В.В. БАРКОВСЬКИЙ, Н.В. БАРКОВСЬКА

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

5-те видання

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Видавництво
Центр учбової літератури
Київ – 2010

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Б 25

Рецензенти:

Геєць Валерій Михайлович — академік Національної академії наук України, доктор економічних наук;

Валєєв Кім Галямович — професор, доктор фізико-математичних наук.

Барковський В.В., Барковська Н.В.

Б25 Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. — К.: Центр учбової літератури, 2010. — 448 с.

ISBN 978-966-364-991-7

Навчальний посібник «Вища математика для економістів» містить теоретичні відомості всіх традиційних розділів курсу вищої математики, рекомендованих типовою навчальною програмою Міністерства освіти України для економічних спеціальностей, а також основні поняття математичної логіки, комбінаторики, теорії графів, опуклих множин, різницевих рівнянь, математики в фінансах та обліку.

Посібник містить достатню кількість задач економічного змісту, та таблиці, що використовуються для їх розв'язання.

Для студентів економічних спеціальностей. Посібник може бути корисним викладачам ліцеїв, коледжів, а також фінансистам, бізнесменам, соціологам, фахівцям менеджменту та обліку.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-966-364-991-7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасна математична освіта фахівців економіки потребує не лише знань таких математичних дисциплін як «Вища математика», «Математичне програмування», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Економетріка», але й навичок розв'язування відповідних задач з використанням обчислювальної техніки.

Багаторічний досвід викладання цих дисциплін студентам економічних спеціальностей різних форм навчання та спілкування з висококваліфікованими фахівцями дозволяє авторам стверджувати, що внаслідок різноманітних об'єктивних та суб'єктивних причин значна частина студентів потребує починати навчання з удосконалення початкового математичного рівня.

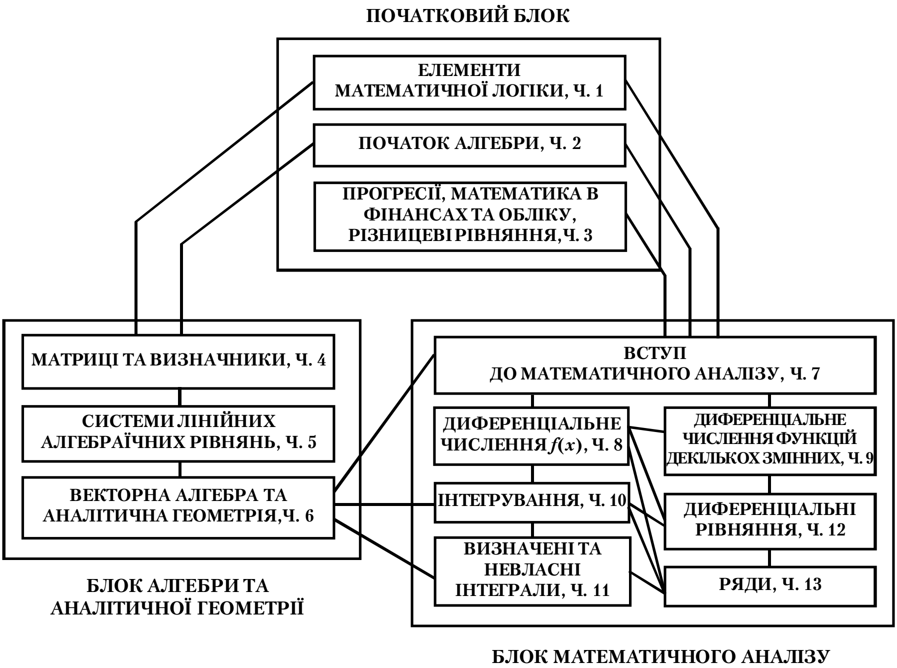
Саме тому автори почали «Вищу математику для економістів» з елементів математичної логіки, комбінаторики, алгебраїчних перетворень, розв'язування алгебраїчних рівнянь та нерівностей з однією невідомою, математики фінансів та різницевих рівнянь. Ці розділи містяться у підручниках з математики провідних іноземних університетів. Вони можуть вивчатися студентами самостійно в позаучбовий час.

Посібник містить багато задач та прикладів, в тому числі економічного змісту, що на думку авторів повинно сприяти підвищенню інтересу студентів до учбових занять з математики та інших дисциплін, а також сприяти використанню математичних методів бізнесменами, фінансистами, менеджерами, фахівцями економіки та менеджменту, соціологами.

Посібник складається з 13 частин, додатку та відповідей до вправ. Кожна частина поділена на декілька розділів, має свою нумерацію означень, теорем, формул, малюнків, вправ та зауважень.

У додатку наведені таблиці для обчислення відсотків накопичення та ренти, значень функцій $\boldsymbol{e^x}$ та $\boldsymbol{e^{-x}}$, систематизації рівнянь прямої па площині та диференціального числення функцій однієї змінної, таблиця інтегралів та зразки двох контрольних робіт.

Структурно-логічну схему зв'язків між частинами курсу можна зобразити таким чином:



Автори вдячні вченому секретарю Науково-дослідного економічного інституту Міністерства економіки України Добжанському Е.І., науковим співробітникам цього інституту Крючковій І.В., Євдокімовій І.М., Пузанову І.І., декану факультету інженерних систем та технологій професору Шарапову О.Д. та завідуючому кафедрою вищої математики Київського національного економічного університету професору Валєєву К.Г. за ґрунтовне обговорення вимог до математичних знань та навичок випускників вищих економічних навчальних закладів.

Автори виражають щиру подяку президенту Національної академії управління Єрохіну С.А., завдяки наполегливості та допомозі якого стало можливим перше видання цього підручника.

Ми врахували одержані від студентів та фахівців декілька зауважень, рекомендацій та побажань, спрямованих на покращення підручника.

Частина 1

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

1.1. Висловлення

В математиці та програмуванні часто мають справу з різними висловлюваннями і позначають їх великими літерами. Наприклад:

A $\equiv$ {число 80 ділиться на 4},
B $\equiv$ {число 15 ділиться на 8},
C $\equiv$ {три менше п'яти},
D $\equiv$ {число 2 є єдиним коренем рівняння $x^2 - 4 = 0$}.

У висловленнях замість слів можна використовувати математичні знаки та символи. Наприклад, **C** $\equiv \{3 < 5\}$.

Кожне висловлення є реченням, але не кожне речення є висловленням.

Закон виключення третього. ***Висловлення може бути або істинним або хибним.***

Закон суперечності. ***Ніяке висловлення не може бути одночасно істинним та хибним.***

Отже, ***речення, про яке неможливо однозначно зробити висновок, вірне воно чи хибне, не є висловленням.***

У висловленнях **A** та **C** твердження вірні, такі висловлення називають істинними. У висловленнях **B** та **D** твердження не вірні, такі висловлення називають хибними.

Речення:

1) число 0,000000001 дуже мале;
2) $x > 2$;
3) $x + 12 = 18$

не будуть висловленнями.

Перше з цих речень не є висловленням тому, що воно не має точного смислу і не можна сказати воно вірне чи не вірне. Хтось вважає це число дуже малим, а інший може з цим не погодитись.

Друге та третє речення містять літеру x. При одних x одержимо істинне висловлення, при інших значеннях x висловлення будуть хибними. До того часу, поки не буде вказано конкретне значення *x*, не можна сказати вірні чи не вірні ці речення.

Не для кожного висловлення можна відразу зробити висновок про його істинність чи хибність. Закон виключення третього вказує лише принципову можливість встановити істинність або хибність висловлення. Для встановлення цього факту іноді потрібно багато часу, велика кількість обчислень.

Наприклад, речення

$$\mathbf{E} \equiv \{(123^{3723} + 13^{15876})^{2341} + (111^{35933} - 189^{1183})^{4914} \text{ є простим}\}$$

буде висловленням тому, що принципово можливо відповісти на питання, істинне воно чи хибне.

1.2. Заперечення

З будь-якого висловлення **A** можна одержати нове висловлення, шляхом заперечення **A**, тобто стверджуючи, що висловлення **A** не виконується.

Заперечення висловлення **A** позначають символом $\urcorner\mathbf{A}$ або $\overline{\mathbf{A}}$. Запис $\urcorner\mathbf{A}$ читають як «заперечення висловлення **A**» або коротше «не **A**».

Приклади висловлень та їх заперечень:

1) $\mathbf{A} \equiv$ {число 25 ділиться на 7},
   $\urcorner\mathbf{A} \equiv$ {число 25 не ділиться на 7};
2) $\mathbf{B} \equiv \{3 > 5\}$, тобто три більше п'яти,
   $\urcorner\mathbf{B} \equiv \{3 \le 5\}$, тобто три не більше п'яти;
3) $\mathbf{C} \equiv \{3 + 5 = 8\}$,
   $\urcorner\mathbf{C} \equiv \{3 + 5 \ne 8\}$;
4) $\mathbf{D} \equiv$ {32 просте число},
   $\urcorner\mathbf{D} \equiv$ {32 не просте число}.

Із вказаних висловлень $\urcorner\mathbf{A}$, $\urcorner\mathbf{B}$, **C** та $\urcorner\mathbf{D}$ будуть істинними, а висловлення **A**, **B**, $\urcorner\mathbf{C}$ та **D** хибні.

Отже, яким би не було висловлення **E**, з двох висловлень **E**, $\urcorner\mathbf{E}$ одне буде істинним, а друге хибним.

Найпростіший прийом утворення заперечення — додати до присудка частицю «не». Наприклад:

A ≡ {13 ділиться на 4},
⌉**A** ≡ {13 не ділиться на 4}.

Але цей простий прийом не можна застосувати, якщо саме висловлення містить «не».

Наприклад, висловлення **B** ≡ {17 не ділиться на 5}. У цьому випадку для утворення заперечення ⌉**B** не можна додавати ще одне «не» тому, що не можна казати «17 не не ділиться на 5». У цьому випадку краще записати ⌉**B** ≡ {17 ділиться на 5}.

Отже, якщо в деякому висловленні **E** перед присудком вже є частиця «не», тоді для утворення заперечення **E** достатньо відкинути частицю «не».

Нехай **A** — довільне висловлення. Його заперечення ⌉**A** також буде висловленням. Тому можна розглядати і його заперечення, тобто висловлення ⌉⌉**A**. Таке висловлення називають подвійним запереченням висловлення **A**.

Закон заперечення заперечення. Подвійне заперечення ⌉⌉**A** істинне лише у тому випадку, коли істинне висловлення **A**. Якщо **A** хибне, тоді і ⌉⌉**A** також хибне.

1.3. Невизначені висловлення

Позначимо через N множину усіх натуральних чисел, x — довільне натуральне число, тобто довільний елемент множини N. Розглянемо такі висловлення:

A(*x*) ≡ {число x ділиться на 5},
B(*x*) ≡ {$x > 10$},
C(*x*) ≡ {x — просте число},
D(*x*) ≡ {$(x - 5)^2 < 10$ — просте число}.

Речення **A(*x*)**, **B(*x*)**, **C(*x*)**, **D(*x*)** не будуть висловленнями до того часу, поки невідоме число x. Але підставляючи в **A** замість x різні натуральні числа, ми будемо одержувати висловлення про натуральні числа. Деякі з них будуть істинними, а деякі хибними.

Наприклад, **A(5)** ≡ {число 5 ділиться на 5} — істинне висловлення.

A(13) ≡ {число 13 ділиться на 5} — хибне висловлення. Отже, речення які містять змінну x, можна назвати невизначеними висловленнями. В математиці їх часто називають ***предикатами.***

Кожна з цих предикат виражає деяку властивість натурального числа x. Наприклад, $\mathbf{C}(x)$ виражає властивість бути простим числом, $\mathbf{A}(x)$ – властивість ділитися на 5.

Невизначені висловлення можна задавати на будь-якій множині, а не лише на N.

Часто доводиться розглядати невизначені висловлення з двома або більшою кількістю змінних.

