що визначено складну функцію $y = f\left(\varphi(x)\right) = F(x)$, або, що те ж саме, що функція F є суперпозицією функцій f та φ.

Приклад 5.1.2.8. Складеною функцією є функція $y = \ln\sin x$ (суперпозиція логарифму та синуса), визначена для $x \in \left(2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$.

5.1.3. Основні елементарні функції

В шкільному курсі математики докладно вивчаються **основні елементарні функції:**

- **степенева** $y = x^a (a \in R)$;
- **показникова** $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$;
- **логарифмічна** $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$;
- **тригонометричні**: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg(x)$, $y = ctg(x)$;
- **обернені тригонометричні**: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg(x)$, $y = arcctg(x)$.

Елементарними функціями *називаються* функції, отримані з основних елементарних за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операцій суперпозицій.

Елементарні функції поділяються на **алгебраїчні** та **неалгебраїчні (трансцендентні).**

До алгебраїчних функцій відносяться:

- **многочлени** степеня n $P_n\left(x\right) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$;
- **дробово-раціональні функції** $f\left(x\right) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n\left(x\right), Q_m(x)$ - многочлени;
- **ірраціональні функції**, при побудові яких використовується арифметичні операції та операції добування кореня.

5.2. Послідовності та їх границі

5.2.1. Основні поняття

<u>*Кажуть*</u>, що задано **числову послідовність**, якщо кожному натуральному числу поставлене у відповідність певне дійсне число. Таким чином, **числова послідовність** є функцією натурального аргументу $a_n = f(n)$

Послідовність записують у вигляді $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ або $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, при цьому $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - **члени послідовності**, $a_n = f(n)$ - **загальний (**n-ий**) член послідовності.**

Оскільки послідовність є частинним випадком функції, то для неї використовують ті ж самі терміни: монотонність , обмеженість, тощо.

Приміром:

- $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ **монотонна (зростаюча), необмежена**;
- $1, 0, 1, 0, \ldots, \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$ - **немонотонна, обмежена**;
- $0, \dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{4}; \ldots, \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right), \ldots$ - **немонотонна, обмежена**.

Для останньої послідовності можна зауважити, що її члени зі зростанням номера «накопичуються» навколо числа 1 (найкраще це ілюструється розташуванням відповідних точок на числовій прямій).

5.2.2. Границя числової послідовності

Число а <u>*називають*</u> **границею послідовності** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ і записують $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ (інакше кажучи, знайдеться такий номер члена послідовності, починаючи з якого, всі її члени потраплять до ε - околу числа a).

Приклад 5.2.2.1. Для послідовності $a_n = \dfrac{n+1}{n}, n=1,2,\ldots$ границею ,очевидно, є число $a=1$. При цьому $\left|a_n - 1\right| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, для $n > \dfrac{10}{\varepsilon}$, тобто $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{n}\right]$.

5.2.3. Властивості збіжних послідовностей. Розкриття невизначеностей.

Якщо послідовність має границю, вона *<u>називається</u>* **збіжною**, інакше – **розбіжною.**

Властивості збіжних послідовностей:

1) Якщо існує **границя** послідовності, то вона **єдина**.
2) **Збіжна** послідовність є **обмеженою**.
3) Якщо, починаючи з деякого номеру $n \geq N$ виконується нерівність $a_n < b_n < c_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ (**теорема про границю проміжної послідовності**).
4) **Монотонна обмежена** послідовність – збіжна.

Якщо $a=0$, то послідовність *<u>називається</u>* **нескінченно малою**.

Якщо послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ має границю a, то $a_n = a + \alpha_n, \forall n$, де $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нескінченно мала, то послідовність $\beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ (при $\alpha_n \neq 0$) є **нескінченно великою** (така послідовність необмежена, абсолютні величини її членів **нескінченно зростають**);

Запровадимо **арифметичні операції над збіжними послідовностями**. Нехай загальний член однієї послідовності a_n, другої - b_n, тоді $c_n = \alpha \cdot a_n$ – **послідовність, помножена на число,** $\alpha_n = a_n \pm b_n$ - **сума (різниця) послідовностей,** $f_n = a_n \cdot b_n$ – **добуток послідовностей,** $q_n = \dfrac{a_n}{b_n} (b_n \neq 0)$ - **частка послідовностей,**

при цьому:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Приклад 5.2.3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0.$

Приклад 5.5.3.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0.$

Приклад 5.2.3.3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{narctgn}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty} arctgn = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)\cdot\frac{\pi}{2} =$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 5.2.3.4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n+2)-\lg n}{\cos\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\lg\frac{n+2}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\lg\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Приклад 5.2.3.5. Розгляньмо послідовність $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\ , n = 1, 2, \ldots$ Оскільки

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{b_n}.$$

А послідовність b_n - нескінченно велика, то a_n - нескінченно мала послідовність.

Зазначимо, що в багатьох випадках властивостей збіжних послідовностей недостатньо для знаходження границь конкретних послідовностей, оскільки виникають **невизначеності**:

- якщо a_n, b_n – нескінченно великі послідовності, то при знаходженні границі $d_n = a_n \pm b_n$ може виникнути невизначеність $(\infty - \infty)$.
- якщо a_n – нескінченно мала послідовність, а b_n – нескінченно велика (чи навпаки), то при знаходженні границі $f_n = a_n \cdot b_n$ маємо невизначеність $(0;\infty)$ (або $(\infty;0)$);
- якщо a_n, b_n є одночасно нескінченно малими або нескінченно великими то при знаходженні границі $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ маємо невизначеності відповідно $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 5.2.3.6. Розглянемо послідовність $a_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}, n = 1,2,\ldots$ Її члени можна розглядати відношення членів послідовностей $a_n^{(1)} = 3n+2$ та $a_n^{(2)} = 2n+1$, які є, очевидно, нескінченно великими, в таких випадках кажуть про невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Легко бачити, що $a_n = \dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}$, тобто, використовуючи одну з розглянутих вище властивостей збіжних послідовностей, можемо стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2}$.

Приклад 5.2.3.7. Розглянута у прикладі 5.2.3.5 послідовність $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\ , n = 1,2,\ldots$ Може розглядатись як невизначеність типу $(\infty - \infty)$.

Приклад 5.2.3.8. Нехай $a_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right), n = 1,2,\ldots$ відзначимо спершу, що послідовність

$$a_n^{(1)} = n,$$

а послідовність

$$a_n^{(2)} = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

є нескінченно мала. Таким чином, маємо **невизначеність типу** $(0 \cdot \infty)$.

Зауваживши, що $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1}$, можемо стверджувати, що

$\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{2}$.

Знаходження границь у вищенаведених прикладах <u>*називається*</u> **розкриттям невизначеностей** і вимагає застосування спеціальних методів.

Існують і інші типи невизначеностей, наприклад, границею послідовності $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (невизначеність (1^∞)) є число e - **число Ейлера** або ж трансцендентне число, рівне $2{,}718281\ldots$, яке є основою показникової функції $y = e^x$, що називається **експоненціальною** або **експонентою** та **натуральних логарифмів**.

$$\log_e a = \ln a.$$

5.3. Границі функцій

5.3.1. Означення границі функції

Розглянемо спочатку, за аналогією з послідовностями, **границю функції на нескінченності**.

Число A <u>*називається*</u> **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ (наскільки завгодно малого) знайдеться число $S > 0$, таке, що при всіх $x, |x| > S$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$

Інакше кажучи, значення функції при зростанні за абсолютною величиною її аргументу наближаються до числа A. Відзначимо, що можливі випадки, коли $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$, тоді в означенні слід вимагати, щоб x був більшим за S або, відповідно, меншим за $(-S)$.

Нехай тепер функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 (за винятком, можливо, самої цієї точки), тоді

Число А *називається* **границею функції** $f(x)$ при x, що прямує до x_0 (записується $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), якщо для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Геометрично це означає, що задавши ε-окіл точки А (наскільки завгодно малий), ми можемо підібрати такий δ-окіл точки x_0, що значення функції f(x) для всіх точок з цього околу (окрім, можливо, самої точки x_0) потрапляють до ε-околу А.

Зауважимо, що:

Важливо!

1) ***Існування границі функції при $x \to x_0$ не вимагає існування значення функції $f(x_0)$, тобто пов'язане з поведінкою функції поблизу цієї точки.***
2) ***Якщо при прямуванні x до x_0 змінна x приймає лише значення менші (більші) за x_0, то кажуть про прямування x до x_0 знизу $(x \to x_0 - 0)$ або зверху $(x \to x_0 + 0)$, і, відповідно, про*** **однобічні границі функції.**

Приклад 5.3.1.1 Нехай розглядається функція $y = \dfrac{|x|}{x}$. При $x < 0$ $y = \dfrac{-x}{x} = -1$, при $x > 0$ $y = 1$. Таким чином, при прямуванні x до 0 ліва границя дорівнює (-1), а права -1,(рис 5.3.1.1).

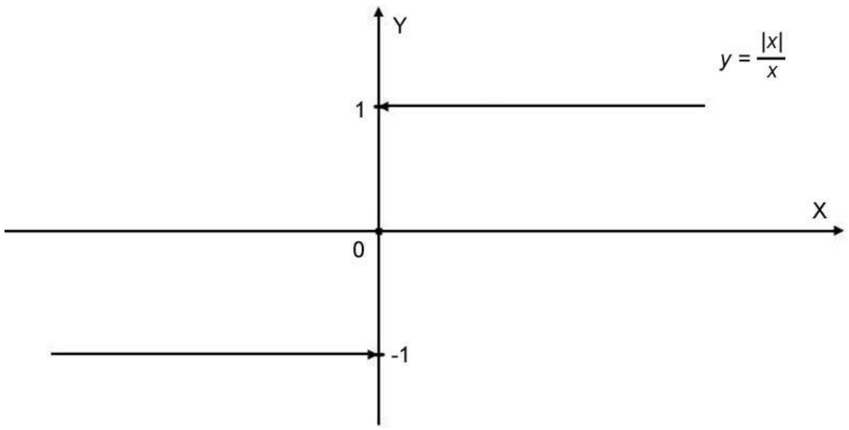


Рис. 5.3.1.1

Властивості функцій, що мають границю, відповідають властивостям збіжних послідовностей.

1) Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя єдина.
2) Якщо границя функції дорівнює 0, то така функція називається нескінченно малою.

Нескінченно малі величини – дуже важливий клас змінних величин. Для них характерні наступні властивості:

а) алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

б) Добуток нескінченно малої величини на обмежену (в тому числі на сталу або ж іншу нескінченно малу) є величина нескінченно мала.

в) Частка від ділення нескінченно малої величини на величину, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

г) Величина, обернена до нескінченно малої є нескінченно велика (тобто, для довільного $A > 0$ вибором $S(A)$ або ж $\delta(A)$ можна добитись виконання нерівності $|f(x)| > A$) і навпаки – величина, обернена до нескінченно великої є нескінченно мала.

Приклад 5.3.1.2. У випадку границі $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ маємо добуток нескінченно малої величини $\frac{1}{x}$ на обмежену $\left(|\sin x| \le 1\right)$. Отже, ця границя рівна 0.

Повертаючись до властивостей функцій, які мають границю, вкажемо на ще одну їх дуже важливу властивість.

3) Функція $f(x)$ тоді і тільки тоді має границею число A (при x, що прямує до числа x_0 або ж нескінченності), коли її можна представити у вигляді $f\left(x\right)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина.

Приклад 5.3.1.3. $\lim_{x\to 1}(x+2)$, оскільки $x+2=3+(x-1)$, а $x-1$ в цьому випадку є нескінченно малою.

Наступна властивість пов'язує між собою границі послідовностей та функцій (її <u>*називають*</u> також **означенням границі функції за Гейне**).

4) Функція f(x) тоді і тільки тоді має границею число A, якщо для довільної послідовності чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ з її області визначення (що збігається до x_0 або нескінченності в залежності від потреби) послідовність значень функції $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right) \ldots$ збігається до A.
5) Зазначимо також, що

А) Сталий множник виноситься за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left(\alpha f\left(x\right)\right)=\alpha A, \text{ якщо } \lim_{x\to x_0(\infty)} f\left(x\right)=A;$$

Приклад 5.3.1.4. $\lim_{x\to 0}\left(3\sin x\right)=3\lim_{x\to 0}\sin x=3\cdot 0=0$.

Б) Границя алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A+B, \text{ якщо } \lim_{x\to x_0(\infty)} f\left(x\right)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} g\left(x\right)=B;$$

Приклад 5.3.1.5. $\lim_{x\to 0}\left(2^x+\cos x\right)=\lim_{x\to 0}2^x+\lim_{x\to 0}\cos x=1+1=2$.

В) Границя добутку дорівнює добутку границь:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B, \text{ якщо знову } \lim_{x\to x_0(\infty)} f\left(x\right)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} g\left(x\right)=B;$$

Приклад 5.3.1.6. $\lim_{x\to 2}\left(x^2\cdot\log(x+8)\right)=\lim_{x\to 2}x^2\cdot\lim_{x\to 2}\log(x+8)=4\cdot 1=4.$.

Г) Границя частки дорівнює частці границь:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{A}{B},\text{ якщо }\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} g(x)=B\neq 0;$$

Приклад 5.3.1.7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+3x+2\right)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}=\frac{0}{2}=0$.

Д) Якщо $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x)=u_0$, то **границя складеної функції** –

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f\left(g(x)\right)=A;$$

Приклад 5.3.1.8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} 4^{\sin x}=4^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x}=4^{\frac{1}{2}}=2.$

6) Якщо в деякому околі точки x_0 (або при достатньо великих x) виконується нерівність $f(x)<g(x)$, то за умови існування границь

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)\leq \lim_{x\to x_0(\infty)} g(x).$$

Приклад 5.3.1.9 Оскільки $\sin x<1$ при $x\to 1$, то $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}\leq \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$

5.3.2. Примітні границі

Першою примітна границею <u>*називається*</u> границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$. Дійсно, якщо розглянути коло радіуса R з центром в точці O і здійснити зображені на рисунку побудови, то маємо (рис 5.3.2.1):

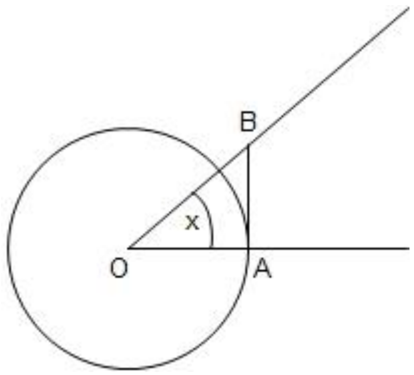


Рис 5.3.2.1

$$S_1 = S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} R^2 \sin x,$$

$$S_2 = S_{сектOAB} = \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{x}{2} R^2,$$

$$S_3 = S_{OA'B} = \frac{1}{2} R^2 tgx,$$

$S_1 < S_2 < S_3$, звідки

$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} x R^2 < \frac{1}{2} R^2 tgx$, або, що те ж саме,

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, і відповідно $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$

Враховуючи шосту властивість границь і те, що $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, маємо доведення справедливості першої примітна границі.

Зазначимо, що перша примітна границя являє собою розкриття специфічної невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$. Її наслідками є границі:

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1;$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1;$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{X^2}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 5.3.2. 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{2x}=\frac{3}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{3x}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 5.3.2.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x-\pi)}{\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\left|\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=t, \\ x\to\frac{\pi}{4},\ t\to 0 \end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 4t}{\left(2t\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 4t}{\left(4t\right)^2}\cdot 16=4\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 4t}{\left(4t\right)^2}=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

Другою примітною границею *називається* границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Її можна вивести з означення числа e та означення границі функції за Гейне. Наслідки такої границі, що є розкриттям специфічної невизначеності (1^∞), наступні:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=a;$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a};$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a\,.$$

Приклад 5.3.2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{2}{x}}\right)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}.$

Приклад 5.3.2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{\sin x}=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ x\to 0\ t\to 0\end{vmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3^{t}-1}{t}=\ln 3.$

Приклад 5.3.2.4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lg(1+tg(x-1))}{x-1}=\begin{vmatrix}tg(x-1)=t\\ x-1=arctgt\\ x\to 1\, tgt\to 0\end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\lg(1+t)}{arctgt}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\lg(1+t)}{t}\cdot\frac{t}{arctgt}=\lim_{t\to 0}\frac{\lg(1+t)}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{arctgt}=\frac{1}{\ln 10}\cdot 1=\frac{1}{\ln 10}.$$

.

Приклад 5.3.2.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\arcsin^{3}3x}-1}{1-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\arcsin^{3}3x\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\arcsin^{2}3x}\cdot\frac{\arcsin^{2}3x}{1-\cos 5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\arcsin^{3}3x\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\arcsin^{2}3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^{2}3x}{1-\cos 5x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\arcsin^{3}3x\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\arcsin^{2}3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^{2}3x}{\left(3x\right)^{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x\right)^{2}}{1-\cos 5x}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^{2}3x}{\left(3x\right)^{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{9\cdot x^{2}\cdot 5^{2}}{(1-\cos 5x)\cdot 5^{2}}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{9}{25}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x\right)^{2}}{1-\cos 5x}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{25}\cdot 2=\frac{6}{25}.$$

Еквівалентними $(\alpha \sim \beta)$ далі будемо *<u>називати</u>* нескінченно малі величини $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to 0(\infty)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, або ж **одного порядку малості**, якщо $\lim\limits_{x \to 0(\infty)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$. При цьому, якщо $\lim\limits_{x \to 0(\infty)} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ *<u>називається</u>* **нескінченно малого вищого порядку малості в порівнянні з** β.

Приклад 5.3.2.6. При $x \to 0$ величина x^2 є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\sin x$. Дійсно, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[x \cdot \dfrac{x}{\sin x} \right] = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 0.$

Зазначимо, що у випадку, коли маємо **добуток, або частку** нескінченно малих величин, то **при знаходженні границь кожна з них може бути замінена на еквівалентну.**

Приклад 5.3.2.7.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x\left(e^x - 1\right)\left(\sqrt{1 + x^2 - 1}\right)}{arctgx \cdot \ln(1 + x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x \cdot \frac{x^2}{2}}{x \cdot x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

З першої та другої примітних границь випливають наступні еквівалентності:

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} u\left(x\right) = 0$, то:

1) $\sin u(x) \sim u(x)$;
2) $tgu(x) \sim u(x)$;
3) $\arcsin u(x) \sim u(x)$;
4) $arctgu(x) \sim u(x)$;
5) $1 - \cos u(x) \sim \dfrac{1}{2} u^2(x)$;
6) $\log_a(1 + u\left(x\right)) \sim \dfrac{u(x)}{\ln a}$;
7) $\ln(1 + u\left(x\right)) \sim u(x)$;
8) $a^{u(x)} - 1 \sim u(x) \cdot \ln a$;
9) $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$;
10) $(1 + u\left(x\right))^a - 1 \sim a \cdot u(x)$.

5.3.3. Неперервність та розриви функцій

Неперервною в точці $x = x_0$ назвімо функцію $y = f(x)$,

якщо вона:

а) визначена в деякому околі цієї точки;

б) має скінченну границю $A = \lim\limits_{x = x_0} f(x)$;

в) $A = f(x_0)$ (границя співпадає зі значенням функції);

неперервною на інтервалі $(a;b)$**,** якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу;

неперервною на відрізку $\left[a;b\right]$, якщо вона:

г) неперервна на інтервалі $(a;b)$;

д) має скінченні значення $f\left(a\right) = \alpha, f\left(b\right) = \beta$;

е) мають місце рівності:

$$\lim_{x \to a+0} f\left(x\right) = \alpha, \ \lim_{x \to b-0} f\left(x\right) = \beta.$$

Приклад 5.3.3.1. Функція $y = \ln x$ неперервна на інтервалі $\left(0, +\infty\right)$, а функція $y = \sqrt{x}$ на інтервалі $\left[0, +\infty\right)$.

Відзначимо, що в якості еквівалентних означень неперервної функції можна розглядати наступні:

Важливо!

1) ***неперервність функції означає неперервність її графіка, тобто можливість зобразити його не відриваючи олівця від паперу;***
2) ***функція неперервна тоді і тільки тоді, коли її приріст*** $\Delta y = y\left(x + \Delta x\right) - y(x)$ ***прямує до нуля при*** $\Delta x \to 0$.

Якщо функція не є неперервною в точці x_0, то точка x_0 *<u>називається</u>* **точкою розриву функції**. Розрізняють наступні типи точок розриву:

1) **Усувний розрив**, коли існує границя $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, проте її значення не співпадає зі значенням $f(x_0)$ або ж останнє не існує;

Приклад 5.3.3.2. Функція $y=\dfrac{\sin x}{x}$ має усувний розрив в точці $x=0$, оскільки її значення при $x=0$ не визначене, проте існує границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2) **Розрив першого роду** (розрив типу «стрибок»), якщо границі $\lim\limits_{x\to x-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)$ існують, проте не рівні між собою;

Приклад 5.3.3.3. Функція $y=\dfrac{|x|}{x}$ має в точці $x=0$ розрив першого роду («стрибок»), оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} y=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1$, а значення самої функції в цій точці не визначене.

3) **Розрив другого роду**, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x-0} f\left(x\right)$ та $\lim\limits_{x\to x+0} f(x)$ нескінченна або не існує.

Приклад 5.3.3.4. Функція $y=tgx$ має в точці $x=\dfrac{\pi}{2}$ розрив другого роду, оскільки $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} y=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} y=+\infty$.

Функції , неперервні в точці, мають наступні властивості:

1) Якщо функції $f\left(x\right)$ та $g\left(x\right)$ неперервні в точці $x=x_0$, то їх алгебраїчна сума $f\left(x\right)\pm g\left(x\right)$, добуток $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$ та частка $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ (при $g\left(x_0\right)\neq 0$) також неперервні в точці $x=x_0$.
2) Якщо $f(x)$ неперервні в точці $x=x_0$ та $f\left(x_0\right)>(<)0$, то існує такий окіл точки x_0, в якому $f\left(x\right)>(<)0$.

3) Якщо функція $y = f(u)$ неперервна в точці u_0 Б а функція $\varphi(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, $\varphi(x_0) = u_0$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці $x = x_0$.

Як випливає з цих властивостей

Важливо! **Всі елементарні функції неперервні в усіх точках своїх областей визначення**

Приклад 5.3.3.5. Функція $y = ax^2 = bx + c$ неперервна для всіх $x \in R$.

Приклад 5.3.3.6. Функція $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ неперервна для всіх $x \in R$, крім $x = 1$ та $x = -1$, оскільки в цих точках вона не визначена.

Функції, неперервні на проміжку $[a;b]$, мають наступні властивості:

1) Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку, то вона обмежена на цьому проміжку.
2) Якщо функція неперервна на проміжку, то існують точки $x_1 \in [a;b], x_2 \in [a;b]$ в яких функція досягає своїх найменшого m та найбільшого M значень на цьому проміжку:
$$f(x_1) = m,\ f(x_2) = M.$$
3) Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$ і її значення на кінцях цього відрізку мають різні знаки, то відрізку знайдеться точка x_0 така, що $f(x_0) = 0$.
4)

5.4. Біном Ньютона

Формулою бінома Ньютона _називають_ рівність:

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$, де a, b – дійсні числа, $n = 1, 2, 3, \ldots$ - натуральне число.

Така формула узагальнює відомі зі шкільної програми формули «квадрата суми» та «кубу суми». Числа C_n^k, $k = 1, 2, \ldots, n$ _називаються_

біноміальними коефіцієнтами і обчислюються за формулами $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ – **факторіалом числа** n. Справедливі наступні співвідношення:

1) $0! = 1, 1! = 1, 2! = 1\cdot 2 = 2, \ldots;$
2) $(n+1)! = (n+1)\cdot n!;$
3) $C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = n;$
4) $C_n^k = C_n^{n-k};$
5) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n;$
6) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$

Скористаємось формулою бінома Ньютона для виразу:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \\ + \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n+1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) + \ldots,$$

тобто $a_{n+1} > a_n$ – послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є зростаючою. Якщо додатково зауважити, що

$$a_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} + \ldots < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3,$$

то маємо послідовність обмежену та монотонну і, відповідно, збіжну за наведеною вище ознакою.

Контрольні запитання

1. Що таке послідовність і якими вони бувають?
2. Дайте означення збіжної послідовності та її границі?
3. Що таке нескінченно мала та нескінченно велика послідовності?
4. Наведіть приклади невизначеностей та способи їх розкриття.
5. Які властивості мають збіжні послідовності?
6. За яких умов послідовність є збіжною?

7. Що називають числом Ейлера, яка послідовність має границею число е?
8. Дайте означення границі функції «на нескінченності» і «в точці».
9. Що таке означення границі «мовою $\varepsilon - \delta$ » та «мовою послідовностей»?
10. Яке геометричне тлумачення границі функції?
11. Сформулюйте властивості границь функції.
12. Які величини називаються нескінченно малими та нескінченно великими величинами?
13. За якої умови величина має границю?
14. Що таке перша примітна границя? Які її наслідки?
15. Що таке друга примітна границя? Які її наслідки?
16. Які нескінченно малі величини називають еквівалентними? Наведіть основні еквівалентності.
17. Які функції називають неперервними в точці, на відкритому та замкненому інтервалах?
18. Наведіть властивості непевної функції.
19. Які існують розриви функції?
20. Сформулюйте їх означення та наведіть приклади.
21. Що можна сказати про неперервність основних елементарних функцій?

Тема 6. Диференціальне числення функцій однієї змінної

В яких технічних та економічних задачах виникає поняття похідної? Який її зміст?Як її обчислюють?Як обчислюють похідні вищих порядків?Які властивості мають диференційовані функції. Як досліджують поведінку функції за допомогою похідної?

6.1. Задачі, що призводять до поняття похідної

Поняття похідної функції є одним з найважливіших в математичному аналізі. Сукупність понять, тверджень, методів, пов’язаних з цим поняттям *називається* **диференціальним численням**.

А) Задача про дотичну

Нехай на площині *Oxy* (див. рис. 6.1.1)задано неперервну криву, що відображає функціональну залежність $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$. Під **дотичною до кривої** ми розумітимемо граничне положення прямої, що з’єднує цю точку з іншою точкою $M_1(x^*, y^*)$ цієї ж кривої, якщо точка M_1 прямує по кривій до точки M_0.

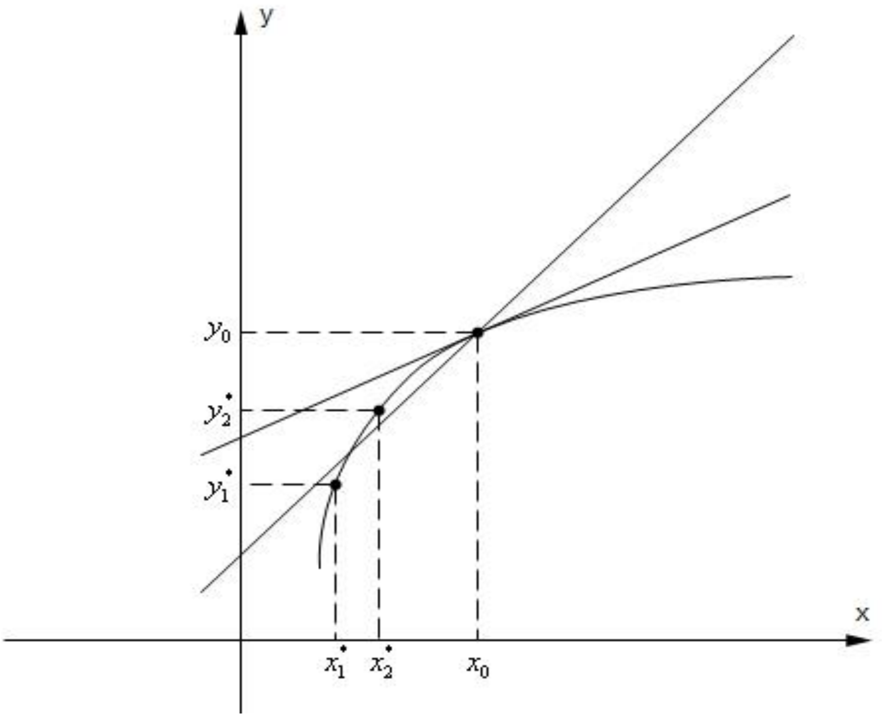


Рис. 6.1.1

При цьому рівняння прямої проведеної через точки M_0 та M_1 має вигляд: $\frac{x-x_0}{x^*-x_0}=\frac{y-y_0}{y^*-y_0}$, або, що те ж саме, $y-y_0=\frac{y^*-y_0}{x^*-x_0}(x-x_0)$, відповідно, переходячи до границі $x^*\to x_0$, отримуємо $y-y_0=k(x-x_0)$, де k – кутовий коефіцієнт дотичної – знаходиться за формулою $k=\lim\limits_{x^*\to x_0}\frac{y\left(x^*\right)-y(x_0)}{x^*-x_0}$, тобто є границею відношення різниці значень функції до різниці відповідних значень аргументу, якщо остання прямує до нуля (ця границя може бути нескінченною або ж не існувати).

Відзначимо, що розуміння дотичної, як прямої (з аналогією дотичною до кола), яка має лише одну спільну точку з кривою, є невірним – ілюструється наступним рисунком 6.1.2:

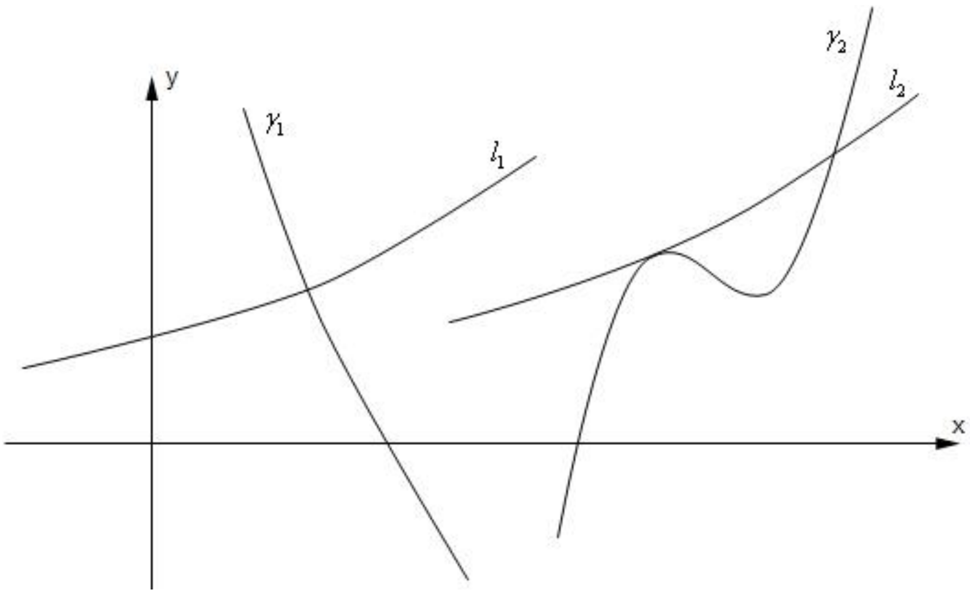


Рис. 6.1.2

Ясно, що пряма l_1 не є дотичною до кривої γ_1 а l_2 - дотичною до γ_2, проте має з цією кривою принаймні дві спільні точки.

Б) Задача про швидкість руху

Нехай матеріальна точка рухається вздовж прямої, причому пройдений за час t дорівнює $S(t)$. Тоді **середня швидкість руху** на проміжку часу $[t_0;t_0+\Delta t]$ становить частку від ділення пройденого шляху на час Δt:

$$v_{cep} = \frac{S\left(t_0+\Delta t\right)-S(t_0)}{\Delta t},$$

Чим менший проміжок Δt , тим точніше середня швидкість характеризує реальну швидкість на цьому проміжку, тому запроваджують поняття **миттєвої швидкості**, або швидкості в момент часу t_0:

$$v\left(t_0\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S\left(t_0+\Delta t\right)-S(t_0)}{\Delta t}.$$

В) Задача про продуктивність праці.

Нехай $u=u(t)$ є кількість продукції, виробленої за час t , і постає питання про продуктивність праці в момент часу t_0. Тоді, аналогічно до попереднього, можна запровадити **середню продуктивність праці** за час від $t=t_0$ до $t=t_0+\Delta t$

$$P_{сер} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t},$$

та **миттєву продуктивність**.

6.2. Похідна та диференціал функції. Зміст та застосування диференціала

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку X, точки x_0 та $x_0 + \Delta x$ належать цьому проміжку, тоді **похідна** $f'(x)$ функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ визначається за формулою:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної можуть використовуватись також позначення $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$, часто вказується змінна, по якій диференціюється функція: f'_x, y'_x. Знаходження похідної функції *<u>називається</u>* **диференціюванням функції**.

Диференційованою в точці x_0 *<u>називається</u>* функція, яка в точці x_0 має скінченну похідну. Якщо функція диференційовна в усіх точках проміжку, то вона *<u>називається</u>* **диференційовною на проміжку**.

Згадуючи властивості границь, зазначимо, що:

Важливо!

1) ***скінченна похідна може існувати тільки тоді, коли*** $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ***прямує до*** 0 ***при*** $\Delta x \to 0$***, тобто тільки коли функція*** $f(x)$ ***неперервна (інакше кажучи, диференційованою може бути тільки неперервна функція, проте не всі неперервні функції диференційовані);***
2) ***існування скінченної похідної*** $f(x_0) = A$ ***означає, що*** $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha$***, де*** α ***- нескінченно мала величина, звідси маємо*** $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$**.**

Вираз $A \cdot \Delta x$, який є головною, лінійною відносно приросту аргументу частиною приросту функції <u>називається</u> **диференціалом функції.**

Диференціал функції $y = f(x)$ позначається dy або df , і, враховуючи, що $A = f^{'}(x_0)$, обчислюється за формулою $dy = f^{'}(x_0)\Delta x$. Оскільки диференціал функції $y = x$ співпадає з Δx, то замість Δx можна писати dx.