Розглянемо, наприклад, висловлення, в яких x та y довільні натуральні числа:

$\mathbf{A}(x, y) \equiv \{x < y\}$; $\mathbf{B}(x, y) \equiv \{x + y = 10\}$;
$\mathbf{C}(x, y) \equiv \{x$ ділиться на $y\}$; $\mathbf{D}(x, y) \equiv \{x + y$ – просте число$\}$.

Про істинність та хибність цих тверджень можна казати лише для конкретних значень x та y.

Наприклад

$\mathbf{A}(1, 3) \equiv \{1 < 3\}$ – істинне висловлення;
$\mathbf{A}(2, 2) \equiv \{2 < 2\}$ – хибне висловлення;
$\mathbf{B}(8, 2) \equiv \{8 + 2 = 10\}$ – істинне висловлення.

1.4. Знаки загальності та існування

Операція заперечення дозволяє з невизначеного висловлення $\mathbf{A}(x)$ одержати нове невизначене висловлення $\rceil\mathbf{A}(x)$ – його заперечення.

Іноді студентам важко сформулювати заперечення $\rceil\mathbf{A}$ в тому випадку, коли висловлення **A** містить слова «усі», «кожен», «хоч би один», «знайдеться», «існує».

Наприклад, якщо $\mathbf{A} \equiv$ {кожне просте число непарне}, тоді висловлення $\mathbf{B} \equiv$ {кожне просте число парне} не є запереченням до **A**. Вірною буде відповідь:

$\rceil\mathbf{A} \equiv$ {не кожне просте число непарне},

іншими словами

$\rceil\mathbf{A} \equiv$ {існує просте число, яке буде парним},

або

$\rceil\mathbf{A} \equiv$ {хоч би одне просте число парне}.

Останнє висловлення істинне: існує (тільки одне!) парне просте число 2.

Коли висловлення **A** ***починається словами «усі», «кожен», «будь-який», тоді для одержання заперечення*** $\rceil$**A** ***треба або записати «не» перед вказаними словами, або записати «не» після цих слів, але тоді ці слова треба замінити на «хоч би один», «знайдеться», «існує».***

Має місце і зворотне твердження: якщо спочатку висловлення є слова «хоч би один», «знайдеться», «існує», тоді якщо після цих слів записати «не», обов'язково потрібно замінити ці слова на «усі», «кожен», «будь-який».

Отже, доцільно додавати «не» перед цими словами тому, що тоді не треба робити заміни слів.

■ **Приклад:**

A $\equiv$ {кожне з чисел **a**, **b**, **c** ділиться на 7};
$\rceil$**A** $\equiv$ {не кожне з чисел **a**, **b**, **c** ділиться на 7};
$\rceil$**A** $\equiv$ {хоч би одне з чисел **a**, **b**, **c** не ділиться на 7}.

Іноді використовують знаки $\forall$, $\exists$. Перший з них називається ***знаком загальності*** і замінюється при формулюванні словами: будь-який, кожен, усі.

Другий знак називається ***знаком існування***, він замінюється у формулюваннях словами: існує, знайдеться, який-небудь, хоч би один.

Якщо $\mathbf{P}(x)$ — деяке невизначене висловлення, $x \in \mathbf{M}$, тоді запис $(\forall x)\ \mathbf{P}(x)$ означає: для будь-якого x з множини **M** має місце $\mathbf{P}(x)$.

Запис $(\forall x)\ \mathbf{P}(x)$ є висловлення, а не невизначене висловлення. Якщо $\mathbf{P}(x)$ хибне, то це висловлення також хибне. Якщо $\mathbf{P}(x)$ — деяке невизначене висловлення, тоді запис $(\exists x)\ \mathbf{P}(x)$ означає: існує елемент x множини **M**, для якого має місце або знайдеться хоча б один елемент x, для якого має місце $\mathbf{P}(x)$.

Запис $(\exists x)\ \mathbf{P}(x)$ є висловленням. Воно буде істинним, якщо можна в множині **M** знайти елемент **a**, для якого $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ буде істинним. Якщо в **M** не має такого елемента, тоді висловлення $(\exists x)\ \mathbf{P}(x)$ буде хибним.

■ **Приклад.** Нехай на множині N задано невизначене висловлення

$$\mathbf{C}(x) \equiv \{x^3 - 14x^2 + 49x - 1 < 0\}.$$

При $x = 1, 2, 3, 4$ одержимо висловлення

$\mathbf{C(1)} \equiv \{1 - 14\cdot 1 + 49\cdot 1 - 1 < 0\}$, тобто $\mathbf{C(1)} \equiv \{35 < 0\}$;

$\mathbf{C(2)} \equiv \{49 < 0\}$; $\mathbf{C(3)} \equiv \{47 < 0\}$.

Усі ці висловлення хибні. Але $\mathbf{C(7)} \equiv \{7^3 - 14\cdot 7^2 + 49\cdot 7 - 1 < 0\}$, тобто $\mathbf{C(7)} \equiv \{-1 < 0\}$. Отже, $\mathbf{C(7)}$ буде істинним висловленням.

Таким чином, ми знайшли таке $x = 7$, для якого висловлення істинне. Тому $(\exists x)\ \mathbf{C}(x)$ — істинне висловлення.

1.5. Необхідні та достатні умови

В більшості теорем можна виділити умову і твердження. Умова та твердження теореми є деякими невизначеними висловленнями. Розглянемо, наприклад, теорему: діагоналі ромба взаємно перпендикулярні. Умовою теореми буде: чотирикутник **ABCD** є ромб, а твердження теореми: його діагоналі взаємно перпендикулярні. Якщо чотирикутник позначити через **Q,** тоді умову теореми можна записати у вигляді

A(Q) $\equiv$ {чотирикутник **Q** — ромб, тобто **AB** = **BC** = **CD** = **DA**}.

Твердження теореми:

B(Q) $\equiv$ {діагоналі чотирикутника **Q** взаємно перпендикулярні, тобто, $\mathbf{AC} \perp \mathbf{BD}$}.

Уся теорема тепер може бути записана так:

$$(\forall \mathbf{Q})\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{B(Q)} \tag{1}$$

тобто для будь-якого чотирикутника **Q** з висловлення **A** випливає **B(Q).**

Іншими словами, якщо для **Q** висловлення **A(Q)** істинне, тоді висловлення **B(Q)** також істинне.

Часто для скорочення замість запису вигляду (1) записують $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

Такий запис означає, що висловлення **A** *є достатньою умовою для* **B**, *а висловлення* **B** *є необхідною умовою для* **A**.

1.6. Обернена та протилежна теореми

Нехай **A** та **B** — деякі невизначені висловлення.

Теореми $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ та $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ називаються ***оберненими.***

З двох взаємно обернених теорем $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ кожна може бути вірною або невірною.

Будь-яка з цих двох теорем може бути названа прямою, тоді друга теорема буде оберненою до неї.

Якщо обидві теореми вірні, тоді цей факт записують так $\mathbf{A} \rightleftarrows \mathbf{B}$ або $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$, в цьому випадку кожне висловлення **A**, **B** є необхідною і достатньою ***умовою*** для іншого висловлення.

Відмітимо, що термін ***«умова»*** часто заміняють словом ***«ознака»***. Якщо у деякій теоремі $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ замінити і умову **A** і твердження **B** їх запереченнями, тоді одержимо нову теорему $\rceil\mathbf{A} \rightarrow \rceil\mathbf{B}$, яку називають протилежною до початкової.

■ **Приклад.**

Позначимо $\mathbf{A} \equiv$ {багатокутник **Q** є чотирикутником}, а

$\mathbf{B} \equiv$ {сума внутрішніх кутів багатокутника **Q** дорівнює 2π}.

Теорема $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ може бути сформульованою так:

якщо багатокутник **Q** є чотирикутником, тоді сума його внутрішніх кутів дорівнює 2π.

Протилежна теорема $\rceil\mathbf{A} \rightarrow \rceil\mathbf{B}$:

якщо багатокутник **Q** не є чотирикутником, тоді сума його внутрішніх кутів не дорівнює 2π.

У цьому випадку обидві теореми вірні. Часто буває так, що у випадку вірної теореми $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, протилежна теорема $\rceil\mathbf{A} \rightarrow \rceil\mathbf{B}$ вірна або хибна.

Чудовим є те, що теорема $\rceil\mathbf{A} \rightarrow \rceil\mathbf{B}$, протилежна оберненій, вірна тоді і тільки тоді, коли вірна пряма теорема $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$. На цьому факті базується ***метод доведення «від супротивного»*: замість потрібної теореми $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ проводять доведення теореми $\rceil\mathbf{A} \rightarrow \rceil\mathbf{B}$**.

1.7. Кон'юнкція та диз'юнкція

Кон'юнкція та **диз'юнкція** — це операції, які дозволяють з двох (або більшої кількості) висловлень одержати нові висловлення.

Диз'юнкція позначається знаком $\vee$ і іноді називається **«операцією або»**.

Запис $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ означає: має місце хоч би одне з висловлень **A**, **B**. Диз'юнкцію висловлень точніше читати так: «або **A**, або **B**, або **A** та **B**».

Якщо хоч би одне з висловлень **A**, **B** буде істинним, тоді $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ також буде істинним висловленням.

Якщо обидва висловлення хибні, тоді буде хибним і висловлення $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.

■ **Приклад.**

Розглянемо невизначені висловлення на множині N усіх натуральних чисел

$\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \equiv \{x$ — складове число$\}$

$\mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \equiv \{x$ — непарне число$\}$.

Диз'юнкція $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ — невизначене висловлення.

Якщо **a** — парне число, більше двох, тоді диз'юнкція $\mathbf{A(a)} \vee \mathbf{B(a)}$ буде істинним висловленням тому, що **a** — складове число і $\mathbf{A(a)}$ — буде істинним висловленням.

Якщо **a** — непарне число, тоді $\mathbf{A(a)} \vee \mathbf{B(a)}$ також буде істинним висловленням тому, що тепер $\mathbf{B(a)}$ — істинне. Висловлення $\mathbf{A(2)} \vee \mathbf{B(2)}$ — хибне тому, що 2 не є складовим числом і парне.

Отже, одержали, що $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \vee \mathbf{B}(\boldsymbol{x})$ буде істинним висловленням при $x = 2$ і хибним при $x = 2$, тобто $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \bigcup \mathbf{B}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) = \{x \neq 2\}$**.**

Операція кон'юнкції висловлень **A** та **B** позначається $\wedge$ читається «**A** та **B**» і означає, що мають місце одночасно висловлення **A** та висловлення **B**.

Висловлення $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ буде істинним лише тоді, коли будуть істинними обидва висловлення **A** та **B**, і буде хибним в усіх інших випадках.

■ **Приклад.**

Нехай **M** — множина коштів, що складається з коштів інвестора, власника та співвласників для розвитку підприємства, $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$.

Позначимо:

A(a) $\equiv$ {**a** — сума коштів, сплачених за нове обладнання},

B(a) $\equiv$ {**a** — кошти інвестора}.

Тоді кон'юнкція

A(a) $\wedge$ **B(a)** $\equiv$ **C(a)** $\equiv$ {нове обладнання сплачено коштом інвестора}.

1.8. Властивості прямих та обернених теорем

✦ **Теорема.** ***Нехай*** $A_1(x)$, $A_2(x)$,..., $A_N(x)$, ***та*** $B_1(x)$, $B_2(x)$,..., $B_N(x)$ – ***невизначені висловлення, що задані на деякій множині*** **M** ***та мають такі властивості:***

1) *для будь-якого x множини* **M** *має місце хоч би одне з висловлень* $A_1(x)$, $A_2(x)$,..., $A_N(x)$;

2) *вірні теореми* $A_1(x) \to B_1(x)$, $A_2(x) \to B_2(x)$,..., $A_N(x) \to B_N(x)$;

3) *висловлення* $B_1(x)$, $B_2(x)$,..., $B_N(x)$ *взаємно виключають одне одного, тобто (для довільно взятого x), якщо одне з них буде істинним, то всі останні обов'язково хибні. Тоді усі обернені теореми* $B_1(x) \to A_1(x)$, $B_2(x) \to A_2(x)$, ... $B_N(x) \to A_N(x)$ *також будуть вірні.*

Доведемо справедливість теореми $B_K(x) \to A_K(x)$, для будь-якого K (K=1, 2, N).