Основне практичне застосування диференціалу – для наближення обчислень:

$$y\left(x_0 + \Delta x\right) - y(x_0) \approx dy,$$

звідки

$$y\left(x_0 + \Delta x\right) \approx y\left(x_0\right) + y^{'}(x_0) \cdot \Delta x.$$

Приклад 6.2.1. Обчислимо наближено $\sqrt[3]{7,97}$. Для цього розгляньмо функцію $y(x) = \sqrt[3]{x}$, виберемо $x_0 = 8, \Delta x = -0,03$. Зауваживши, що $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, причому $y(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2$, $y'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$, маємо

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7,97} &= y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = \\ &= 2 + \frac{1}{12}(-0,03) = 2 - \frac{0,01}{4} = 1.9975. \end{aligned}$$

6. 3. Правила знаходження похідних та диференціалів, таблиця похідних

З властивостей границь випливають наступні **правила диференціювання (**знаходження похідних і, відповідно, диференціалів):

1) Похідна сталої величини C дорівнює нулю, тобто $C^{'} = 0$, $d\left(C\right) = 0$.
2) Похідна $y = x$ дорівнює 1, тобто $\left(x\right)^{'} = 1$, $dy = dx$.
3) Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних:
$$\left(u \pm v\right)' = u^{'} \pm v^{'},$$
$$d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$$
4) Сталий множник можна (і треба!)виносити за знак похідної (і диференціала):
$$\left(c \cdot u\right)^{'} = c \cdot u^{'},$$

$$d(c\cdot u)=c\cdot du.$$

5) Похідна добутку диференційованих функцій знаходиться за формулою:

$$(u\cdot v)'=u'v+uv',$$

$$d(uv)=v\cdot du+u\cdot dv.$$

6) Похідна частки диференційованих функцій знаходиться за формулою:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}.$$

7) Похідна складної функції $y=f(\varphi(x))$ знаходиться за формулою:

$$y'=f_u'|_{u=\varphi(x)}\cdot\varphi'(x),$$

$$dy=f_u'|_{u=\varphi(x)}\cdot d\varphi.$$

При цьому ми вважаємо, що $f(u)$ та $u=\varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів.

З останньої властивості випливає **правило логарифмічного диференціювання:**

$$f'(x)=f(x)\cdot(\ln f(x))'\ .$$

Дійсно, $\left(\ln f(x)\right)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, що і доводить формулу. Таке правило використовується для диференціювання **показниково-степеневих функцій** $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$ та функцій, що є добутком більш, ніж двох функціональних співмножників.

8) **Похідна функції** $x=x(y)$**, оберненої до функції** $y=y(x)$ задовольняє рівність $x_y'=\frac{1}{y_x'}$.

Для похідних та диференціалів основних функцій маємо наступну таблицю (далі основна функція $f(x)$, складна $f(u(x))$):

№	Основна функція	Похідна основної функції	Диференціал основної функції	Похідна складної функції
1	C	0	0	0
2	x	1	dx	u'
3	x^a	ax^{a-1}	$ax^{a-1}dx$	$au^{a-1}\cdot u'$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
5	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^2}dx$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$
6	ϵ^x	ϵ^x	$\epsilon^x dx$	$\epsilon^u\cdot u'$
7	a^x	$a^x\ln a$	$a^x\ln a dx$	$a^u\ln a\cdot u'$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}dx$	$\frac{1}{\mathrm{u}}\cdot u'$
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{1}{x\ln a}dx$	$\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
10	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$	$\cos u\cdot u'$
11	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$	$-\sin u\cdot u'$
12	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
13	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
14	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
15	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
16	$arc\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
17	$arc\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
18	$shx=\frac{\epsilon^x-\epsilon^{-x}}{2}$	chx	$chxdx$	$chu\cdot u'$
19	$chx=\frac{\epsilon^x+\epsilon^{-x}}{2}$	shx	$shxdx$	$shu\cdot u'$
20	$thx=\frac{shx}{chx}$	$\frac{1}{ch^2x}$	$\frac{dx}{ch^2x}$	$\frac{1}{ch^2u}\cdot u'$
21	$cthx=\frac{chx}{shx}$	$-\frac{1}{sh^2x}$	$-\frac{dx}{sh^2x}$	$-\frac{1}{sh^2u}\cdot u'$

Приклад 6.3.1. Нехай $y = 2 + 3x^2 - \sqrt{x} + e^x$.
Тоді

$$y' = (2 + 3x^2 - \sqrt{x} + e^x)' = (2)' + 3(x^2)' - (x^{\frac{1}{2}})' + (e^x)' =$$
$$= 0 + 3 \cdot 2x - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + e^x = 6x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x.$$

Приклад 6.3.2. Знайдемо похідну функції $y = \sin x \cdot \log_2 x$. Використовуючи правило диференціювання добутку, отримуємо

$$y' = (\sin x)' \cdot \log_2 x + \sin x \cdot (\log_2 x)' = \cos x \cdot \log_2 x + \frac{\sin x}{x \ln 2}.$$

Приклад 6.3.3. Обчислимо похідну функції $f(x) = \dfrac{arctgx}{x}$. Ця функція являє собою частку функцій $y = arctgx$ та $y = x$, тому відповідно до правила диференціювання частки, маємо:

$$f'(x) = \frac{(arctgx)' \cdot x - arctgx \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\dfrac{1}{1+x^2} - arctgx \cdot 1}{x^2} =$$
$$= \frac{x - (1+x^2) \cdot arctgx}{x^2(1+x^2)}.$$

Приклад 6.3.4. Знайдемо похідну $y = \ln(\sin x)$. Оскільки маємо складну функцію – суперпозицію функцій $y = \sin x$ (внутрішня) та $y = \ln u$ (зовнішня), то

$$y' = (\ln u)'\big|_{u=\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx.$$

Приклад 6.3.5. Нехай $f(x) = x^x$. Це показниково-степенева функція. Тому

$$f'(x) = x^x (\ln x^x)' = x^x (x \cdot \ln x)' = x^x (x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)') =$$
$$= x^x (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x (\ln x + 1).$$

Приклад 6.3.6. Розгляньмо функцію $f(x)$ $f(x) = x \cdot e^x \cdot shx$. Вона являє собою добуток трьох співмножників. Тому є сенс використати логарифмічне диференціювання:

$$\ln f(x) = \ln x + \ln e^x + \ln shx =$$
$$= \ln x + x + \ln shx.$$
$$(\ln f(x))' = (\ln x)' + (x)' + (\ln shx)' =$$
$$\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{shx} chx = 1 + \frac{1}{x} + cthx.$$

Отже,

$$(f(x))' = x^x \cdot e^x \cdot shx(1 + \frac{1}{x} + cthx).$$

Наступні правила диференціювання пов’язані зі специфічними способами задавання функції:

1) Якщо **функцію задано неявно** співвідношенням $F\left(x, y\left(x\right)\right) = 0$, то для знаходження похідної на x, **треба продиференціювати тотожність** $F\left(x, y\left(x\right)\right) = 0$, де ліва частина – складна функція, а права – стала, а потім **розв’язати отримане рівняння відносно** $y'(x)$: $y' = \varphi(x, y)$.

Приклад 6.3.7. Нехай функцію $y(x)$ неявно задано співвідношенням $x^2 + y^2 - 3xy = 0$. Тоді. Застосовуючи правило диференціювання неявно заданої функції, отримуємо

$$\left(x^3\right)' + \left(y^3\right)' - 3\left(xy\right)' = 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3\left(x' \cdot y + x \cdot y'\right) =$$
$$= 3\left(x^2 + y^2 \cdot y' - x' \cdot y - x \cdot y'\right) = 0.$$

Таким чином, $\left(y^2 - x\right)y' + x^2 - y = 0.$ Тоді остаточно маємо

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

2) Якщо **функцію задано параметрично** системою рівностей $y\left(x\right): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = (t) \end{cases}$, де t – параметр, то її **похідна** теж **задається**

параметрично системою нерівностей $y'\left(x\right): \begin{cases} x = \varphi\left(t\right), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$

Приклад 6.3.8. Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану параметрично системою співвідношень :

$$y(x):\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}.$$

Тоді для її похідної $y' = \dfrac{dy}{dx}$ маємо вираз, що задається системою співвідношень:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y' = \dfrac{\left(\sin^3 t\right)'}{\left(\cos^3 t\right)'} = \dfrac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\dfrac{\sin t}{\cos t} = -tgt. \end{cases}$$

6.4. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $y' = \varphi(x)$, при чому $\varphi(x)$ – диференційована. Тоді її похідну $\varphi'(x)$ <u>*називають*</u> **другою похідною** функції $y = f(x)$ і позначають y'', f'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})$. Похідну другої похідною <u>*називають*</u> **третьою похідною** і позначають y''', f''', $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}))$. Взагалі, **похідна n – порядку є похідною похідної (n-1) порядку**: $y^{(n)}$, $f^{(n)}$, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$. Порядок похідної може також позначатись римськими цифрами, наприклад y^V – п’ята похідна.

Друга похідна має фізичний зміст: якщо $S = S(t)$ - шлях, пройдений за час t, $S'(t)$ – швидкість момент часу t, $S''(t)$– **прискорення в момент часу t.**

Приклад 6.4.1. Розгляньмо похідні вищих порядків функції $y = \sin x$. Оскільки $y' = \cos x$, то $y'' = (\cos x)' = -\sin x$, $y''' = (-\sin x)' = -\cos x$, $y^{(4)} = (-\cos x) = \sin x$ і т.д. Можна зауважити, що для похідної n-го порядку справедлива формула:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Якщо функцію задано параметрично співвідношеннями

$$y(x):\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

то її перша похідна

$$y'(x):\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

а

$$y''(x):\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\psi''_{tt}\varphi'_t - \psi'_t\varphi''_t}{(\varphi'_t)^3}. \end{cases}$$

Взагалі, якщо

$$y^{(n-1)}(x):\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi_{n-1}(t), \end{cases}$$

то

$$y^{(n)}(x):\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{(\psi_{n-1})'_t}{\varphi'_t}. \end{cases}$$

Приклад 6.4.2. Повернемось до розгляду функції $y = f(x)$, заданої параметрично системою співвідношень:

$$y(x):\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

Було показано, що її похідна y' у цьому випадку задається системою

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = -tgt \end{cases}.$$

Тоді $\frac{d^2y}{dx^2}$ задається системою

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y'' = \dfrac{(-tgt)'}{(\cos^3 t)'} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3\cos^2 t\sin t} = \dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}. \end{cases}$$

Якщо ж функцію задано неявно співвідношенням $F(x,y)=0$, то, наприклад, її **другу похідну знаходять диференціюванням рівності для першої похідної**:

$$y' = \varphi(x,y) \Rightarrow y'' = (\varphi(x,y(x)))'_x = \varphi_1\left(x,y(x),y'(x)\right) = \varphi_1\left(x,y(x),\varphi(x,y)\right) = \varphi_2(x,y)$$

Приклад 6.4.3. Раніше було показано (див. приклад 6.3.7) , що похідна функції $y(x)$, неявно заданої співвідношенням $x^2+y^2-3xy=0$, визначається як $y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}$.

Відповідно, друга похідна функції визначається як

$$y'' = \frac{(y-x^2)'(y^2-x)-(y^2-x)'(y-x^2)}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{(y'-2x)(y^2-x)-(2yy'-1)(y-x^2)}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{y'(2x^2y-x-y^2)+x^2+y-2xy^2}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{y-x^2}{y^2-x}(2x^2y-x-y^2)+x^2+y-2xy^2}{(y^2-x)^2} =$$

$$= \frac{3x^2y^2-2xy^3+2x^2y-xy+y^3-y^2-x-x^3}{(y^2-x)^3}.$$

Повертаючись до знаходження похідних вищих порядків для явно заданих функцій, наведемо наступну корисну формулу, що є узагальненням формули $(u\cdot v)' = u'v+uv'$. **Це – формула Лейбніца**:

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+C_n^1\cdot u^{(u-1)}v^{'}+\ldots+C_n^{n-1}\cdot u^{'v^{(n-1)}}+u\cdot v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(u-k)}v^{(k)}.$$

Приклад 6.4.4. Знайдемо, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, похідну десятого порядку функції $y=(x^2+1)e^x$. Зазначимо спершу, що, поклавши $u(x)=(x^2+1)$, а $v(x)=e^x$, маємо

$$u'=2x, u''=2, u'''=0, u^{(4)}=0,..., v'=e^x, v''=e^x,...$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned}
&y^{(10)}=uv^{(10)}+C_{10}^1u'v^{(9)}+C_{10}^2u''v^{(8)}+C_{10}^3u'''v^{(7)}+....=\\
&=(x^2+1)e^x+\frac{10!}{1!9!}\cdot 2x\cdot e^x+\frac{10!}{2!8!}\cdot 2\cdot e^x+\frac{10!}{3!7!}\cdot 0\cdot e^x+...=\\
&=(x^2+1)e^x+20\cdot x\cdot e^x+90\cdot e^x+0+...=(x^2+20x+91)\cdot e^x.
\end{aligned}$$

Диференціалом n-порядку *<u>називається</u>* диференціал $(n-1)$ порядку: $d^n y=d(d^{n-1}y)$.

Таким чином:

$$d^2y=d\left(dy\right)=d\left(y^{'}\cdot dx\right)=dy^{'}\cdot dx=\left(y^{'}\right)^{'}\cdot dx\cdot dx=y^{''}dx^2,\ldots d^n y=y^{(n)}\cdot dx^n.$$

6.5. Основні властивості диференційованих на інтервалі функцій та їх застосування

Нехай функція $y=f(x)$ є диференційовною на проміжку $[a;b]$. Тоді для неї справджуються наступні твердження:

1) Якщо $x_0\in(a;b)$, $f^{'}(x_0)\neq 0$, то існує окіл цієї точки, в якому:
   а) Якщо $f^{'}\left(x_0\right)>0$, то приріст функції та приріст аргументу мають однакові знаки (функція зростає);
   б) Якщо $f^{'}\left(x_0\right)<0$, то приріст функції та приріст аргументу мають протилежні знаки (функція спадає);
   в) $d^2y=d\left(dy\right)=d\left(y^{'}\cdot dx\right)=dy^{'}\cdot dx=\left(y^{'}\right)^{'}\cdot dx\cdot dx=$
   $=y^{''}dx^2,\ldots d^n y=y^{(n)}\cdot dx^n.$

Існують точки для яких $f(x) > f(x_0)$ та точки для яких $f(x) < f(x_0)$.

2) Якщо функція $f(x)$ задовольняє умові $f(a) = f(b)$, то всередині сегмента $[a;b]$ знайдеться принаймні одна така точка x_1, що $f'(x_1) = 0$ (**теорема Ролля**).

3) Для функції $f(x)$ існує всередині сегмента $[a;b]$ принаймні одна така точка x_2, що $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x_2)$ (**теорема Лагранжа**).

Важливо!

Наслідком теореми Лагранжа є формула Лагранжа або формула скінченних приростів: $f(b) - f(a) = f'(x_2)(b-a)$ ***, яка може використовуватись, наприклад, для наближених обчислень (слід пам'ятати, що теорема Лагранжа стверджує лише існування значення аргументу, проте не дає способу його знаходження, тому на практиці частіше за все вибирають*** $x_2 = \frac{a+b}{2}$ ***, отримуючи при цьому замість точної рівності наближену).***

4) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ обидві неперервні та диференційовні на проміжку $[a;b]$, при чому $g'(x)$ не дорівнює нулю на інтервалі $(a;b)$, то на цьому інтервалі знайдеться точка x^* така, що $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$ (**теорема Коші**).

Надзвичайно важливим наслідком теореми Коші є **правило Лопіталя-Бернуллі** розкриття невизначеностей (коротше – **правило Лопіталя**):

1) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні та диференційовні в околі точки x_0 (при достатньо великих x), і прямують до нуля при x, що прямує до x_0 (до нескінченності), то $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, якщо остання границя існує;

2) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні та диференційовні в околі точки x_0 (при достатньо великих x), і нескінченно зростають при x, що

прямує до x_0 (до нескінченності), то $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$, якщо остання границя існує.

Відзначимо, що :

Важливо!

1) ***правило Лопіталя-Бернуллі є способом розкриття невизначеностей типу*** $\dfrac{0}{0}$ ***та*** $\dfrac{\infty}{\infty}$***;***
2) ***на практиці найкращі результати досягаються при комбінуванні цього правила та методу заміни еквівалентними нескінченно малими;***
3) ***часто доводиться використовувати це правило багатократно*** $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$, ***якщо виконуються відповідні вимоги.***

Приклад 6.5.1. Скористаймося правилом Лопіталя для знаходження границі

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-3x+2)'}{(e^{x-1}-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{e^{x-1}}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Приклад 6.5.2. Знайдемо за допомогою правила Лопіталя границю

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

Приклад 6.5.3. Обчислимо границю за допомогою правила Лопіталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{shx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos\sqrt{x})'}{(shx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{chx}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}chx}=\frac{1}{2}.$$

Оскільки , за першою примітною границею $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$. Зауважмо, що закінчити знаходження границі можна було і з застосуванням правила Лопіталя.

6.6. Дослідження функцій засобами диференціального числення

6.6.1. Зростання, спадання та екстремуми функції

Відповідно до першої властивості функцій, неперервних на проміжку, можна стверджувати, що

Важливо!

достатньою ознакою зростання (спадання) функцій на проміжку є додатність (від'ємність) її похідної.

Таким чином, для знаходження **інтервалів монотонності** функції необхідно знайти її похідну і визначити інтервали, на яких вона має сталий знак (плюс або мінус).

Точкою максимуму (мінімуму) функції $y=f(x)$ *називається* точка $x=x_0$, якщо існує такий окіл цієї точки для всіх точок x, якого при $x\neq x_0$ виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$). Точки максимуму та мінімуму *називаються* **точками локальних екстремумів функції** (для економічних показників – точками локальних **оптимумів**).

У **точках екстремумів** диференційованої функції дотичні до її графіка паралельні осі абсцис, тобто похідна **дорівнює нулю**. Таким чином, **необхідною умовою того, диференційована функція має екстремум в точці x_0 є виконання рівності $f'(x_0)=0$(**рис 6.6.1.1 **).**

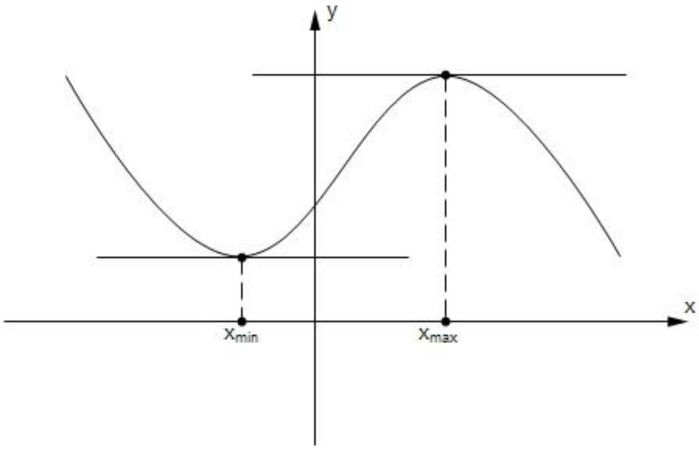


Рис 6.6.1.1

Критичними точками першого ряду для функції $f(x)$ <u>*називають*</u> точки, в яких її **похідна дорівнює нулю або ж не існує**. Для знаходження точок екстремумів спочатку визначають множину критичних точок першого роду, а потім використовують **достатні умови існування екстремуму функції**: якщо $f(x)$ неперервна в околі критичної точки першого роду $x = x_0$ (включно з самою цією точкою) та диференційована в цьому околі (за винятком, можливо, самої цієї точки) і її похідна

Важливо!

1) ***зліва від $x = x_0$ додатна, а справа – від'ємна, то в цій точці маємо максимум;***
2) ***зліва від $x = x_0$ від'ємна, а справа – додатна, то в цій точці маємо мінімум;***
3) ***зліва та справа від x_0 має однаковий знак, то і точці x_0 екстремуму немає.***

Приклад 6.6.1.1. Визначимо екстремуми функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.
Для знаходження стаціонарних точок прирівняємо похідну даної функції до нуля:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0.$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння, знаходимо корені:

$$x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Визначимо характер цих точок. Оскільки графік квадратного тричлена $y' = 3x^2 - 6x - 9$ схематично має вигляд (рис 6.6.1.2)

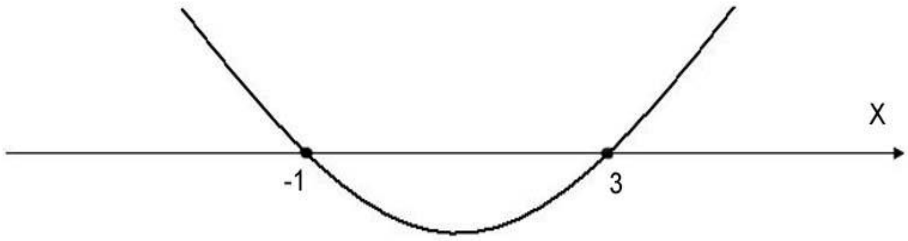


Рис 6.6.1.2

То точка $x_1 = -1$є точкою локального максимуму (при $x < -1\, y'(x) > 0$, при $x > -1\, y'(x) > 0$), а точка $x_2 = 3$ - точкою локального мінімуму (при $x < 3\, y'(x) < 0$, при $x > 3\, y'(x) < 0$).

Як було сказано вище, функція, неперервна на проміжку $[a;b]$ досягає свого найменшого m та найбільшого M значень. Якщо функція диференційована, то точки, в яких вони досягаються (і, відповідно, самі ці значення) можуть бути знайдені за наступним **алгоритмом**:

Алгоритм

1) ***визначаємо всі критичні точки першого роду, які належать*** $[a;b]$***;***
2) ***обчислюємо значення*** $f(a)$, $f(b)$ ***та значення функцій в знайдених критичних точках;***
3) ***із одержаних значень функції вибираємо найменше*** (m) ***та найбільше*** (M)***.***

Приклад 6.6.1.2. Повертаючись до попереднього прикладу, визначимо найменше та найбільше значення вказаної функції на інтервалі $[-2;1]$. Оскільки цьому інтервалу належить одна зі стаціонарних точок $x_1 = -1$, то обчислимо значення функції

$$f(-2) = 3,\ f(-1) = 10,\ f(1) = -6.$$

Таким чином, найменше значення функції на цьому інтервалі $m = f(1) = -6$, а найбільше - $M = f(-1) = 10$.

6.6.2. Опуклість графіка функції догори та донизу, точки перегину

Будемо <u>*називати*</u> графік функції **опуклим догори** на інтервалі $(a;b)$, якщо він лежить нижче всіх дотичних на цьому інтервалі. Відповідно, графік функції **опуклим донизу** на інтервалі $(a;b)$, якщо він лежить вище всіх її дотичних на цьому інтервалі.

На рисунку 6.6.2.1 точка c розділяє інтервали опуклості догори (зліва від неї) та донизу (справа від неї).

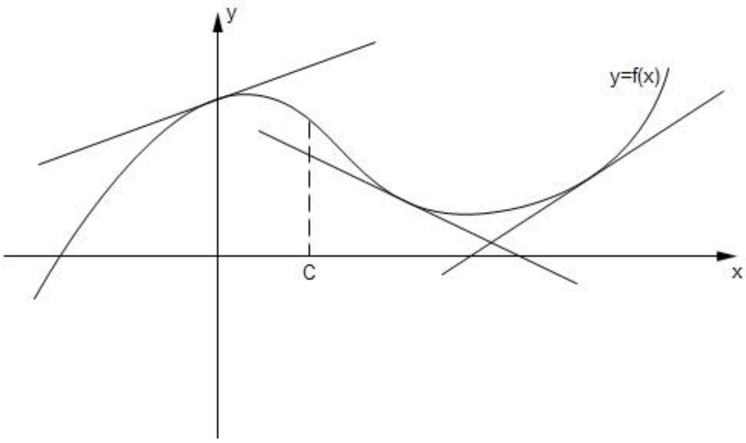


Рис.6.6.2.1

Точка x_0, для якої знайдеться такий окіл, що крива зліва від неї лежить по один бік від дотичної, а справа – по інший бік, <u>*називається*</u> **точкою перегину кривої**, якій вона належить.

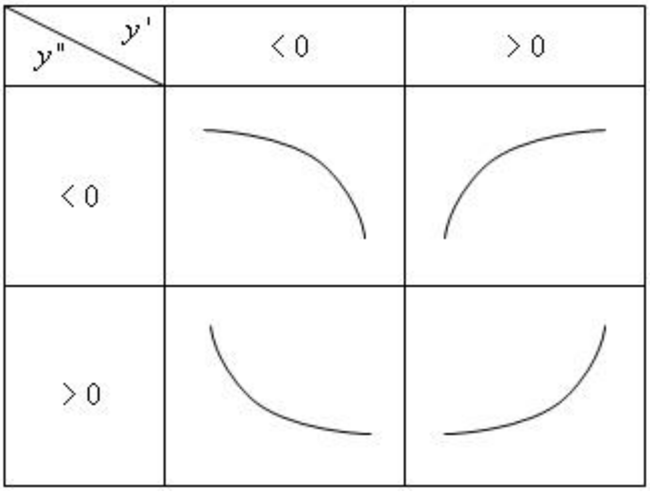
Відзначимо, що, наприклад, для кривої , опуклої вниз на інтервалі $(a;b)$, виконується співвідношення

$$f\left(x^*\right) > f\left(x_0\right)\left(x^* - x_0\right) + f\left(x_0\right),$$

тобто, $f\left(x^*\right) - f\left(x_0\right) = f^{'}\left(x_1\right)(x^* - x_0) > f'(x_0)(x^* - x_0)$,

де x_0 та x^* $(x_0 < x^*)$ – довільні точки на інтервалі $(a;b)$, x_1 існує за теоремою Лагранжа і знаходиться між x_0 та x^*. Таким чином, $f'\left(x_1\right) > f'(x_0)$, тобто похідна $f'(x)$ є зростаючою функцією, відповідно, $f''(x) > 0$. Наведені міркування пояснюють чому, якщо на інтервалі $(a;b)$ $f''(x) > 0$ – **функція опукла донизу**, $f''(x) < 0$ – **функція опукла догори**. Для знаходження інтервалів опуклості графіка функції доори та донизу визначають **критичні точки другого роду функції** – точки, де її друга похідна дорівнює нулю або не існує, після чого визначають знаки другої похідної на інтервалах між ними.

Для практичної побудови графіка корисна наочна таблиця, яка демонструє вигляд елементів графіка в залежності від знаків першої та другої похідних функції.



Приклад 6.6.2.1. Розглянемо функцію $y=(x-1)(x-3)^3$. Для неї

$$y'=(x-1)'\cdot(x-2)^3+(x-1)\left[(x-2)^3\right]'=$$
$$=(x-1)'\cdot(x-2)^3+(x-1)\left[(x-2)^3\right]'=$$
$$=(x-2)^3+(x-1)\cdot 3\cdot(x-2)^2=(x-2)^2(4x-5).$$

Далі

$$y''=\left[(x-2)^2\right]'\cdot(4x-5)+(x-2)^2\cdot(4x-5)'=$$
$$=2(x-2)\cdot(4x-5)+(x-2)^2\cdot 4=12(x-2)(x-\frac{3}{2}).$$

Таким чином, критичними точками другого роду для даної функції є $x=\dfrac{3}{2}$ та $x=2$. Оскільки схематичний графік іі другої похідної має вигляд (рис. 6.6.2.2)

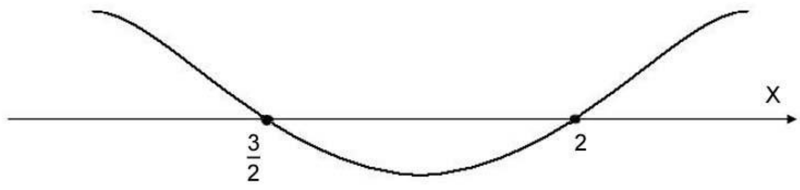


Рис 6.6.2.2

то функція опукла донизу при $x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (2; +\infty)$, опукла вгору при $x \in (\frac{3}{2}; 2)$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$ - точки перегину.

6.6.3. Асимптоти кривої

Асимптотою кривої γ *називають* пряму лінію l**,** якщо відстань точки M кривої від прямої l прямує до нуля при прямуванні точки M по кривій у нескінченність. Асимптоти можуть бути **вертикальними, похилими** та **горизонтальними** (рис. 6.6.3.1).

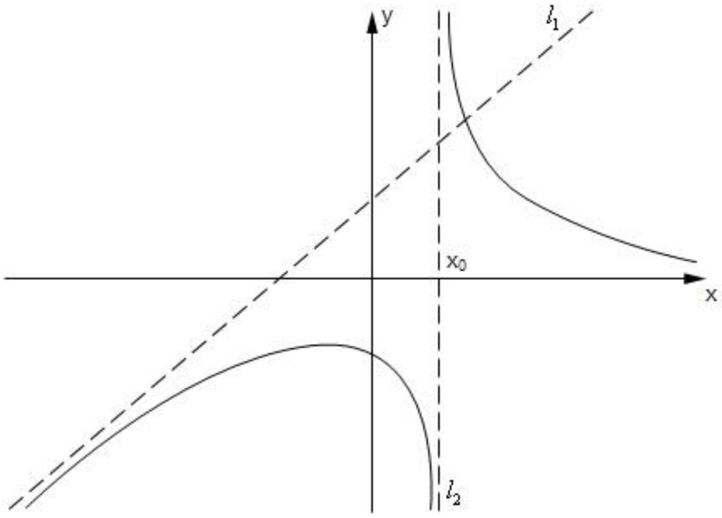


Рис 6.6.3.1

На рисунку l_1 – похила асимптота при $x\to-\infty$, l_2 – вертикальна асимптота при $x\to x_0$, l_3 – вісь абсцис – горизонтальна асимптота при $x\to+\infty$.

Для знаходження вертикальних асимптот визначають її точки розривів другого роду $x_1,\ldots,x_n$ та знаходять границі $\lim\limits_{x\to x_k\pm0} f(x)$, якщо для точки $x=x_k$ хоча б одна з таких границь є нескінченною, то $x=x_k$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$.

Для знаходження похилих та горизонтальних асимптот чинять так: знаходять границю $k_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, якщо вона існує, то границю $b_1=\lim\limits_{x\to-\infty}(f\left(x\right)-k_1x)$, якщо вона також існує, то пряма $y=k_1x+b_1$ є похилою (горизонтальною у випадку $k=0$) асимптотою графіка функції при $x\to-\infty$. Після цього аналогічно розглядають $k_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b_2=\lim\limits_{x\to+\infty}(f\left(x\right)-k_2x)$

Приклад 6.6.3.1. Для функції $y=x+\frac{1}{x}$ зазначимо, перш за все, що вона має точку розриву II-го роду $x=0$, $\lim\limits_{x\to0-0}y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0+0}y=+\infty$, тобто пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою графіка цієї функції.

Перевіримо наявність похилих та горизонтальних асимптоту графіка функції.

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}(y-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0;$$

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}(y-k_2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Таким чином, пряма $y=x$ є асимптотою (похилою) графіка функції при $x\to\pm\infty$.

6.6.4. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка.

Як відомо, в шкільному курсі математики розглядалися методи побудови графіків функцій, що ґрунтуються на перетвореннях графіків основних елементарних функцій. Дуже розповсюдженим (наприклад, при аналізі експериментальних даних, є побудова графіка як лінії, яка проходить через задані точки. Методи диференціального числення дозволяють побудувати графік аналітично заданої функції шляхом використання наступної схеми її дослідження.

1) **Використання виду функції**.
   а) Знаходження області визначення функції, її точок розриву (із визначенням їх типів), інтервалів неперервності.
   б) Дослідження функції на парність-непарність, періодичність.
   в) Знаходження асимптот графіка функції.
   г) Визначення точок перетину графіка з координатними осями.
2) **Використання похідної першого порядку**.
   Знаходження критичних точок першого роду функції та значень функції в цих точках, інтервалів монотонності, точок екстремумів.
3) **Використання похідної другого порядку**.
   Знаходження критичних точок другого роду та значень функції в цих точках, визначення проміжків опуклості графіка вгору та вниз.
4) **Побудова графіка**.
   На координатну площину наносять всі знайдені точки та будують асимптоти графіка, точки з'єднуються із врахуванням наведеної вище наочної таблиці.

Приклад 6.6.4.1. Проведемо повне дослідження та побудуємо графік функції
$y\left(x\right)=xe^{-x^2}$.

1) Використання виду функції.
   а) Функція визначена для всіх $x\in R$, точок розриву немає, а значить неперервна на всій числовій осі.
   б) Функція непарна
   $$y\left(-x\right)=-x\cdot e^{-(-x)^2}=-xe^{-x^2}=-y\left(x\right),$$
   неперіодична.

в) Вертикальних асимптот графік функції не має. Дослідимо функцію на наявність похилих та гармонічних асимптот:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty} \left(xe^{-x^2} - 0\cdot x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0,$$

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{-x^2} - 0\cdot x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x} = 0.$$

Таким чином пряма $y=0$ (вісь абсцис) є асимптотою для графіка даної функції при $x\to\pm\infty$.

Для визначення точок перетину графіка функції з координатними осями покладемо спочатку $x=0$,

$$y(0)=0.$$

Прирівнявши $y=0$ маємо $xe^{-x^2}=0$ отримуємо знову $x=0$. Таким чином єдиною точкою перетину графіка функції з координатними осями є точка $(0,0)$.

2)Використання похідної першого порядку.

Знайдемо похідну функції

$$y' = x'\cdot e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = \left(1-2x^2\right)e^{-x^2} =$$

$$= -2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}.$$

Таким чином при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ похідна від'ємна – функція спадає. Точка $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ - точка локального максимуму,

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

3)Використання похідної другого порядку.

Знайдемо другу похідну даної функції

$$y'' = \left(\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\right)' = \left(1-2x^2\right)' e^{-x^2} + \left(1-2x^2\right)\left(e^{-x^2}\right)' =$$

$$= -4xe^{-x^2} + \left(1-2x^2\right)e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\left(3-2x^2\right)e^{-x^2} = 4x\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)e^{-x^2}.$$

Друга похідна додатна при

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right).$$

На цьому інтервалі графік функції опуклий вниз.
Для

$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

маємо

$$y'' < 0$$

тому графік функції опуклий вгору. Точки

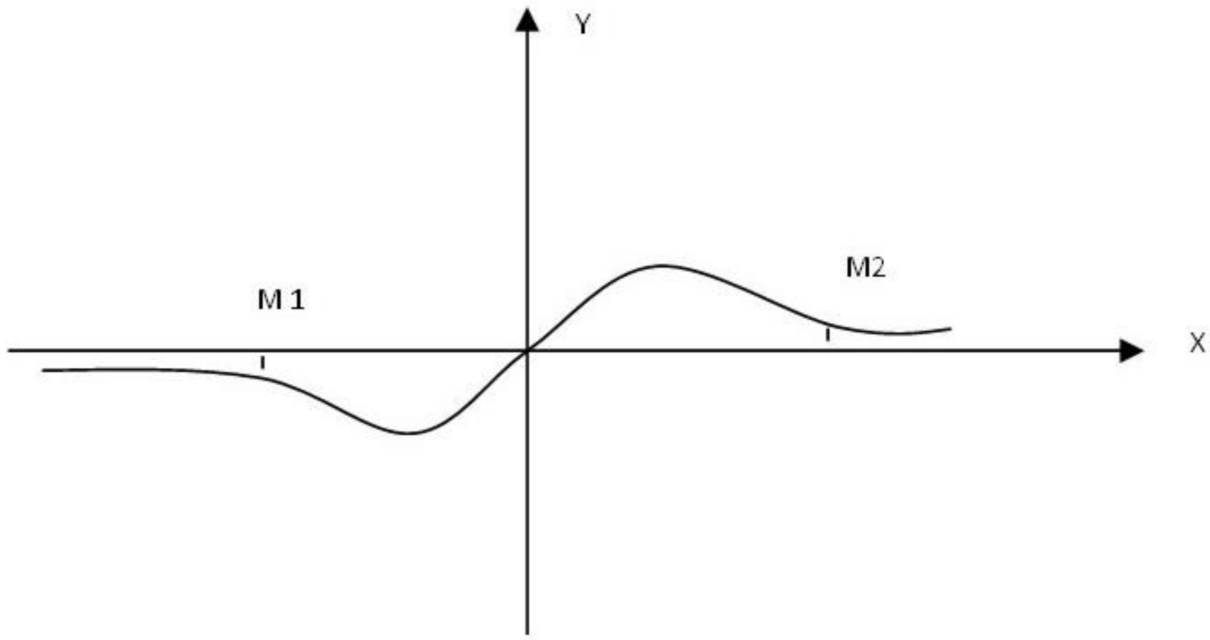
$$M_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$$

та

$$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$$

- точки перегину на графіку функції.

Остаточно маємо



Контрольні запитання

1. У зв'язку з якими задачами виникає поняття похідної?
2. Дайте означення похідної.
3. Що можна сказати про властивості диференційованої функції та її приросту?
4. Що таке диференціал і для чого його використовують?
5. Сформулюйте правила знаходження похідних та диференціалів.
6. Запишіть таблицю похідних.
7. Як визначаються та позначаються похідні та диференціали вищих порядків? Запишіть формулу Лейбніца.
8. Сформулюйте теореми Ролля, Лагранжа, Коші. В чому полягає правило Лопіталя?
9. Як за допомогою похідної встановлюють похідної встановлюють інтервали зростання і спадання функції?

10. Що таке опуклість функції вниз та вгору, точки перегину? Як визначають характер опуклості функції за допомогою другої похідної?
11. Що таке асимптоти графіка функції? Якими вони бувають? Як знаходити їх рівняння?

Тема 7. Функції багатьох змінних

7.1. Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних
7.2. Похідні та диференціали функцій багатьох змінних
7.3. Екстремальні значення функції багатьох змінних
7.4. Геометричні застосування функції багатьох змінних

Для чого треба впроваджувати функції багатьох змінних?Як диференцюють такі функції? Як визначають екстремальні значення цих функцій?Яке геометричне застосування функці багатьох змінних?

На практиці часто доводиться зустрічатись з ситуаціями, коли функціональна залежність вимагає врахування більше ніж одного аргументу. Наприклад, попит на товар, як правило, залежить не тільки від його ціни, але й від ціни конкуруючого товару, добробуту покупців та ін., об'єм випуску продукції визначається вкладеними фінансовими, людськими, технологічними ресурсами. Дослідження таких залежностей вимагає подальшого розвитку нашого математичного апарату – запровадження **функцій багатьох змінних**.

7.1. Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних

Нехай $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$ - елемент n -вимірного простору R^n і кожному такому елементу з деякої множини X поставлено у відповідність певне число u , тоді <u>*кажуть*</u>, що задано **функцію** n **-змінних** $u=f\left(M\right)=f(x_1,\ldots,x_n)$**.**

При цьому $x_1,\ldots,x_n$ - <u>*називаються*</u> **незалежними змінними** або **аргументами**, u **-залежною змінною**, символ f означає **функціональну залежність**, X **-область визначення функції**. Надалі, в основному обмежимось розглядом **функції двох змінних** $u=f(x_1,x_2)$ або $z=f(x,y)$, що дозволяє аналізувати основні властивості функцій багатьох змінних, уникаючи при цьому надмірної громіздкості у міркуваннях. В такому випадку X є підмножина координатної площини Oxy **околом точки** $M_0(x_0,y_0)$ – є круг, для якого ця точка – внутрішня (рис 7.1.1).

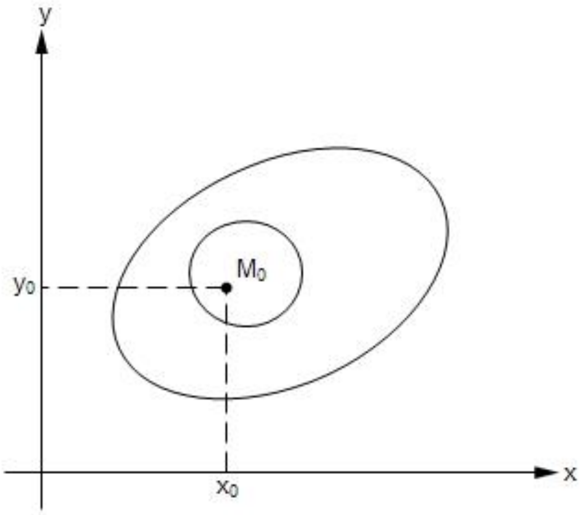


Рис. 7.1.1.

Приклад 7.1.1. Нехай функцію $z = f(x,y)$ задано рівністю $z = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$. Тоді її областю визначення буде множина точок на координатній площині, координати яких задовольняють нерівність $36-4x^2-9y^2 \geq 0$ або, що те ж саме $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \leq 1$. Це є множина точок, обмежених еліпсом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$включно зі самим еліпсом (рис. 7.1.2):

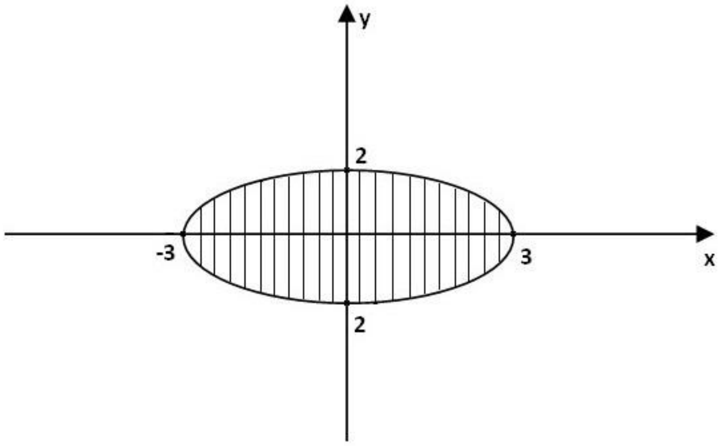


Рис 7.1.2.

Відзначимо, що фіксуючи значення одного з аргументів, ми отримуємо з функції $z = f(x,y)$ дві функції однієї змінної: $f_1(x) = f(x,y_0)$ та $f_2(x) = f(x_0,y)$.

Графіком функції $z = f(x, y)$ *<u>називається</u>* множина точок тривимірного простору $M(x, y, f(x, y))$, або, що те ж саме, поверхня у тривимірному просторі, задана рівнянням $z = f(x, y)$ (рис. 7.1.3).

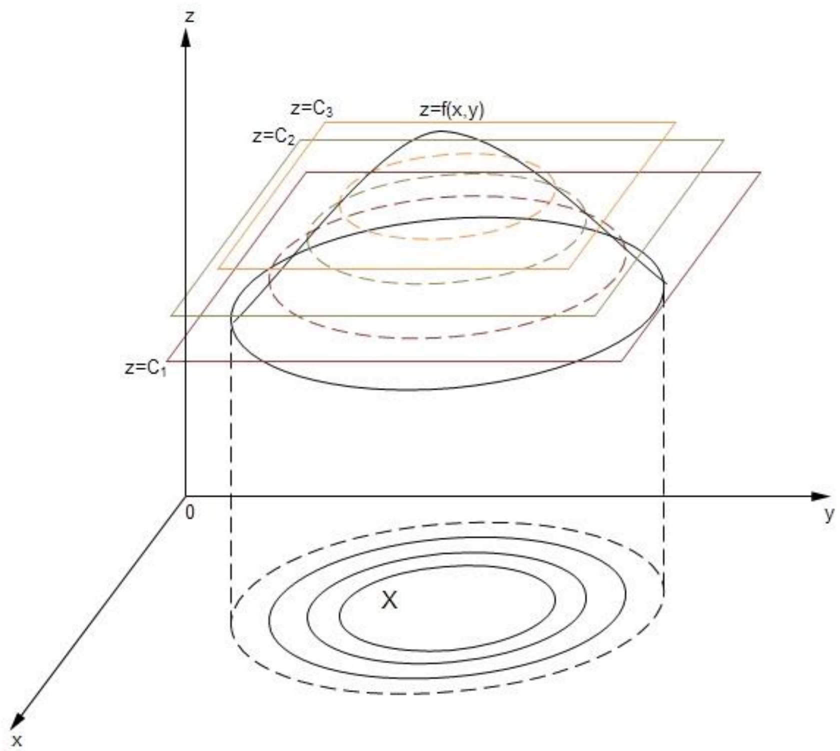


Рис. 7.1.3

Приклад 7.1.2 . Так, для функції $z^2 = x^2 + y^2$ відповідним графіком є параболоїд (рис. 7.1.4).

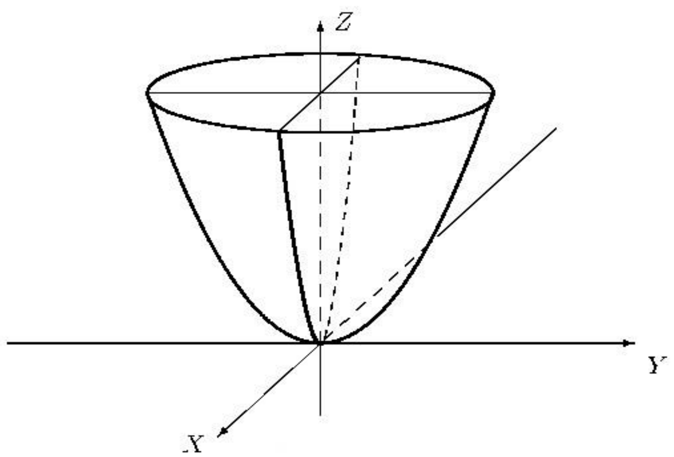


Рис. 7.1.4

Лінією рівняння функції двох змінних $z = f(x,y)$ *називається* множина всіх таких точок на площині, для яких $f\left(x,y\right) = C$ (рис. 7.1.5).

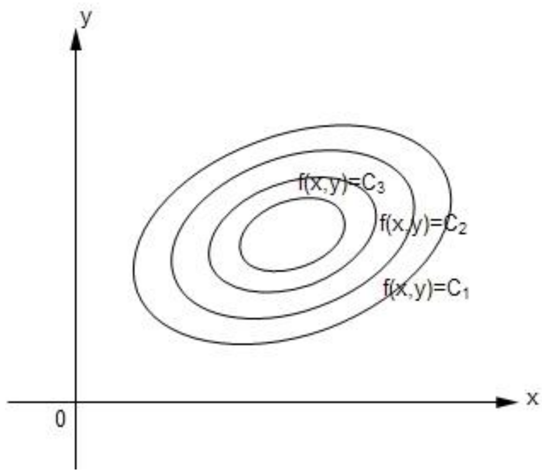


Рис.7.1.5

Прикладами ліній рівняння є ізотерми та ізобари на кліматичних мапах.

Приклад 7.1.3. Для заданої вище функції $z^2 = x^2 + y^2$ лініями рівня $x^2 + y^2 = \text{const}$ є концентричні кола з центром у початку координат.

Число A *називається* **границею функції** $z = f(x,y)$ при $x \to x_0$ та $y \to y_0$ (або при $M(x,y)$ прямує до $M_0(x_0,y_0)$), якщо для $\forall\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при $\left|MM_0\right| < \delta$ виконується нерівність $\left|f\left(x_0,y_0\right) - f(x,y)\right| < \delta$).

Важливо!

Зазначимо, що знаходження таких подвійних границь є істотно складнішою задачею, ніж знаходження границь функції однієї змінної, досить лише відмітити, що може існувати безліч різних границь у заданому напрямі ($M(x,y)$ прямує до $M_0(x_0,y_0)$ вздовж прямої $y = k\left(x - x_0\right) + y_0$, де k може приймати довільні дійсні значення).

Неперервною в точці $M_0(x_0,y_0)$ *називається* функція $z = f(x,y)$, яка:

1) визначена в деякому околі точки M_0 із самою цією точкою включно;

2) має скінченну границю $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$;

3) $f_0(x_0,y_0)=A$.

<u>Назвемо</u> множину на площині Oxy **відкритою**, якщо вона разом з кожною своєю точкою містить деякий її окіл, **замкненою,** якщо вона містить всі свої **межові (граничні) точки** (тобто такі, кожен окіл яких містить як точки множини, так і ті, що множині не належать).

Прикладами множин відкритої та закритої відповідно є відкритий та замкнений круги $x^2+y^2<R^2$ та $x^2+y^2\le R^2$. Легко навести приклади множин, які не є ані відкритими, ані замкненими.

Неперервною у відкритій області *<u>назвемо</u>* функцію $z=f(x,y)$, яка неперервна в усіх її точках, **неперервною у замкненій області**, якщо вона неперервна в усіх її **внутрішніх точках** (тобто таких, які належать області разом з деяким своїм околом) і приймає скінченні значення в межових точках (при чому ці значення є граничними для послідовностей точок, що належать множині).

Відзначимо, що для функцій $z=f(x,y)$, неперервних в замкненій області D справедливі властивості, аналогічні до властивостей функцій $y=f(x)$ неперервних на сегменті $[a;b]$:

Важливо!

функція $f(x,y)$ ***обмежена (*** $m\le f(x,y)\le M$ ***) при*** $(x,y)\in D$ ***причому існують точки*** $M_1(x_1,y_1)$ ***та*** $M_2(x_2,y_2)$ ***такі, що*** $f_1(x_1,y_1)=m$, $f_2(x_2,y_2)=M$ **.**

Приклад 7.1.4. Для функції $z=x+y$ в області $D=\{(x,y)|x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$ найменше значення, очевидно, досягається в точці $M_1(0;0)$, а найбільше в точці $M_2(1;1)$.

7.2. Похідні та диференціали функцій багатьох змінних

Якщо надати аргументам x та y функції $z = f(x,y)$ приростів Δx та Δy відповідно, то отримаємо **частинні прирости** цієї функції:

$$\Delta_x z = f\left(x + \Delta x, y\right) - f(x,y);\ \Delta_y z = f\left(x, y + \Delta y\right) - f(x,y);$$

та її **повний приріст**

$$\Delta z = f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f(x,y).$$

Частинними похідними такої функції *називають* границі відношень її частинних приростів до приростів відповідних аргументів:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

Для таких частинних похідних використовуються, також, позначення: f_x', z_x', f_y', $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, z_y'. З частинними похідними функції тісно пов'язані її **частинні диференціанали** $d_x f = f_x' dx$, $d_y f = f_y' dy$, та її **повний диференціал** $df = f_x' dx + f_y' dy$.

Аналогічно до функції однієї змінної, **повний диференціал є головною, лінійною відносно приростів аргументів частиною повного приросту функції**:

Якщо повний приріст функції може бути представлений у вигляді $\Delta z = df + \alpha dx + \beta dy$, де α, β - нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то функція *називається* **диференційовною.**

Необхідною умовою диференційовності функції є існування її частинних похідних.

Достатня умова диференційовності функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ полягає в тому, що її частинні похідні мають існувати в деякому околі цієї точки і бути неперервними в самій цій точці.

При знаходженні частинної похідної функції по одному з її аргументів решту аргументів вважають сталими величинами і використовують звичайні правила диференціювання та таблицю похідних.

Приклад 7.2.1. Знайдемо частинні похідні функції $z = x^2 + 2y^2 + x - y + 1$. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2\right)_x' + 2\left(y^2\right)_x' + \left(x\right)_x' - \left(y\right)_x' + \left(1\right)_x' = 2x + 0 + 1 - 0 + 0 = 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2\right)_y' + 2\left(y^2\right)_y' + \left(x\right)_y' - \left(y\right)_y' + \left(1\right)_y' = 0 + 2 \cdot 2y + 0 - 1 + 0 = 4y - 1.$$

Приклад 7.2.2. Знайдемо частинні похідні функції $z = y^x$. Зауважимо, що при знаходженні частинної похідної по x функція розглядається як показникові і, відповідно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y.$$

При диференціюванні ж по y функція являє собою степеневу і тому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \cdot y^{x-1}.$$

Специфічним є **правило диференціювання складеної функції багатьох змінних**, яке ми розглянемо, знову ж таки, на прикладі функції двох змінних $z = f(x, y)$:

1) Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$ то $\frac{dz}{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial f} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial f}$;

2) Якщо $x = x(u, v)$, то $y = y(u, v)$, $\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

Приклад 7.2.3. Знайдемо частинні похідні функції $z = x + y$, якщо $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t$. В цьому випадку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \frac{dx}{dt} = 2\cos t \cdot (-\sin t), \frac{dy}{dt} = 2\sin t \cdot \cos t.$$

Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 1 \cdot 2\cos t \cdot (-\sin t) + 1 \cdot 2\sin t \cdot \cos t = 0.$$

Приклад 7.2.4. Знайдемо частинні похідні функції $z = x^2 + y^2$, якщо $x = u + v, y = u - v$. Тут

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,,\frac{\partial z}{\partial y}=2y\,,\frac{\partial x}{\partial u}=1,\frac{\partial x}{\partial v}=1,\frac{\partial y}{\partial u}=1,\frac{\partial y}{\partial v}=-1.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=2x\cdot 1+2y\cdot 1=2(u+v)+2(u-v)=4u\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=2x\cdot 1+2y\cdot(-1)=2(u+v)-2(u-v)=4v\,.$$

Розглянуті вище частинні похідні *називають* також **частинними похідними першого порядку**. Аналогічно до попереднього, частинні похідні вищих порядків визначаються як похідні похідних нижчих порядків. Наприклад, для функції $z=f(x,y)$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Якщо для похідної вищого порядку послідовності диференціювання виконуються по різних аргументах то вона *називається* **мішаною**. Для неперервних мішаних похідних справедлива теорема Шварца: **значення мішаної похідної залежить від порядку диференціювання.**

Так, наприклад,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

якщо ці похідні неперервні.

Приклад 7.2.5. Знайдемо частинні похідні другого порядку функції $z=y^x$

$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y\,,\ \frac{\partial z}{\partial x}=x\cdot y^{x-1}$, тому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(y^x\ln y\right)_x^{'}=y^x\ln^2 y \qquad ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(y^x\ln y\right)_y^{'}=\left(y^x\right)_y^{'}\ln y+y^x\left(\ln y\right)_y^{'}=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x \cdot y^{x-1}\right)'_y = x \cdot (x-1) \cdot y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x \cdot y^{x-1}\right)'_x = \left(x\right)'_x \cdot y^{x-1} + x \cdot \left(y^{x-1}\right)'_x = y^{x-1} + xy^{x-1} \cdot \ln y = y^{x-1}(1 + x\ln y).$$

Очевидно, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

7.3. Екстремальні значення функції багатьох змінних

Функція багатьох змінних $u = f(M)$ має **максимум (мінімум)** в точці M_0 якщо існує такий окіл M (сукупність точок, відстань яких до M_0 менша за певне додатне число a), для всіх точок M якого виконується нерівність $f\left(M\right) < \left(>\right) f(M_0)$ при M відмінному від M_0.

Приклад 7.3.1. Розглядаючи функцію $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y$, відзначаємо, що $z = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2$. Тобто $z \geq 2$ при всіх значеннях x та y, причому найменше значення функції $z = -2$ досягається при $x = -1,\ y = 1$.

Екстремумами <u>*називають*</u> максимуми та мінімуми функції багатьох змінних її, а точки, в яких вони мають місце – **точками екстремуму**.

Критичними точкам для функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ <u>*називають*</u> точки, в яких всі її частинні похідні рівні нулю або не існують.

Приклад 7.3.2. Знайдемо стаціонарні точки функції з попереднього прикладу $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Таким чином, точка $M(-1;1)$ є єдиною стаціонарною точкою даної функції.

Приклад 7.3.3. Знайдемо стаціонарні точки функції $z = x^2 - y^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким чином, точка $M(0;0)$ є єдиною стаціонарною точкою даної функції.

Необхідна умова існування екстремуму функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ полягає в тому, що точка «підозріла на екстремум» обов'язково повинна бути критичною.

Таким чином, при знаходженні екстремумів функції багатьох змінних перш за все визначають її критичні точки. Проте визначення того, чи є критична точка точкою екстремуму, і якщо є – то якого саме, виявляється більш складною процедурою, ніж для функції однієї змінної.

Наведемо **достатні умови екстремуму для функції двох змінних**:

Теорема

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - критична точка функції $z = f(x,y)$, в деякому околі якої її другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ неперервні, якщо $a_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0), a_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0), a_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$ то:

1) ***При $\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ a_{11} > 0 \end{cases}$, точка M_0 є точкою максимуму;***
2) ***При $\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ a_{11} < 0 \end{cases}$, точка M_0 є точкою мінімуму;***
3) ***При $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ точка M_0 не є точкою екстремуму;***
4) ***В інших випадках функція вимагає поглибленого дослідження, на методах якого ми зупинятись не будемо.***

Приклад 7.3.4. Дослідимо стаціонарну точку $M(-1;1)$ функції $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y$. Оскільки

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, в точці $M(-1;1)$ дана функція має локальний мінімум. В той же час, оскільки функція має неперервні похідні, то цей локальний мінімум є також глобальним, що було показано у прикладі 10.

Приклад 7.3.5. Дослідимо стаціонарну точку $M(0;0)$ функції $z = x^2 - y^2$. Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \ ,$$

то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

і відповідний визначник

$$\Delta == \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Отже, точка $M(0;0)$ не є екстремальною. І, взагалі, не має точок екстремуму.

Для функції $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ питання визначення характеру критичної точки $M_0(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$ вимагає дослідження знаковизначеності квадратичної форми з матрицею $\Delta=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, де a_{ij} є значення похідної $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}$ в точці M_0. Якщо така квадратична форма виявляється додатновизначеною, то маємо мінімум, від'ємновизначеною – максимум, знаконевизначеною – екстремуму немає.

Специфічним для функції багатьох змінних є поняття **умовного екстремуму**, яке виявляється дуже важливим в економічних дослідженнях.

Нехай, наприклад, **аргументи функції** $z=f(x,y)$ **задовольняють умову** $\varphi(x,y)=0$, і стоїть задача знаходження **умовних екстремумів,** тобто таких точок, що належать лінії l (з рівняння $\varphi(x,y)=0$), в яких значення функції $f(x,y)$ більші (менші) ніж в оточуючих точках цієї лінії. В найпростіших випадках вдається виразити з рівності $\varphi(x,y)=0$ аргумент y через аргумент $x(y=y(x))$ і звести, таким чином задачу до знаходження екстремумів функції однієї змінної $u=f(x,y(x))$.

Приклад 7.3.6. Якщо постає задача пошуку екстремальних значень функції $z=x+y$ на колі $x^2+y^2=1$, то це і є задача пошуку умовного екстремуму вказаної функції за наявності рівняння зв'язку (між невідомими) $x^2+y^2=1$.

В інших випадках користуються **методом Лагранжа знаходження умовного екстремуму**:

Алгоритм

1) ***Записується функція Лагранжа*** $l(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;
2) ***Визначаються критичні точки функції Лагранжа з системи рівностей***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

3) ***Обчислюється значення визначника*** $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix}$ ***в кожній з критичних точок, якщо значення додатне – маємо точку максимуму, якщо від'ємне – мінімуму.***

Приклад 7.3.7. Визначимо умовні екстремуми функції $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$. Рівняння зв'язку може бути переписано у вигляді $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Таким чином, функція Лагранжа матиме вигляд:

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Знайдемо її стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda \cdot 2y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь маємо $x = -\dfrac{1}{2\lambda}$, $y = -\dfrac{1}{2\lambda}$, $\dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$, тобто

$2\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Дослідимо отримані таким чином стаціонарні точки $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ та $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Оскільки $\varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y$, $L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = L''_{yx} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$, то визначник Δ має вигляд:

$$\Delta(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -16\lambda xy.$$

У точці M_1 $\Delta(M_1) = 4\sqrt{2}$, отже в цій точці має місце умовний максимум $z_{\max} = \sqrt{2}$, а в точці M_2 $\Delta(M_2) = -4\sqrt{2}$ - умовний мінімум $z_{\min} = -\sqrt{2}$.

Для знаходження **найбільшого та найменшого значень функції в замкненій області функції в замкненій області** визначають її критичні точки, вибирають з них ті, які належать області та обчислюють значення функції в цих точках, після чого знаходять найменше та найбільше значення функції на лінії, що обмежує область. З отриманих значень вибирають найбільше та найменше.

Приклад 7.3.8. Знайдемо найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у замкненій області, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0$. Зобразимо спершу цю область на координатній площині(рис. 7.3.1):

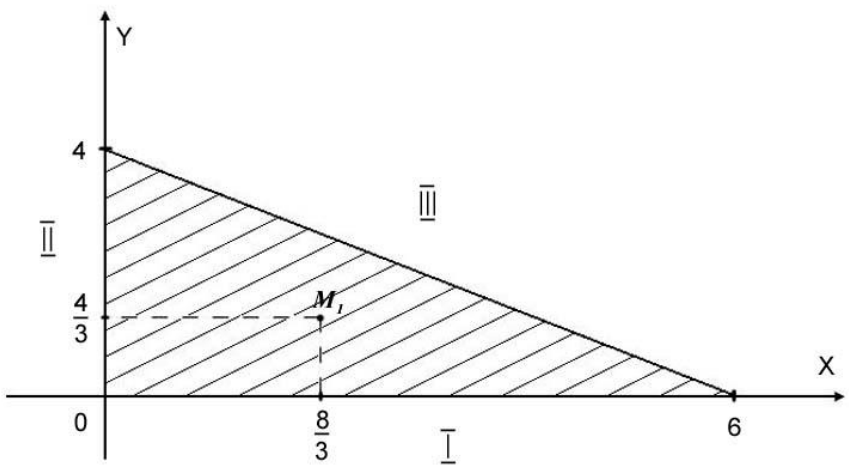


Рис 7.3.1

Знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0. \end{cases}$$

Розв’язками цієї системи є $x = {}^8\!/_3,\ y = {}^4\!/_3$. Отже, єдина стаціонарна точка це $M_1\left({}^8\!/_3; {}^4\!/_3\right)$ і вона належить області, $z(M_1) = -{}^{16}\!/_3$.

Межа області складається з трьох відрізків: I, II, III. Дослідимо функцію послідовно на кожному з них.

I. На цьому відрізку $y = 0,\ x \in [0;6]$, отже, досліджувана функція має вигляд $z_I = x^2 - 4x$. Проведемо дослідження як для функції однієї змінної:

$$z_I' = 2x - 4 = 0,\ x = 2.$$

Обчислимо значення на кінцях інтервалу $[0;6]$- $z_I(0) = 0,\ z_I(2) = 4,\ z_I(6) = 12$. Таким чином, при знаходженні найменшого та найбільшого значень функції в області треба враховувати її значення у точках $M_2(0;0),\ M_3(2;0),\ M_4(6;0)$-

$$z_I(M_2) = 0,\ z_I(M_3) = 4,\ z_I(M_4) = 12.$$

II. Тут $x = 0,\ y \in [0;4],\ z_{II} = y^2$. Оскільки $z_{II}' = 2y$, то маємо обчислити $z_{II}(0),\ z_{II}(4)$. Враховуючи , що значення функції в точці $M_2(0;0)$ вже обчислено,запровадимо лише одну нову точку $M_5(0;4), z_{II}(M_5) = 16.$

III. На цьому відрізку змінні пов’язані співвідношенням $2x + 3y = 12 = 0$, або, що те ж саме, $y = 4 - \dfrac{2}{3}x,\ z_{III} = \dfrac{19}{9}x^2 - \dfrac{40}{3}x + 16.$ Маємо

$$z_{III}' = \frac{38}{9}x - \frac{40}{3},\quad z_{III}' = 0,\ x = \frac{60}{19}.$$

Враховуючи, що на кінцях цього відрізку , а саме, у точках M_4, M_5 значення функції вже обчислено, залишається врахувати, що у точці $M_6\left(\dfrac{60}{19}; \dfrac{36}{19}\right), z_{III}(M_6) = -\dfrac{96}{19}.$ Порівнюючи отримані значення функції у шести «підозрілих точках», бачимо, що найменшим значенням функції в області є $-\dfrac{16}{3}$, яке досягається у точці $M_1\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3}\right)$, найбільшим-16, яке досягається у точці $M_5\left(0;4\right)$.

7.4. Геометричні застосування функції багатьох змінних

Раніше розглядалися, серед інших, параметричні рівняння прямої у просторі. Виявляється, що взагалі просторову лінію можна задавати системою рівностей $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ які з точки зору функціональних залежностей визначають **вектор-функцію скалярного аргументу** – кожному значенню аргумента t ставиться у відповідність вектор $\vec{r}\left(t\right)=\{x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\}$, при цьому лінія <u>*називається*</u> **годографом** функції. Будемо називати похідною $\vec{r}\,'(t)$ такої функції вектор $\vec{r}\,'\left(t\right)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\{x'\left(t\right),y'\left(t\right),z'\left(t\right)\}$.

Якщо дотичну до годографа визначати, аналогічно до попереднього, як граничне положення хорди лінії, то її рівняння має вигляд $\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$, де t_0 - значення аргумента, яке відповідає точці, в якій будується дотична, сама точка має координати $M_0\left(x\left(t_0\right),y(t_0\right),z(t_0))$, напрямний вектор дотичної – $l=\{x'\left(t\right),y'\left(t\right),z'\left(t\right)\}$.

Н**ормальною площиною** <u>*називається*</u> площина, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно дотичній, відповідно, має рівняння

$$x'\left(t_0\right)\left(x-x\left(t_0\right)\right)+y'\left(t_0\right)\left(y-y\left(t_0\right)\right)+z'\left(t_0\right)(z-z\left(t_0\right)) \ .$$

Приклад 7.4.1. Знайдемо дотичну пряму та нормальну площину до годографа вектор-функції $\vec{r}\,'=\left\{\cos\pi t,\sin\pi t,t^2\right\}$ в точці, що відповідає $t_0=1$. Маємо

$$x(t_0) = -1,\ y(t_0) = -1, z(t_0) = -1.$$

Далі

$$x'(t) = -\pi \sin \pi t; \quad x'(t_0) = 0,$$
$$y'(t) = -\pi \sin \pi t; \quad y'(t_0) = -\pi,$$
$$z'(t) = 2t; \qquad z'(t_0) = 2.$$

Таким чином, рівняння дотичної

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y}{-\pi} = \frac{z-1}{2};$$

Рівняння нормальної площини

$$0(x+1) - \pi y + 2(z-1) = 0,$$

або

$$\pi y - 2z + 2 = 0.$$

Функції $z = f(x, y)$ та $u = f(x, y, z)$ можна розглядати як **скалярні поля** (з кожною точкою області площини або простору пов'язана скалярна величина – число), якщо ж з кожною точкою відповідних областей пов'язаний вектор, то *кажуть* про **векторне поле**. У економічних дослідженнях часто виявляються корисними такі характеристики скалярних полів як

– **похідна за напрямом** $\vec{l}$ поля:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f\left(x + tl_x y+, y + tl_y\right) - f(x, y)}{t};$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{t \to 0+0} \frac{F\left(x + tl_x, y + tl_y, z + tl_z\right) - F(x, y, z)}{t},$$

де $l = \{l_x; l_y\}$ - одиничний вектор відповідно на площині або у просторі;

– **градієнт поля:** $gradz = \{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\}$, $gradu = \{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\}$.

Похідна за напрямом може розглядатись як швидкість як зміни поля при русі, у напрямі, визначеному вектором $\bar{l}$ (частинні похідні, наприклад, є швидкостями зміни поля при русі у напрямі відповідних координатних осей). Якщо запровадити до розгляду напрямні косинуси векторів $\bar{l}$ для плоского поля $\vec{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$ та просторового поля $\vec{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, то для відповідних похідних напрямом матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta, \frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Важливо!

В той же час напрям градієнта поля вказує на той напрям, де воно змінюється найшвидше, а величина (модуль) градієнта співпадає зі значенням цієї найбільшої швидкості зміни.

Приклад 7.4.2. Знайдемо похідну функції (скалярного поля) $z = x^2 + 2y^2 - 3xy$ за напрямом вектора $\vec{l} = \{6;8\}$ у точці $M_0(1;1)$. Визначимо спочатку частинні похідні функції у вказаній точці

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 3x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 1.$$

Для знаходження похідної за напрямом вектора $\vec{l}$ обчислимо його напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\cos\beta = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Таким чином,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta = -1\cdot\frac{3}{5} + -1\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 7.4.3. Знайдемо градієнт скалярного поля $u = x^2 y - xy^2 z + z^3$ в точці $M_0(-1;1;1)$. Обчисливши частинні похідні функції $u(x,y,z)$, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^2 z, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\left(M_0\right) = -3;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 2xyz, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\left(M_0\right) = 3; \quad .$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -xy^2 + 3z^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\left(M_0\right) = 4.$$

Таким чином, вектор градієнта функції u у точці M_0 є

$$grad u\Big|_{M_0} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} = \{-3;3;4\}.$$

Як вказувалось раніше, поверхня $z = f(x,y)$ може розглядатись як графік відповідної функції двох змінних. **Неявне задавання** такої функції має вигляд $F\left(x,y,z\right) = 0$.

Розглянемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на поверхні. Через цю точку проходить безліч ліній, які лежать на поверхні, для кожної з яких можна побудувати дотичну пряму та нормальну площину. Геометричне місце всіх таких дотичних прямих утворює площину, яка <u>*називається*</u> **дотичною площиною до поверхні у точці** M_0. пряма, яку містить кожна з нормальних площин, <u>*називається*</u> **нормаллю до поверхні в точці** M_0**.**

Рівняння дотичної площини:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(M_0\right)\left(x - x_0\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(M_0\right)\left(y - y_0\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(M_0\right)\left(z - z_0\right) = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\left(M_0\right)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(M_0\right)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(M_0\right)}$$

Приклад 7.4.4. Знайдемо дотичну площину та нормаль до поверхні $z = x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 2y$ в точці $M_0(2;1;-2)$. Запишемо рівняння поверхні у вигляді:

$$F(x, y, z) = z - x^2 + 4xy - 4y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 4y + 2,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(M_0\right) = 2;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x - 8y - 2,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(M_0\right) = -2;$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1.$$

Таким чином, рівняння дотичної площини до поверхні в даній точці є

$$2(x-2) - 2(y-1) + 1(z+2) = 0,$$

або

$$2x - 2y + z = 0.$$

Контрольні запитання

1. В яких задачах використовуються функції багатьох змінних? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте означення області визначення, границі та неперервності функції багатьох змінних. Що таке лінії рівня та графік для функції двох змінних?
3. Що таке частинні похідні функції багатьох змінних? За якими правилами їх знаходять?
4. Які геометричні застосування мають частинні похідні функції трьох змінних? Запишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.