Нехай висловлення $B_K(x)$ буде істинним. Висловлення $A_M(x)$ при $M \neq K$ не може бути істинним тому, що інакше згідно з умовою 2 теореми було б істинним і $B_M(x)$, а це не можливо згідно з умовою 3. Але якщо усі висловлення крім A_K хибні, тоді згідно з першою умовою теореми повинно бути істинним висловлення $A_K(x)$**.**

Отже, якщо істинне $B_K(x)$, тоді істинне і $A_K(x)$, тобто має місце теорема $B_K(x) \to A_K(x)$.

◈ **Зауваження.** *При вказаних умовах теореми завжди має місце хоча б одне з висловлень* $B_1(x)$, $B_2(x)$,..., $B_N(x)$, *а висловлення* $A_1(x)$, $A_2(x)$,..., $A_N(x)$ *взаємно виключають одне одного.*

■ **Приклад.** Розглянемо квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

з дійсними коефіцієнтами та D = $b^2 - 4ac$.

Розглянемо невизначені висловлення на множині усіх рівнянь вигляду (2):

$\mathbf{A_1} \equiv \{D > 0\}$, $\mathbf{A_2} \equiv \{D < 0\}$, $\mathbf{A_3} \equiv \{D = 0\}$,
$\mathbf{B_1}$ ≡ {корені рівняння (2) дійсні та різні},
$\mathbf{B_2}$ ≡ {рівняння (2) не має дійсних коренів},
$\mathbf{B_3}$ ≡ {корені рівняння (2) співпадають}.

Неважко бачити, що усі висловлення $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$ задовольняють умовам наведеної теореми. Тому вірні не тільки прямі теореми але й обернені.

Наприклад, перша з цих обернених теорем така:

якщо корені рівняння (2) дійсні та різні, тоді $D > 0$.

1.9. Вправи до частини 1

1. Прочитати словами висловлення, що записані знаками

a) $5 < 2$; b) $11 + 3 = 18$; c) $2 + 4 \leq 10$;
d) $5^3 = 125$; e) $6^3 \neq 216$.

2. Сформулювати та записати заперечення до таких висловлень:

M ≡ {257 — парне число}; **Q** ≡ {число раціональне};
R ≡ {число 7 додатне}; **S** ≡ {число 5 від'ємне}.

3. Утворити заперечення до висловлень:

C ≡ {27 не ділиться на 2};
D ≡ {не існує парних простих чисел};
E ≡ $\{5 \cdot 7 \neq 35\}$.

Встановити, які з цих висловлень та їх заперечень будуть істинними.

4. Для кожного з наведених висловлень скласти заперечення, а потім подвійне заперечення. Впевнитись, що подвійне заперечення співпадає за смислом з початковим висловленням:

A ≡ {15 ділиться на 3}; **B** ≡ {5 — додатне}; **C** ≡ $\{3 < 7\}$.

5. На множині **M**, яка складається з чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

задане невизначене висловлення

$$\mathbf{E}(x, y) \equiv \{x + y \text{ належить множині } \mathbf{M}\}.$$

Вказати усі пари (a, b) елементів множини **M**, для яких висловлення **E(a, b)** буде істинним.

6. Запишіть з використанням знаків $\forall$, $\exists$ такі висловлення:

1) Не усякий простий дріб виражається скінченним десятковим дробом.

2) Яким би не було натуральне число x, знайдеться таке натуральне число y, що $x + y$ — просте число.

3) Яким би не було натуральне число x, можна підібрати таке натуральне число y, що $x^2 + y^2 < 100$.

4) Яким би не було натуральне число y, серед натуральних чисел знайдеться таке число x, що $x + y$ буде парним числом.

5) Якою би не була точка x на прямій l, існує на цій прямій така точка y, що відстань між точками x та y дорівнює 3 одиницям.

7. Сформулюйте теорему $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ та обернену до неї, а також визначте, чи буде обернена теорема вірна.

$\mathbf{A} \equiv$ {натуральне число a ділиться на 9};
$\mathbf{B} \equiv$ {сума цифр числа a ділиться на 3}.

8. Сформулювати та довести теорему, обернену до теореми Піфагора.

9. Для невизначених висловлень

$\mathbf{A} \equiv$ {усі сторони основи піраміди $\mathbf{P}$ рівні між собою};
$\mathbf{B} \equiv$ {усі бокові ребра піраміди $\mathbf{P}$ рівні між собою};
$\mathbf{C} \equiv$ {піраміда $\mathbf{P}$ є правильною}.

Визначити вірність теореми:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{C}\,; \qquad \mathbf{C} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}.$$

10. Для невизначених висловлень, заданих на множині N усіх натуральних чисел:

$\mathbf{A}(x) \equiv$ {x ділиться на 2}; $\mathbf{B}(x) \equiv$ {x ділиться на 3},

визначити смисл невизначеного висловлення

$$(\neg \mathbf{A}(x)) \vee (\neg \mathbf{B}(x)).$$

Частина 2

ПОЧАТОК АЛГЕБРИ

2.1. Дійсні числа та дії з ними

В шкільному курсі математики теорія дійсного числа викладається досить не повно тому, що основні визначення та доведення тверджень цієї теорії виходять за рамки шкільного курсу. Але дійсні числа постійно і широко використовуються і тому потрібне більш глибоке розуміння їх властивостей.

В цьому розділі зібрані (як правило, без доведень) властивості раціональних та дійсних чисел, які дають математично правильне уявлення про множину дійсних чисел.

Першими числами, з якими ми знайомимось у молодших класах школи, є натуральні числа: 1, 2, 3, 4, ... Множина N усіх натуральних чисел нескінченна. У цій множині N завжди можна виконати дві операції: додавання та множення. Сума та добуток будь-яких двох натуральних чисел знову будуть натуральними числами. Обернені дії, віднімання та ділення, виконуються у множині натуральних чисел не завжди.

Наприклад, 7–9 та 3:5 неможливо обчислити без виходу за межі множини N усіх натуральних чисел. Щоб зробити ці операції можливими треба до множини N додати нові числа: 0, від’ємні цілі числа та дробові, тобто одержати множину R усіх раціональних чисел. Часто раціональні числа визначають так:

Будь-яке дійсне число, що можна представити у вигляді відношення $\frac{a}{b}$ *деяких двох цілих чисел* a *та* b (*де* $b \neq 0$) *називається* ***раціональним***.

Але дійсні числа є більш складне поняття у порівнянні з раціональними числами. Тому визначення раціональних чисел через дійсні числа не коректне.

Виникає питання: яким чином можна точно визначити множину R раціональних чисел?

Аналогічні труднощі були і в геометрії при визначенні точки та прямої. Шляхом введення аксіом геометрії, які дозволили одержати необхідні властивості точки та прямої, а тим самим – їх «непряме визначення». За допомогою властивостей, що вказані в аксіомах, доводяться усі теореми геометрії.

Отже, коректного визначення раціональних чисел не існує. Залишається інший (аксіоматичний) шлях побудови множини R раціональних чисел. Для цього без визначення вводять термін «раціональне число» і формулюють властивості раціональних чисел, тобто аксіоми, які по суті є «непрямим визначенням» множини раціональних чисел. Множина R усіх раціональних чисел повністю характеризується такими групами властивостей:

a) *Для будь-яких двох раціональних чисел a, b визначена їх сума $a+b$. Операція додавання комутативна та асоціативна, тобто*

$$a+b=b+a; \quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

Крім того, є число 0 таке, що $a+0 = a$.

Існує одне раціональне число x — корінь рівняння $a+x=b$.

Це число називається ***різницею чисел b та a*** і *позначається $b-a$.*

Різниця $0-a$ позначається $-a$.

b) *В множині R раціональних чисел містяться усі цілі числа* ($0, \pm1, \pm2, \pm\ldots$).

c) *Для будь-яких двох раціональних чисел a, b визначений їх добуток ab. Операція множення комутативна, асоціативна та дистрибутивна, тобто*

$$ab=ba; \quad (ab)c=a(bc); \quad a(b+c)=ab+bc.$$

При $b \neq 0$ існує лише одне раціональне число, яке буде розв'язком рівняння $bx=a$. Це число позначається $\frac{a}{b}$, а відповідна операція називається ***діленням***.

d) *Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді $\frac{a}{b}$, де a та b — деякі цілі числа* ($b \neq 0$).

Отже, ***раціональними називаються числа, що задовольняють вказаним групам a) – d) властивостей.***

Множина R раціональних чисел достатня для усіх арифметичних операцій. Але раціональних чисел не достатньо для розв'я-зання багатьох алгебраїчних рівнянь (наприклад, $x^2 = 5$), вимірювання довжини відрізка прямої, дій з нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Тому виникає потреба доповнити множину раціональних чисел R ірраціональними числами, що разом з R утворюють множину дійсних чисел D.

У шкільному курсі математики ірраціональним називають число, яке можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Але таке визначення ірраціонального числа не коректно тому, що воно вказує лише форму запису ірраціонального числа і нічого не говорить про дії з такими числами.

Виникає потреба аксіоматичного опису властивостей множини дійсних чисел D, частину яких складають ірраціональні числа.

Множина D усіх дійсних чисел повинна задовольняти 5 групам властивостей.

1. *Множина D містить усі раціональні числа.*

2. *Для будь-яких дійсних чисел a, b визначена їх сума $a+b$. Операція додавання комутативна та асоціативна. Існує одне дійсне число – розв'язок рівняння $b+x=a$; це число називається* ***різницею чисел a та b*** *і позначається $a-b$.*

3. *Для будь-яких дійсних чисел a, b визначений їх добуток ab. Множення комутативне, асоціативне та дистрибутивне. Існує одне дійсне число – розв'язок рівняння $bx=a$, яке позначається $\frac{a}{b}$, операція знаходження їх відношення називається* ***діленням***.

4. *Має місце співвідношення $a > b$ (або $b < a$), якщо число $a-b$ додатне. Якщо a від'ємне, тоді $-a$ – додатне. Для будь-якого додатного дійсного числа a знайдеться таке додатне раціональне число r, що $r < a$.*

5. *В множині дійсних чисел D кожна обмежена монотонна послідовність має границю.*

Відмітимо, що будь-яке твердження відносно дійсних чисел можна довести з використанням цих властивостей.

Тепер розглянемо визначення та основні властивості абсолютної величини дійсного числа.

⬢ **Означення.** ***Абсолютною величиною*** $|a|$ ***дійсного числа a*** *називається число a, якщо a додатне або дорівнює нулеві, та число −a, якщо a від'ємне, тобто*

$$|a| = \begin{cases} a, \ \text{якщо} \ a \geq 0; \\ -a, \ \text{якщо} \ a < 0. \end{cases}$$

Абсолютну величину дійсного числа можна визначити іншим способом, а саме формулою $|a| = \sqrt{a^2}$.

Розглянемо два приклади, у яких одержимо основні властивості абсолютної величини, що дуже часто використовуються.

■ **Приклад 1**. Довести, що нерівність $|a| \leq b$ еквівалентна співвідношенням $-b \leq a \leq b$.

Розв'язання. Нехай має місце нерівність $|a| \leq b$. Але $|a|$ найбільше з двох чисел *a*, *−a*, тому кожне з них задовольняє нерівність $a \leq b$, $-a \leq b$.

Помножимо другу нерівність на (−1), одержимо $-b \leq a$. Поєднаємо нерівності $-b \leq a$ та $a \leq b$, тоді $-b \leq a \leq b$.

Зворотне, нехай має місце $-b \leq a \leq b$, тобто $-b \leq a$ та $b \geq a$. Помножимо першу нерівність на (−1) і запишемо у вигляді $a \leq b$. Таким чином, кожне з чисел *a*, *−a* не більше *b*, а тому й найбільше з них буде не більше *b*, тобто $|a| \leq b$.