5. Що таке частинні диференціали функції? Що таке повний диференціал і яке його практичне значення?

6. Як знаходять частинні похідні складеної функції багатьох змінних?

7. Що таке екстремуми функції багатьох змінних? Як визначають стаціонарні точки та точки екстремумів таких функцій?

8. Що таке умовний екстремум функції багатьох змінних і в чому полягає метод Лагранжа знаходження такого екстремуму?

Тема 8. Інтегральне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл

8.1. Первісні та невизначений інтеграл функції, їх властивості
8.2. Таблиця основних інтегралів. Основні правила та методи інтегрування
8.3. Інтегрування дробово-раціональних функцій
8.4. Інтегрування деяких тригонометричних та ірраціональних функцій
8.5. Інтеграли, які «не беруться»

Що таке первісна функція? Що таке невизначений інтеграл? Як і за якими правилами його знаходять? Як інтегрують певні класи елементарних функцій? За якими формулами наближено обчислюють визначені інтеграли? Як і для чого застосовують комплексні числа?

Традиційним для математики є підхід, при якому разом із запровадженням деякої дії (операції) розглядається обернена (зворотна) до неї. Так, разом із операцією диференціювання функцій розглядається операція їх інтегрування.

8.1. Первісні та невизначений інтеграл функції, їх властивості

Первісною будемо <u>*називати*</u> функцію $F(x)$ для заданої функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Зауважимо, що з правил диференціювання випливає

$$\left[F(x)+c\right]' = f(x).$$

Більше того, справедлива **основна властивість первісних**: будь-які дві первісні для заданої функції відрізняються лише сталим доданком. Дійсно, якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні $f(x)$, то $\left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=0$, тобто $F_1(x)-F_2(x)$ – стала. Таким чином, для знаходження всієї множини первісних функцій $f(x)$ досить знайти одну з них і додати до неї **довільну сталу.**

Невизначеним інтегралом <u>*називається*</u> **с**укупність всіх первісних функції $f(x)$ і його позначають $\int f(x)dx$.

Як випливає з попереднього,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – деяка (довільна) первісна $f(x)$, C – довільна стала.

Знак $\int$ (стилізована літера S) *називається* **знаком інтеграла**, $f(x)$ – **підінтегральною функцією**, $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, x - **змінною інтегрування**, а процес знаходження інтеграла – **інтегруванням**. Зазначимо, що **інтеграл існує, якщо $f(x)$ - неперервна функція**.

Основними властивостями невизначеного інтеграла є наступні:

1) **Диференціал інтеграла є підінтегральний вираз**.

Дійсно, якщо за означенням $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, то $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2) **Невизначений диференціал від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої.**

Дійсно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$.

8.2. Таблиця основних інтегралів. Основні правила та методи інтегрування

Аналогічно до того, як це робилося для похідних, розглянемо таблицю інтегралів деяких основних функцій (сенс вибору u як змінної інтегрування буде пояснений пізніше).

1. $\int 0du = C$.
2. $\int du = u + C$.
3. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.
5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$.
6. $\int e^u du = e^u + C$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
8. $\int \cos u du = \sin u + C$.
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C$.

13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$ – «високий логарифм».

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a} \right| + C$ - «довгий логарифм».

15. $\int \frac{udu}{u^2 + a} = \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + a \right| + C$ - «корисний логарифм».

Основні правила інтегрування випливають з основних правил диференціювання і полягають у наступному:

Важливо!

1) ***Сталий множник виноситься за знак інтеграла.***
2) ***Інтеграл алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів.***

З основних методів інтегрування зазвичай виділяють три.

А. Метод розкладу

Цей метод ґрунтується на другому правилі інтегрування і полягає в тому, що підінтегральна функція представляється у вигляді суми функцій більш зручних для інтегрування, ніж вихідна. Надалі цей метод буде використаний для інтегрування **дробово-раціональних функцій**.

Приклад 8.2.1.

$$\int (x^2 + \sin x + e^x) dx = \int x^2 dx + \int \sin x dx + \int e^x dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + e^x + C.$$

Б. Метод заміни змінної (підстановки)

З правила диференціювання складної функцій випливає інваріантність форми першого диференціалу:

якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$,то

$$dy = f'(u)du = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

таким чином, якщо $\int f(u)du = F(u) + c$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c.$$

(легко перевірити, знаходячи диференціали обох частин рівності).

Це означає, що при знаходженні інтегралів можливе використання наступних прийомів:

Важливо!

1) ***здійснити підстановку*** $x = \varphi(t)$***, в результаті чого*** $\int f(x)dx$ ***перетвориться на*** $\int f(x(t))x'(t)dt$ ***, причому останній може виявитись більш простим;***
2) ***зробити заміну змінної*** $t = \varphi(x)$***, що знову ж таки може привести до більш зручного інтегралу.***

Приклад 8.2.2.

$$\int \sqrt{x+1}dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 - 1 \\ dx = (t^2-1)'dt = 2tdt \\ t = \sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t^2 - 1 + 1}2tdt = 2\int t^2 dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Приклад 8.2.3.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \left| \begin{matrix} t = x + 1 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = arctgt + C = arctg(x+1) + C$$

Відзначимо, що

Важливо!

1) ***при остаточному записі відповіді (знайденого інтегралу) слід обов'язково повернутись до первинної змінної;***
2) ***надалі буде вивчатись, якими підстановками (замінами змінної) слід користуватись для певних конкретних підінтегральних функцій;***
3) ***використання в таблиці основних інтегралів змінної*** u ***дозволяє істотно розширити сферу її можливого використання, оскільки можемо скористатись рівністю*** $u=\varphi(x)$, ***де*** $\varphi(x)$ ***– довільна диференційована функція.***

В. Метод інтегрування частинами

Нагадаємо, що справедливе співвідношення $d(uv)=du\cdot v+u\cdot dv$, або, що те ж саме, $u\cdot dv=d(uv)-v\cdot du$. Знаходячи інтеграли лівої та правої частин останньої рівності і використавши другу основну властивість невизначеного інтегралу, маємо

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu=uv-\int vdu .$$

Рівність $\int udv=uv-\int vdu$ *називається* **формулою інтегрування частинами** і дає можливість обчислювати деякі інтеграли, користуючись представленням їх підінтегрального виразу $f(x)$ у вигляді $u(x)v'(x)dx=u(x)dv(x)$, що дозволяє перейти до інтегралу $\int v(x)u'(x)dx=\int v(x)du(x)$.

Такий метод знаходження інтегралів використовується, в основному, в трьох варіантах.

1. **Зниження степеня**.
   Підінтегральна функція має вигляд $x^n f_1(x)$, де $f_1(x)$ – $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$ або $a^{\alpha x}$, n – натуральне число. Вибір x^n за функцію $u(x)$ (і, відповідно, $f_1(x)dx$ за dv) дозволяє, не змінюючи істотно $f_1(x)$, знизити степінь n до $(n-1)$. Наступні інтегрування частинами зводять цей степінь до нуля, що дозволяє знайти відповідний інтеграл.

Приклад 8.2.4.

$$\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin xdx \\ du = dx & v = \int \sin xdx = -\cos x + C \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2. **«Алгебризація».**

Нехай знову ж таки підінтегральна функція є $x^n f_1(x)$, але $f_1(x)$ $-\mathrm{arctg}x$, $\mathrm{arcctg}x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\log_a x$. В такому випадку $u = f_1(x)$, що дозволяє перейти від трансцендентної функції до алгебраїчної спростивши таким чином обчислення інтеграла.

Приклад 8.2.5.

$$\int x^2 \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = x^2dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \int x^2dx = \dfrac{x^3}{3} + C \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

3. **«Інтегрування по колу».**

Такий метод інтегрування застосовується, коли підінтегральна функція є $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x)$ (можливі ще декілька випадків). Двічі проінтегрувавши частинами, отримуємо такий самий інтеграл, який мали спочатку, що дозволяє знайти його з отриманого рівняння.

Приклад 8.2.6.

$$I = \int e^x \cos xdx = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \cos xdx \\ du = e^xdx & v = \int \cos xdx = \sin x + C \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \sin xdx \\ du = e^xdx & v = \int \sin xdx = -\cos x + C \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \sin x - (e^x(-\cos x) + \int e^x \cos xdx) = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

Звідки

$$2I = e^x(\sin x + \cos x)\text{, тобто } I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

8.3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дробово-раціональною(або **раціональним дробом**) *<u>називається</u>* функція $f(x)$, яка має вигляд

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_0$$

– многочлени степенів n та m відповідно.

Такий раціональний дріб *<u>називається</u>* **правильним**, якщо $n < m$ і **неправильним** в протилежному випадку ($n \geq m$). Неправильний дріб можна представити у вигляді $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$, де $M_{n-m}(x)$ – многочлен степеня $(n-m)$ – **ціла частина дробу**, а $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб – **дробова частина** неправильного дробу. Вони можуть бути знайдені при діленні чисельника $P_n(x)$ на знаменник $Q_m(x)$: $M_{n-m}(x)$ як частка, $R(x)$ – як остача від ділення.

Найпростішими (або **елементарними**) **раціональними дробами** *<u>називаються</u>* функції вигляду :

$$\frac{A}{x-\alpha} \text{ (I тип), } \frac{B}{(x-\beta)^k},\ k = 2,3,\ldots \text{ (II тип),}$$

$$\frac{Cx+D}{x^2+px+q},\ p^2 - 4q < 0 \text{ (III тип),}$$

$$\frac{Ex+F}{(x^2+rx+s)^l},\ r^2 - 4s < 0,\ l = 2,3,\ldots \text{ (IV тип).}$$

Для I типу

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln\left|x-\alpha\right| + C,$$

Приклад 8.3.1.

$$\int \frac{2}{x-1}dx = 2\ln\left|x-1\right| + C$$

Для II типу

$$\int \frac{B}{(x-\beta)^k}dx = \frac{B}{1-k}(x-\beta)^{1-k} + C.$$

Приклад 8.3.2.

$$\int \frac{3}{(x-1)^4}dx = \frac{3}{1-4}(x-1)^{1-4} + C = -\frac{1}{(x-1)^3} + C.$$

Для III типу

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx = \int \frac{C\left(x+\dfrac{p}{2}\right)+D_1}{(x+\dfrac{p}{2})^2+q_1^2}dx = \frac{C}{2}\ln\left|(x+\frac{p}{2})^2+q_1^2\right| + \frac{D_1}{q_1}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{q_1} + c.$$

Приклад 8.3.3.

$$\int \frac{2x+2}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2\left(x-1\right)+4}{(x-1)^2+4}dx = \int \frac{2\left(x-1\right)}{(x-1)^2+4}dx + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} =$$

$$= \ln\left|(x-1)^2+4\right| + \frac{4}{\sqrt{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{4}} + C = \ln(x^2-2x+5) + 2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Інтегрування найпростішого дробу IV типу знаходиться шляхом використання рекурентних формул, які ведуть до інтеграла від найпростішого дробу III типу.

Приклад 8.3.4.

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{2\left(x+1\right)+1}{((x+1)^2+1)^2}dx = \begin{vmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{2t+1}{(t^2+1)^2}dt =$$

$$= \int \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt + \int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = I_1 + I_2.$$

Ми означили два останніх інтеграли I_1 та I_2. Далі

$$I_1 = \int \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} + C = -\frac{1}{x^2+2x+2} + C.$$

$$I_2 = \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} + \int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^2} = arctgt - \frac{1}{2}\int \frac{t\cdot 2tdt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \begin{vmatrix} u=t \quad dv = \dfrac{2tdt}{(t^2+1)^2} \\ du=dt\ v = \displaystyle\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{t^2+1} + C \end{vmatrix} = arctgt - \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) + C =$$

$$= arctgt + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctg(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C.$$

Таким чином, остаточно

$$I = -\frac{1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}arctg(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C.$$

Будь-який правильний раціональний дріб може бути представлений у вигляді суми елементарних (причому цей розклад єдиний з точністю до порядку доданків) відповідно до розкладу на множники його знаменника (детальніше це питання розглянуте в п. VI. 11.).

При цьому коефіцієнти A, B, C, D, E, F можуть бути знайдені, наприклад, за допомогою **методу невизначених коефіцієнтів**.

Приклад 8.3.5.

Нехай $f(x) = \dfrac{2x^2+26}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. Тоді маємо наступний розклад цього раціонального дробу на елементарні.

$$\frac{2x^2+26}{(x+1)(x+3)(x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}.$$

Зводячи в правій частині записаної рівності дроби до спільного знаменника, та прирівнюючи чисельники дробів зліва та справа (в силу однаковості знаменників), маємо

$$2x^2+26=A(x+3)(x+5)+B(x+1)(x+5)+C(x+1)(x+3).$$

Оскільки ця рівність має бути тотожною(справджуватись при всіх x), то підставимо в неї послідовно $x=-1,\quad x=-3,\quad x=-5$. Маємо

при $x=-1\;28=8A\;A=7/2$

при $x=-3\;44=-4B\;B=-11$

при $x=-5\;76=8C\;C=9/2$.

Таким чином, $f(x)=\frac{7/2}{x+1}-\frac{11}{x+3}+\frac{9/2}{x+5}$,

а інтеграл $\int\frac{2x^2+26}{(x+1)(x+3)(x+5)}dx=\frac{7}{2}\ln|x+1|-11\ln|x+3|+\frac{9}{2}\ln|x+5|+C.$

Приклад 8.3.6.

Нехай $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+x+2}{x^3+x^2}$. Даний раціональний дріб є неправильним (степені чисельника та знаменника рівні), тому вділимо спочатку його цілу частину:

$$\frac{2x^3+3x^2+x+2}{x^3+x^2}=\frac{2(x^3+x^2)+x^2+x+2}{x^3+x^2}=2+\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}.$$

Зауваживши, що $x^3+x^2=x^2(x+1)$, маємо для «правильної» частини даного дробу наступний розклад

$$\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Аналогічно до попереднього, звівши до спільного знаменника дроби у правій частині рівності та прирівнявши чисельники правої та лівої частин, маємо

$$x^2+x+2=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=(A+C)x^2+(A+B)x+B.$$

Для знаходження коефіцієнтів А,В,С скористаємось методом невизначених коефіцієнтів – прирівняємо коефіцієнти при x^2, x та вільні члени у лівій та правій частинах рівності. Отримуємо систему

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+B=1 \\ B=2. \end{cases}$$

Звідки $A=1-B=-1, C=1-A=2,$ тобто

$$\frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x+1}.$$

Звідси

$$\int \frac{2x^3+3x^2+x+2}{x^3+x^2}dx=\int 2dx-\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{dx}{x^2}+2\int \frac{dx}{x+1}=2x-\ln|x|-\frac{2}{x}+2\ln|x+1|+C.$$

Приклад 8.3.7.

Нехай $f(x)=\dfrac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}.$

Маємо правильний раціональний дріб, один з множників якого є квадратний тричлен з від'ємним дискримінантом ($D=36-52=-16<0$). У цьому випадку маємо розклад

$$\frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+6x+13}.$$

Аналогічно до попереднього прикладу, маємо

$$5x^2+17x+36=A(x^2+6x+13)+(Bx+C)(x+1).$$

Далі

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 6A+B+C=17 \\ 13A+C=36, \end{cases}$$

Враховуючи, що $B=5-A, C=36-13A,$ отримуємо друге рівняння системи у вигляді $6A+(5-A)+(36-13A)=17,$ тобто $41-8A=17,$ $A=3, B=2, C=-3.$ Таким чином,

$$\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx = 3\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x-3}{x^2+6x+13}dx = 3\ln|x+1| + \int \frac{2(x+3)-9}{(x+3)^2+4}dx =$$

$$= 3\ln|x+1| + \int \frac{2(x+3)}{(x+3)^2+4}dx - 9\int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = 3\ln|x+1| + \ln\left|(x+3)^2+4\right| - \frac{9}{\sqrt{4}} arctg \frac{x+3}{\sqrt{4}} + C =$$

$$= 3\ln|x+1| + \ln(x^2 6x+13) - \frac{9}{2} arctg \frac{x+3}{2} + C.$$

Таким чином, інтегрування дробово-раціональної функції може бути здійснене за наступним правилом:

Алгоритм

1) ***в разі, якщо дріб неправильний, представити його як суму цілої та дробової частин;***
2) ***розкласти знаменник отриманого правильного дробу на множники, що відповідають знаменникам елементарних дробів;***
3) ***представити дріб у вигляді суми елементарних дробів;***
4) ***про інтегрувати всі отримані доданки***.

8.4. Інтегрування деяких тригонометричних та ірраціональних функцій

Розглянемо деякі класи функцій, інтегрування яких за допомогою підстановок (заміни змінних) належного вигляду зводиться до інтегрування дробово-раціональних функцій. Відзначимо, що надалі позначення $R(t)$, , $R(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ вживається для функцій, які є раціональними відносно своїх аргументів (при їх обчисленні використовуються тільки арифметичні операції.

1. Інтегрування функцій $\sin\alpha x\cos\beta x$, $\sin\alpha x\sin\beta x$, $\cos\alpha x\cos\beta x$ здійснюється шляхом перетворення їх за формулами тригонометрії на суму синусів або косинусів – ще один приклад знаходження інтегралів методом розкладу.

Приклад 8.4.1. Для інтегралу $I=\int \sin 2x\cos 2xdx$ маємо, оскільки $\sin 2x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$,то

$$I=\frac{1}{2}\left(\int \sin 5xdx-\int \sin xdx\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-(-\cos x)+C\right)=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C.$$

2. При знаходженні інтегралів вигляду $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ можна використовувати **універсальну тригонометричну підстановку** $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $x=2\mathrm{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, яка дозволяє звести інтеграл до вигляду $\int R_1\left(t\right)dt$. Недоліком такої підстановки є те, що в багатьох випадках функція $R_1\left(t\right)$ виявляється громіздкою, а повернення у відповіді до змінної x вимагає об'ємних тригонометричних перетворень.

Приклад 8.4.2.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{matrix} t=tg\frac{x}{2}\quad x=2arctgt \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad dx=2(arctgt)'dt=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+t)^2\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

3. Частково уникнути недоліків, вказаних у попередньому пункті, вдається, якщо $R\left(-u,v\right)=-R(u,v)$ або $R\left(-u,-v\right)=R(u,v)$. При цьому в першому випадку використовується підстановка $t=\cos x$, у другому – $t=\sin x$, у третьому – використовуються формули зниження степеня (якщо функція не є дробом) або підстановка $t=\mathrm{tg}x$.

Приклад 8.4.3.

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x+\sin x}=\left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=(\sin x)'dx=\cos xdx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t^2+t}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\ln|t|+\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+C.$$

Приклад 8.4.4.

$$\int \frac{\cos x dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}=\int \frac{dx}{3\sin^2 x-1}=\left|\begin{matrix} t=tgx & x=arctgx \\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{t^2+1} & dx=\dfrac{dt}{t^2+1}\end{matrix}\right|=\int \frac{dt}{(t^2+1)\left(\dfrac{3t^2}{t^2+1}-1\right)}=$$

$$=\int \frac{dt}{2t^2-1}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{1}{2}}}{t+\sqrt{\frac{1}{2}}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx-\frac{1}{\sqrt{2}}}{tgx+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+C.$$

4. Інтегрування функцій вигляду $R(x,\sqrt[m_1]{ax+b},\sqrt[m_2]{ax+b},\ldots,\sqrt[m_k]{ax+b})$ здійснюється з використанням підстановки $ax+b=t^m$, де m – найменше спільне кратне показників $m_1,m_2,\ldots,m_k$. Такий випадок називається **інтегруванням лінійних ірраціональностей**.

Приклад 8.4.5.

$$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}=\left|\begin{matrix} t=\sqrt{x+1} \\ x=t^2-1 \\ dx=(t^2-1)dt=2tdt\end{matrix}\right|=\int \frac{2tdt}{t+3}=2\int \frac{t+3-3}{t+3}dt=2\left(\int 1dt-3\int \frac{dt}{t+3}\right)=$$

$$=2(t-3\ln|t+3|+C)=2\sqrt{x+1}-6\ln\left|\sqrt{x+1}+3\right|+C.$$

5. Інтегрування функцій вигляду $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ – **квадратичних ірраціональностей** – може здійснюватись наступним чином:
   1) у квадратному тричлені під знаком радикала виділяється повний квадрат, тобто $ax^2+bx+c=a(x+x_1)^2+b_1=|a|(b_2\pm\left(x+x_1\right)^2)$;
   2) залежно від вигляду виразу $b_2\pm\left(x+x_1\right)^2$ використовується одна з тригонометричних підстановок:
      а) $b_2+\left(x+x_1\right)^2, b_2>0-x+x_1=\sqrt{b_2}\,\mathrm{tg}t$,
      б) $b_2+\left(x+x_1\right)^2, b_2<0-x+x_1=\dfrac{\sqrt{|b_2|}}{\cos t}$,
      в) $b_2-\left(x+x_1\right)^2, b_2>0-x+x_1=\sqrt{b_2}\cos t$;

таким чином, інтегрування квадратичної ірраціональності зводиться до інтегрування раціональної функції $\sin t$ та $\cos t$, що було розглянуто вище.

Приклад 8.4.6.

$$I=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+10}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^2+9}}=\left|\begin{array}{l} x+1=3tgt \\ x=3tgt-1 \\ dx=\dfrac{3dt}{\cos^2 t} \\ t=arctg\,\dfrac{x+1}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(3tgt-1)3dt}{\cos^2 t\sqrt{9tg^2t+9}}=\int\frac{(3tgt-1)3dt}{\cos^2 t\,\dfrac{3}{cost}}=$$

$$=\int\frac{3tgt-1}{\cos t}dt=3\int\frac{sint}{\cos^2 t}dt-\int\frac{dt}{\cos t}=$$

$$=3\int\frac{-(\cos t)'}{\cos^2 t}dt-\int\frac{\cos tdt}{\cos^2 t}=$$

$$=-3\int\frac{d\cos t}{\cos^2 t}-\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}=-3\frac{\cos^{-1}t}{(-1)}+\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t-1}=\frac{3}{\cos t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+C.$$

Для остаточного запису відповіді, слід врахувати, що

$$\sin t=\sin\left(arctg\,\frac{x+1}{3}\right)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+10}};$$

$$\cos t=\cos\left(arctg\,\frac{x+1}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{(x+1)^2}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+10}}.$$

Таким чином,

$$I=\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+10}}{x+1+\sqrt{x^2+2x+10}}\right|+C.$$

Приклад 8.4.7.

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{\sin t}\\ dx=-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt\\ t=\arcsin\dfrac{1}{x}\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t}-1}}{\dfrac{1}{\sin t}}\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)dt=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=-\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(1-\frac{1}{\sin^2 t}\right)dt=\int dt-\int\frac{dt}{\sin^2 t}=t+ctgt=$$

$$=\arcsin\frac{1}{x}+ctg(\arcsin\frac{1}{x})+C=\arcsin\frac{1}{x}+\frac{\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)}{\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)}+C=$$

$$=\arcsin\frac{1}{x}+x\sqrt{x-\left(1/x\right)^2}+C=\arcsin\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-1}+C.$$

Приклад 8.4.8.

$$I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{array}{l}x=\sin t\\ dx=\cos tdt\\ t=\arcsin x\end{array}\right|=\int\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos tdt=\int\sin^2 tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int(1-cos2t)dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t+C\right)=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

8.5. Інтеграли, які «не беруться»

З основних правил диференціювання випливає, що похідна елементарної функції є знову ж таки елементарною функцією. Істотно, що операція знаходження первісної (невизначеного інтеграла) такої властивості не має. Відповідні невизначені інтеграли називаються такими, що «**не беруться**» (**не виражаються у скінченному вигляді через елементарні функції**).

Прикладами таких інтегралів є

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int e^{x^2}dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int x\mathrm{tg}xdx,\ \int\sqrt{\sin x}dx,\ \int\sin x^2dx.$$

Зазначимо: інтеграл може бути таким, що «не береться» навіть при відносно нескладній підінтегральній функції, насправді, інтеграли, які «беруться» є скоріше виключенням, ніж правилом. В той же час те, що інтеграл «не береться» не означає те, що відповідна первісна не існує, а лише вказує на її специфічну форму.

Контрольні запитання

1. Що таке первісна функція і що таке невизначений інтеграл функції?
2. Які основні властивості визначеного інтеграла?
3. Запишіть таблицю невизначених інтегралів.
4. Що таке «інтеграл, який не береться»? Наведіть приклади.
5. Які три основні методи знаходження невизначених інтегралів?
6. Запишіть формулу інтегрування частинами. В яких випадках вона застосовується?
7. Що таке елементарний дріб? Дробово-раціональна функція? Як розкладають і інтегрують дробово-раціональні функції?
8. Які підстановки використовуються для інтегрування раціональних функцій від $\sin x$ та $\cos x$?
9. Які підстановки використовуються для інтегрування лінійних та квадратичних ірраціональностей?

Тема 9. Інтегральне числення функції однієї змінної. Визначений інтеграл.

9.1. Поняття визначеного інтеграла та його властивості
9.2. Обчислення визначених інтегралів
9.3. Невласні інтеграли
9.4. Деякі застосування визначених інтегралів

Що таке визначений інтеграл, яка його геометрична інтерпретація?Де застосовують визначені інтеграли? Як означують невласні інтеграли?

9.1. Поняття визначеного інтеграла та його властивості

В той час, як поняття невизначеного інтегралу пов'язане, перш за все, з формально-математичними міркуваннями, визначений інтеграл виник в зв'язку із задачами практики і є «математичним інструментом», який широко використовується в різних галузях науки і техніки. Розглянемо, наприклад, задачу про **площу криволінійної трапеції**.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано невід'ємну функцію $f(x)$ і необхідно визначити площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a, x = b$ на координатній площині Oxy (рис. 9.1.1).

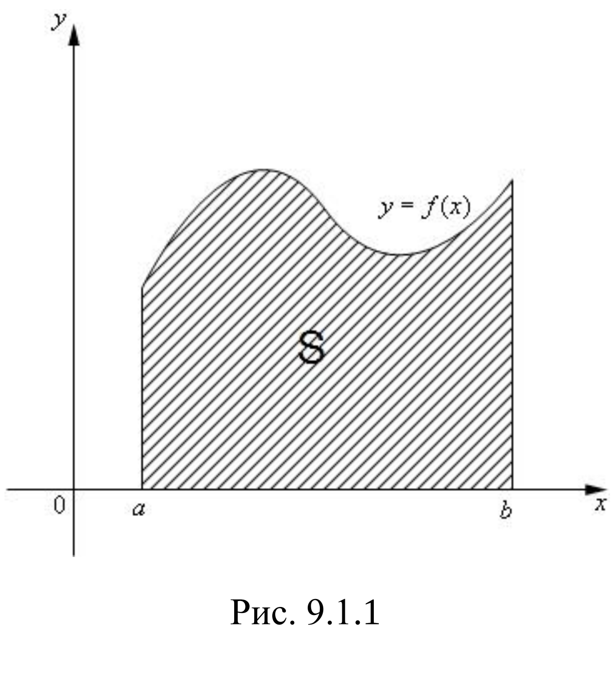


Рис. 9.1.1

Один з підходів до розв'язання цієї задачі полягає у виборі ламаної, достатньо близької до графіка $y = f(x)$, і заміні криволінійної трапеції достатньо близькою до неї областю під цією ламаною.

Остання область складається з прямокутників та трапецій, площа яких може бути обчислена за формулами планіметрії і може вважатись наближено рівною S. Ця рівність ставатиме все більш точною з наближенням ламаної до кривої $y = f\left(x\right)$, тобто можна вважати, що площа S є границя площ під ламаними при прямуванні цієї ламаної до графіка. Здійснимо це практично.

Задамо **розбиття відрізка** $[a;b]$: нехай маємо $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, тоді $\left[a;b\right] = \left[x_0;x_1\right] \cup \left[x_1;x_2\right] \cup \ldots \cup \left[x_{n-1};x_n\right]$. На кожному відрізку $[x_{k-1};x_k]$ такого розбиття виберемо точку x_k^* і покладемо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Суму вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ <u>*назвемо*</u> **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на $[a;b]$. **Геометричний сенс інтегральної суми** полягає в тому, що вона є площею фігури, складеної з прямокутників, які справляються на відрізки розбиття (рис. 9.1.2):

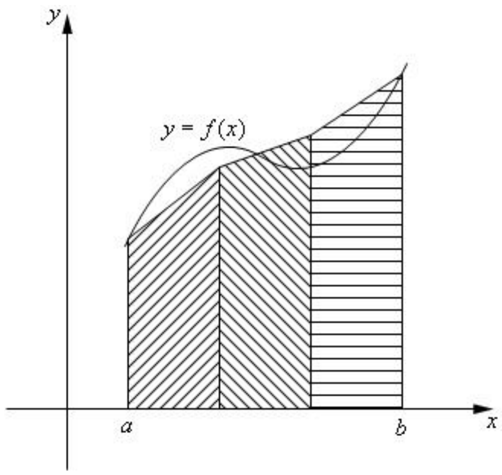


Рис. 9.1.2

Позначимо $S = \max\limits_{k} \Delta x_k$ і <u>*назвемо*</u> це число **діаметром розбиття**. Зрозуміло, що значення інтегральної суми залежить від вибору розбиття та точок x_k^*. Розглянемо границю:

$$\lim_{s \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k = I$$

Якщо ця границя не залежить від вибору розбиття та точок x_k^*, і є скінченною, то вона <u>*називається*</u> **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ і позначається $\int_a^b f\left(x\right)dx$, сама функція $f(x)$ при цьому <u>*називають*</u> **інтегрованою на проміжку** $\left[a;b\right]$ **,** a **– нижньою межею інтегрування,** $f(x)$ **– підінтегральною функцією,** $f(x)dx$ **– підінтегральним виразом,** а задачу знаходження такого інтеграла **– задачею інтегрування функції** $f(x)$ **на проміжку** $[a;b]$**.**

Відзначимо, що:

Важливо!

- ***на відміну від невизначеного інтегралу, визначений інтеграл є не функцією, а числом;***
- ***для невід'ємних функцій*** $f(x)$ ***визначений інтеграл має геометричний зміст площі криволінійної трапеції.***

Достатньою умовою існування інтеграла $\int_a^b f\left(x\right)dx$ є неперервність функції $f(x)$ на інтервалі $[a;b]$.

Властивості визначеного інтеграла.

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b cf\left(x\right)dx = c\int_a^b f\left(x\right)dx$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі двох інтегралів:

$$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

3. Якщо проміжок інтегрування розбитий на частини, то інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі інтегралів по кожній з його частин:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) \le g(x)$ (для $\forall x \in [a;b]$), то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

5. Має місце **інтегральна теорема про середнє**: для функцій $f(x)$ неперервної на проміжку $[a;b]$ завжди знайдеться точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

9.2. Обчислення визначених інтегралів

Відзначимо спершу ще одну важливу властивість визначеного інтегралу.

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$ то, очевидно, вона також інтегрована на довільному відрізку $[a;t] \subseteq [a;b]$.

Нехай $\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$, де $t \in [a;b]$, функція $\Phi(t)$ <u>*називається*</u> **інтегралом зі змінною верхньою межею**. Це – принципово новий спосіб задавання функцій (хоча його можна використовувати і для задавання вже відомих функцій, наприклад $\int_1^t \frac{dx}{x} = \ln t$).

Розглянемо властивості запровадженої таким чином функції:

1) Якщо $f(x)$ - неперервна на проміжку $[a;b]$, то $\Phi(t)$ - також неперервна на цьому проміжку.
2) Якщо функція $f(x)$ – неперервна на проміжку $[a;b]$, тоді $\Phi'(t)$ в кожній точці проміжку $[a;b]$ співпадає з $f(t)$.
3) Справедлива **основна формула інтегрального числення – формула Ньютона-Лейбніца:**

Якщо $f(x)$ - неперервна на проміжку $[a;b]$, $F(x)$ - довільна її первісна, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ця формула встановлює надзвичайно важливий зв'язок між визначеними та невизначеними інтегралами. Її можна записувати у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

символ $F(x)\Big|_a^b$ означає **варіацію функції** $F(x)$ **на проміжку** $[a;b]$.

Таким чином, обчислення визначеного інтеграла вимагає:

Важливо!

а) знаходження первісної підінтегральної функції (за допомогою розглянутої вище техніки знаходження невизначених інтегралів);

б) варіації знайденої первісної на проміжку інтегрування.

Приклад 9.2.1.

Сикористаємось формулою Ньютона-Лейбніца для знаходження інтеграла $I = \int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$. Оскільки $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, то

$$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 2} - e^{2\cdot 0}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 4} - 1\right) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}.$$

Раніше ми вказували, що існують три основних методи знаходження невизначених інтегралів. У випадку визначених інтегралів вони означають наступне:

1) Відповідно до другої властивості визначених інтегралів, вони можуть знаходитись за допомогою методу розкладу (підінтегральної функції на суму більш зручних для інтегрування доданків).

Приклад 9.2.2.

Обчислимо інтеграл $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$. У цьому випадку

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx\right)=\frac{1}{2}\left(x\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}\right)=\frac{1}{2}\left((\pi/4-1)+\frac{1}{2}(\sin\pi/2-0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{8}.$$

2) Формула інтегрування частинами для визначених інтегралів має вигляд:
   Нехай $u(x),v(x)$ - мають неперервні похідні на проміжку $[a;b]$, тоді

$$\int\limits_a^b udv=(uv)\,|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

Приклад 9.2.3.

Для інтеграла $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$ застосуємо інтегрування частинами, поклавши

$$u=x,\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x},$$
$$dy=dx,\ v\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C.$$

Тоді маємо

$$I=xtgx\Big|_0^{\pi/3}-\int\limits_0^{\pi/3}tgxdx=\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{3}-0\right)-\int\limits_0^{\pi/3}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\int\limits_0^{\pi/3}\frac{(-\sin x)}{\cos x}dx=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\int\limits_0^{\pi/3}\frac{d\cos x}{\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln\cos\pi/3-\ln\cos 0=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 1/2=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2.$$

3) При заміні змінної у визначеному інтегралі спираються на наступну теорему:
нехай функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну на проміжку $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці x, де $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, тоді:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

(остання формула <u>*називається*</u> **формулою заміни змінної у визначеному інтегралі**).

Приклад 9.2.4.

Обчислимо інтеграл $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. Застосуємо заміну змінної $t=e^x$, тоді $x=\ln t,\, dx=\frac{dt}{t}$, заміна меж інтегрування має вигляд

x	$\ln 2$	$\ln 3$
t	2	3

.

Отримуємо:

$$I=\int_2^3\frac{dt}{t(1-\frac{1}{t})}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+2}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Зазначимо також, що при практичному обчисленні визначених інтегралів часто виявляються корисними наступні формули:

- якщо $f(x)$ - парна функція, то $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$;

Приклад 9.2.5.

При знаходженні інтегралу $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, враховуючи парність підінтегральної функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, маємо

$$I=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Bigg|_0^1=2(\ln\left|1+\sqrt{2}\right|-\ln 1)=2\ln(\sqrt{2}+1).$$

– якщо $f(x)$ - непарна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 0$;

Приклад 9.2.6. Розглядаючи інтеграл $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4 arctgxdx}{\sqrt[5]{1+x^6}}$, зауважмо, що підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^4 arctgx}{\sqrt[5]{1+x^6}}$ є непарною, отже, в силу симетрії проміжку інтегрування, інтеграл дорівнює 0.

– якщо $f(x)$ - періодична функція з періодом T, то $\int\limits_{0}^{T} f\left(x\right)dx = 2\int\limits_{0}^{a+T} f(x)dx$

Приклад 9.2.7. Розглянемо інтеграл $I = \int\limits_{11,5\pi}^{12,5\pi} \sin^{101} xdx$. Оскільки функція $\sin x$, а, отже, і функція $\sin x^{101}$ періодичні з періодом $T = 2\pi$, то

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{101} xdx.$$

В той же час підінтегральна функція –непарна, тому, аналогічно до попереднього,

$$I = 0.$$

9.3. Невласні інтеграли

Поняття невласних інтегралів пов’язане з необхідністю узагальнення поняття визначеного інтеграла на випадки, коли одна з меж (або обидві межі) інтегрування є нескінченними, або ж функція не є неперервною на проміжку інтегрування.

А. Невласні інтеграли І роду або інтеграли з нескінченними межами.

Невласними інтегралами І роду <u>*називаються*</u> інтеграли вигляду

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx,\ \int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx.$$

Надалі обмежимось розглядом таких інтегралів на прикладі інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Такий інтеграл <u>*називається*</u> **збіжним**, якщо існує (скінченна) границя $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx = I$, при цьому така границя називається значенням цього інтеграла. В протилежному випадку інтеграл <u>*називається*</u> **розбіжним** (тобто **його значення не існує**).

Приклад 9.3.1. Розгляньмо інтеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$. В цьому випадку

$$V.p. = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(arctgb - arctg0) =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, досліджуваний інтеграл збіжний і дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 9.3.2. Розгляньмо інтеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. В цьому випадку

$$V.p.I = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{b\to+\infty} \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\Big|_0^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|b+\sqrt{b^2+1}\right| - \ln 1\right) = \lim_{b\to+\infty}\ln\left|b+\sqrt{b^2+1}\right| = +\infty.$$

Таким чином, цей інтеграл– розбіжний.

Окрім безпосереднього знаходження границі, такі інтеграли можуть **досліджуватись**, тобто їх збіжність чи розбіжність може встановлюватись шляхом порівняння підінтегральної функції $f(x)$ з деякою функцією $g(x)$ щодо якої відомо, чи є $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збіжним або розбіжним. В якості такого «еталону» для порівняння, частіше за все використовують функцію $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, оскільки $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ є збіжним при $\alpha > 1$ і розбіжним в протилежному випадку.

Мажорантно-мінорантна ознака порівняння невласних інтегралів I роду стверджує:

- **якщо** $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [1;+\infty)$ **і** $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ **– збіжний, то** $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ **– також збіжний (при цьому** $f(x)$ **та** $g(x)$ **вважаються неперервними функціями на** $[1;+\infty)$**);**
- **якщо** $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [1;+\infty)$ **і** $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ **– розбіжний, то** $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ **– також розбіжний, (при цьому** $f(x)$ **та** $g(x)$ **вважаються неперервними функціями на** $[1;+\infty)$**);**

Приклад 9.3.3. Розгляньмо інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}+1}$. Оскільки при $x \ge 1 \frac{1}{x^{10}+1} < \frac{1}{x^{10}}$, то, виходячи зі збіжності інтегралу $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{10}}$ $(\alpha = 10 > 1)$, можна, відповідно до

мажорантно-мінорантної ознаки порівняння , стверджувати , що досліджуваний інтеграл є також збіжним.

Приклад 9.3.4. Нехай $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{9}{10}}-1}$. Тоді, зауваживши, що при $x \ge 2 \frac{1}{x^{\frac{9}{10}}-1} > \frac{1}{x^{\frac{9}{10}}}$ отримуємо, в силу розбіжності інтегралу $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{9}{10}}}$ $(\alpha = \frac{9}{10} < 1)$, за мажорантно-мінорантною ознакою порівняння , розбіжність даного інтегралу.

Б. Невласні інтеграли II роду або інтеграли від функцій з розривами II роду.

Якщо функція $f(x)$ має на обмеженому проміжку інтегрування $[a;b]$ скінченну кількість усувних розривів або розривів **I** роду типу «стрибок», то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ може бути представлений та обчислений у вигляді суми інтегралів по проміжках, на які $[a;b]$ розбитий точками розривів.

Принципово іншою є ситуація, пов’язана з наявністю на проміжку $[a;b]$ хоча б однієї точки розриву **II** роду функції $f(x)$. В такому випадку $\int_a^b f(x)dx$ <u>*називається*</u> **невласним інтегралом II роду**. Відзначимо, що надалі для простоти ми вважатимемо:

Важливо!

1) ***функція*** $f(x)$ ***має на проміжку*** $[a;b]$ ***лише одну точку розриву II роду;***
2) ***ця точка співпадає з лівою межею проміжку інтегрування.***

Відповідно, будемо <u>*називати*</u> такий інтеграл **збіжним**, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = I$, причому така границя <u>*називається*</u> значенням інтеграла, та **розбіжним** у протилежному випадку (тоді значення інтеграла не існує)

Приклад 9.3.5. Розгляньмо інтеграл $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. Маємо, що підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ прямує до $+\infty$ при $x\to 1+0$. Відповідно

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}(2-2\sqrt{\varepsilon})=2.$$

Таким чином, цей інтеграл є збіжним і дорівнює 2.

Приклад 9.3.6. Розгляньмо інтеграл $I=\int\limits_2^3\frac{dx}{(x-3)^2}$. В цьому випадку підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ прямує до $+\infty$ при $x\to 3-0$. Тому

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{2}^{3-\varepsilon}\frac{dx}{(x-3)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(-\frac{1}{x-3}\Big|_{2}^{3-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty.$$

Таким чином, виявилось, що цей інтеграл розбіжний.

Аналогічно до того, як це робилось для невласних інтегралів **II** роду, невласні інтеграли **II** роду досліджуються за допомогою **мажоранто-мінорантної ознаки порівняння:**

- **якщо** $f(x)$ **та** $g(x)$ **– неперервні на** $(a;b]$**,** $0 \le f(x) \le g(x)$**, то** $\int_a^b f(x)dx$ **– також збіжний;**
- **якщо** $\int_a^b f(x)dx$ **- розбіжний, то** $\int_a^b g(x)dx$ **- також розбіжний.**

В якості «еталону» для порівняння використовуються, наприклад, функції $\frac{1}{x^\alpha}$, щодо яких відомо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} - \begin{cases} \textit{збіжний при } \alpha < 1; \\ \textit{робіжний при } \alpha \ge 1. \end{cases}$$

Приклад 9.3.7. Дослідимо інтеграл $J = \int_0^1 \frac{\sin^4 x}{\sqrt[5]{1-x^2}}dx$. Оскільки

$f(x) = \frac{\sin^4 x}{\sqrt[5]{1-x^2}} = \frac{\sin^4 x}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/5}}$, то підінтегральна функція прямує до нескінченності при $x \to 1$ і $f(x) < \frac{1}{(1-x)^{1/5}}$, то, за мажорантно-мінорантною ознакою порівняння, в силу збіжності інтеграла $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/5}}$

досліджуваний інтеграл також збіжний.

Приклад 9.3.8. Нехай $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}$. Тоді підінтегральна функція прямує до нескінченності при $x \to 0$. При цьому , оскільки $\sin x < x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2}$, а також, враховуючи розбіжність інтегралу $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$,

досліджуваний інтеграл також є розбіжним

за мажорантно-мінорантною ознакою порівняння,

9.4. Деякі застосування визначених інтегралів

Розглянемо спочатку деякі геометричні застосування таких інтегралів.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задані неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$, причому $f(x)\le g(x)$.

Тоді площа криволінійної трапеції, обмеженої графіками цих функцій та прямими $x=a$, $x=b$, визначається за формулою (рис. 9.4.1)

$$S=\int_a^b\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

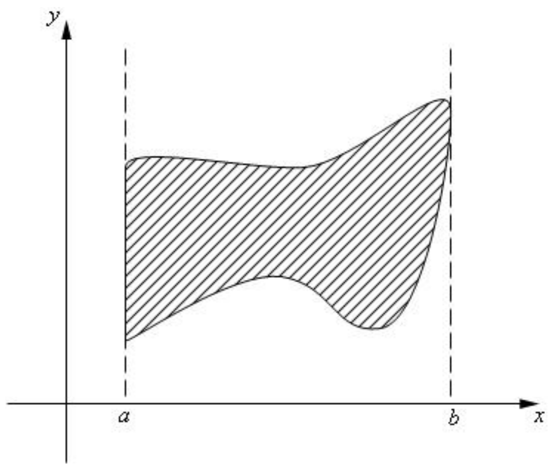


Рис. 9.4.1

Приклад 9.4.1. Обчислимо площу області, обмеженої лініями $y=x+1$ та $y=x^2-1$. (рис. 9.4.2):

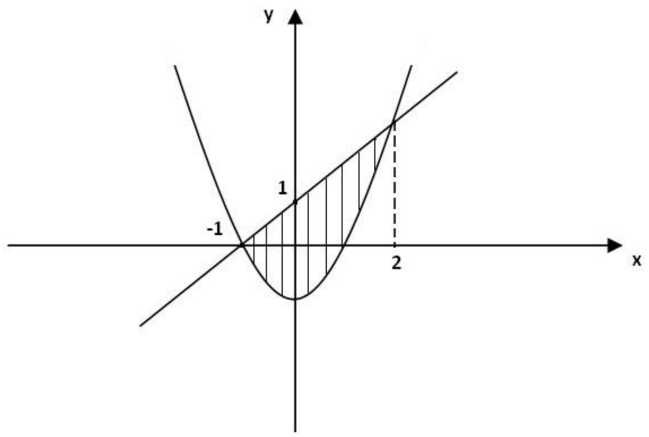


Рис. 9.4.2

Визначимо спочатку як змінюється x в межах такої області. Для цього знайдемо точки перетину даних ліній:

$$\begin{cases} y = x+1, \\ y = x^2 - 1, \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0\,,$$

$$x_1 = -1\; x_2 = 2.$$

Таким чином, враховуючи, що парабола $y = x^2 - 1$ обмежує область знизу, а пряма $y = x+1$-згори, маємо

$$S = \int_{-1}^{2}\left(x+1-\left(x^2-1\right)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(2+x-x^2\right)dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{2}dx + \int_{-1}^{2}xdx - \int_{-1}^{2}x^2dx = 2x\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 4{,}5.$$

Нехай частина графіка неперервної функції $y = f\left(x\right)$, яка розташована між точками з абсцисами $x = a$ та $x = b$, обертається навколо осі абсцис (рис. 9.4.3). Тоді **об'єм** отриманого **тіла обертання** визначається за формулою:

$$V = \pi\int_{a}^{b} f^2\left(x\right)dx.$$

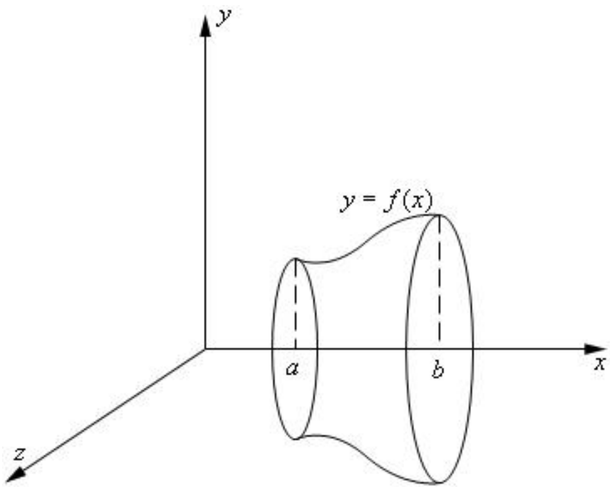


Рис. 9.4.3

Приклад 9.4.2. Знайдемо об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною при обертанні навколо осі OX фігури, яка обмежена $y^2 = x$ та прямою $x = 1$ (рис.9.4.4).

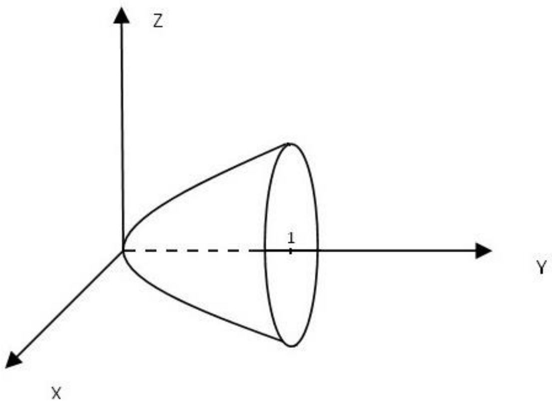


Рис. 9.4.4

Маємо

$$V = \pi\int_0^1 y^2 dx = \pi\int_0^1 x dx = \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Площа бічної поверхні тіла обертання обчислюється за формулою:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left[f^{'}(x) \right]^2} dx.$$

Приклад 9.4.3. Обчислимо площу бічної поверхні тіла, утвореного обертанням навколо OX відрізка лінії $y = chx$ для $x \in [0,1]$.

$$S = 2\pi \int_0^1 chx\sqrt{1 + sh^2 x}dx = 2\pi \int_0^1 ch^2 xdx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{2\pi}{4} \int_0^1 \left(e^x + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{2x}}{2} \Bigg|_0^1 + 2x \Bigg|_0^1 - \frac{e^{-2x}}{2} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2} + 2 \right) = \frac{\pi}{2} sh2 + \pi (\textit{од. площі}).$$

Зазначимо, що всі три наведені формули не використовують припущень про невід'ємність функції, які в них фігурують, це істотно розширює сферу їх застосування. Дуже корисно, а в переважній більшості випадків навіть необхідно, супроводжувати розв'язання таких задач схематичними рисунками, які дозволяють собі уявити геометричну суть відповідних образів.

Визначені інтеграли також широко використовуються в фізиці. Якщо відома швидкість руху тіла $v(t)$, то шлях, пройдений цим тілом за час від $t = t_1$ до $t = t_2$ може бути визначений за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

слід пам'ятати при цьому, що швидкість може виявитись і від'ємною, тоді шлях визначиться як

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

Якщо ж маємо змінну силу $F(s)$, яка діє на тіло і залежить від його положення s на прямолінійній траєкторії руху, то робота цієї сили (під дією якої тіло переміщується з положення s_1 в положення s_2) визначається за формулою:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$$

Дуже важливою є можливість обчислювати з допомогою визначених інтегралів **середні значення змінних величини**: якщо $f(x)$ - неперервна функція на проміжку $[a;b]$, то її середнє значення на цьому проміжку є

$$\hat{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Приклад 9.4.4. Нехай валовий прибуток фірми визначається за формулою $v(t) = 2 + t^{\frac{2}{3}}$. Визначимо середній прибуток за перші вісім місяців діяльності підприємства:

$$v_{сер} = \frac{1}{8}\int_0^8 (2 + t^{\frac{2}{3}})dt = \frac{1}{8}\left(\int_0^8 2dt + \frac{1}{8}\int_0^8 t^{\frac{2}{3}}dt\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(16 + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8\right) = \frac{1}{8}\left(16 + \frac{96}{5}\right) = 35,2.$$

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла?
2. Які властивості має визначений інтеграл? Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
3. Як інтегрують частинами у визначеному інтегралі?
4. Як здійснюється підстановка у визначеному інтегралі?
5. Що таке невласний інтеграл першого роду? Як визначають його збіжність, розбіжність, головне значення?
6. Коли збігається або розбігається інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$?
7. Що таке невласний інтеграл другого роду? Як визначають його збіжність, розбіжність, головне значення?
8. Коли збігається або розбігається інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?
9. Як за допомогою визначених інтегралів обчислюють площі плоских фігур, об’єми та площі бічних поверхонь тіл обертання?

Тема 10. Елементи теорії диференціальних рівнянь

10.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь
10.2. Диференціальні рівняння першого порядку
10.3. Деякі диференціальні рівняння другого порядку, що зводяться до рівнянь першого порядку
10.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Які рівняння називають диференціальними? Як визначається процес розв'язування диференціального рівняння і якими бувають розв'язки рівняння? Як розв'язують певні типи диференціальних рівнянь?

Багато ситуацій та процесів пов'язаних з математичними моделями у вигляді рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні і *називається* **диференціальним**. Якщо невідома функція залежить від однієї змінної, такі рівняння *називаються* **звичайними диференціальними**, якщо від кількох змінних – **у частинних похідних**. Надалі обмежимось розглядом лише звичайних диференціальних рівнянь, причому для компактності називатимемо їх «**диференціальними рівняннями**».

10.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Диференціальним рівнянням n**-го порядку** *назвемо* рівність вигляду $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0$, де x - незалежна змінна, $y(x)$ - невідома функція, $y', \ldots, y^{(n)}$ - її похідні. Його запис у вигляді $y^{(n)}=\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *називається* **нормальною формою** такого рівняння.

Приклад 10.1.1. Диференціальне рівняння вигляду $y'=x+y$ є диференціальним рівнянням першого порядку, записаним в нормальній формі.

Приклад 10.1.2. Диференціальне рівняння вигляду $y''-2y'+2y=0$ є диференціальним рівнянням другого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння n- го **порядку на проміжку** $[a;b]$ *називається* n разів диференційована функція $y=y(x)$, яка при підстановці її у рівняння перетворює його на тотожність для всіх $x\in[a;b]$.

Приклад 10.1.3. Функція $y=-x-1$ є розв'язком диференціального рівняння, наведеного у прикладі 10.1.1.

Приклад 10.1.4. Функції $y=e^x\sin x$ та $y=e^x\cos x$ є розв'язками диференціального рівняння, наведеного у прикладі 10.1.2.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння *називається* **задачею його інтегрування**, процес знаходження розв'язку – **інтегруванням диференціального рівняння.**

Інтегральною кривою *називається* графік розв'язку диференціального рівняння.

Без додаткових умов розв'язок диференціального рівняння знаходиться неоднозначно (рівняння визначає сімейство інтегральних кривих).

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку *називається* функція $y=y(x,c_1,\ldots,c_n)$, яка при всіх значеннях довільних сталих $c_1,\ldots,c_n$ є розв'язком цього рівняння (сталі $c_1,\ldots,c_n$ – незалежні між собою).

Частинним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку *називається* функція, яку отримуємо із загального розв'язку, покладаючи довільні сталі рівними певним конкретним значенням.

Приклад 10.1.5. Нехай $y''=\sin x$ - диференціальне рівняння II порядку, тоді $y=-\sin x+c_1x+c_2$ - загальний розв'язок, $y=\sin x+x+1$ - частинний розв'язок.

Зазначимо, що:

1) загальний (частинний) розв'язок, записаний у неявній формі, *називається* **загальним (частинним) інтегралом** рівняння;
2) **особливими розв'язками рівняння** *називаються* такі його розв'язки, які не можуть бути отримані із загального підбором значень довільних сталих $c_1,\ldots,c_n$;
3) загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку залежить від n довільних сталих;
4) для виділення певного частинного розв'язку із загального частіше за все використовуються початкові умови: $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$, задача знаходження частинного

розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, *__називається__* **задачею Коші**.

10.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння **першого порядку** має вигляд $f\left(x,y,y^{'}\right)=0$, або у **нормальній формі**, $y^{'}=f\left(x,y\right)$.

Геометричне тлумачення такого рівняння полягає у наступному. Якщо D - область на площині Oxy, в кожній точці якої визначена функція $f(x,y)$, то в кожній такій точці $M\left(x,y\right)$ $\operatorname{tg}\alpha=f(x,y)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої рівняння $y^{'}=f(x,y)$, яка проходить через цю точку. Має місце наступна **теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші:**

Теорема

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна разом зі своєю похідною $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервні у відкритій множині D, тоді для всякої точки $M_0(x_0,y_0)\in D$ знайдеться розв'язок рівняння $y^{'}=f(x,y)$, який задовольняє умові $y\left(x_0\right)=y_0$, причому якщо $y_1\left(x\right),y_2(x)$ - два розв'язки, $y_1\left(x_0\right)=y_2(x_0)$, то ці два розв'язки співпадають.

Інакше кажучи, через кожну точку області D проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y^{'}=f(x,y)$. Відзначимо, що розв'язок задачі Коші може бути не єдиним в простих випадках.

Приклад 10.2.1. Нехай $y^{'}=y^{\frac{2}{3}}$, ясно, що $y=0$ є розв'язком цього рівняння, його загальний розв'язок $y=\left(\dfrac{x+c}{3}\right)^3$ (тобто $y=0$ - особливий розв'язок), тоді початковій умові $y\left(0\right)=0$ задовольняють одночасно два розв'язки $y=0$ та $y=\dfrac{x^3}{27}$.

Автономним <u>*називатимемо*</u> диференціальне рівняння першого порядку **автономним**, якщо воно має вигляд $y' = f(y)$. Якщо для функції $f(y)$ виконані умови існування та єдності розв'язку задачі Коші та ця функція має відокремлену послідовність нулів $y_1, y_2, \ldots$, при $f(y_1) = f(y_2) = 0$, то точки $y_1, y_2, \ldots$ (**точки рівноваги** або ж **стаціонарні точки**) пов'язані з прямими $y = y_1, y = y_2, \ldots$, що розділяють область D на смуги, в кожній з яких всі інтегральні криві є або зростаючими, або спадаючими.

Розглянемо тепер конкретні типи диференціальних рівнянь першого порядку та способи їх інтегрування.

А. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння вигляду $P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$ або $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ <u>*називається*</u> **диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними**.

Такі рівняння розв'язуються шляхом відокремлення змінних з наступним інтегруванням:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = -\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy,$$

або

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx.$$

Приклад 10.2.2. Нехай маємо рівняння $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0$, тоді після відокремлення змінних отримуємо $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$, інтегрування виразів у ліві, правій частинах рівності дає $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C$, тобто загальний інтеграл цього рівняння має вигляд $\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C$.

Б. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ <u>*називається*</u> **однорідним**, якщо функція $f(x, y)$ може бути представлена у вигляді $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ - такі функції <u>*називаються*</u> **однорідними нульового степеня** (зауважимо, що, наприклад, квадратична форма є однорідною функцією другого степеня).

Для розв'язання такого рівняння **запроваджується допоміжна функція** $z=\frac{y}{x}$. Тоді маємо $y=zx$ $y^{'}=\frac{dz}{dx}x+z$, рівняння набуває вигляду

$$\frac{dz}{dx}x+z=\varphi(z),$$

Звідки

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\varphi(z)-z}{x}.$$

Отримане рівняння з відокремлюваними змінними розв'язується відповідно до попереднього, остаточно

$$\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\int\frac{dx}{x}.$$

Приклад 10.2.3. Для рівняння $y^{'}=\frac{x+2y}{x}$ маємо $\frac{x+2y}{x}=1+2\frac{y}{x}$, таким чином, $z=\frac{y}{z}$,

$$y=zx\Rightarrow y^{'}=\frac{dz}{dx}x+z\Rightarrow\frac{dz}{dx}x+z=1+2z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{x}\Rightarrow\int\frac{dz}{z+1}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|z+1|=\ln|x|+C\Rightarrow.$$

$$z+1=\pm Cx\Rightarrow y=-x\pm Cx^2.$$

В. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння вигляду $y^{'}+f(x)y=g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ - неперервні функції змінної x, <u>*називається*</u> **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**. Якщо $g(x)=0$, рівняння <u>*називається*</u> **лінійним однорідним**, інакше – **лінійним неоднорідним**.

Такі рівняння можуть бути розв'язані різними способами, одним з них є наступний. Покладемо $y=u(x)v(x)$, тоді

$$y=\frac{du}{dx}v(x)+u(x)\frac{dv}{dx}.$$

Звідки маємо

$$\frac{du}{dx}v(x)+u(x)\frac{dv}{dx}+f(x)u(x)v(x)=g(x).$$

Покладемо

$$\frac{dv}{dx}+f(x)v(x)=0,$$

тоді

$$\int \frac{dv}{v} = \int f(x)dx,$$

звідки

$$v = e^{-\int f(x)dx},$$

таким чином,

$$\frac{du}{dx} Ce^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

тобто

$$u(x) = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx.$$

Остаточно маємо

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(\int g(x) e^{\int f(x)dx} dx + C \right).$$

Приклад 10.2.3. Для рівняння $xy' - 2y = 2x^4$, або, що те ж саме, $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$, отримуємо, в силу того, що $f(x) = -\frac{2}{x}$, $g(x) = 2x^3$,

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int 2x^3 e^{-\int \frac{2}{x^3} dx} dx + C \right) = e^{\ln|x|} \left(\int 2x^3 e^{-2\ln|x|} dx + C \right) = e^{\ln x^2} \left(\int 2x^3 e^{\ln \frac{1}{x^2}} dx + C \right) =$$

$$= x^2 (\int 2x dx + C) = x^2 (x^2 + C)$$

.

Г. Рівняння Бернуллі.

Рівнянням Бернуллі *<u>називається</u>* рівняння вигляду $y' + P(x) y = (x) y^{\alpha} (\alpha \neq 0{,}1)$. Можемо, наприклад, звести таке рівняння до лінійного, підстановкою $z = y^{1-\alpha}$, після чого розв'язувати отримане лінійне рівняння.

Приклад 10.2.4. Нехай маємо рівняння $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$ з початковою умовою $y(1) = 0$. Тоді $y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}$, тобто $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$. Таким чином, $2zz' - \frac{4}{x} z^2 = xz$. Скоротивши на $2z$, маємо $z' - \frac{2}{x} z = \frac{1}{2} x$. За раніше отриманою формулою

$$z = e^{-\int -\left(-\frac{2}{x}\right) dx} \left(\int \frac{1}{2} x e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = e^{2\int \frac{dx}{x}} \left(\frac{1}{2} \int x e^{-2\int \frac{dx}{x}} dx + C \right) =$$

$$= e^{\ln x^2} \left(\frac{1}{2} \int x e^{\ln \frac{1}{x^2}} dx + C \right) = x^2 (\frac{1}{2} \ln|x| + C).$$

.

Таким чином, $y = \left(x^2 \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C \right) \right)^2$, $y(1) = C^2 = 0$. Звідки розв'язком задачі Коші є функція $y = (x^2 - \frac{1}{2}\ln|x|)^2 = \frac{|x|}{2}\ln^2|x|$.

Зазначимо наостанок, що можливість отримання розв'язку рівняння кожного з розглянутих типів у вигляді елементарної функції залежить від можливості знаходження відповідних інтегралів. В таких випадках кажуть про «розв'язок в квадратурах».

10.3. Деякі диференціальні рівняння другого порядку, що зводяться до рівнянь першого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд $f\left(x, y, y', y''\right) = 0$, або, в нормальній формі, $y'' = f(x, y, y')$.

Деякі типи таких рівнянь розв'язуються шляхом зведення їх до диференціальних рівнянь першого порядку.

А. Рівняння вигляду $y'' = f(x)$ розв'язуються шляхом **двократного послідовного інтегрування.**

Приклад 10.3.1. Нехай маємо рівняння $y'' = x + \sin x$.

Тоді

$$y' = \int y''dx = \int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$$

і, відповідно,

$$y = \int y'dx = \int \cos xdx + C_1\int dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2 \ .$$

Б. Рівняння вигляду $y'' = f(x, y')$ зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку **підстановкою** $z = y'(x)$.

Приклад 10.3.2. Нехай маємо рівняння $xy'' + y' = 0$.

Тоді $y'' = -\frac{1}{x}y$, якщо $y' = z$, то $y'' = z'$, маємо

$z' = -\frac{1}{x}z$, – рівняння з відокремлюваними змінними, відповідно,

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}, \text{ звідки } \ln|z| = -\ln|x| + C_1.$$

Тобто

$$y' = z = \frac{C_1}{x},\ y = \int y'dx = C_1\int\frac{dx}{x} = C_1\int\frac{dx}{x} = C_1\ln|x| + C_2.$$

В. Рівняння вигляду $y'' = f(y, y')$ зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку **підстановкою** $y' = z(y)$.

Зазначимо, що в такому випадку

$$y'' = \frac{d}{dx}\big(z(u)\big) = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Приклад 10.3.3. Нехай рівняння має вигляд $2yy'' = (y')^2 + 1$. Тоді, використовуючи вказану підстановку, маємо $2yz\dfrac{dz}{dy} = z^2 + 1$, звідки $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z^2+1}{2x}\dfrac{1}{y}$, тому $\int\dfrac{2zdz}{z^2+1} = \int\dfrac{dy}{y}$, $\ln|z^2+1| = \ln|y| + C_1$. Потенціюючи останню рівність, маємо $z^2 + 1 = C_1 y$, тобто $y' = z = \pm x + C_2$, $\int\dfrac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm\int dx$.

Остаточно

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2,\ C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(C_2 \pm x)^2.$$

10.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд $y'' + py' + qy = f(x)$, де p,q - дійсні числа, $f(x)$ - деяка функція (права частина). Аналогічно до лінійних диференціальних рівнянь першого порядку такі рівняння *називаються* **однорідними**, якщо $f(x) \equiv 0$ та **неоднорідними** в протилежному випадку. Такі рівняння мають єдиний розв’язок задачі Коші при початкових умовах $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ для широкого кола функцій $f(x)$.

Розглянемо спочатку розв’язки однорідних рівнянь такого типу. Для їх знаходження розглянемо **характеристичне рівняння** $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$. В залежності від знаку виразу $(p^2 - 4q)$ **можливі три випадки**.

1) Нехай $p^2 - 4q > 0$, тоді характеристичне рівняння має **різні дійсні корені** λ_1 та λ_2, загальний розв’язок однорідного рівняння є $y_{з.о.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Приклад 10.4.1. Для рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$ характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, корені його дійсні і різні - $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ тому $y_{з.о.} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2) Нехай $p^2 - 4q = 0$, тоді характеристичне рівняння має два рівні дійні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, загальний розв'язок однорідного рівняння є $y_{з.о.} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$.

Приклад 10.4.2. Для рівняння $y'' + 4y' + 4$ характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, отже $y_{з.о.} = C_1 e^{-2x} + x C_2 e^{-2x}$.

3) Нехай $p^2 - 4q < 0$, тоді характеристичне рівняння має два комплексних корені $\alpha \pm \beta i$, де $i = \sqrt{-1}$, загальний розв'язок диференціального рівняння $y_{з.о.} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Приклад 10.4.3. Для рівняння $y'' - 4y' + 8y = 0$ характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, його корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$, загальний розв'язок диференціального рівняння $y_{з.о.} = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Розглянемо тепер розв'язання **лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами** $y'' + py' + qy = f(x)$. Для цього можна скористатись, наприклад, методом варіацій довільних сталих. Нехай розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ є $y_{з.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, y_1 та y_2 визначені в залежності від коренів характеристичного рівняння. Шукаючи загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді $y_{з.н.} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, маємо змогу знайти спочатку похідні функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ з системи

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

а потім самі ці функції, які залишається лише підставити у вираз для загального розв'язку неоднорідного розв'язку рівняння.

Приклад 10.4.4. Нехай маємо рівняння $y'' = 3y' + 2y = e^x$. Тоді характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Отже,

$y_{з.о.} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $y_{з.н.} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$, система для знаходження $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$ має вигляд $\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x) 2e^{2x} = e^x. \end{cases}$

Віднімаючи від другого рівняння системи перше, отримуємо $C_2'(x) e^{2x} = e^x$, звідки $C_2'(x) = e^{-x}$, отже $C_2'(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_2$.

З першого рівняння системи отримуємо, що $C_1'(x) e^x = -e^x$, тобто $C_1'(x) = -1$, $C_1(x) = -x + C_1$.

Остаточно
$y_{з.н.} = (-x + C_1) e^x + (-e^x + C_2) e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^x - xe^x = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x$.

Зауважимо, що отриманий розв'язок являє собою суму загального розв'язку однорідного рівняння та деякого додаткового доданку, який, легко перевірити, задовольняє неоднорідному рівнянню, тобто є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Існують методи підбору таких розв'язків для функцій $f(x)$ спеціального вигляду.

Контрольні запитання

1. Що таке диференціальне рівняння n-го порядку?
2. Яка його нормальна форма? Що таке частинний та загальний розв'язки диференціального рівняння? Частинний та загальний інтеграли?
3. Що таке початкові умови та задача Коші для диференціального рівняння?
4. Наведіть приклади задач, які приводять до диференціальних рівнянь?
5. Дайте означення диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Як воно розв'язується?
6. Дайте означення однорідного диференціального рівняння першого порядку. Як воно розв'язується?
7. Що таке лінійне диференціальне рівняння першого порядку? Рівняння Бернуллі? Як вони розв'язуються?
8. Наведіть приклади рівнянь, яки допускають зниження порядку. Як це робиться?
9. Який вигляд має лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами? Як знаходять його загальний розв'язок ?
10. Як розв'язують лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами?

Тема 11. Основні поняття теорії рядів

11.1. Поняття ряду. Збіжність ряду
11.2. Числові ряди з додатними членами
11.3 Збіжність знакозмінних числових рядів
11.4. Функціональні ряди. Степеневі ряди
11.5. Розвинення функцій в степеневі ряди та їх застосування

Що називають числовим рядом? Що означає поняття збіжності ряду?Які характерні особливості рядів, що мають додатні члени? Як досліджують збіжність знакозмінних рядів? В чому полягає особливість збіжності знакопочережних рядів? Що таке функціональний ряд?Які особливості степеневих рядів? Як розкладають у степеневі ряди певні функції?

При розв'язанні численних математичних задач, в тому числі і пов'язаних з економіко-математичними моделями, доводиться мати справу із сумами нескінченної кількості доданків. Такі задачі розглядаються в теорії рядів.