■ **Приклад 2.** Довести, що для будь-яких двох дійсних чисел *a*, *b* має місце нерівність $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Розв'язання. Запишемо для чисел a та b нерівності

$$-|a| \le a \le |a|; \; -|b| \le b \le |b|.$$

Шляхом додавання цих нерівностей одержимо

$$-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b| \text{ або } -(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|.$$

Таким чином, число $c = |a| + |b|$ задовольняє нерівностям $-c \le a + b \le c$ і тому, в силу прикладу 1, $|a + b| \le c$ тобто $|a + b| \le |a| + |b|$, що і треба було довести.

В багатьох життєвих ситуаціях та фінансових розрахунках треба робити поділ дійсного числа на декілька прямо або обернено пропорційних частин та знаходити певну кількість відсотків числа.

Розглянемо ці дії з дійсними числами.

Означення. *Величини A та B називають* ***прямо пропорційними****, якщо існує коефіцієнт пропорційності k такий, що виконується рівність*

$$A = kB.$$

Правило. *Для поділу числа A на частини, пропорційні числам B, C, D треба ввести коефіцієнт пропорційності k. Тоді шукані частини числа A будуть kB, kC, kD,* а тому

$$A = kB + kC + kD \Rightarrow A = k(B + C + D) \Rightarrow k = \frac{A}{B + C + D}.$$

Знання k дозволяє знайти шукані частини у вигляді

$$B \cdot \frac{A}{B + C + D}, \; C \cdot \frac{A}{B + C + D}, \; D \cdot \frac{A}{B + C + D}.$$

Приклад 3. До нового року дідусь подарував онукам, яким 14, 6 та 3 роки, 759 гривень з умовою, що вони будуть поділені пропорційно їх віку. Скільки коштів одержить кожен з онуків?

Розв'язання. Треба поділити число 759 на частини пропорційні числам 14, 6, 3. Нехай k коефіцієнт пропорційності. Тоді шуканими числами будуть $14k$, $6к$ та $3k$. З рівності

$$759 = 14k + 6k + 3k \Rightarrow k = \frac{759}{23} = 33.$$

Таким чином,
старший онук одержить $33 \times 14 = 462$ (гривень),
середній онук одержить $33 \times 6 = 198$ (гривень),
молодший онук одержить $33 \times 3 = 99$ (гривень).

⬢ **Означення.** *Величини A та B називаються* ***обернено пропорційними****, якщо існує таке k, що виконується рівність*

$$B = \frac{k}{A}.$$

Правило. *Для поділу заданого числа A на частини обернено пропорційні числам B, C, D треба шукані частини вважати рівними* $\frac{k}{B}$, $\frac{k}{C}$, $\frac{k}{D}$. *Тоді з рівності* $A = \frac{k}{B} + \frac{k}{C} + \frac{k}{D}$ *знаходимо k:*

$$k = \frac{A}{\frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}} = \frac{ABCD}{CD + BD + BC}.$$

Знання k дозволяє знайти шукані частини.

■ **Приклад 4.** Власник підприємства виділив 88 гривень на заохочення трьох працівників і вирішив розподілити ці кошти обернено пропорційно кількості втрачених робочих годин. Скільки коштів одержить кожен працівник, якщо один з них втратив 3 години, другий – $\frac{25}{16}$ години, третій — 5 годин?

✎ *Розв'язання.* Треба поділити число 88 на частини обернено пропорційні числам 3, $\frac{25}{16}$, 5.

Нехай k — коефіцієнт пропорційності. Тоді шуканими частинами будуть

$$\frac{k}{3};\ \frac{k}{\frac{25}{16}}=\frac{16k}{25};\ \frac{k}{5}.$$

Отже,

$$88=\frac{k}{3}+\frac{16k}{25}+\frac{k}{5}\Rightarrow 88=\frac{25k+48k+15k}{75}\Rightarrow 88=\frac{k\cdot 88}{75}\Rightarrow k=75.$$

Таким чином, працівник, що втратив 3 робочих години, одержить $\frac{75}{3}=25$ (гривень). Працівник, що втратив $\frac{25}{16}$ робочих години, одержить $\frac{75}{\frac{25}{16}}=\frac{75\cdot 16}{25}=48$ (гривень). Працівник, що втратив 5 робочих годин, одержить $\frac{75}{3}=15$ (гривень).

■ **Приклад 5.** Сума 4 чисел дорівнює 388. Перше відноситься до другого, як 3:2, друге до третього, як 1:3, а третє число так відноситься до четвертого, як 5:7. Знайти найменше з цих чисел.

↳ *Розв'язання.* Нехай перше число A, друге B, третє C, четверте D. Тоді маємо

$$A+B+C+D=388. \tag{1}$$

Згідно з умовою

$$\frac{A}{B}=\frac{3}{2}\Rightarrow A=\frac{3}{2}B, \tag{2}$$

$$\frac{B}{C}=\frac{1}{3}\Rightarrow C=3B, \tag{3}$$

$$\frac{C}{D}=\frac{5}{7}\Rightarrow D=\frac{7}{5}C=\frac{7}{5}\cdot 3B=\frac{21}{5}B. \tag{4}$$

Підставимо (2), (3) та (4) у рівність (1). Одержимо

$$\frac{3}{2}B+B+3B+\frac{21}{5}B=388\Rightarrow\frac{15B+10B+30B+42B}{10}=388\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{97}{10}B=388\Rightarrow B=\frac{3880}{97}=40.$$

З формул (2), (3) та (4) випливає, що $A > B$, $C > B$, $D > B$. Отже, B є найменшим числом. Відповідь: найменшим з цих чисел буде 40.

⬢ **Означення.** ***Відсотком числа C*** *називають* $\frac{1}{100}$ *– його частину. A відсотків числа C буде* $\frac{C}{100}\cdot A$.

■ **Приклад 6.** Знайти:

a) 8% від 1250 грн.; b) 4,5% від 3,6 тони; c) 120% від 350.

Розв'язання.

a) $\frac{1250}{100}\cdot 8=\frac{125\cdot 4}{5}=25\cdot 4=100$ (грн.);

b) $\frac{3{,}6т\cdot 4{,}5}{100}=\frac{3600кг\cdot 4{,}5}{100}=\frac{36\cdot 45}{10}=18\cdot 9=162$ (кг);

c) $\frac{350}{100}\cdot 120=35\cdot 12=420$.

■ **Приклад 7.** Знайти число, 3% якого дорівнюють 36.

Розв'язання. Позначимо шукане число A. Згідно з умовою

$$\frac{A}{100}\cdot 3=36\Rightarrow 3A=3600\Rightarrow A=1200.$$

■ **Приклад 8.** В січні завод виконав план на 108%, а в лютому виробив продукції на 7% більше, ніж у січні. Скільки продукції було зроблено понад план за січень та лютий, якщо за місячним планом завод повинен виробляти 90 000 одиниць продукції?

↳ *Розв'язання.* Згідно з умовою задачі у січні завод одержав продукції на 8% більше плана, а в лютому він перевиконав план на

$$8\% + \frac{108\cdot 7}{100} = (8 + 7{,}56)\% = 15{,}56\%.$$

Таким чином, за січень та лютий план перевиконано на

$$(8 + 15{,}56)\% = 23{,}56\%.$$

Цей відсоток дозволяє знайти кількість одиниць продукції, зробленої понад план

$$\frac{90000}{100}\cdot 23{,}56 = 21204 \text{ (одиниць продукції).}$$

Вправи до розділу 2.1

1. Знайти абсолютну величину чисел:

$$77,\ -61,\ 24,\ 0,\ -11.$$

2. Яким нерівностям задовольняє кожне з чисел a, b, c, якщо

$$|a| \le 6\,;\ |b| \ge 9\,;\ |c| \le \frac{1}{2}\,.$$

3. Число 100 поділити на три частини, прямо пропорційні числам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

4. Число 1510 поділити на частини, обернено пропорційні числам $\frac{2}{3}$; 0.7; $1\frac{1}{2}$.

5. Знайти 13,4% від 180 км.

6. Знайти 154% від 540.

7. Для якого числа 50,1 складає 0,6%?

8. Поїзд пройшов 793 км за 13 годин; з тією ж швидкістю він пройшов відстань між двома селищами за 6 годин. Яка відстань між цими селищами?

9. Якщо на підводу накладати по 450 кг картоплі, тоді усю картоплю можна перевезти на 16 підводах. Скільки треба підвід для перевезення усієї картоплі, якщо у кожну підводу накладати 480 кг?

10. Що буде з дробом, якщо

a) чисельник його помножити на 7?

b) чисельник його поділити на 5?

c) знаменник його помножити на 5?

d) знаменник його поділити на 8?

2.2. Алгебраїчні перетворення

Алгебраїчні перетворення використовують для доведення алгебраїчних тотожностей, спрощення алгебраїчних виразів, для розв'язування алгебраїчних рівнянь, при обчисленні значень складних алгебраїчних виразів, при розв'язуванні задач оптимізації.

У ході цих перетворень використовують формули скороченого множення:

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

2. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

4. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$.

6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$.

та властивості дій із степенями:

1. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $a^{-k}=\dfrac{1}{a^k}$.

3. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; $a^n\cdot b^n=(ab)^n$. 4. $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$.

■ **Приклад 1.** Спростити вирази:

a) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}-\dfrac{b}{2a-2b}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}$;

b) $\left(\dfrac{x+\left(x^2-1\right)^{1/2}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x\left(x^2-1\right)^{-1/2}+1}\right):\sqrt{x^2-1}$.

Розв'язання.

a) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}-\dfrac{b}{2a-2b}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=\dfrac{2ab-b(a+b)}{2\left(a^2-b^2\right)}:\dfrac{2b}{a^2-b^2}=$

$=\dfrac{2ab-ab-b^2}{4b}=\dfrac{ab-b^2}{4b}=\dfrac{b(a-b)}{4b}=\dfrac{a-b}{4}$.

b) $\left(\dfrac{x+\left(x^2-1\right)^{1/2}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x\left(x^2-1\right)^{-1/2}+1}\right):\sqrt{x^2-1}=$

$$=\left(\frac{x+\left(x^2-1\right)^{1/2}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1}\right):\sqrt{x^2-1}=\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right):$$

$$:\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2-x^2+1}:\sqrt{x^2-1}=$$

$$=\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-\left(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1-2x^2+2x\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=4x.$$

■ **Приклад 2.** Розкласти на множники $2^{18}+9^{18}$ і вказати менший, що $\neq 1$.

Розв'язання.

$$2^{18}+9^{18}=\left(2^6\right)^3+\left(9^6\right)^3=\left(2^6+9^6\right)\left(\left(2^6\right)^2-2^6\cdot 9^6+\left(9^6\right)^2\right)=$$

$$=\left(2^2+9^2\right)\left(2^4-2^2\cdot 9^2+9^4\right)\left(2^{12}-18^6+9^{12}\right).$$

Меншим буде $2^2+9^2=85\Rightarrow 5.$

■ **Приклад 3.** Обчислити

$$2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}\,.$$

Розв'язання.

Кожен доданок запишемо добутком степенів:

$$2\cdot 2\cdot 2^{1/2}\cdot 5^{1/2}\cdot 2^{1/2}\cdot 3^{1/4}+3\cdot 5^{1/2}\cdot 3^{1/4}\cdot 2-2\cdot 3^{1/4}\cdot 5^{1/2}-4\cdot 3^{1/2}\cdot 5^{1/2}\cdot 3^{1/4}\cdot 3^{1/2}=$$

$$=8\cdot 5^{1/2}\cdot 3^{1/4}+6\cdot 5^{1/2}\cdot 3^{1/4}-2\cdot 3^{1/4}\cdot 5^{1/2}-12\cdot 3^{1/4}\cdot 5^{1/2}=14\cdot 5^{1/2}\cdot 3^{1/4}-$$

$$-14\cdot 5^{1/2}\cdot 3^{1/4}=0.$$

Вправи до розділу 2.2

1. Виконати вказані операції та спростити:

a) $(5a+7b-3)+(3b-2a+9)$; b) $\left(2\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)+\left(3\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)$;

c) $\left(2t^2+6t-1\right)-\left(3t-5t^2+4-t^3\right)$; d) $\left(2\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)-\left(\sqrt{x}-2\sqrt{2y}\right)$;

e) $-(x-7y)-2(2y-5x)$.