11.1. Поняття ряду. Збіжність ряду

Нехай задано числову послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Будемо <u>*називати*</u> ці числа **членами ряду**, $a_n = f(n)$ – **загальним членом ряду**. Побудуємо **часткові суми ряду** $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, ..., S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$. Об'єкт, отриманий при переході до границі в послідовності частинних сум $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>*називається*</u> **числовим рядом**.

Будемо <u>*називати*</u> ряд **збіжним**, якщо існує скінченна границя послідовності часткових сум $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, причому така границя <u>*називається*</u> **сумою ряду**, та **розбіжним** в протилежному випадку (тоді сума ряду не існує).

Найпростішим прикладом ряду, для якого легко визначається, чи є він збіжним або розбіжним, служить **сума членів нескінченної геометричної прогресії:**

$$a_1 = b, a_2 = bq, \ldots, a_n = bq^{n-1}, \ldots, S_1 = b, S_2 = b\left(1+q\right), \ldots, S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}, \ldots,$$

при $|q|<1$ існує $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$, при $|q|\geq 1$ така границя не існує або є нескінченною. Таким чином, сума членів нескінченної геометричної прогресії існує тоді і тільки тоді, коли ця прогресія є нескінченної спадною.

Збіжні ряди мають **наступні властивості**:

1) **Якщо ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ – збіжний і має суму S, то ряд $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots$ також збіжний, сума його λS (для будь-якого числа λ).**
2) Якщо ряди $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ та $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ збіжні, суми їх S_1 та S_2 відповідно, то ряд $\left(a_1 \pm b_1\right) + \left(a_2 \pm b_2\right) + \ldots + \left(a_n \pm b_n\right) + \ldots$ також збіжний, сума його $S_1 \pm S_2$
3) Якщо ряд збіжний, то будь-який ряд, отриманий з нього приписуванням або закресленням скінченної кількості членів також збіжний.
4) Для збіжного ряду його залишок $\sigma_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ завжди прямує до нуля.

З означення збіжності ряду випливають також наступні **ознаки збіжності рядів:**

1) **Необхідна ознака**.

Важливо!

Якщо ряд збіжний, то його загальний член прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2) **Достатня ознака збіжності**.

Важливо!

Якщо залишок ряду прямує до нуля, то ряд збіжний.

Зазначимо, що нам надалі доведеться переважно не знаходити суми рядів, а **досліджувати** їх, визначаючи за допомогою різних **ознак збіжності**, чи є вони збіжними або ж розбіжними. З цієї точки зору, необхідна ознака збіжності може використовуватись тільки для того, щоб показати розбіжність ряду: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, або не існує, то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ розбіжний. В той же час існують розбіжні ряди, для яких рівність виконується. Сформульована вище достатня ознака збіжності на практиці, частіше за все, виявляється занадто громіздкою.

11.2. Числові ряди з додатними членами

Будемо <u>*називати*</u> ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ рядом з **додатними членами**, якщо $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0, \ldots$. Важливим прикладом такого ряду є **узагальнений гармонічний ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, де α – число, яке називається **показником узагальненого гармонічного ряду (гармонічним при** $\alpha = 1$**).** Далі буде показано, що такий ряд є збіжним при $\alpha > 1$ та розбіжним при $\alpha \leq 1$.

Розглянемо тепер **ознаки збіжності рядів з додатними членами**.

А. Мажорантно-мінорантна ознака порівняння.

Розглянемо ряди $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ та $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$, для яких виконується рівність $0 \leq a_n \leq b_n$ для всіх значень n. Називатимемо тоді перший ряд **мінорантою**, а другий – **мажорантою**. Має місце наступна ознака збіжності (та розбіжності) рядів: якщо мажоранта збіжна, то збіжна і міноранта, якщо ж міноранта розбіжна, то розбіжна і мажоранта.

Приклад 11.2.1. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$ мажорантою є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2 + 2},$$

в той же час така мажоранта збіжна, оскільки вона є узагальненим гармонічним рядом з показником $\alpha = 2$, відповідно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$ - збіжний.

Приклад 11.2.2. Якщо ж розглянути ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$, то мінорантою для нього буде ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, який буде розбіжним як узагальнений гармонічний з показником $\alpha=\frac{1}{2}$, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}$ - розбіжний.

Б. Гранична ознака збіжності.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ – ряди з додатними членами, і існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$, тоді ці ряди **збіжні або розбіжні одночасно**.

Приклад 11.2.3. Розглядаючи ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{2n^2-4n+5}$, зауважимо, що для членів гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n-2}{2n^2-4n+5}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n}{2n^2-4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{3}{2},$$

тому, враховуючи розбіжність гармонічного ряду, досліджуваний ряд є розбіжним.

Розглянемо достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами.

А. Ознака Даламбера.

Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує границя $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, тоді, якщо $D<1$ – ряд збіжний, $D>1$ – ряд розбіжний, $D=1$ – ряд вимагає дослідження за допомогою іншої ознаки.

Приклад 11.2.4. Нехай маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$, тоді

$a_n=\frac{2^n}{n!},\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\ D=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$, таким чином, ряд – збіжний.

Б. Радикальна ознака Коші.

Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує границя - $c=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, тоді, якщо $c<1$ - ряд збіжний, $c>1$- ряд розбіжний, $c=1$- ряд вимагає дослідження за допомогою іншої ознаки.

Приклад 11.2.5. Нехай маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^{n+1}}$, тоді $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{5^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5\sqrt[n]{5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5}=\infty$, тому ряд – розбіжний.

В. Інтегральна ознака збіжності Коші-Маклорена.

Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ додатні і не зростають, тобто $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots$, існує функція $y=f(x)$ така, що вона неперервна та не зростаюча на $[1;+\infty)$ і $f(1)=a_1, f(2)=a_2,\ldots,f(n)=a_n$, тоді ряд є збіжним чи розбіжним одночасно з інтегралом $\int_1^{+\infty}f(x)dx$.

Відзначимо, що така ознака дозволяє визначити, при яких α узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ - збіжний, а при яких – розбіжний.

Приклад 11.2.6. Нехай маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Ясно, що $\frac{1}{2\ln 2}>\frac{1}{3\ln 3}>\ldots>\frac{1}{n\ln n}>\ldots$. Розглянемо інтеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. Тоді $I=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln|\ln x|\,|_2^b=\lim_{b\to\infty}(\ln|\ln b|-\ln|\ln 2|)=\infty$, таким чином, ряд – розбіжний.

11.3. Збіжність знакозмінних числових рядів

Знакозмінним <u>*називається*</u> числовий ряд, який має члени різних знаків. Для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розрізняють **абсолютну збіжність** (збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, з чого випливає збіжність і самого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) та **умовну збіжність** (ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - збіжний, проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - розбіжний). Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів істотно розрізняються: наприклад, в абсолютно збіжних рядах можна переставляти члени – сума їх при цьому не змінюється, сума ж умовно збіжного ряду шляхом перестановки його членів може бути зроблена рівною будь-якому наперед заданому числу – теорема Рімана.

Знакопочережним <u>*називається*</u> знакозмінний ряд, для якого знаки його членів чергуються: $u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots$, де $u_k \geq 0$. Основною теоремою, за допомогою якої досліджують такі ряди, є **теорема** (або **ознака**) **Лейбніца**:

Теорема

Якщо члени знакопочережного ряду прямують до нуля, спадаючи за абсолютною величиною $u_1 > u_2 > \ldots > u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ***, то ряд збіжний (абсолютно або умовно), а його сума не перевищує першого члена:*** $S \leq u_1$**.**

Приклад 11.3.1. Нехай маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n^2+1}$, тоді

$$u_n = \frac{n+2}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

в той же час $\int_1^{\infty} \frac{x+2}{x^2+1} dx$ є розбіжним:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x+2}{x^2+1}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{xdx}{x^2+1}+2\int_1^b \frac{dx}{x^2+1}\right)=\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{2}\int_1^b \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+2\text{arctg}x\,|_1^b)=$$

$$\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)|_1^b+2\text{arctg}b-2\text{arctg}1)=\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{2}\ln\left(b^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 2+2\text{arctg}b-\frac{\pi}{2})=\infty.$$

. Таким чином ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}$ - розбіжний за інтегральною ознакою, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n^2+1}$ - збіжний, проте умовно.

Збіжні знакопочережні ряди мають дуже **корисну властивість**: похибка наближеного обчислення їх суми за допомогою часткової суми S_n, не перевищує абсолютної величини першого відкинутого члена $\left|S-S_n\right|\le\left|a_{n+1}\right|$.

Приклад 11.3.2. Нехай маємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. Якщо дослідити ряд, складений з абсолютних величин його членів, за допомогою ознаки Даламбера, маємо $D=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, тобто ряд збіжний абсолютно.

Припустимо, що поставлено задачу про наближене обчислення його суми з точність до $0,001$. Тоді, за наведеною вище властивістю, нам треба визначити перший член цього ряду, який за абсолютною величиною не перевищує $0,001$. Ясно, що це $a_7=\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}<0,001$. Звідси $S\approx S_6=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{37}{60}=0,616\ldots$.

11.4. Функціональні ряди. Степеневі ряди

Раніше ми розглядали лише числові ряди.

Функціональним рядом <u>*називається*</u> ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, де всі функції $f(x)$ визначені на деякій множині X .

Областю збіжності функціональногоцього ряду *<u>називається</u>* сукупність таких значень $x = x_0$, що $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ - збіжний числовий ряд. Важливим різновидом функціональних рядів є **степеневі ряди**.

Степеневим рядом по степенях_$(x - x_0)$ або **степеневим рядом в околі точки** $x = x_0$ *<u>називається</u>* ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, де числа a_n - **коефіцієнти степеневого ряду**.

Характер області збіжності степеневого ряду описує **теорема Абеля**(рис. 11.4.1):

Теорема

Якщо степеневий ряд збіжний при $x = x_1 \neq x_0$ ***і розбіжний при*** $x = x_2$***, то він збіжний для таких*** x***, що*** $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$***, і розбіжний для таких*** x***, що*** $|x - x_0| < |x_2 - x_0|$***.***

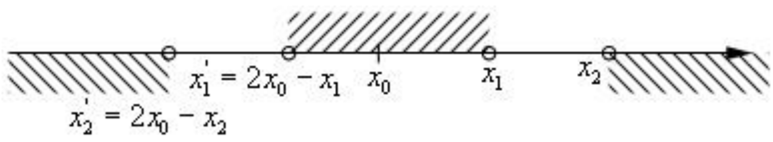


Рис. 11.4.1

З теореми Абеля випливає існування для кожного ряду такого числа $R \geq 0$, що при $|x - x_0| < R$ ряд збіжний, а при $|x - x_0| > R$ - ряд розбіжний, таке число *<u>називається</u>* **радіусом збіжності ряду**, проміжок $(x_0 - R; x_0 + R)$ - **інтервалом збіжності степеневого ряду**. В точках $x = x_0 - R$ та $x = x_0 + R$ - **кінцях інтервалу збіжності** – ряд має досліджуватись окремо.

Якщо коефіцієнти ряду, починаючи з деякого номера, відмінні від нуля, то його радіус збіжності може бути знайдений за однією з формул:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right),$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|a_n|}} .$$

Зазначимо, що у випадку, коли обидві ці границі існують, вони співпадають. Може статись так, що радіус збіжності дорівнює нулю (область збіжності складається з однієї точки $x = x_0$) або виявляється нескінченним (областю збіжності є вся множина дійсних чисел).

Приклад 11.4.1. Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$. В такому випадку $x_0 = 0$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}}{\frac{2^{n+1}}{(2n+3)^2\sqrt{3^{n+1}}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} (\frac{2n+3}{2n+1})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n\to\infty} (\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Маємо інтервал збіжності $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$. Дослідимо збіжність ряду на його кінцях: при $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Зазначимо, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ є збіжним, тому що, використовуючи граничну ознаку порівняння, його можна порівнювати зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (узагальнений гармонічний з показником $\alpha = 2$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, в точці $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ряд є збіжним, і при тому абсолютно, область збіжності – $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

11.5. Розвинення функцій в степеневі ряди та їх застосування

Відмітимо, що многочлен $y = P_n(x)$ є дуже зручним різновидом функції – його значення можуть бути обчислені лише за допомогою двох арифметичних дій: додавання та множення. Степеневий ряд може розглядатись як узагальнення многочлена на випадок нескінченного його степеня.

Припустимо, що функція $f(x)$, визначена і n разів диференційована в деякому околі точки $x=0$, може бути представлена у вигляді суми степеневого ряду $f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

Легко показати, що в такому випадку

$$a_0=f\left(0\right),a_1=f^{'}\left(0\right),a_2=\frac{f^{"}(0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Таким чином, її можна представити у вигляді

$$f\left(x\right)=M_n\left(x\right)+R_n(x),$$

де $M_n\left(x\right)=f\left(0\right)+f^{'}\left(0\right)x+\frac{f^{"}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ - **многочлен Маклорена**, $R(x)$ - залишковий член, а сама формула *називається* **формулою Маклорена**.

Аналогічно, в околі довільної точки $x=x_0$ може бути виписана **формула Тейлора**

$$f\left(x\right)=T_n\left(x\right)+R_n(x),$$

де

$$T_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f^{'}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f^{"}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ -

многочлен Тейлора,

$R_n\left(x\right)$ - залишковий член.

Якщо функція нескінченно диференційовна і задовольняє певним додатковим умовам (наприклад, має рівномірно обмежені похідні: $\left|f^{(n)}(x)\right|\le c, n=1,,2,\ldots$), то вона може бути **розвинена в ряд Тейлора** (представлена у вигляді його суми):

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

При цьому

Важливо!

1) **має місце теорема про моногенність – розклад функції в ряд по степенях** $\left(x-x_0\right)$ **єдиний (співпадає з рядом Тейлора);**

2) **залишок** $\sigma_n(x)$ **такого ряду може бути знайдений за такою формулою**

$$\sigma_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

При $x_0=0$ ряд Тейлора носить назву <u>ряду Маклорена</u>. Наведемо приклади розвинення в ряди Маклорена деяких елементарних функцій.

1. $f\left(x\right)=e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, такий розклад має місце для $x\in(-\infty;+\infty)$
2. $f\left(x\right)=\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, такий розклад також має місце для $x\in(-\infty;+\infty)$
3. $f\left(x\right)=\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, такий розклад теж має місце для $x\in(-\infty;+\infty)$
4. $f\left(x\right)=\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$, цей розклад справедливий при $x\in(-1;1]$
5. $f\left(x\right)=(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$, такий ряд *<u>називається</u>* **біноміальним** і його область збіжності істотно залежить від параметра α: якщо α натуральне число, то $x\in(-\infty;+\infty)$, при інших значеннях α інтервал збіжності є $(-1;1)$, в точках $x=\pm1$ поведінка ряду визначається конкретним значенням α.

Зазначимо, що наведені вище **п’ять основних розкладів** можуть бути використані при розкладах і інших функцій.

Приклад 11.5.1. Нехай $f\left(x\right)=\frac{1-\cos x}{x^3}$, тоді

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

$$\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots,$$

.

$$1 - \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{(2n)!} = \frac{x^4}{2!} - \frac{x^8}{4!} + \ldots,$$

$$f\left(x\right) = \frac{1-\cos x}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{4n+3}}{(2n)!} = \frac{x}{2!} - \frac{x^5}{4!} + \ldots,$$

Легко показати, що область збіжності цього ряду також є $(-\infty;+\infty)$.

Можливість розвинення функцій в степеневі ряди визначає різноманітність їх застосувань: знаходження границь, обчислення значень функцій, визначення інтегралів, наближене розв'язання диференціальних рівнянь та ін.

Приклад 11.5.2. Обчислимо значення функції $\ln 0{,}8$ з точністю до $0{,}001$, оскільки $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$, то

$$\ln 0{,}8 = (-0{,}2) - \frac{(-0{,}2)^2}{2} + \frac{(-0{,}2)^3}{3} - \frac{(-0{,}2)^4}{4} + \frac{(-0{,}2)^5}{5} - \ldots.$$

Маємо знакопочережний ряд, тому треба знайти перший його член, який за абсолютною величиною не перевищує $0{,}001$. Це $a_5 = \frac{(-0{,}2)^5}{5} = -\frac{1}{5^6} = -\frac{1}{15625}$. Тому $\ln 0{,}8 \approx -0{,}2 - 0{,}02 - 0{,}00266 - 0{,}0004 \approx -0{,}2231$.

Приклад 11.5.3. Розглянемо наближене значення інтегралу $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x^2} dx$.

Оскільки

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{3!} + \ldots, e^{-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n x^{2n}}{n!} = 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^6}{3!} + \ldots$$

.

Область збіжності такого ряду - $(-\infty;+\infty)$, відповідна теорема забезпечує можливість **почленного інтегрування ряду**:

$$\int e^{-2x^2} dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4x^5}{5\cdot 2!} - \frac{8x^7}{7\cdot 3!} + \ldots,$$

таким чином,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^4} - \frac{1}{16\cdot 7\cdot 6} + \ldots .$$

Якщо обмежитись, наприклад, першими двома членами розкладу, матимемо $I \approx 0,416$. Зазначимо, що даний інтеграл належить до таких, що не беруться…

Контрольні запитання

1. Що таке числовий ряд? Частинна сума ряду? Коли ряд називають збіжним?
2. У чому полягає необхідна ознака збіжності?
3. Сформулюйте ознаки Даламбера, Коші(радикальну та інтегральну), порівняння (мажоранто-міноратну та граничну) збіжності рядів з додатними членами.
4. Що таке знакозмінний та знакопочережний ряди? Що таке абсолютна та умовна збіжності?
5. Сформулюйте ознаку Лейбніца. Як обчислити суму знакопочережного ряду із заданою точністю?
6. Що таке степеневий ряд? Який вигляд має його область збіжності? Дайте означення радіусу збіжності та наведіть формули для його знаходження.
7. Що таке ряди Тейлора та Маклорена? Запишіть п’ять основних розкладів елементарних функцій.
8. Які застосування мають степеневі ряди?

Додаткові відомості

12.1. Поняття про квадратичні форми

Квадратичною формою від n **змінних** *<u>називається</u>* функція елементів простору R^n задана формулою

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n$$

Матрицею квадратичної форми *<u>називається</u>* симетрична квадратична матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матричним записом квадратичної форми – рівність вигляду

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\overline{x}^T A\overline{x},\quad де\ \overline{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right),\overline{x}^T=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма має **канонічний вигляд** (є **канонічною**), якщо її матриця діагональна.

Відзначимо, що будь-яка квадратична форма може бути зведена до канонічного вигляду шляхом, наприклад, зміни базису у просторі R^n. При цьому має місце **закон інерції квадратичних форм**: яким би способом форма не була зведена до канонічного вигляду, кількості додатних (від’ємних) членів залишаються незмінними.

Квадратична форма називається додатно (від’ємно) визначеною, якщо для

$$\overline{x}=\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}\neq 0\ -\ f\left(\overline{x}\right)=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)>(<)0.$$

Для встановлення додатної ,від’ємної визначеності матриці можуть використовуватись наступні два критерії.

1. Для того, щоб квадратична форма була (додатно) від'ємно визначена, необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці були додатні (від'ємні) – **критерій власних чисел**.
2. Якщо розглядати **головні мінори** матриці квадратичної форми

$$\Delta_1 = a_{11},$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$
$$\vdots$$
$$\Delta_n = |\mathrm{A}|.$$

То

а) для додатної визначеності квадратної форми необхідно і достатньо, щоб $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$;

б) для від'ємної визначеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$; – **критерій Сільвестра.**

Приклад 12.1.1. Дослідити на знаковизначеність квадратичну форму

$$f(\vec{x}) = 99x_1^2 - 12x_1x_2 + 48x_1x_3 + 130x_2^2 - 60x_2x_3 + 71x_3^2.$$

Матриця такої квадратичної форми має вигляд :

$$\begin{pmatrix} 99 & -6 & 24 \\ -6 & 130 & -30 \\ 24 & -30 & 71 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо послідовно:

$$|a_{11}| = 99 > 0,$$
$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = 99 \cdot 130 - (-6) \cdot (-6) = 12834 > 0,$$
$$\begin{vmatrix} 99 & -6 & 24 \\ -6 & 130 & -30 \\ 24 & -30 & 71 \end{vmatrix} = 755874 > 0.$$

Отже, дана квадратична форма є додатно визначеною.

12.2. Квадратурні формули

Застосування визначених інтегралів на практиці часто зустрічається з істотними складнощами пов'язаними зі громіздкістю процесу пошуку первісної (або ж навіть неможливістю її знаходження як елементарної функції). В таких випадках використовують **чисельно-аналітичні** (заміна близькою до неї але «кращою» з точки зору процесу знаходження первісної, функцією) або **чисельні** (використання «дограничної» форми інтегральної суми) методи.

Найпростішим з них є **метод прямокутників**. При побудові інтегральної суми за x_k^* вибиратимемо лівий ($x_k^* = x_{k-1}$, **перша формула прямокутників**) або правий ($x_k^* = x_k$, **друга формула прямокутників**) кінець проміжку розбиття. Відповідно, матимемо:

I формула прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

II формула прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Частіше за все використовується рівномірне розбиття відрізку інтегрування на n рівних частин:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

В такому випадку похибка обчислення визначеного інтеграла за однією з формул прямокутників не перевищує величини $\frac{M_1}{2n}(b-a)^2$, де M_1 – найбільше значення на цьому проміжку величини $\left| f'(x) \right|$.

Покращення точності обчислення інтеграла можна домогтись застосуванням **формули трапецій** – вона являє собою середнє арифметичне першої та другої формул прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}).$$

Похибка такої формули при рівномірному розбитті не перевищує величини $\frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3$, де M_2 - найбільше значення $\left|f''(x)\right|$ на проміжку $[a;b]$ (рис. 12.2.1).

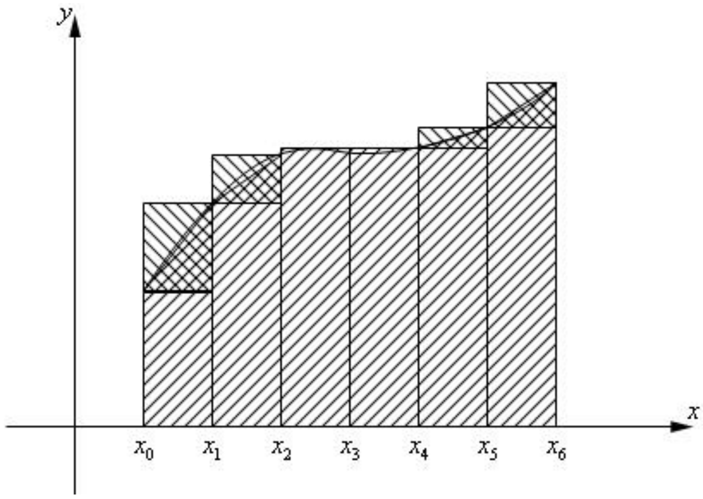


Рис. 12.2.1

Нехай проміжок $[a;b]$ розбитий на парну кількість рівних частин $n=2m$. Тоді подальше підвищення точності обчислення визначеного інтеграла досягається за допомогою **формули Сімпсона**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[f(x_0)+f(x_{2m})+2(f(x_2+f(x_4)+\ldots+f(x_{2m-2}))+$$
$$+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2m-1}))]$$

Похибка такої формули не перевищує $\frac{M_4(b-a)^5}{180m^4}$, де M_4 – найбільше значення величини $\left|f^{IV}(x)\right|$ на інтервалі $[a;b]$.

Для ілюстрації ефективності наведених формул, застосуємо їх для обчислення інтеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ при $n=10$.

При використанні першої формули прямокутників отримуємо $0,71877$, другої – $0,66877$, формули трапецій – $0,69377$, формули Сімпсона – $0,69315$. В той же час очевидно, що такий інтеграл дорівнює:

$$\ln 2 = 0,6931472\ldots$$

12.3. Поняття про комплексні числа та елементи вищої алгебри

В багатьох випадках, окрім дійсних чисел, зручно використовувати також **комплексні**.

Комплексним числом _називається_ вираз вигляду $z = a + bi$, де a, b - дійсні числа, i – **уявна одиниця**. При цьому:

- bi - *уявне число*;
- основна властивість уявної одиниці - $i^2 = -1$;
- $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}z$ – відповідно, **дійсна** та **уявна частини** комплексного числа z.
- запис комплексного числа у вигляді $z = a + bi = \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z \cdot i$ називається **алгебраїчною формою** комплексного числа.

Будемо казати, що комплексне число дорівнює нулю ($z = 0$), якщо одночасно $\mathrm{Re}z = 0$ та $\mathrm{Im}z = 0$.

Два комплексні числа рівні ($z_1 = z_2$), якщо одночасно $\mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2$, $\mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2$.

Якщо a та b пробігають множину дійсних чисел, отримуємо множину комплексних чисел Z, яка, таким чином, відповідає множині R^2 упорядкованих пар дійсних чисел $(a;b)$. Це означає, що можна встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною комплексних чисел та множиною точок на координатній площині, яка в такому випадку носить назву **комплексної площини**, при цьому осі абсцис та ординат називаються, відповідно, **дійсною** та **уявною осями** (рис. 12.3.1).

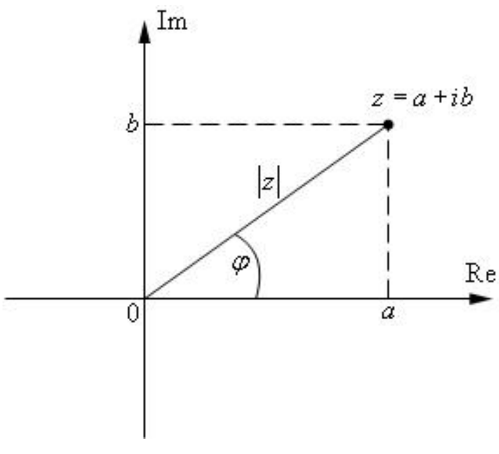


Рис. 12.3.1

Якщо на цій площині запровадити полярну систему координат, то полярний радіус точки $z = a + bi$ називається **модулем числа** $z = a + bi$:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

а полярний кут – **аргументом** цього числа

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, b > 0, a \geq 0; \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a}, a \leq 0; \\ 2\pi + arctg\dfrac{b}{a}, b < 0, a \geq 0. \end{cases}$$

За допомогою модуля та аргументу комплексне число може бути записане у вигляді:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

який *<u>називається</u>* **тригонометричною формою комплексного числа**.

Зручно запровадити комплексне число $\overline{z}$, яке *<u>називається</u>* **спряженим** до числа z:

якщо

$$z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

то

$$\overline{z} = a - ib = |z|(\cos(2\pi - \varphi) + i\sin(2\pi - \varphi)).$$

При цьому:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2,$$

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z.$$

Додавання та віднімання комплексних чисел зручно виконувати, коли вони задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i, \text{ тоді } z_1 + z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

Приклад 12.3.1 Обчислимо $z = z_1 + z_2 - 2z_3$, якщо $z_1 = 2-2i$, $z_2 = 2-2\sqrt{3}i$, $z_1 = 6-8i$.

Маємо

$$z = 2-2i+2\sqrt{3}i+12-16i = 16+(14+2\sqrt{3})i.$$

Множення та ділення комплексних чисел можна виконувати при їх заданні як в алгебраїчній, так і в тригонометричній формах, проте зручнішою є остання:

Нехай: $z_1 = a_1 + b_1 i = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = a_2 + b_2 i = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ тоді

$$z_1 + z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1a_2 + b_1b_2)i = |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2+b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Приклад 12.3.2. Знайдемо $z_1 \cdot z_2$ та $\frac{z_1}{z_2}$ для z_1, z_2 вказаних у попередньому прикладі. Запишімо спочатку ї ці числа у тригонометричному вигляді, зобразивши їх на комплексній площині:

$$z_1 = \sqrt{2^2+(-2)^2}\left(\cos\left(2\pi + arctg(-1)\right) - i\sin\left(2\pi + arctg(-1)\right)\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

$$z_2 = \sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}\left(\cos\left(arctg(\sqrt{3})\right) + i\sin\left(arctg(\sqrt{3})\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Таким чином,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + \sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right) =$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Далі

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right).$$

Зазначимо, що при виконанні цих дій ми:

1) Враховуємо основну рівність $i^2=-1$;
2) Якщо вираз $\varphi_1-\varphi_2<0$ то заміняємо його виразом $2\pi+(\varphi_1-\varphi_2)$.

З наведених формул для добутку комплексних чисел випливають **перша та друга формули Муавра:** якщо

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$z^n=|z^n|(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}),$$

де $n=1,2,\ldots$ - довільне натуральне число, $\sqrt[n]{z}$ - арифметичне значення кореня, $k=1,2,\ldots,n-1$.

Приклад 12.3.3. Знайдемо z_1^4 та $\sqrt[3]{z_2}$ для z_1 та z_2, заданих у попередньому прикладі:

$$z_1^4=\left(2\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=64\left(\cos\left(7\pi\right)+i\sin\left(7\pi\right)\right)=-64.$$

$$\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)\right).$$

при $k=0$ маємо перше значення кореня

$$z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right),$$

відповідно,

$$k=1,\quad z_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$k=2,\quad z_3=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

Якщо вираз $n\varphi$ виходить за межі проміжку $[0;2\pi]$, то він зменшується відніманням виразу $2\pi m$ до попадання в цей інтервал. Дуже важливо, що для $z\neq 0$ існує n **різних значень коренів** n **-го степеня** (які відповідають значенням $k=0,1,\ldots,(n-1)$).

Виникнення комплексних чисел було пов'язане із потребами вищої алгебри – тобто, з розв'язуванням алгебраїчних рівнянь вищих степенів. Так, наприклад, вони дозволяють розв'язувати квадратні рівняння і у випадку від'ємного дискримінанта.

$$ax^2+bx+c=0,$$

$$D=b^2-4ac<0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}i}{2a}.$$

Приклад 12.3.4. Нехай $x^2-6x+25=0$, тоді

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 25}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}.$$

Звідки

$$x_1=3+4i,\ x_2=3-4i.$$

Взагалі ж, має місце **основна теорема алгебри**:

Алгебраїчне рівняння n-го степеня з комплексними коефіцієнтами має n комплексних коренів з врахуванням їх кратності.

Розглянемо основні властивості многочленів та, відповідно, рівнянь n-го степеня.

1) Многочлен n-го степеня

   $Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

   тотожньо дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли

   $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

2) Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні всі їх коефіцієнти при однакових степенях змінної.

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{n}}(\mathrm{x}) = \mathrm{b}_0\mathrm{x}^{\mathrm{n}} + \mathrm{b}_1\mathrm{x}^{\mathrm{n}-1} + \ldots + \mathrm{b}_{\mathrm{n}-1}\mathrm{x} + \mathrm{b}_{\mathrm{n}},$$

$$P_n = Q_n \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1, \\ \vdots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

3) Має місце **теорема Безу**:

$$Q_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + Q(a),$$

   де a – довільне комплексне число, $Q_{n-1}(x)$ - деякий многочлен $(n-1)$ степеня.

З теореми Безу випливає, що коли $x_1, \ldots, x_n$ - корені рівняння $Q_n(x) = 0$, то для $Q_n(x)$ має місце **кореневий розклад** :

$$Q_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

4) Якщо всі коефіцієнти многочлена – дійсні, то серед його коренів разом з будь-яким коренем $z = a + ib$ присутній і спряжений $z = a - ib$.

Таким чином, кореневий розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами має вигляд:

$$Q_n(x) = a_0(x-x_1)\ldots(x-x_k)\cdot(x-x_{k+1})^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_{k+l})^{m_l}\cdot$$
$$\cdot(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2 + p_{i+r}x + q_{i+r})^{s_r},$$

де $x_1,\dots,x_k$ - прості дійсні корені многочлена, $x_{k+1},\dots,x_k$ - дійсні корені кратності, відповідно, $m_1,\dots,m_l$; тричлени $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_ix+q_i$ мають від'ємні дискримінанти та визначають, відповідно, спряжені пари простих комплексних коренів z_1 та $\bar{z}_1$ z_{s_1} та z_{s_r}; аналогічно, многочлени з від'ємними дискримінантами $x^2+p_{i+1}x+q_{i+1},\dots,x^2+p_{i+r}x+q_{i+r}$ визначають спряжені пари комплексних коренів кратності $s_1,\dots,s_r$.

Нехай тепер $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - правильний раціональний дріб, тоді елементарні дроби, на які він розкладається, визначаються за кореневим розкладом знаменника:

- простому дійсному кореню α відповідає один елементарний дріб

$$\frac{A}{x-\alpha}$$

- дійсному кореню β кратності k відповідає k елементарних дробів:

$$\frac{B_1}{x-\beta},\frac{B_2}{\left(x-\beta\right)^2},\dots,\frac{B_k}{(x-\beta)^k}$$

- спряженій парі простих комплексних коренів, які відповідають тричлену x^2+px+q - один елементарний дріб $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$;
- спряженій парі комплексних коренів кратності s, які відповідають тричлену $x^2+p_tx+q_t$ – s елементарних дробів:

$$\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_tx+q_t};\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_tx+q_t)^2};\dots\frac{E_sx+F_s}{(x^2+p_tx+q_t)^s}.$$

12.4. Метод найменших квадратів

При проведенні різноманітних економічних досліджень встановлення функціонального зв'язку між змінними x та y здійснюється за допомогою зведених у таблицю результатів спостережень:

x	x_1	$\dots$	x_n
y	y_1	$\dots$	y_n

На практиці значення $y_1,\dots,y_n$ містять пов'язані з різними обставинами похибки, тобто експериментально отримані точки відхиляються від реального графіка залежності $y=f(x)$ (рис. 12.4.1).

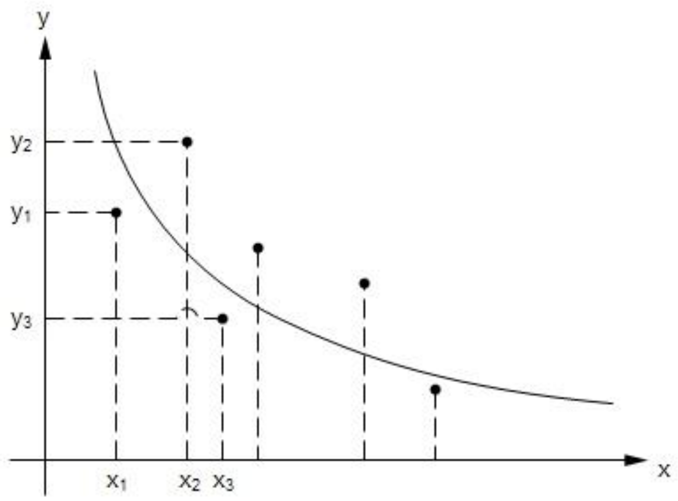


Рис. 12.4.1

Отримання формули для функціональної залежності $y=f(x)$, таким чином, вимагає **згладження експериментальних даних**, в результаті чого виникає **емпірична формула** $y=f(x)$. При її побудові, перш за все, обирають тип функції: лінійний, квадратичний, логарифмічний т. д., при цьому використовують як математичні формули, так і теоретичні передбачення, досвід попередніх досліджень та інші міркування. Після завершення першого етапу постає **задача визначення параметрів**, які дозволяють встановити конкретний вигляд функції. Для лінійної залежності

$y = ax + b$ це коефіцієнти a і b для квадратичної $y = ax^2 + bx + c$ - коефіцієнти a, b, c - так само і для інших типів функцій. Найбільш розповсюджений при цьому є **метод найменших квадратів**: вибираються такі значення параметрів, для яких вираз $(y_1 - \tilde{f}(x_1))^2 + (y_2 - \tilde{f}(x_2))^2 + \ldots + (y_n - \tilde{f}(x_n))^2$ приймає найменше значення. Розглянемо застосування такого методу для $f(x) = ax + b$.

Маємо функцію $S(a,b) = (y_1 - ax_1 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)^2$.

Її критичні точки знаходяться з системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2(y_1 - ax_1 - b)(-1) + \ldots + 2(y_n - ax_n - b)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2(y_1 - ax_1 - b)(-1) + \ldots + 2(y_n - ax_n - b)(-1) = 0 \end{cases},$$

переписуючи яку в більш компактному вигляді, отримуємо

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Легко показати, що визначник цієї системи додатний, тобто вона має єдиний розв'язок, аналогічно можна перевірити, що значення $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} - (\dfrac{\partial^2 S}{\partial a \partial b})^2$ та $\dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2}$ - додатні. Таким чином, отримані в результаті розв'язання цієї системи значення a та b дійсно визначають пряму $y = ac + b$, яка найменше відхиляється у середньоквадратичному сенсі від отриманих шляхом спостережень точок на координатній площині Oxy (рис.12.4.2) .

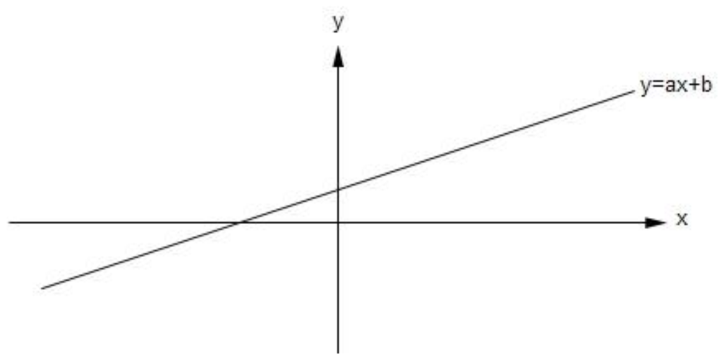


Рис. 12.4.2

Приклад 12.4.1. Нехай відомо, що певна торгівельна точка при ціні на яблука у 6 грн./кг реалізувала 900 кілограмів яблук, при ціні 7 грн./кг – 810 кг., при ціні 9 грн./кг – 610 кг., при ціні 10 грн./кг -550 кг. Спробуємо побудувати залежність попиту на яблука від ціни.

Маємо таблицю

x	6	7	8	9	10
y	900	810	730	610	550

і, відповідно, систему для знаходження коефіцієнтів a та b передбачуваної лінійної залежності

$$\begin{cases} 330a + 40b = 27900, \\ 40a + 5b = 3600. \end{cases}$$

Розвя'зуючи цю систему, отримуємо $a = -90,\ b = 1440,$ тобто передбачувана лінійна залежність має вигляд (рис. 12.4.3)

$$y = -90x + 1440,$$

і, наприклад, передбачуваний об'єм реалізації яблуку при ціні 11 грн./кг складатиме 450 кг.

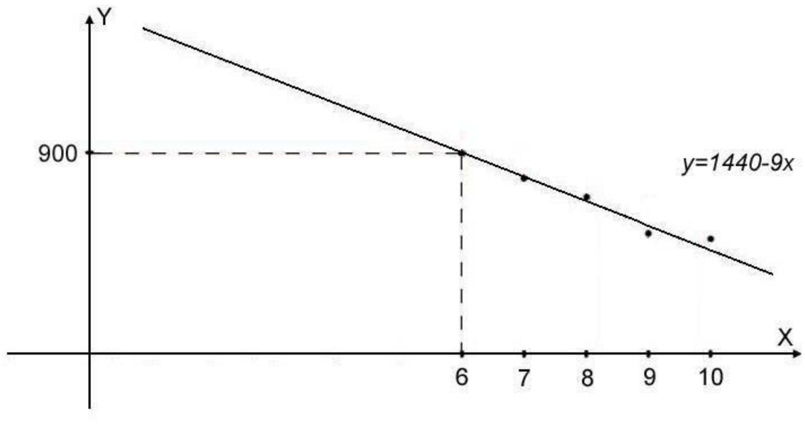
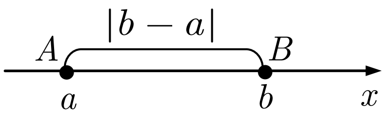


Рис. 12.4.3

12.5. ДОДАТКИ

12.5.1. ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Модуль, ціла та дробові частини дійсного числа

❶ ***Модуль дійсного числа.*** *Модулем* (*абсолютною величиною*) дійсного числа x називають число $$\left\lvert x \right\rvert = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$	❷ ***Властивості модуля.*** ① $x = y \Rightarrow \left\lvert x \right\rvert = \left\lvert y \right\rvert$; ② $\left\lvert x \right\rvert \ge 0$; ③ $-\left\lvert x \right\rvert \le x \le \left\lvert x \right\rvert$; ④ $\left\lvert x \right\rvert = \left\lvert -x \right\rvert$; ⑤ $\left\lvert xy \right\rvert = \left\lvert x \right\rvert \left\lvert y \right\rvert$; ⑥ $\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\left\lvert x \right\rvert}{\left\lvert y \right\rvert}$
❸ ***Геометричний зміст модуля***. Віддаль між точками $A(a)$ та $B(b)$ числової прямої дорівнює $\left\lvert b-a \right\rvert$.  	
❹ ***Ціла частина числа.*** *Цілою частиною* числа x називають найбільше ціле число, яке не перевищує числа x і позначають $[x]$.	❺ ***Дробова частина числа.*** *Дробовою частиною* числа x називають число $$\{x\} = x - [x].$$
❻ ***Середнє арифметичне.*** *Середнім арифметичним* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називають число $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.	❼ ***Середнє геометричне.*** *Середнім геометричним* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називають число $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Деякі важливі нерівності

❶ ***Нерівності з модулем***	① $\left\lvert x+y \right\rvert \le \left\lvert x \right\rvert + \left\lvert y \right\rvert$ (*нерівність трикутника*); ② $\left\lvert x \right\rvert - \left\lvert y \right\rvert \le \left\lvert x-y \right\rvert \le \left\lvert x \right\rvert + \left\lvert y \right\rvert$

❷ ***Нерівність Коші***	$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$
❸ ***Нерівність Бернуллі***	$(1+h)^n \geq 1 + nh, h > -1, n \in \mathbb{N}$

Степені, корені, логарифми

❶ ***Степені.*** $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ разів}} \ (n \in \mathbb{N})$ $x^0 = 1 \ (x \neq 0);\ x^1 = x;$ $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a} \ \ (x \neq 0, a \in \mathbb{R})$	❷ ***Властивості степенів.*** ① $x^a x^b = x^{a+b};$ ② $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b};$ ③ $(x^a)^b = x^{ab};$ ④ $(xy)^a = x^a y^a$
❸ ***Арифметичний корінь n-го степеня.*** *Арифметичним коренем n-го степеня* з невід’ємного числа x називають невід’ємне число $a = \sqrt[n]{x}$, таке що $a^n = x$. Для від’ємних чисел x: $\sqrt[2n]{x} -$ не існує; $\sqrt[2n-1]{x} = -\sqrt[2n-1]{-x}.$	❹ ***Властивості коренів.*** ① $(\sqrt[n]{a})^n = a;$ ② $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
❺ ***Логарифми.*** *Логарифмом* додатного числа x за основою $a \ (a > 0, a \neq 1)$ називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб одержати число x і позначають $\log_a x$. $\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x.$ $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$ $\log_{10} x = \lg x$ — *десятковий логарифм*; $\log_e x = \ln x$ — *натуральний логарифм.*	❻ ***Властивості логарифмів.*** Для $x, y > 0$ правдиві співвідношення: ① $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$ ② $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$ ③ $\log_{a^r} x^p = \dfrac{p}{r} \log_a x;$ ④ $\log_a a^x = x;\ \ a^{\log_a x} = x, x > 0;$ ⑤ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a};$

	⑥ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} = \dfrac{\ln b}{\ln a} = \dfrac{\lg b}{\lg a}$; ⑦ $x^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x}, x > 0$

Многочлени

❶ ***Многочлен n-го степеня.*** $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$.	
$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ — *коефіцієнти многочлена*; a_0x^n — *старший член многочлена*; a_0 — *старший коефіцієнт*; a_n — *вільний член многочлена*. Число x_0 називають *коренем* многочлена $P_n(x)$, якщо $P_n(x_0) = 0$.	$P_0(x) = a_0$ — *стала*; $P_1(x) = a_0x + a_1$ — *лінійний двочлен*; $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ — *квадратний тричлен*.
❷ ***Властивості многочленів.*** ① Два многочлени $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ тотожно рівні, якщо вони: 1) однакового степеня $(n = m)$; 2) мають рівні коефіцієнти при однакових степенях. ② Цілі корені многочлена з цілими коефіцієнтами можуть бути лише дільниками його вільного члена.	③ ***Теорема Безу.*** Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - a$ дорівнює значенню цього многочлена для $x = a$: $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + P_n(a)$. ④ Якщо $x = x_0$ — корінь многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$.
❸ ***Квадратний тричлен*** $ax^2 + bx + c$. $D = b^2 - 4ac$ — *дискримінант*; x_1, x_2 — корені многочлена.	
① ***Вилучення повного квадрату.***	③ ***Розклад на множники.*** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

② ***Корені.***

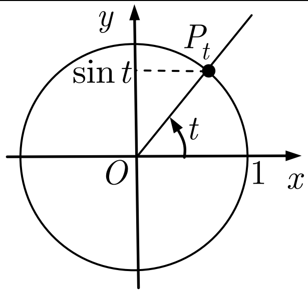
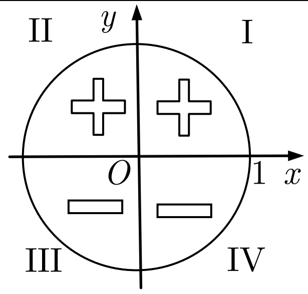
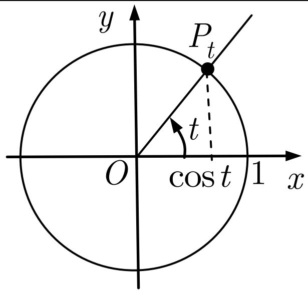
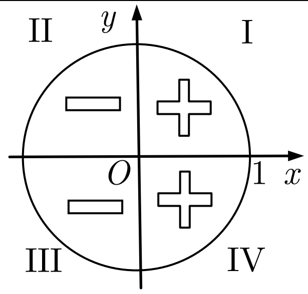
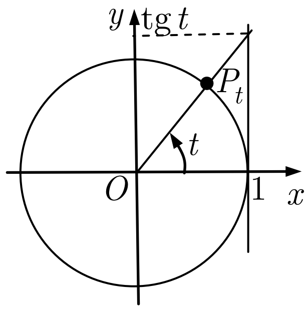
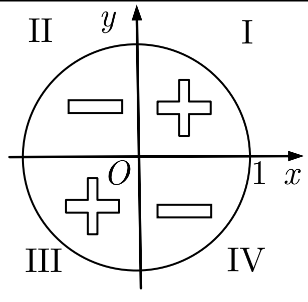
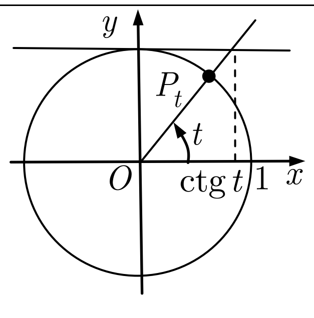
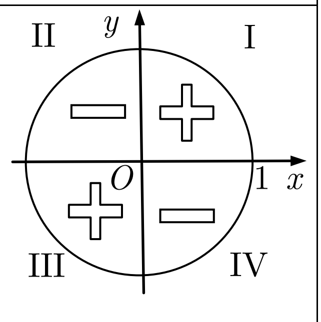
$D < 0$	$D \geq 0$
не має коренів	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

x_1, x_2 — корені многочлена.

④ ***Теорема Вієта.***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Тригонометричні функції

❶ ***Синус.*** *Синусом* числа t називають ординату точки P_t одиничного кола і позначають $\sin t$. $$\sin(t + 2\pi k) = \sin t, k \in \mathbb{Z};$$ $$\sin(-t) = -\sin t$$		
❷ ***Косинус.*** *Косинусом* числа t називають абсцису точки P_t одиничного кола і позначають $\cos t$. $$\cos(t + 2\pi k) = \cos t, k \in \mathbb{Z},$$ $$\cos(-t) = \cos t$$		
❸ ***Тангенс.*** *Тангенсом* числа t називають ординату точки перетину прямої $x = 1$ (осі тангенсів) із променем OP_t. $$\mathrm{tg}(t + \pi k) = \mathrm{tg}\, t, k \in \mathbb{Z};$$ $$\mathrm{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}\, t$$		
❹ ***Котангенс.*** *Котангенсом* числа t називають абсцису точки перетину прямої $y = 1$ (осі котангенсів) із променем OP_t. $$\mathrm{ctg}(t + \pi k) = \mathrm{ctg}\, t, k \in \mathbb{Z};$$ $$\mathrm{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}; \ \mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}\, t$$		

5 ***«Стандартні» значення.***

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

6 ***Формули зведення.***

	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\pi-x$	$\pi+x$
sin	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
cos	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
tg	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$
ctg	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

Тригонометричні формули

1 ***Основні тригонометричні тотожності.***

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

② $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$

③ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

④ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

2 ***Формули додавання.***

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x;$

② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$

③ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$

④ $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$

3 ***Формули кратних аргументів.***

① $\sin 2x = 2\sin x \cos x;$

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$

③ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$

④ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

4 ***Формули зниження степеня.***

① $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2};$

② $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

5 ***Формули половинного аргументу***

① $\sin \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}};$

④ $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}, t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2};$

② $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$; ③ $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$	⑤ $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; ⑥ $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}, t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$
❻ ***Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.*** ① $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$; ② $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$; ③ $2\sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$	❼ ***Перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.*** ① $\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x \pm y}{2}\cos\dfrac{x \mp y}{2}$; ② $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$; ③ $\cos x - \cos y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{y-x}{2}$

Обернені тригонометричні функції

❶ ***Арксинус.*** *Арксинусом* числа x називають число $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює x і позначають $\arcsin x$. $\arcsin x = t \Rightarrow \sin t = x$; $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1;1]$; $\arcsin(-x) = -\arcsin x$	❷ ***Арккосинус.*** *Арккосинусом* числа x називають число $t \in \left[0;\pi\right]$, косинус якого дорівнює x і позначають $\arccos x$. $\arccos x = t \Rightarrow \cos t = x$; $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1;1]$; $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
❸ ***Арктангенс.*** *Арктангенсом* числа x називають число $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює x і позначають $\operatorname{arctg} x$. $\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \operatorname{tg} t = x$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$	❹ ***Арккотангенс.*** *Арккотангенсом* числа x називають число $t \in \ 0;\pi$, котангенс якого дорівнює x і позначають $\operatorname{arcctg} x$. $\operatorname{arcctg} x = t \Rightarrow \operatorname{ctg} t = x$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$
❺ ***«Стандартні» значення.***	

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

❻ ***Основні тотожності.***

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Гіперболічні функції

❶ ***Гіперболічний синус.***

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

❷ ***Гіперболічний косинус.***

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$

❸ ***Гіперболічний тангенс.***

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$
$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

❹ ***Гіперболічний котангенс.***

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, x \neq 0;$$
$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$

❺ ***«Стандартні» значення.***

$$\operatorname{sh} 0 = 0;$$
$$\operatorname{ch} 0 = 1;$$
$$\operatorname{th} 0 = 0$$

❻ ***Основні тотожності.***

① $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

② $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1;$

③ $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

④ $1 - \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

❼ ***Формули подвійного аргументу.***

① $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x;$

② $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

❽ ***Формули зниження степеня.***

① $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2};$

② $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$

Розв’язання основних рівнянь

❶ ***Показникове рівняння*** $a^x = b, a > 0, a \neq 1$	① $b > 0 \Rightarrow x = \log_a b$; ② $b \leq 0 \Rightarrow x \in \varnothing$
❷ ***Логарифмічне рівняння*** $\log_a x = b, a > 0, a \neq 1$	$x = a^b$
❸ ***Тригонометричне рівняння*** $\sin x = a$	① $\left\|a\right\| \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; ② $\left\|a\right\| > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$
❹ ***Тригонометричне рівняння*** $\cos x = a$	① $\left\|a\right\| \leq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; ② $\left\|a\right\| > 1 \Rightarrow x \in \varnothing$
❺ ***Тригонометричне рівняння*** $\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
❻ ***Тригонометричне рівняння*** $\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Прогресії

Арифметична прогресія	***Геометрична прогресія***
Характеристична властивість	
❶ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2$	❷ $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, n \geq 2$
Формула n ***-го члена***	
❸ $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + d(n-1)$	❹ $b_n = b_{n-1} q = b_1 q^{n-1}$
Формула суми n ***перших членів***	

❺ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	❻ $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Математична символіка

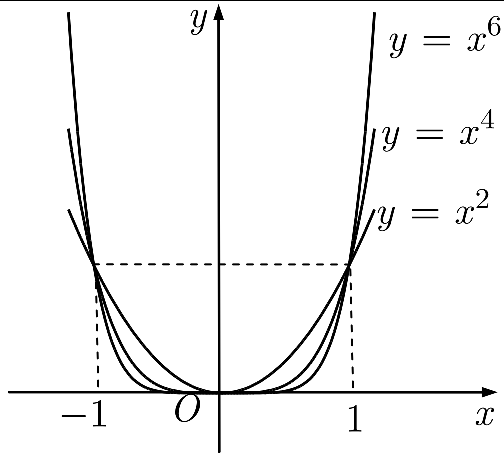
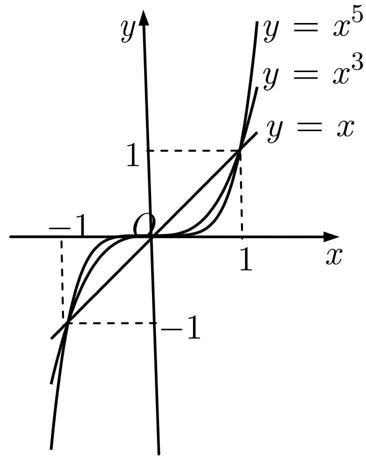
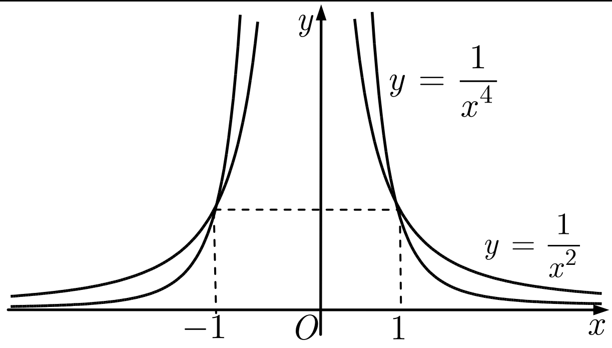
❶ ***Квантор існування*** $\exists$ — «існує», «знайдеться»	«існує x такий, що виконано $A(x)$» $\exists x : A(x)$
❷ ***Квантор спільності*** $\forall$ — «для будь-якого», «для всіх»	«для будь-якого x виконано $A(x)$» $\forall x : A(x)$
❸ ***Імплікація***	«з A випливає B», «якщо A, то B» $A \Rightarrow B$
❹ ***Еквіваленція***	«A тоді й лише тоді, коли B» $A \Leftrightarrow B$
❺ ***Заперечення***	«не A» $\bar{A}$
❻ ***Правила заперечення кванторів***	1) $\overline{\exists x : A(x)} \Leftrightarrow \forall x : \bar{A}(x)$; 2) $\overline{\forall x : A(x)} \Leftrightarrow \exists x : \bar{A}(x)$
❼ ***Необхідна і достатня умови.*** Нехай правдива теорема $P \Rightarrow Q$	P — достатня умова для Q; Q — необхідна умова для P
❽ ***Принцип математичної індукції.*** Якщо: 1) твердження $P(n), n \in \mathbb{N}$, правдиве для $n = 1$; 2) з правдивості твердження $P(k)$ випливає правдивість твердження $P(k+1)$, то твердження $P(n)$ правдиве для всіх натуральних n.	***Схема методу математичної індукції.*** ① Перевіряють правдивість твердження $P(n)$ для $n = 1$. ② Припускаючи правдивість твердження $P(k)$, доводять твердження $P(k+1)$. ③ Висновують правдивість твердження $P(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

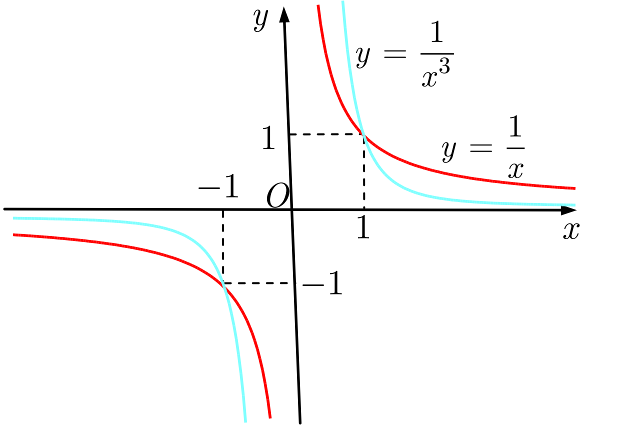
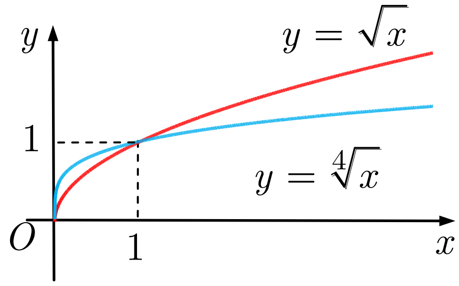
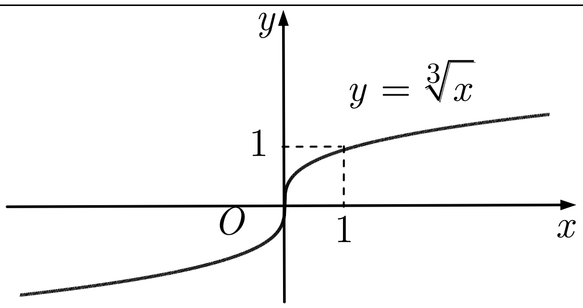
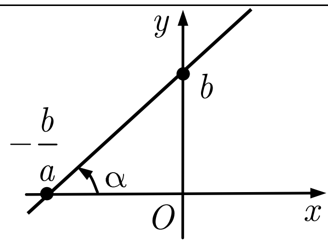
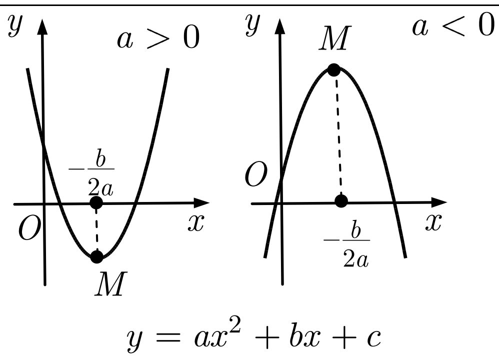
Скорочені позначення. Біноміальна формула Ньютона

❶ ***Факторіал.*** $$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n;$$ $$0! = 1$$	$$(n+1)! = n!(n+1)$$
❷ ***Сума*** n доданків $a_1, a_2, ..., a_n$	$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
❸ ***Біноміальний коефіцієнт*** $$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$	① $C_n^k = C_n^{n-k}, k = \overline{0, n};$ ② $C_n^0 = C_n^n = 1;$ ③ $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, k = \overline{0, n-1}$
❹ ***Біноміальна формула Ньютона.*** $$(a+b)^n = b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + ... + C_n^{n-1} a^{n-1} b + a^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$	
❺ ***Випадки формули Ньютона.*** $(a \pm b)^0 = 1$ $(a \pm b)^1 = a \pm b$ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3 b + 6a^2 b^2 \pm 4ab^3 + b^4$	❻ ***Паскалів трикутник.*** 1 $\quad C_0^0$ 1 1 $\quad C_1^0 \; C_1^1$ 1 2 1 $\quad C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2$ 1 3 3 1 $\quad C_3^0 \; C_3^1 \; C_3^2 \; C_3^3$ 1 4 6 4 1 $\quad C_4^0 \; C_4^1 \; C_4^2 \; C_4^3 \; C_4^4$
❼ ***Формули скороченого множення.*** ① $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$ ② $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$ ③ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	❽ ***Формули перетворення ірраціональностей.*** ① $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$ ② $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

12.5.2. Функції

Степенева функція

➊ ***Степенева функція*** $y = x^{2n},\ n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0; +\infty)$. Функція парна. Спадає на проміжку $(-\infty; 0)$, зростає на проміжку $(0; +\infty)$. Мінімум у точці $(0; 0)$. Графік — парабола порядку $2n$.	
➋ ***Степенева функція*** $y = x^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Зростає на $\mathbb{R}$. Перегин у точці $O(0; 0)$. Графік — парабола порядку $2n - 1$.	
➌ ***Степенева функція*** $y = \dfrac{1}{x^{2n}},\ n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ E(f) = (0; +\infty)$. Функція парна. Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$. Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота; пряма $y = 0$ — горизонтальна асимптота.	

❹ ***Степенева функція*** $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функція непарна. Спадає на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальна асимптота $y = 0$.	
❺ ***Степенева функція*** $y = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = [0;+\infty),\ E(f) = [0;+\infty)$. Зростає на $[0;+\infty)$.	
❺ ***Степенева функція*** $y = \sqrt[2n-1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Зростає на $\mathbb{R}$.	
❻ ***Лінійна*** функція $y = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. $D(f) = \mathbb{R}$, Графік — пряма лінія з кутовим коефіцієнтом $k = a = \operatorname{tg}\alpha$.	
❼ ***Квадратична функція*** $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, $a \neq 0$.	

❽ ***Дробово-раціональна функція***

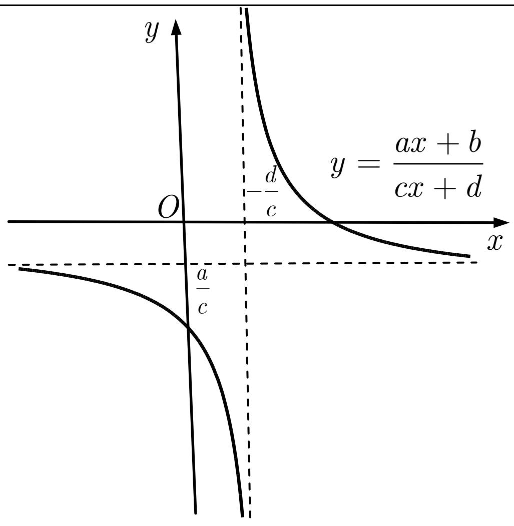
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \\ = \frac{a}{c} + \frac{b - (ad)/c}{cx+d} \ (c \neq 0).$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}; E(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

Функція $\begin{cases} \text{спадає на } D(f), & ad < bc, \\ \text{зростає на } D(f), & ad > bc. \end{cases}$

Вертикальна асимптота $x = -\dfrac{d}{c}$,

горизонтальна асимптота $y = \dfrac{a}{c}$.



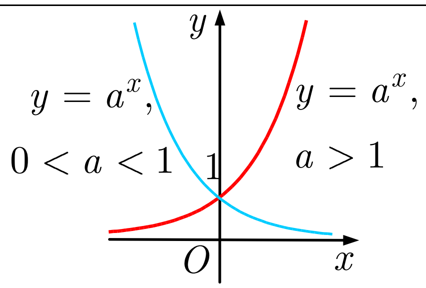
Гіпербола

Показникова і логарифмічна функція

❶ ***Показникова функція*** $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

$$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0; +\infty).$$

Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$

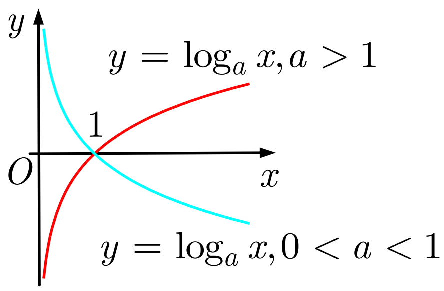


❷ ***Логарифмічна функція***

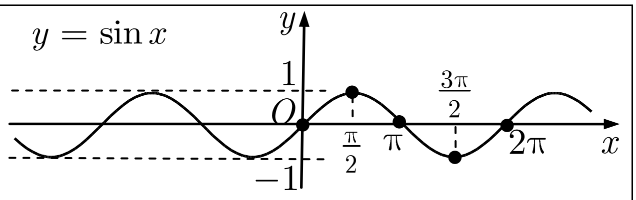
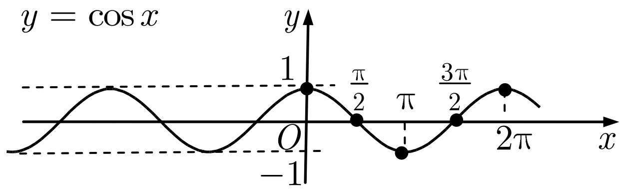
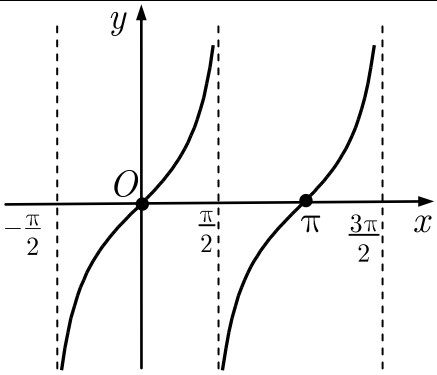
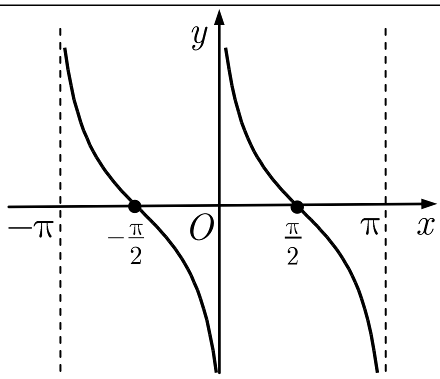
$y = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1$.

$$D(f) = (0; +\infty),\ E(f) = \mathbb{R}.$$

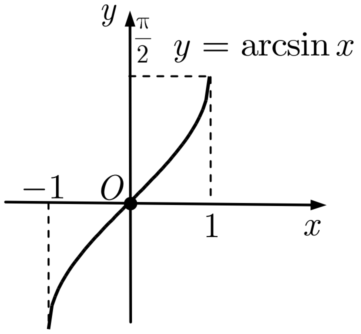
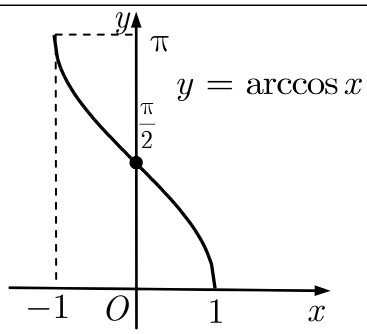
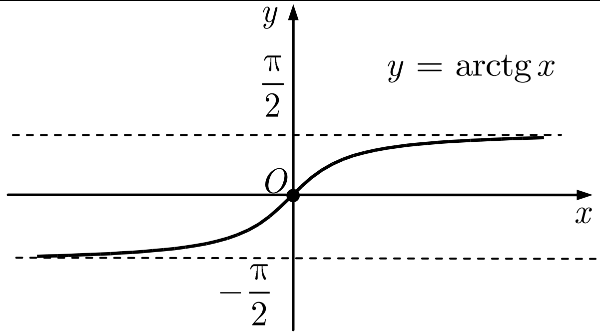
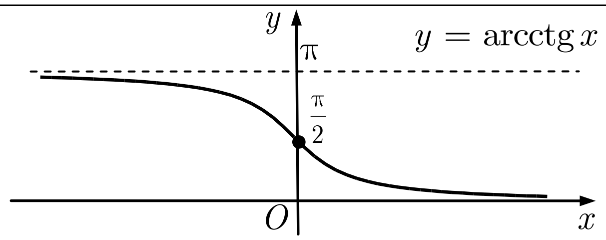
Функція $\begin{cases} \text{спадає на } \mathbb{R}, & 0 < a < 1, \\ \text{зростає на } \mathbb{R}, & a > 1. \end{cases}$



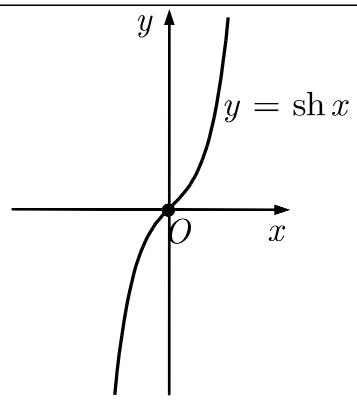
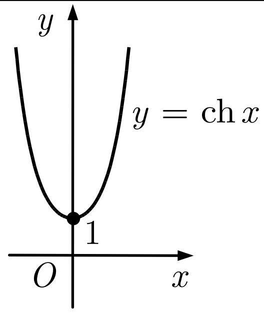
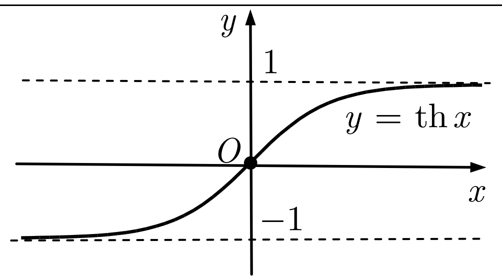
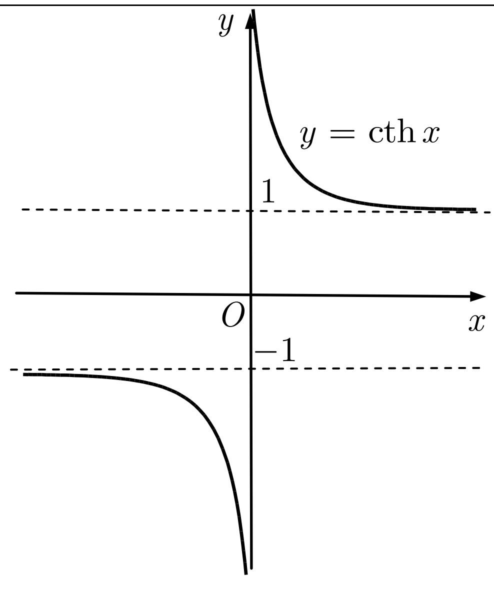
Тригонометричні функції

❶ ***Синус*** $y = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Функція непарна. Періодична з періодом $T = 2\pi$.	 Синусоїда
❷ ***Косинус*** $y = \cos x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [-1;1]$. Функція парна. Періодична з періодом $T = 2\pi$.	 Косинусоїда
❸ ***Тангенс*** $y = \operatorname{tg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Періодична з періодом $T = \pi$. Зростає на $D(f)$. Вертикальні асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	 Тангенсоїда
❹ ***Котангенс*** $y = \operatorname{ctg} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \quad \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \quad , E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Періодична з періодом $T = \pi$. Спадає на $D(f)$. Вертикальні асимптоти $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	 Котангенсоїда

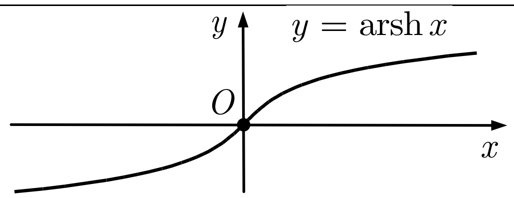
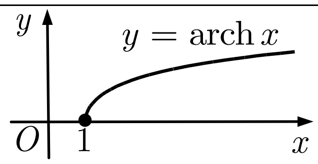
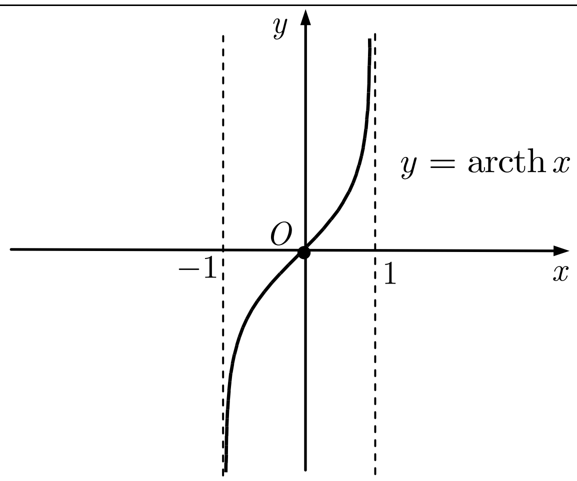
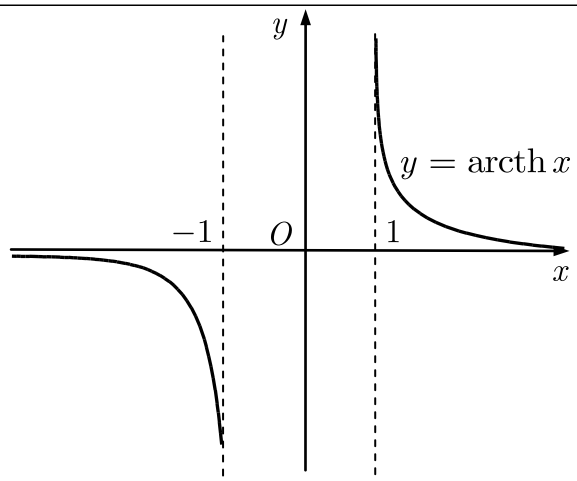
Обернені тригонометричні функції

❶ ***Арксинус*** $y=\arcsin x$. $D(f)=[-1;1],\ E(f)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Функція непарна. Зростає на $D(f)$.	
❷ ***Арккосинус*** $y=\arccos x$. $D(f)=[-1;1],\ E(f)=[0;\pi]$. Функція спадає на $D(f)$.	
❸ ***Арктангенс*** $y=\operatorname{arctg} x$. $D(f)=\mathbb{R},\ E(f)=\ -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\ .$ Функція непарна. Зростає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y=\pm\frac{\pi}{2}$.	
❹ ***Арккотангенс*** $y=\operatorname{arcctg} x$. $D(f)=\mathbb{R},E(f)=\ 0;\pi\ .$ Функція спадає на $D(f)$. Горизонтальні асимптоти $y=0,\ y=\pi$.	