2. Розкласти на множники:
a) x^2+x-2; b) $x^2-15x+54$; c) $2x^2+2x-12$;
d) $2x^2+5x+1$; e) $2t^2+tu-6u^2$;

3. Спростити:

a) $\dfrac{2x}{2x-1}-\dfrac{x+2}{x+1}$; b) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

c) $\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$; d) $\dfrac{x+2+\dfrac{3}{x-2}}{x-6+\dfrac{7}{x+2}}$.

2.3. Рівняння з однією змінною

В цьому розділі розглянемо розв'язання таких типів алгебраїчних рівнянь, які найчастіше використовують у навчальному процесі та в практиці фахівців з економіки та менеджменту.

2.3.1. Розв'язування лінійних рівнянь

Загальний вигляд лінійного рівняння $ax + b = 0$, де a та b деякі дійсні числа. Розв'язок цього рівняння знаходять за формулою:

$$x=-\frac{b}{a},\ \ a\neq 0.$$

У разі відсутності навичок розв'язання лінійних рівнянь доцільно виконувати дії у такій послідовності: спочатку перенести вільний від x член рівняння у праву частину (цей член змінить свій знак на протилежний), а потім треба одержати коефіцієнт при x, рівний одиниці. Для цього поділяють обидві частини рівняння $ax = -b$ на a і одержують розв'язок рівняння.

■ **Приклад 1.** Розв'язати рівняння:

a) $3x + 4 = 0$; b) $\frac{1}{2}x - 5 = 0$; c) $5x - \frac{1}{3} = 0$.

↳ *Розв'язання:*

a) $3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -{}^4\!/_3$;

b) $\frac{1}{2}x - 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 5 \Rightarrow x = 2 \cdot 5 = 10$;

c) $5x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 5x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$.

■ **Приклад 2.** Чоловік старіший від своєї жінки на 7 років, а 10 років тому він був старіший від неї вдвічі. Скільки років зараз чоловіку та його жінці?

↳ *Розв'язання.* Позначимо через x кількість років чоловіка у теперішній час. Тоді в цей час його жінці $x - 7$ років. Десять років тому чоловіку було $x - 10$ років, а жінці $x - 7 - 10 = x - 17$ років. Згідно з умовою в той час чоловік був вдвічі старший від жінки, тобто

$$x - 10 = 2(x - 17) \Rightarrow x - 10 = 2x - 34 \Rightarrow x - 24 = 0 \Rightarrow x = 24.$$

Таким чином, зараз чоловіку 24 роки, а його жінці $24 - 7 = 17$ років.

2.3.2. Розв'язування квадратних рівнянь

Квадратним рівнянням називають рівняння вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

де a, b, c – дійсні числа, коефіцієнти рівняння.

Розв'язки цього рівняння доцільно шукати за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1)$$

Якщо вираз $D = b^2 - 4ac$, що стоїть під знаком квадратного кореня, буде додатним дійсним числом, тоді з формули (1) одержимо два різних розв'язки

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{та} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, тоді одержимо два рівних дійсних кореня

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Якщо $D < 0$, тоді одержимо пару спряжених комплексних розв'язків квадратного рівняння вигляду

$$x_1 = \alpha + i\beta, \ \ x_2 = \alpha - i\beta,$$

де
$$i = \sqrt{-1}, \ \ \alpha = -\frac{b}{2a}; \ \ \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Якщо квадратне рівняння зведено до вигляду

$$x^2 + px + q = 0,$$

тоді його розв'язки можна знаходити за формулою

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,. \qquad (2)$$

■ **Приклад 3.** Знайти розв'язок рівняння $6x^2 + 7x + 1 = 0$.

↳ *Розв'язання.* Це повне квадратне рівняння, тому будемо шукати його розв'язок за формулою (1):

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-7 \pm 5}{12};$$

$$x_1 = -\frac{1}{6}; \ \ x_2 = -1.$$

◈ **Зауваження.** *Деякі квадратні рівняння не мають раціональних коренів. В таких випадках найчастіше беруть їх наближене значення.*

■ **Приклад 4.** Розв'язати рівняння $2x^2 - x - 2 = 0$.

↬ *Розв'язання.* За формулою (1) маємо

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Одержали два дійсних різних кореня

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{17}\right) \approx 1{,}281;\quad x_2 = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{17}\right) \approx 0{,}781.$$

2.3.3. Розв'язування біквадратних рівнянь

Біквадратним рівнянням називають рівняння вигляду

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Такі рівняння підстановкою $x^2 = t$, $t > 0$ зводять до квадратного рівняння відносно змінної t. Після знаходження коренів одержаного квадратного рівняння повертаються до шуканої невідомої x.

■ **Приклад 5.** Розв'язати рівняння $x^4 - 3x^2 - 7 = 0$.

↬ *Розв'язання.* Задане біквадратне рівняння заміною $x^2 = t$, $t > 0$ зводиться до квадратного рівняння $t^2 - 3t - 7 = 0$. Розв'язок цього рівняння знайдемо .за формулою (2):

$$t_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+7} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+28}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Отже,

$$t_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} \approx 4{,}54;\quad t_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \approx -1{,}54.$$

Корінь t_2 від'ємний, тому він не підходить.

З рівності $x^2 = t_1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{37}\right)$ одержуємо шукані значення невідомого

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{37}\right)} \approx \pm\sqrt{4{,}54} \approx \pm 2{,}13.$$

2.3.4. Розв'язування раціональних рівнянь

Раціональними рівняннями будемо називати такі рівняння, що містять відношення багаточленів, залежних від невідомого.

Перед розв'язуванням таких рівнянь треба визначити область припустимих значень розв'язків, тобто тих значень невідомих, при яких знаменник дробу не дорівнює нулеві.

При розв'язуванні таких рівнянь доцільно вільні від невідомого члени рівняння перенести у праву частину рівняння, а усі члени, що містять невідоме, перенести у ліву частину рівняння і звести до спільного знаменника. Потім обидві частини рівняння помножити на знаменник, перенести праву частину рівняння у ліву частину і розв'язати одержане рівняння.

■ **Приклад 6.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2+1}{x-4}-23=\frac{x^2-1}{x+3}.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо область припустимих значень: $x\neq 4$, $x\neq -3$. Отже областю припустимих значень буде

$$(-\infty,-3)\cup(-3,4)\cup(4,\infty).$$

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23.$$

Ліву частину рівняння приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{(x^2+1)(x+3)-(x^2-1)(x-4)}{(x-4)(x+3)}=23\Rightarrow x^3+3x^2+x+3-$$

$$-(x^3-4x^2-x+4)=23(x-4)(x+3)\Rightarrow x^3+3x^2+x+3-x^3+$$

$$+4x^2+x-4=23(x-4)(x+3)\Rightarrow 7x^2+2x-1-23x^2+23x+$$

$$+23\cdot 12=0\Rightarrow 16x^2-25x-275=0.$$

Знайдемо розв'язки цього квадратного рівняння за формулою (1):

$$x_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{25\cdot25+4\cdot16\cdot25\cdot11}}{2\cdot16}=\frac{25\pm5\sqrt{729}}{32}=\frac{25\pm135}{32};$$

$$x_1=5,\ \ x_2=-\frac{110}{32}=-\frac{55}{16}.$$

Обидва розв'язки x_1 та x_2 належать області припустимих значень.

2.3.5. Розв'язування ірраціональних рівнянь

Ірраціональними називають такі рівняння, в яких невідоме міститься під знаком кореня. При знаходженні області припустимих значень розв'язків слід керуватися тим, що вираз під коренем парної степені повинен бути ≥ 0.

Якщо область припустимих значень знайти важко, то після розв'язування рівняння роблять перевірку шляхом підстановки знайденого розв'язку у задане рівняння.

■ **Приклад 7.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+11}-8=0\cdot$$

➯ *Розв'язання.* Знайдемо область припустимих значень:

$$\begin{cases}3x+1\geq0\\ x+11\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq-\dfrac{1}{3}\\ x\geq-11\end{cases}\Rightarrow x\geq-\frac{1}{3}.$$

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$\sqrt{3x+1}=8-\sqrt{x+11}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$3x+1=64-16\sqrt{x+11}+x+11\Rightarrow16\sqrt{x+11}=64-2x+10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow8\sqrt{x+11}=37-x.$$

Корінь $\sqrt{x+11}\geq 0$ тому $37-x\geq0\Rightarrow x\leq37$.

Отже, розв'язки рівняння повинні належати $\left[-\frac{1}{3}, 37\right]$. Шляхом піднесення до квадрату останнього рівняння одержимо:

$$64(x+1) = 37^2 - 2\cdot 37x + x^2 \Rightarrow x^2 - 138x + 665 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 69 \pm \sqrt{69^2 - 665} = 69 \pm 64;$$

$x_1 = 133 \notin \left[-\frac{1}{3}, 37\right]$, тому x_1 не підходить.

$x_2 = 5$, $5 \in \left[-\frac{1}{3}, 37\right]$, тому x_2 є розв'язком рівняння.

2.3.6. Розв'язування показникових рівнянь

Показниковими рівняннями називають такі рівняння, які містять невідоме у показнику степеня.

Наприклад, $2^{3x} = 8$.

При розв'язуванні показникових рівнянь використовують властивості показникового виразу та спеціальні прийоми: зведення обох частин рівняння до однакової основи; винесення за дужки спільного множника, введення нового невідомого, ділення обох частин рівняння на однаковий вираз, логарифмування обох частин.

■ **Приклад 8.** Знайти розв'язки рівнянь

a) $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}} = 81;$ b) $5^x + 3\cdot 5^{x-2} = 140;$

c) $3^{2x} - 5\cdot 3^x + 6 = 0;$ d) $2^{x-2} = 7^{x-2}.$

↳ *Розв'язання.*

a) Зведемо обидві частини рівняння до однієї основи $(x \ge 0)$.

$$3^{\frac{1}{2}+\frac{x}{1+\sqrt{x}}-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\cdot} = 3^4 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{x}{1+\sqrt{x}}-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\cdot = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+\sqrt{x}}-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2x-2-\sqrt{x}-x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x}-2 = 3\left(1+\sqrt{x}\right) \Rightarrow x-\sqrt{x}-2-3-3\sqrt{x} = 0$$

$$\Rightarrow -4\sqrt{x} = 5-x \Rightarrow 4\sqrt{x} = x-5 \quad \left(x \geq 5\right)$$

Після піднесення у квадрат одержимо

$$16x = x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-26x+25 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = 13 \pm \sqrt{169-25} = 13 \pm \sqrt{144} = 13 \pm 12;$$

$$x_1 = 25 > 5,\ \ x_2 = 1 < 5.$$

Тому лише x_1 є розв’язком рівняння.

b) винесемо за дужки спільний множник (з меншим показником степеня), тоді одержимо

$$5^{x-2}\left(5^2+3\right) = 140 \Rightarrow 5^{x-2}\cdot 28 = 140 \Rightarrow 5^{x-2} = 5 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

– це і є розв’язком рівняння.

c) цей приклад розв’яжемо шляхом введення нової змінної

$$y = 3^x > 0.$$

Тоді рівняння набуває вигляду: $y^2 - 5y + 6 = 0$.

Розв’язок цього квадратного рівняння відносно y буде:

$$y_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2};\ \ y_1 = 3;\ \ y_2 = 2.$$

Тепер треба повернутися до початкової змінної x:

з рівності $3^x = 3 \Rightarrow x_1 = 1$; з рівності $3^x = 2 \Rightarrow x_2 = \log_3 2$.

Знайдені x_1 і x_2 будуть розв’язками рівняння c).

d) рівняння $2^{x-2} = 7^{x-2}$ поділимо на 7^{x-2}, тоді одержимо

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{x-2}=1\Rightarrow\left(\frac{2}{7}\right)^{x-2}=\left(\frac{2}{7}\right)^{0}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2.$$

Тому розв'язком рівняння d) буде 2.

2.3.7. Розв'язування логарифмічних рівнянь

Логарифмічними називають такі рівняння, які містять невідоме під знаком логарифма.

При розв'язанні логарифмічних рівнянь використовують основні властивості логарифмів:

1. $\log_a N_1+\log_a N_2=\log_a\left(N_1\cdot N_2\right)$.

2. $\log_a N_1-\log_a N_2=\log_a\left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \log_a\left(N^k\right)=k\log_a N \\ 4.\ \log_{a^\alpha} N=\dfrac{1}{\alpha}\log_a N \end{array}\right\}\Rightarrow \log_{a^k} x^n=\frac{n}{k}\log_a x\,.$$

5. $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$.

а також такі прийоми:

a) потенціювання: з рівності

$$\log_a\varphi(x)=\log_a\varphi_1(x)\Rightarrow\varphi(x)=\varphi_1(x).$$

b) використання означення логарифма: якщо

$$\log_a\varphi(x)=b\Rightarrow\varphi(x)=a^b;$$

c) використання основної логарифмічної тотожності:

$$a^{\log_a\varphi(x)}=\varphi(x);$$

d) введення нового невідомого;

e) перехід до нової основи логарифма за формулою

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

При розв'язанні логарифмічних рівнянь доцільно застосовувати такий порядок дій:

1) знайти область припустимих значень. При цьому використовують те, що $\log_a N$ існує лише при $N > 0$, а також співвідношення

$$\log_a N = \begin{cases} >0, & \textit{якщо } N>1, \quad a>1; \\ =0, & \textit{якщо } N=1; \\ <0, & \textit{якщо } a>1, \quad N<1; \end{cases}$$

2) розв'язують логарифмічне рівняння. При цьому бажано одержати

$\log_a \varphi(x) = b$, тоді $\varphi(x) = a^b$, або $\log_a \varphi(x) = \log_a \varphi_1(x)$, тоді $\varphi(x) = \varphi_1(x)$.

3) перевірити: чи входять знайдені значення невідомої в область припустимих значень;

4) записати відповідь.

■ **Приклад 9.** Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1.$$

↬ *Розв'язання.* У даному випадку областю припустимих значень буде: $x > 0,\ \lg x \neq 5,\ \lg x \neq -1 \Rightarrow x > 0,\ x \neq 10^5,\ x \neq 10^{-1}$.

Введемо нову невідому $y = \lg x$. Тоді задане рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{5-y} + \frac{2}{1+y} = 1 \Rightarrow 1 + y + 10 - 2y = (5-y)(1+y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 3.$$

Тепер повернемось до початкової змінної:

з рівності $\lg x = 2 \Rightarrow x_1 = 10^2 = 100$;

з рівності $\lg x = 3 \Rightarrow x_2 = 1000$.

Розв'язки 100 та 1000 належать області припустимих значень.

■ **Приклад 10.** Обчислити 4^R, де $R = 1+2\log_2 9$.

Розв'язання.

$$4^R = 4^{1+2\log_2 9} = 2^{2\left(1+\log_2 9^2\right)} = 2^2 \cdot 2^{\log_2 9^4} = 4 \cdot 9^4 = 26244.$$

Вправи до розділу 2.3

1. Розв'язати лінійні рівняння:

a) $1 + x = 3 - x$; b) $2x - 5 = -15 - 3x$;
c) $4(x - 3) = 8 - x$; d) $3z - 2 + 4(1 - z) = 5(1 - 2z) - 12$;
e) $1 - 2[4 - 3(x + 1)] = 4(x - 5) - 1$.

2. Розв'язати рівняння:

a) $(x - 4)^2 = (x - 2)^2$; b) $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 3)$;
c) $(2x + 1)(x - 1) + x^2 = 3(x - 1)(x + 2) - 3$;
d) $x(x + 2)(x + 4) + x^3 = 2(x + 1)^3$; e) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

3. Розв'язати рівняння:

a) $\dfrac{x^2+1}{x+1} + \dfrac{x^2+2}{x-2} = -2$;

b) $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a-b, \quad (a > b)$;

c) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$; d) $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0$.

4. Розв'язати показникові та логарифмічні рівняння:

a) $\left(\dfrac{7}{6}\right)^{3x^2+4x-3} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^{-7x-3}$; b) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

c) $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x-1}$; d) $7^{2x+1} + 1 = 8 \cdot 7^x$;

e) $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$;

f) $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$;

g) $\lg(x+1{,}5) = -\lg x$; h) $\ln(2x+1) = 3$.

2.4. Нерівності

Існує багато різновидів нерівностей: лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, показниково-логарифмічні, з модулями.

Економістам найчастіше треба розв'язувати лінійні (у тому числі з багатьма невідомими), квадратні, раціональні та показникові нерівності.

При розв'язуванні нерівностей використовують такі властивості нерівностей:

1. *Якщо $a > b$ і c є будь-яке дійсне число, тоді $a + c > b + c$ та $a - c > b - c$, тобто нерівність не зміниться при додаванні та відніманні однакового дійсного числа c у обох його частинах.*

2. *Якщо $a > b$ і c будь-яке додатне число, тоді $ac > bc$, а $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, тобто нерівність не змінюється, якщо обидві мого частини помножити або поділити на однакове додатне число c.*

3. *Якщо $a > b$ і c будь-яке від'ємне число, тоді $ac < bc$ та $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, тобто при множенні та діленні нерівності на від'ємне число нерівність змінює свій знак на протилежний.*

■ **Приклад 11.** Розв'язати нерівність $y + \frac{3}{4} \le \frac{5y-2}{3} + 1$.

✎ *Розв'язання.* Помножимо задану нерівність на 12. Згідно з властивістю 2 нерівність не зміниться, тобто одержимо

$$12\left(y + \frac{3}{4}\right) \le 12\left(\frac{5y-2}{3} + 1\right) \Rightarrow 12y + 9 \le 4(5y-2) + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12y + 9 \le 20y - 8 + 12 \Rightarrow 12y + 9 \le 20y + 4 .$$

Перенесемо члени з невідомим y в ліву частину, а постійні числа у праву частину нерівності, тоді одержимо

$$12y - 20y \le 4 - 9 \Rightarrow -8y \le -5 .$$

Останню нерівність поділимо на (–8). Тоді, згідно з властивістю 3, нерівність змінює свій знак на протилежний. Отже, маємо:

$$8y \geq 5 \Rightarrow y \geq \frac{5}{8},$$

тобто розв'язком заданого рівняння будуть усі дійсні числа y

$$y \in \left[\frac{5}{8}, \infty\right).$$

■ **Приклад 12.** Підприємство виробляє спецодяг, який продає по 60 гривень за кожну одиницю. Матеріал та оплата праці за виробництво кожної одиниці коштує 40 гривень. Власнику підприємства треба кожного тижня сплачувати 3000 гривень за оренду приміщення, охорону, транспортні витрати, оплату праці прибиральниці, бухгалтера та інше. Скільки одиниць спецодягу повинно виробляти підприємство кожного тижня, щоб одержувати прибуток не менше 600 гривень щотижня?

↬ *Розв'язання.* Шукану кількість одиниць спецодягу позначимо x. Згідно з умовою задачі витрати кожного тижня складають $(40x + 3000)$ гривень, а доход $60x$ гривень.

Прибуток = доход – витрати = $60x - (40x + 3000) = 20x - 3000$.

За умовою задачі треба одержати прибуток не менше 600 гривень, тобто

$$20x - 3000 \geq 600 \Rightarrow 20x \geq 3600 \Rightarrow x \geq 1800 \text{ (одиниць спецодягу).}$$

■ **Приклад 13.** Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$4^x - 4^{x-3} - 4032 > 0.$$

↬ *Розв'язання.* Задану нерівність можна записати у вигляді

$$4^{x-3}\left(4^3 - 1\right) > 4032 \Rightarrow 4^{x-3} \cdot 63 > 4032 \Rightarrow 4^{x-3} > \frac{4032}{63} = 64.$$

тобто

$$4^{x-3} > 4^3 \Rightarrow x - 3 > 3 \Rightarrow x > 6.$$

Найменшим цілим розв'язком заданої нерівності буде число 7.

У загальному випадку розв'язування нерівностей вигляду

$$f(x) \geq 0, \quad f(x) > 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \leq 0$$

для будь-якого виразу доцільно проводити методом інтервалів. Суть цього методу полягає у тому, що корені рівняння $f(x) = 0$ розподіляють усю область визначення функції $f(x)$ на інтервали, на яких $f(x)$ має постійний знак. Тому можна визначити знак функції на кожному інтервалі шляхом підстановки у функцію замість x будь-якої точки x_0 з інтервалу, що розглядається, а потім обирати такі інтервали, на яких функція має знак заданої нерівності.

■ **Приклад 14.** Розв'язати нерівність $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$ та знайти найменше ціле додатне значення розв'язку.

↳ *Розв'язання.* Задана нерівність не існує при $x = -2$ та $x = 3$. Тому областю її визначення буде $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$. Запишемо задану нерівність так, щоб у правій частині залишився лише 0, тобто у вигляді

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{x-3-3x-6}{(x+2)(x-3)} < 0 \Rightarrow \frac{-2x-9}{(x+2)(x-3)} < 0.$$

При множенні нерівності на (-1) вона змінює свій знак на протилежний. Тому одержуємо нерівність

$$\frac{2x+9}{(x+2)(x-3)} > 0$$

еквівалентну заданій.

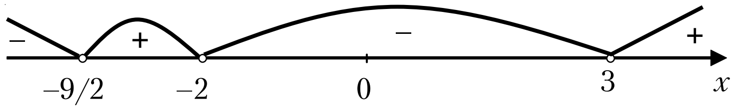
Остання нерівність еквівалентна нерівності

$$f(x) = (2x+9)(x+2)(x-3) > 0, \quad x \neq -2, \quad x \neq 3.$$

Останню нерівність будемо розв'язувати методом інтервалів. З рівності $(2x + 9)(x + 2)(x - 3) = 0$ одержимо

$$x_1 = \frac{-9}{2}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3,$$

які поділяють область визначення $f(x)$ на інтервали:



На інтервалі $\left(-\infty,-\frac{9}{2}\right)$ візьмемо $x_0 = -5$, тоді

$$f(-5)=\left(2(-5)+9\right)(-5+2)(-5-3)=(-1)(-3)(-8)<0.$$

На інтервалі $\left(-\frac{9}{2},-2\right)$ візьмемо $x_0 = -3$, тоді

$$f(-3)=(-6+9)(-3+2)(-3-3)>0.$$

На інтервалі (–2, 3) візьмемо $x_0 = 0$, тоді

$$f(0)=9\cdot 2\cdot(-3)<0.$$

На інтервалі $(3,\infty)$ візьмемо $x_0 = 4$, тоді

$$f(4) = (8 + 9)(4 + 2)(4 - 3) > 0.$$

Отже, розв'язком заданої нерівності буде об'єднання інтервалів, де $f(x) > 0$ тобто $x\in\left(-\frac{9}{2},-2\right)\cup(3,\infty)$.

Найменшим цілим додатним значенням буде 4, оскільки 3 не належить області визначення.

Вправи до розділу 2.4

1. Розв'язати нерівності:

a) $3(2x - 1) > 4 + 5(x - 1)$; b) $\frac{y+1}{4}-\frac{y}{3}>1+\frac{2y-1}{6}$;

c) $1{,}2(2t - 3)\le 2{,}3(t - 1)$; d) $(x - 2)(x - 5) < 0$;

e) $x^2 - 6x - 9\le 0$; f) $x^2 + 13 < 6x$;

g) $25^x<6\cdot 5^x-5$; h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-5x+8\right)}\le 2{,}5.$

2. Розв'язати задачі:

a) чоловік має 7000 гривень і бажає вкласти їх, частину під 8%, а останні під 10%. Яку максимальну кількість коштів він повинен вкласти під 8%, якщо бажає отримати загальний прибуток за рік 600 гривень?

b) кожного місяця фірма може продати x одиниць виробів вартістю $p = 600 - 5x$ гривень за кожне. Яку кількість виробів треба продати кожного місяця, щоб одержати не менше 18000 гривень?

c) на вступному іспиті з математики до економічного університету 15% абітурієнтів не розв'язали жодної задачі, 144 розв'язали задачі з похибками, а кількість абітурієнтів, що розв'язали вірно усі задачі, відноситься до кількості тих, що не розв'язали жодної задачі не більше ніж $5/3$. Скільки абітурієнтів здавали іспит з математики в той день? Яка кількість їх найбільша?