Гіперболічні функції

❶ ***Гіперболічний синус*** $y = \operatorname{sh} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}$. Функція непарна. Зростає на $\mathbb{R}$.	
❷ ***Гіперболічний косинус*** $y = \operatorname{ch} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [1; +\infty)$. Функція парна.	
❸ ***Гіперболічний тангенс*** $y = \operatorname{th} x$. $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (-1; 1)$. Функція непарна. Зростає на $\mathbb{R}$. Горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.	
❹ ***Гіперболічний котангенс*** $y = \operatorname{cth} x$. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$. Функція непарна. Спадає на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$. Вертикальна асимптота $x = 0$, горизонтальні асимптоти $y = \pm 1$.	

Обернені гіперболічні функції

❶ ***Ареасинус*** $$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$ $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}.$ Функція непарна. Зростає на $D(f)$.	
❷ ***Ареакосинус*** $$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$ $D(f) = [1;+\infty), E(f) = [0;+\infty)$ Функція зростає на $D(f)$.	
❸ ***Ареатангенс*** $$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$ $D(f) = (-1;1), E(f) = \mathbb{R}.$ Функція непарна. Зростає на $D(f)$. Вертикальні асимптоти $x = \pm 1$.	
❹ ***Ареакотангенс*** $$y = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus [-1;1],\ E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$ Функція непарна. Спадає на $(-\infty;-1), (1;+\infty)$. Вертикальні асимптоти $x = \pm 1$, горизонтальна асимптота $y = 0$.	

Деякі неелементарні функції

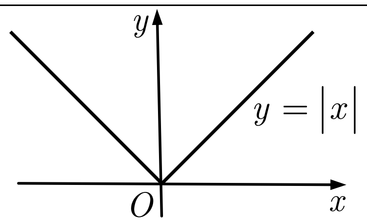
❶ ***Основні елементарні функції.*** До *основних елементарних функцій* належать: стала, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні й обернені тригонометричні функції.

❷ ***Клас елементарних функцій.*** Всі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також їхні суперпозиції, утворюють *клас елементарних функцій.*

❸ ***Функція модуль*** $y = |x|$.

$$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0;+\infty).$$

Функція парна.

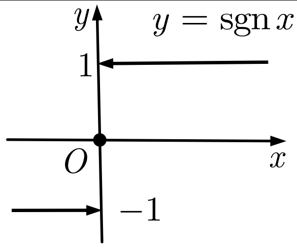


❹ ***Функція знак числа (сигнум)***

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \{-1, 0, 1\}.$$

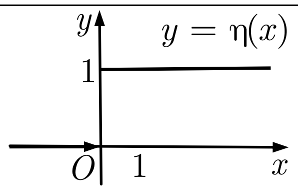
Функція непарна.



❺ ***Функція Гевісайда***

$$y = \eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \{0, 1\}.$$

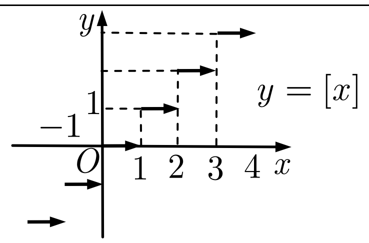


❻ ***Ціла частина числа***

$$y = [x] = n,$$

де $x = n + r, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq 1 < r$.

$$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{Z}.$$

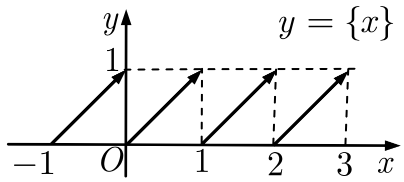


❼ ***Дробова частина числа***

$$y = \{x\} = x - [x]$$

$$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [0;1).$$

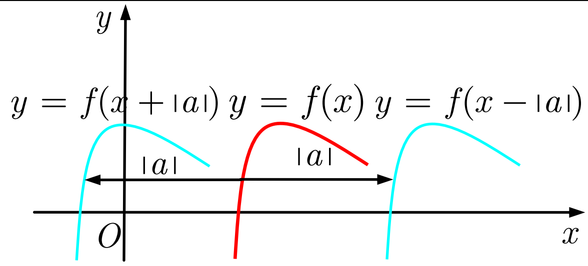
Періодична з періодом $T = 1$.



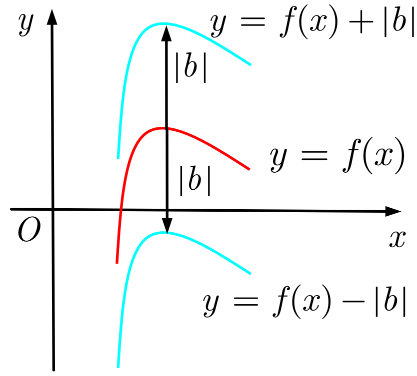
Геометричні перетворення графіків функцій

<table>
<tr>
<td>❶ Паралельне перенесення вздовж осі Ox: $y = f(x - a)$.

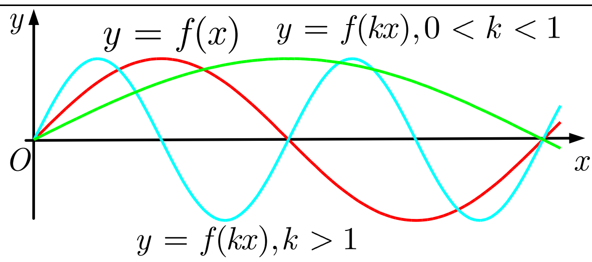
Графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a

(праворуч для $a > 0$, ліворуч для $a < 0$)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❷ Паралельне перенесення вздовж осі Oy: $y = f(x) + b$.

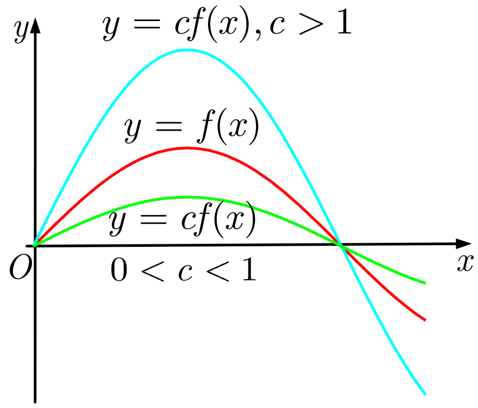
Графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b

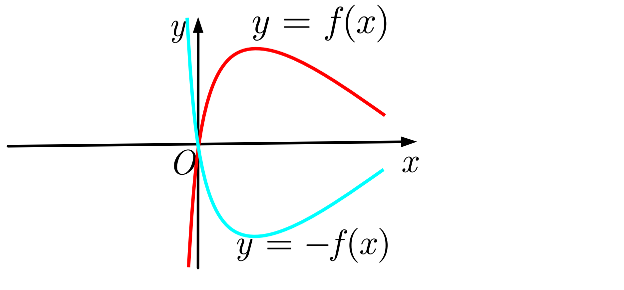
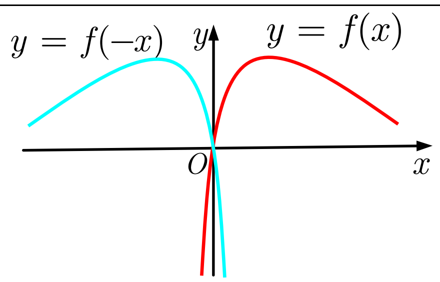
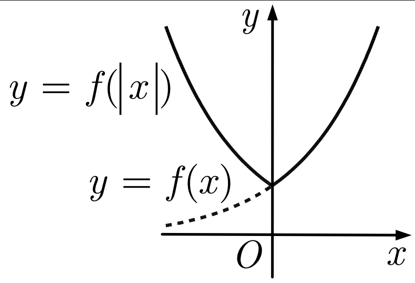
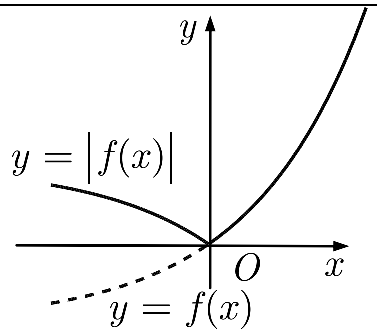
(угору для $b > 0$, униз для $b < 0$)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❸ Стискання (розтягування) вздовж осі Ox : $y = f(kx)$.

Графік $y = f(x)$ розтягують у $\frac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ уздовж осі Ox чи

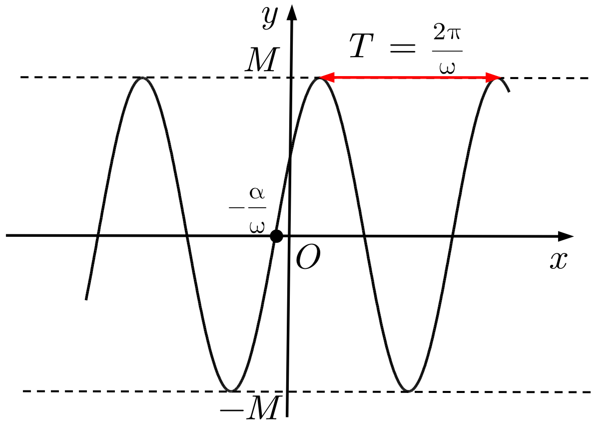
стискають у k разів $(k > 1)$ уздовж осі Ox</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>❹ Стискання (розтягування) вдовж осі Oy: $y = cf(x)$.

Графік $y = f(x)$ стискають в $\frac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ уздовж осі Oy чи

розтягують у c разів $(c > 1)$ уздовж осі Oy</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

❺ ***Дзеркальне відбиття щодо осі*** Ox: $y = -f(x)$. Графік $y = f(x)$ симетрично відображують Γ щодо осі Ox	
❻ ***Дзеркальне відбиття щодо осі*** Oy: $y = f(-x)$. Графік $y = f(x)$ симетрично відображують Γ щодо осі Oy	
❼ ***Графік*** $y = f\ \left\|x\right\|\ .$ Графік $y = f(x), x \geq 0,$ не міняють і відображують симетрично щодо осі Oy	
❽ ***Графік*** $y = \left\|f(x)\right\|$. Графік $y = f(x), y \geq 0,$ не міняють і відображають графік $y = f(x), y < 0,$ симетрично щодо осі Ox	

Гармонічне коливання

❶ ***Гармонічне коливання*** $$y = M\sin(\omega t + \alpha),$$ де t — час, $M > 0$ — *амплітуда*, $\omega > 0$ — *частота* (колова), $\omega t + \alpha$ — *фаза*, α — *початкова фаза*.	

❷ ***Формула доповняльного кута***	$A\sin\omega t + B\cos\omega t = M\sin(\omega t + \alpha)$, $M = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \\ \sin\alpha = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$

Числові послідовності

❶ ***Числова послідовність.*** *Числовою послідовністю* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots = \{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, називають числову функцію $x_n = f(n)$ означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$.	$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — *члени послідовності;* $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, — n -ий або загальний член послідовності	
❷ ***Обмежена*** послідовність $\{x_n\}$	$\exists M > 0\ \forall n : \lvert x_n \rvert \le M$	
❸ ***Необмежена*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall M > 0\ \exists n : \lvert x_n \rvert > M$	
Монотонні послідовності $\left(\Delta = x_{n+1} - x_n;\quad q = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}, x_n > 0\right)$		
❹ ***Зростаюча*** послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \nearrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$	
	$\Delta > 0$	$q > 1$
❺ ***Неспадна*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le x_{n+1}$	
	$\Delta \ge 0$	$q \ge 1$
❻ ***Спадна*** послідовність $\{x_n\}$ $\{x_n\} \searrow$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1}$	
	$\Delta < 0$	$q < 1$
❼ ***Незростаюча*** послідовність $\{x_n\}$	$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge x_{n+1}$	
	$\Delta \le 0$	$q \le 1$

Границя послідовності

❶ ***Границя*** числової послідовності x_n $$a=\lim_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\forall n>N_\varepsilon \Rightarrow x_n\in U_\varepsilon(a).$$	
❷ ***Збіжні (розбіжні) послідовності.*** Якщо $a\in\mathbb{R}$, то послідовність називають *збіжною*.	Якщо $a=\infty, \pm\infty$ або не існує, то послідовність називають *розбіжною*.
❸ ***Збіжна*** послідовність $$\lim_{n\to\infty}x_n=a\in\mathbb{R}$$	$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\forall n>N_\varepsilon\Rightarrow$$ $$\Rightarrow\left\|x_n-a\right\|<\varepsilon$$
❹ ***Нескінченно мала*** послідовність (н. м. п.). $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$	$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\forall n>N_\varepsilon\Rightarrow$$ $$\Rightarrow\left\|\alpha_n\right\|<\varepsilon$$
❺ ***Нескінченно велика*** послідовність (н. в. п.). $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$	$$\forall E>0\ \exists N_E\in\mathbb{N}:\forall n>N_E\Rightarrow$$ $$\Rightarrow\left\|x_n\right\|>E$$
❻ ***Властивості збіжних послідовностей***	
① Збіжна послідовність має єдину границю. ② Збіжна послідовність обмежена. ③ Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ та $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ і, починаючи з деякого номера, $x_n\le y_n$, то $a\le b$.	④ Теорема про три послідовності («про двох вартових»). Якщо $$\lim_{n\to\infty}x_n=a, \lim_{n\to\infty}z_n=a$$ і, починаючи з деякого номера, виконано нерівність $x_n\le y_n\le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.
❼ ***Властивості нескінченно малих послідовностей.***	
① Сума скінченної кількості н. м. п. є н. м. п. ② Добуток обмеженої послідовності на н. м. п. є н. м. п. ③ Добуток скінченної кількості н. м. п. є н. м. п.	④ Якщо $\{x_n\}$ — н. в. п., то $1/x_n$ — н. м. п. Якщо $\{\alpha_n\}$ — н. м. п. і $\alpha_n\ne 0\ \forall n$, то $1/\alpha_n$ — н. в. п. ⑤ ***Теорема про зв'язок збіжної послідовності з її границею і н. м. п.*** Числова послідовність $\{x_n\}$ збігається до числа

	a тоді й лише тоді, коли $x_n = a + \alpha_n$, де α_n — н. м. п.
❽ ***Теорема про арифметичні дії зі збіжними послідовностями.*** Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$, то: ① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$;	② $\lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = Ca, C = \mathrm{const}$; ③ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$; ④ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$.
❾ ***Необхідна умова збіжності послідовності.*** Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.	❿ ***Ознака Веєрштраса*** (достатня умова збіжності послідовності). Якщо монотонна послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то вона збігається.

Деякі важливі границі послідовностей

❶ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$	❷ $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty,\ \alpha > 0$
❸ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	❹ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, a > 0$
❺ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 n^l + a_1 n^{l-1} + \ldots + a_l}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0, & l < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & l = m, \\ \infty, & l > m \end{cases}$	
❻ ***Невизначеності***	$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$
∞ — н. в. п., 0 — н. м. п., 1 — послідовність збіжна до 1	
❼ ***«Визначеності»*** $(a, b \in \mathbb{R})$	
$a + (+\infty) = +\infty$;	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
$a \cdot (+\infty) = +\infty, a > 0$;	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;

$\dfrac{a}{\infty}=0;$	$\dfrac{a}{0}=\infty;$
$0^{+\infty}=0;$	$0^{-\infty}=+\infty;$
$a^{+\infty}=0,\ 0<a<1;$	$a^{+\infty}=+\infty,\ 1<a<+\infty;$
$(+\infty)^{b}=0,-\infty\le b<0;$	$(+\infty)^{b}=+\infty,\ 0<b<+\infty$

Границя функції

❶ ***Означення за Гейне, мовою послідовностей*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\forall\{x_n\}: x_n\in D(f), n\in\mathbb{N}:$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, x_n\neq x_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$
❷ ***Означення за Коші, мовою околів*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\forall U_\varepsilon(A)\ \exists U_\delta(x_0):$ $\forall x\in X\cap U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\Rightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)$
❸ ***Означення за Коші, мовою*** ε-δ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\quad (x_0, A\in\mathbb{R})$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in D(f):$ $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
❹ ***Ліва*** границя $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x<x_0}} f(x)$	❺ ***Права*** границя $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x>x_0}} f(x)$
❻ ***Необхідна і достатня умова існування скінченної границі.*** Функція $f(x), x\in X,$ має скінченну границю в точці x_0 тоді й лише тоді,	коли в цій точці існують рівні границі зліва і справа: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$
❼ ***Нескінченно мала функція*** в точці x_0 (н. м. ф.)	$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$
❽ ***Нескінченно велика функція*** в точці x_0 (н. в. п.)	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\quad$ (або $\pm\infty$)

❾ *Властивості функцій, що мають скінченну границю.*

① Якщо функція має границю в точці, то ця границя єдина.

② Функція, що має скінченну границю в точці, обмежена в деякому околі цієї точки.

③ Якщо функція f має додатну (від'ємну) границю A в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, в якому функція f додатна (від'ємна).

④ Якщо в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$ і існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \leq \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

⑤ Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ і в деякому околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

❿ *Властивості н. м. ф.*

① Алгебрична сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є н. м. ф., коли $x \to x_0$.

② Добуток н. м. ф., коли $x \to x_0$, на обмежену в околі точки x_0 функцію є н. м. ф., коли $x \to x_0$.

③ Якщо $\alpha(x)$ є н. м. ф., коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є н. в. ф., коли $x \to x_0$, і навпаки, обернена до н. в. ф. є н. м. ф., коли $x \to x_0$.

④ ***Теорема про зв'язок функції, її границі і н. м. ф.*** Число A є границею функції f у точці x_0 тоді й лише тоді, коли функцію можна зобразити у вигляді

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$.

⓫ ***Теорема про арифметичні дії з функціями, які мають скінченні границі.*** Якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

то:

① $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

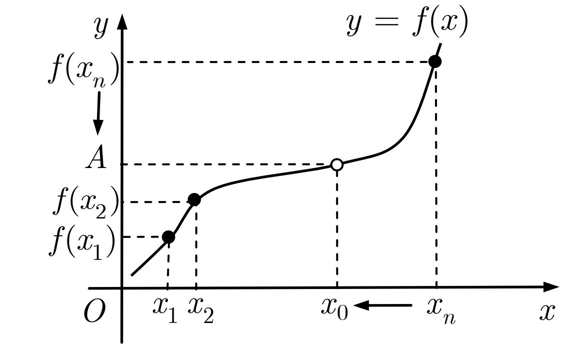
② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N}$;

③ $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = CA$;

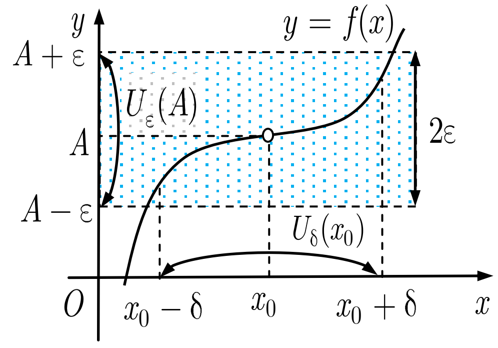
④ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$;

⑤ $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = A^B$.

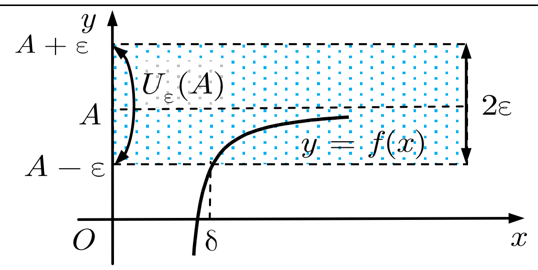
Геометричний зміст границі функції



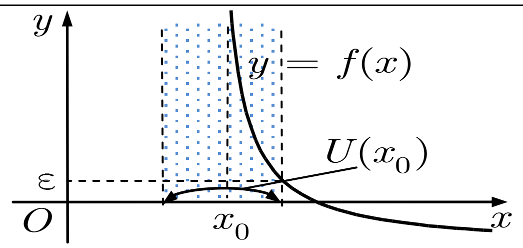
❶ Скінченна границя функції $f(x)$, коли $x \longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ (за Гейне)



❷ Скінченна границя функції $f(x)$ коли $x \longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ (за Коші)



❸ Скінченна границя функції $f(x)$ коли $x \longrightarrow +\infty$ (за Коші)



❹ Нескінченна границя функції $f(x)$, коли $x \longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ (за Коші)

Деякі важливі границі функцій

❶ $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0,\ \alpha > 0$	❷ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^\alpha} = \infty,\ \alpha > 0$
❸ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0$	❹ $\lim\limits_{x \to \infty} x^\alpha = \infty,\ \alpha > 0$
❺ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ \infty, & n > m. \end{cases}$	
❻ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1; \end{cases}$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a > 1; \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$; ❼ $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty$, $a > 1$;	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty$, $0 < a < 1$
❽ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$	❾ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$

Порівняння нескінченно малих функцій

❶ $\alpha(x)$ – *н. м. ф. вищого порядку мализни,* ніж $\beta(x)$, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$	$\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$
❷ $\alpha(x)$ – *н. м. ф. нижчого порядку мализни,* ніж $\beta(x)$, коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$	$\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \to x_0$
❸ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – *н. м. ф. одного порядку мализни, коли* $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$ $= A \neq 0$	$\alpha(x) \asymp \beta(x))$, $x \to x_0$
❹ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – *еквівалентні н. м. ф.,* коли $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$	$\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$
❺ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – *непорівнянні н. м. ф.,* коли $x \to x_0$	$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	
❻ $\alpha(x)$ *н. м. ф. порядку* k *щодо н. м. ф.* $\beta(x)$, *коли* $x \to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C$,	$\alpha(x) \sim C(\beta(x))^k$, $x \to x_0$,
	$C \neq 0, C \neq \infty$; $C(\beta(x))^k$ — головна частина розкладу функції $\alpha(x)$ щодо $\beta(x), x \to x_0$	
❼ Якщо н. м. ф. f еквівалентна функції g, коли $x \to x_0$, то для будь-якої функції $h(x)$ правдиві формули:	❽ Нескінченно малі в точці функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли їхня різниця є н. м. ф. вищого порядку щодо $\alpha(x)$	

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x);$$ $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}.$$	та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, тобто $$\alpha(x)-\beta(x) = o(\alpha(x)),$$ $$\alpha(x)-\beta(x) = o(\beta(x))$$
❾ ① Сума скінченної кількості н. м. ф. різних порядків еквівалентна доданку найменшого порядку. ② Сума скінченної кількості н. в. ф. різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку.	$$f(x) = ax^m + bx^n, m < n:$$ $$f(x) \sim ax^m, x \to 0;$$ $$f(x) \sim bx^n, x \to \infty$$

Визначні границі

❶ ***Перша визначна границя*** $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$	❷ ***Наслідки.*** ① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$ ④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$	
❸ ***Друга визначна границя*** $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e$$	❹ ***Наслідки.*** ① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ ② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ ④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ ⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$	
Формули перетворення степенево-показникових невизначеностей	
❺ $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}$	❻ $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}$

Таблиця еквівалентностей

❶ $\sin x \sim x, x \to 0.$	❻ $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}, x \to 0.$
❷ $\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0.$	❼ $\ln(1+x) \sim x, x \to 0.$
❸ $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, x \to 0.$	❽ $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0.$
❹ $\arcsin x \sim x, x \to 0.$	❾ $e^x - 1 \sim x, x \to 0.$
❺ $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0.$	❿ $(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x, x \to 0.$

Неперервність функції в точці

❶ ***Функція неперервна в точці.*** Функцію $f(x), x \in X,$ називають *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції $f(x)$, коли $x \to x_0$, і ця границя дорівнює значенню функції в точці: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$	❷ ***Функція неперервна зліва в точці.*** Функція $f(x)$ у точці x_0 *неперервна зліва*, якщо $$f(x_0 - 0) = f(x_0).$$ ❸ ***Функція неперервна справа в точці.*** Функція $f(x)$ у точці x_0 *неперервна справа*, якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0).$
❹ ***Критерій неперервності функції в точці.*** Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли	$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$
❺ ***Приріст аргументу*** функції в точці x_0	$\Delta x = x - x_0$
❻ ***Приріст функції*** $f(x)$ в точці x_0	$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
❼ ***Функція неперервна в точці.*** Функцію $f(x), x \in X,$ називають	*неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

❽ ***Властивості функцій неперервних у точці.***

① Функція, неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки.

② Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл $U(x_0)$, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$.

③ Якщо для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ і функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.

④ Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\frac{f}{g}$ (у разі, якщо $g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0.

⑤ Нехай функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

⑥ Основні елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.

Неперервність функції на відрізку

❶ ***Функція неперервна в інтервалі.*** Функцію f називають *неперервною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

❷ ***Функція неперервна на відрізку.*** Функцію f називають *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$ і в точці a неперервна справа, а в точці b — неперервна зліва.

Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.

Властивості неперервних на відрізку функцій

❸ ***Перша теорема Веєрштраса.*** Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, обмежена на ньому.

❹ ***Друга теорема Веєрштраса.*** Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значень.

❺ ***Перша теорема Больцано — Коші.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ і $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c) = 0$.

❻ ***Друга теорема Больцано — Коші.*** Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b], f(a) = A, f(b) = B$, і C — будь-яке число, що лежить між A та B, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка c, в якій $f(c) = C$.

❼ ***Теорема про неперервність оберненої функції.*** Якщо функція f строго монотонна і неперервна на відрізку $[a;b]$, то обернена функція f^{-1} неперервна на $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

Точки розриву функції

❶ ***Точка неперервності***. Точку, в якій функція f неперервна, називають *точкою неперервності* функції f.

❷ ***Точка розриву.*** Точку x_0 називають *точкою розриву* функції f, якщо: функція f або не означена в точці x_0, або f означена в точці x_0, але не є в цій точці неперервною.

Класифікація точок розриву

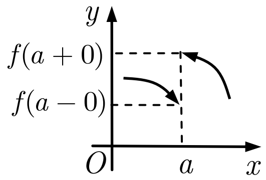
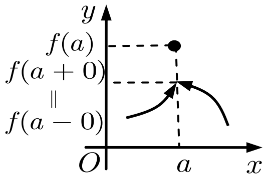
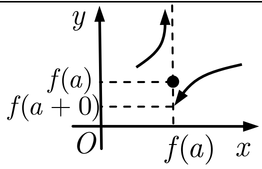
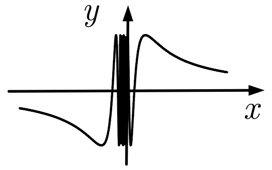
❸ ***Розрив 1-го роду (скінченний розрив)***

$$\exists f(x_0-0), f(x_0+0) < \infty$$

❹ ***Розрив 2-го роду***

1) $\nexists f(x_0-0)$ або $\nexists f(x_0+0)$, або

2) $\exists f(x_0-0)=\pm\infty$ чи $\exists f(x_0+0)=\pm\infty$

Неусувний	Усувний	Нескінченний (полюс)	Істотний
$f(x_0+0)\neq$ $\neq f(x_0-0)$	$f(x_0+0)=$ $=f(x_0-0)$	$\exists f(x_0-0)=\pm\infty$ або $\exists f(x_0+0)=\pm\infty$	$\nexists f(x_0-0)$ або $\nexists f(x_0+0)$
			

❺ ***Алгоритм дослідження функції на неперервність у точці.***

① Знаходять $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$.

② Висновують:

1) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0),$$

то функція $f(x)$ *неперервна в точці* x_0;

2) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$$

або функція не означена в точці x_0, то функція $f(x)$ має *розрив 1-го роду, усувний*, у точці x_0;

3) якщо існують скінченні однобічні границі і

$$f(x_0+0)\neq f(x_0-0),$$

то функція $f(x)$ має *розрив 1-го роду, неусувний*, у точці x_0;

4) якщо існують однобічні границі і хоча б одна з них нескінченна, то функція $f(x)$ має *розрив 2-го роду, нескінченний (полюс)*, у точці x_0 (графік функції має вертикальну асимптоту $x=x_0$);

5) якщо хоча б одна із границь не існує, то функція $f(x)$ має *розрив 2-го роду, істотний*, у точці x_0.

Основна література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. математика для економістів. Вища математика. —К.:Нац. Академія управління, 1997, —382с.
2. Боярский А.К. Математика для экономистов. — М.: Вісшая школа, 1961, —264с.
3. Бугір М.К. математика для економістів.-Тернопіль: Підручники & посібники, 1998, —80с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. —М.: Наука, 1980, —176с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. —М.: Наука. 1980, —482с.
6. Булдигін В.В., Ординська З.П., Репета Л.А. Конспект лекцій для студентів фінансово-економічного профілю. —К.: КПІ, 2008, —200с.
7. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов в 3 ч. — М.: Наука, 1981.
8. Краас В.М. Высшая математика для экономических специальностей. — М.: Высшая школа, 1997, —256с.
9. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. — М.: Юнити, 1998, —378с.
10. Кудрявцев Л.Д., Демидович Б.П. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1984, —592с.
11. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. — М.: Высшая школа, 1986. —296с.
12. Ординська З.П., Репета Л.А., Дем'яненко О.О. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Методичні вказівки до виконання типової роботи з вищої математики Ч.1. — К: КПІ, 2004, —58с.
13. Іванов О.В., Ординська З.П., Репета Л.А., Дем'яненко О.О. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Методичні вказівки до виконання типової розрахункової роботи з

вищої математики Ч.2 — К: КПІ, 2004, —82с.

14. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Ч.1. — М.:Айрис пресс, 2004, —288с.

15. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемнык Ю.Н. Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1998, —240с.

16. Карасев Е.И., Аксютина З.И., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов в 2 ч. — М.: Высшая школа, 1982, —294с.

Додаткова література:

1. Булдигін В.В., Алєксеєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник. — К: ТВіМС, 2011, — 224с.
2. Алєксеєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. — К: НТУУ «КПІ», 2113, — 180с.
3. Алєксеєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. —К:НТУУ «КПІ», 2013. — 252 с.
4. Алєксеєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум.— К: НТУУ «КПІ», 2013.—194 с.
5. Алєксеєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум.—К: НТУУ «КПІ», 2013. — 160 с.