2.5. Елементи комбінаторики

Фахівцям різних спеціальностей доводиться розв'язувати задачі, в яких розглядаються ті чи інші комбінації, складені з людей, літер, цифр чи інших об'єктів.

Так, начальнику цеху потрібно розподілити різні види робіт між верстатами, що є у наявності, завідуючому навчальною частиною університету треба складати розклад занять і т.п.

Галузь математики, в якій вивчаються питання про кількість різних комбінацій, що підпорядковані певним умовам, називають ***комбінаторикою***. Основні поняття та формули комбінаторики використовуються при розв'язуванні багатьох проблем життя, менеджменту, планування, задач теорії ймовірностей.

Більшість комбінаторних задач розв'язуються з використанням двох основних правил – правила суми та правила добутку.

Правило суми: якщо деякий об'єкт A можна обрати m способами, а об'єкт B – n способами (незалежно від вибору A), тоді вибір або A або B можна зробити $m + n$ способами.

Наприклад, якщо з двох цехів, в яких працюють 40 та 45 працівників, треба обрати одного на профспілкову конференцію, тоді це можна зробити 85 способами (обрати з одного цеху – 40 способів, з другого – 45 способів).

Правило добутку: якщо об'єкт A можна обрати m способами і після такого вибору об'єкт B обрати n способами, тоді обрання пари (A, B) у заданому порядку можна зробити mn способами.

Наприклад, якщо з двох класів, в яких навчаються 29 та 31 учнів, треба направити на міську математичну олімпіаду будь-яких два учня, по одному з кожного класу, тоді можливих комбінацій буде $29 \cdot 31 = 899$.

Деякі комбінації зустрічаються частіше за інші і мають свої назви: розміщення, перестановки та сполучення.

В комбінаториці доведені формули, які дозволяють знаходити кількість цих основних комбінацій. Ці формули разом з правилами комбінаторики дозволяють знаходити кількість будь-яких комбінацій.

Ознайомимось з основними комбінаціями комбінаторики.

⬢ **Означення.** *Комбінації, які взяті з n різних елементів в кількості k* **(***k* **<** *n***)** *елементів і які відрізняються між собою хоча б одним елементом або розташовані у різному порядку називають* ***розміщеннями без повторень,*** *їх кількість позначають* A_n^k *або* $A_n(k)$ і *знаходять за формулою*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{1}$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Наприклад, якщо у навчальному плані 10 дисциплін і на кожен день можна планувати 4 різних дисципліни, то розклад занять на кожний день можна скласти

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040 \text{ способами.}$$

⬢ **Означення.** *Різноманітні комбінації з n елементів в кількості k елементів (k < n), що відрізняються між собою хоча б одним елементом без врахування їх порядку, називають* ***сполученням з n елементів k,*** *їх кількість позначають* C_n^k *або* $C_n(k)$ *і знаходять за формулою*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (2)$$

■ **Приклад 15.** На підприємстві працюють 15 співробітників, троє з них не мають відповідної кваліфікації. Скільки можна скласти списків:

a) по 8 співробітників;

b) по 6 кваліфікованих співробітників;

c) по 9 співробітників, два з яких не мають відповідної кваліфікації?

Розв'язання:

a) при складанні списку 8 працівників з 15 нас нецікавить їх порядок, тому кількість таких списків буде

$$C_{15}^8 = \frac{15!}{7!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 3\cdot 11\cdot 13\cdot 15 = 6435.$$

b) при складанні списків 6 кваліфікованих співробітників їх треба обирати з 12 кваліфікованих (15 – 3) співробітників, порядок співробітників у кожному списку не враховується, тому кількість таких списків буде

$$C_{12}^6 = \frac{12!}{6!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 924.$$

c) для складання списків з 9 працівників, 2 з яких не мають відповідної кваліфікації, треба обирати 7 співробітників з 12 кваліфікованих та 2 співробітника з 3 не кваліфікованих. Кількість потрібних списків згідно із *правилом добутку* буде

$$C_{12}^7 \cdot C_3^2 = \frac{12!}{5!\cdot 7!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 910\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2} = 2376.$$

⬢ **Означення.** *Комбінації з n елементів, в які входять усі n елементів і відрізняються лише порядком елементів називають* ***перестановками із n елементів****, їх кількість позначають P_n і знаходять за формулою*

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Відмітимо, що між кількостями основних комбінацій комбінаторики існує зв'язок вигляду

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \tag{4}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{5}$$

Запитання для самоперевірки

1. Що вивчає комбінаторика та які її основні правила?
2. Які комбінації називають розміщеннями, сполученнями, перестановками? За якими формулами знаходять кількості цих комбінацій?

Вправи до розділу 2.5

1. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з використанням п'яти різних цифр?

2. Правління підприємства складається з 7 осіб. Скільки можна скласти варіантів обрання з їх числа трьох керівників – президента, директора та комерційного директора?

3. Скільки існує способів для розміщення 12 гостей за столом, де стоять 12 стільців?

4. З 7 кандидатів обирають президента та віце-президента. Скільки може бути різних комбінацій обрання?

5. Скількома способами з 10 осіб можна обрати комісію у складі 4 осіб.

Частина 3

ПРОГРЕСІЇ ТА МАТЕМАТИКА ФІНАНСІВ

3.1. Загальні поняття послідовності

Пронумерований ряд чисел називають ***числовою послідовністю***. У загальному вигляді числова послідовність записується так:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \quad \text{або} \quad \{a_k\}_{k=1}^{n}.$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називають ***членами послідовності***, 1, 2,..., n — номери членів послідовності, a_k — k-й член послідовності.

Щоб задати послідовність, треба вказати правило, за яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність одне й тільки одне число a_n. Основний спосіб завдання послідовності аналітичний, тобто формулою її загального члена.

Наприклад, $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$. За цією формулою можна знайти будь який член послідовності, підставивши замість n його номер. Скажімо,

$$a_7 = \frac{2 \cdot 7 + 1}{7^2 + 1} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Послідовність називається ***скінченною***, якщо множина її членів скінченна, і ***нескінченною***, якщо множина її членів нескінченна.

Числова послідовність називається ***монотонно зростаючою*** (***спадною***), якщо кожен її член, починаючи з другого, більший (менший) за попередній, тобто $a_{n+1} > a_n (a_{n+1} < a_n)$, $n \in N$.

Числова послідовність називається ***обмеженою зверху***, якщо усі її члени менші від певного числа M, тобто $a_n < M$, $n \in N$.

Числова послідовність називається обмеженою знизу, якщо усі її члени більші від певного числа m; $a_n > m$, $n \in N$.

Числова послідовність називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена зверху та знизу, тобто $m < a_n < M$, $n \in N$.

Наприклад, послідовність $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{15}$ обмежена тому, що $0 < \dfrac{1}{n^2} \le 1$.

Частинними випадками послідовності є арифметична та геометрична прогресії.

3.2. Арифметична прогресія та прості відсотки

⬢ **Означення.** ***Арифметичною прогресією*** *називається числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, доданому до певного сталого для даної послідовності числа d, яке називається* ***різницею прогресії****. Арифметичну прогресію позначають* $\div$.

У випадку $d > 0$ арифметичну прогресію називають ***зростаючою***, а при $d < 0$ — ***спадною***.

За означенням арифметичної прогресії маємо

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in N .$$

✦ **Теорема 1.** ***Загальний член арифметичної прогресії може бути знайдений за формулою***

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \tag{1}$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Згідно з формулою (1) маємо

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d.$$

Нехай має місце (1) для деякого n і доведемо її для $n + 1$. Згідно з означенням маємо:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Підставивши у цю рівність замість a_n, його значення з (1), одержимо:

$$a_{n+1} = a_1 + (n - 1)d + d = a_1 + nd \text{ або } a_{n+1} = a_1[(n + 1) - 1]d.$$

Остання рівність – це формула (1) записана для $n + 1$, яку й треба було довести.

3.2.1. Властивості арифметичної прогресії

1. *Кожен член арифметичної прогресії* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх з ним членів, тобто*

$$a_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}, \text{ де } \quad k \ge 2. \tag{2}$$

Дійсно, якщо $a_k = a_{k-1} + d,\ a_{k+1} = a_k + d \Rightarrow a_k = a_{k+1} - d$.

Сума цих рівностей дає: $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ звідки випливає формула (2).

2. *Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів цієї прогресії, тобто*

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n,\ k \ge 2. \tag{3}$$

Дійсно,

$$a_k + a_{n-k+1} = \left[a_1 + (k-1)d\right] + \left[a_1 + (n-k)d\right] = 2a_1 + (n-1)d;$$

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d.$$

Праві частини цих рівностей співпадають, тому їх ліві частини рівні, тобто має місце рівність (3) для $k \ge 2$.

3. *Сума членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює добутку півсуми крайніх її членів на число всіх членів:*

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{4}$$

Для доведення цього твердження запишемо суму S_n арифметичної прогресії двома способами:

$$S_n = a_2 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Додавши почленно ліву і праву частини, одержимо згідно формули (3):

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

звідки і випливає формула (4).

▼ **Наслідок.** *Якщо замість* a_n *підставити у формулу* (4) *його значення у вигляді* (1), *тоді одержимо другу формулу для суми членів арифметичної прогресії:*

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (5)$$

■ **Приклад 1.** Між числами 7 та 35 записати 6 чисел, які разом з заданими числами утворюють арифметичну прогресію.

⇘ *Розв'язання.* За умовою: $a_1 = 7$, $n = 8$, $a_8 = 35$.

З рівності $a_8 = a_1 + 7d$ одержимо: $35 = 7 + 7d \Rightarrow 7d = 28 \Rightarrow d = 4$.

Таким чином: $\div$ 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35.

■ **Приклад 2.** Визначити a_1, d та n арифметичної прогресії, в якій S_3=30, S_5=75, S_n=105.

⇘ *Розв'язання.* За умовою $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Але $a_1 + a_3 = 2a_2$, тому $2a_2 + a_2 = 30 \Rightarrow a_2 = 10$.

Аналогічно: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 75$, але $a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$, тому $5a_3 = 75 \Rightarrow a_3 = 15$.

Знаючи a_3 та a_2, знаходимо різницю прогресії $d = a_3 - a_2 = 10 - 5 = 5$.

Але тоді $a_1 = a_2 - d = 10 - 5 = 5$. Згідно з умовою

$$S_n = 105 \Rightarrow \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 105.$$

Підставивши у цю рівність a_1 =5 та $d = 5$, знайдемо n.

$$\frac{10 + 5(n-1)}{2} \cdot n = 105 \Rightarrow [10 + 5n - 5] \cdot n = 210 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5n^2 + 5n - 210 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0 \Rightarrow n_1 = -7$$

не підходить тому, що кількість членів прогресії додатна, $n_2 = 6$.

Відповідь: $a_1 = 5$, $d = 5$, $n = 6$.

■ **Приклад 3.** Фірма почала використовувати нову технологічну лінію вартістю 1 млн. 700 тис. гривень, вартість якої буде зменшуватися кожного року на 150 тис. гривень. Знайти значення вартості цієї технологічної лінії після n років. При вартості 200 тис. гривень технологічна лінія буде не придатною для виробництва. Коли це станеться?

↳ *Розв'язання.* Згідно з умовою задачі вартість лінії з кожним роком зменшується на 150 тис. гривень, тому її вартість після першого, другого, третього років і далі буде:

$$1700 - 150,\ 1700 - 2(150),\ 1700 - 3(150),\ldots \text{ або } 1550,\ 1400,\ 1250,\ldots$$

Ця послідовність значень вартості утворює арифметичну прогресію з $a_1 = 1550$, $d = 1400 - 1550 = -150$. Отже,

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1550 + (n-1)(-150) = 1700 - 150n,$$

де a_n вимірюється у тисячах гривень, n — кількість років.

Тепер треба знайти значення n, при якому $a_n = 200$.

З рівності $200 = 1700 - 150n$ одержимо

$$150n = 1700 - 200 \Rightarrow 150n = 1500 \Rightarrow n = 10.$$

Отже, цю технологічну лінію можна використовувати 10 років.

3.2.2. Поняття простих відсотків на капітал

Якщо сума коштів P вкладена під R відсотків річних, то після першого року буде одержано прибуток величиною $d = P\dfrac{R}{100}$.

Якщо вкладення капітана здійснюється під простий річний відсоток, тоді з кожним роком прибуток зростає на однакову величину. Тому послідовність значень капіталу буде P, $P + d$, $P + 2d$, $P + 3d$,... тобто ці значення утворюють арифметичну прогресію.

Отже, ***величина капітали P, вкладеного під простий річний відсоток R, через n років***

$$a_n = P + n \cdot d = P + n \cdot P\frac{R}{100} = P\left(1 + \frac{nR}{100}\right).$$

Наприклад, якщо вкладено 5000 гривень під простий річний відсоток 10%, тоді через 5 років вкладник матиме:

$$a_5 = 5000\left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right) = 5000\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 5000 + 2500 = 7500 \text{ гривень.}$$

3.3. Геометрична прогресія та складні відсотки

⬢ **Означення.** ***Геометричною прогресією*** *називається послідовність, кожний наступний член якої дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число q, яке називають* ***знаменником прогресії****. Геометричну прогресію позначають* ÷÷.

Згідно з означенням

$$b_{n+1} = b_n q, \quad n \in N. \tag{1}$$

Наприклад, ÷÷ 1, 3, 9, 27, ... — геометрична прогресія із знаменником $q = 3$.

Геометрична прогресія називається зростаючою, якщо $|q| > 1$, і спадною, якщо $|q| < 1$.

Якщо кількість членів геометричної прогресії скінченна, тоді вона називається скінченною, у протилежному випадку вона називається нескінченною геометричною прогресією.

Методом математичної індукції можна довести, що загальний член геометричної прогресії знаходять за формулою

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{2}$$

■ **Приклад 1.** Знайти шостий та дев'ятий члени геометричної прогресії, в якій $b_1 = 2$, $q = 3$.

↳ *Розв'язання.* За формулою (2) маємо:

$$b_6 = b_1 q^5 = 2 \cdot 3^5; \quad b_9 = b_1 q^8 = 2 \cdot 3^8.$$

3.3.1. Властивості геометричної прогресії

1. *Будь-який член геометричної прогресії з додатними членами, починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному двох сусідніх з ним членів:*

$$b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}. \tag{3}$$

Дійсно, за формулою (2) маємо $b_k = b_k q^{k-1}$

$$\sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} = \sqrt{b_1 q^{k-2} \cdot b_1 q^k} = \sqrt{b_1^2 \cdot q^{2(k-1)}} = b_1 q^{k-1}.$$

Бачимо, що обидві частини рівності (3) однакові.

2. *Добутки членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її кінців, рівні між собою, тобто*

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 b_n . \tag{4}$$

Дійсно,

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{n-k} = b_1^2 q^{n-1};$$

$$b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1^2 q^{n-1}.$$

Отже, обидві частини рівності (4) однакові.

4. *Сума членів скінченної геометричної прогресії може бути знайдена за формулою:*

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}. \tag{5}$$

Для доведення цієї формули запишемо

$$S \ = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} . \tag{6}$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на q, одержимо

$$qS_n = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^n . \tag{7}$$

Віднімемо почленно з рівності (6) рівність (7), тоді одержимо

$$S_n - qS_n = b_1 + \left(b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1}\right) - \left(b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1}\right) - b_1 q^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n - qS_n = b_1 - b_1 q^n ,$$

тобто $(1 - q)S_n = b_1(1 - q^n)$. З останньої рівності випливає формула (5).

4. *Суму всіх членів нескінченної спадної геометричної прогресії знаходять за формулою*

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{8}$$

Доведення. Члени геометричної прогресії спадають, тому $|q| < 1$. Розглянемо суму членів вказаної геометричної прогресії як границю суми скінченної геометричної прогресії. Тоді

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \lim_{n\to\infty}\left(1-q^n\right) = \frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right).$$

Але $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Отже, $S = \dfrac{b_1}{1-q}$, що і треба було довести.

■ **Приклад 2.** Перетворити періодичний дріб у простий дріб:
a) 0,(5); b) 0,3(7).

Разв'язання.
a) Маємо чистий періодичний дріб

$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots,$$

тобто маємо нескінченно спадну геометричну прогресію, в якій $b_1 = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{1}{10}$. Тому за формулою (8)

$$0,(5) = \frac{1/2}{1 - 1/10} = \frac{1}{2} : \frac{9}{10} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

b) Маємо мішаний періодичний дріб

$$0,3(7) = 0,3777\ldots = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots$$

Після першого доданка маємо нескінченно спадну геометричну прогресію з першим членом $b_1 = \dfrac{7}{100}$ та знаменником $q = \dfrac{1}{10}$.

Тому

$$0,3(7) = \frac{3}{10} + \frac{7/100}{1 - 1/10} = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} : \frac{9}{10} = \frac{3}{10} + \frac{7}{90} = \frac{27+7}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}.$$

3.3.2. Поняття складних відсотків на капітал

Припустимо, що вкладник надає банку 5 000 гривень з умовою їх зростання кожного року на 10 складних відсотків. Це означає: кожного року величина капіталу, що знаходиться на рахунку вкладника у банку, повинна зростати на 10 відсотків.

Після першого року величина вкладення буде

$$5\,000 + \frac{10 \cdot 5000}{100} = 5\,000 \cdot (1 + 0{,}1) = 5\,000 \cdot 1{,}1 = 5\,500 \text{ гривень.}$$

Після другого року величина вкладення буде

$$5\,500 + \frac{10 \cdot 5500}{100} = 5\,500 \cdot 1{,}1 = 5\,000(1{,}1)^2,$$

а після n років величина вкладення буде $5\,000(1{,}1)^n$.

Отже, величина капіталу з роками змінюється таким чином:

$$5\,000;\ 5\,000 \cdot 1{,}1;\ 5\,000 \cdot (1{,}1)^2;\ldots;\ 5\,000 \cdot (1{,}1)^n,$$

тобто вона утворює геометричну професію із знаменником $q = 1{,}1$ та першим членом $b_1 = 5\,000$.

Тому величина капіталу P, що зростає кожного року на R складних відсотків, через n років прийме значення

$$P_n = P\left(1 + 0{,}01R\right)^n. \qquad (9)$$

У розглянутому вище випадку вкладник через 5 років буде володіти капіталом, який дорівнює:

$$5\,000 \cdot (1,\ 1)^5 = 8\,052{,}55 \text{ (гривень),}$$

а через 10 років капітал становитиме $5\,000 \cdot (1{,}1)^{10} = 12\,968{,}72$ гривень (у випадку простого відсотка, згідно з прикладом розділу 3.2 величина вкладу через 5 років буде 7 500 гривень).

Вправи до розділів 3.2 та 3.3

1. a) Знайти суму 27 членів арифметичної прогресії, якщо $a_{11} + a_{17} = 8$.

b) Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 30. Якщо від першого числа відняти 5, від другого 4, а третє не змінювати, то ці числа утворять геомет-ричну прогресію. Які це числа.

2. a) Між числами 4 та 39 знайти чотири числа, які разом з даними утворюють арифметичну прогресію. У відповіді записати 4-й член.

b) Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 30. Якщо від другого члена цієї прогресії підняти 2, а решту членів не змінювати, то утвориться геометрична прогресія. Знайти ці числа.

3. a) Знайти різницю зростаючої арифметичної професії, у якої сума перших трьох членів дорівнює 27, а сума їх квадратів дорівнює 275.

b) Три числа утворюють арифметичну прогресію. Якщо до першого додати 8, то утвориться геометрична прогресія з сумою членів 25. Знайти ці числа.

4. a) Знайти добуток перших чотирьох членів геометричної прогресії, якщо $b_4 - b_2 = 24$, а $b_2 - b_3 = 6$.

b) Якщо до чотирьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, додати відповідно 2, 1, 4, 15, то нові числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.

5. a) В арифметичній прогресії 11 членів. Перший, п'ятий та одинадцятий її члени утворюють геометричну прогресію. Знайти третій член арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 24.

b) Між числами 2 та 65 є ще 20 чисел, які разом з даними утворюють арифметичну професію. Знайти найбільше із невідомих чисел.

Задачі економічного змісту

6. a) М.Кучеренко взяв в борг 3200 гривень з умовою повернути 20 гривень у перший місяць і подальшим зростанням цієї суми на 15 гривень кожного місяця. Який термін йому потрібен для повернення боргу?

b) Щомісячне повернення банку боргу М.Кучеренко здійснює за арифметичною прогресією. Скільки йому потрібно повернути коштів у 20-му місяці, якщо його внески у 8-му та 15-му місяцях були 153 та 181 гривень, відповідно.

7. Припустимо, що М.Кучеренко взяв в борг 5490 гривень на умовах повернення задачі 6, а).

а) Скільки він повинен зробити внесків, щоб ліквідувати свій борг?

b) Яка величина останньої сплати?

8. Обладнання вартістю 10 тисяч гривень внаслідок експлуатації втрачає кожного року 20% своєї вартості. Знайти:

a) вираз для вартості цього обладнання через n років;

b) кількість років його доцільного використання, якщо при вартості 3 000 гривень обладнання використовувати недоцільно.

9. Кожного року чоловік вкладає 1000 гривень для накопичення з фіксованим 8% щорічним зростанням. Знайти:

a) формулу, за якою можна знайти величину його коштів через n років;

b) скільки коштів він буде мати через 10 років?

3.4. Математика фінансів

Основні проблеми математики фінансів — обчислення простих та складних відсотків прибутку, розглянуто у розділах 3.2 та 3.3. Зараз ознайомимось з деякими іншими важливими задачами фінансової сфери.

3.4.1. Рахунки накопичення

Найпростішим типовим рахунком накопичення є такий рахунок фізичної або юридичної особи, на який регулярно нараховують і зараховують (наприклад, в кінці кожного місяця або на початку наступного року) фіксований доход та роблять баланс вкладень і запланованих відсотків з врахуванням терміну одержаних вкладень.

■ **Приклад 1.** Кожного місяця робітник вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку величиною $\frac{1}{2}\%$ за кожен місяць. Обчислити величину його накопичень:

a) безпосередньо після здійснення 25 внеску;

b) безпосередньо після здійснення n внеску.

Розв'язання.

a) Кожен внесок за місяць зростає в 1,005 рази (0,5% за місяць). Тому перший внесок за 24 місяця перебування рахунку прийме значення $100\cdot(1{,}005)^{24}$. Другий внесок знаходився на рахунку 23 місяця, тому він прийме значення $100\cdot(1{,}005)^{23}$ третій внесок стане $100\cdot(1{,}005)^{22}$, і т.д. Отже, загальна сума накопиченого рахунку робітника прийме значення

$$S= 100\cdot(1{,}005)^{24} + 100\cdot(1{,}005)^{23}+ ...+ 100\cdot(1{,}005) + 100.$$

Якщо записати праву частину в оберненому порядку, тоді її можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $b_1 = 100$ і знаменником $q = 1{,}005$. Тому, використовуючи формулу суми скінченної геометричної прогресії, одержимо

$$S=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\frac{100\left[\left(1{,}005\right)^{25}-1\right]}{1{,}005-1}=\frac{100}{0{,}005}\left[\left(1{,}005\right)^{25}-1\right]=$$

$$=20000\left[1{,}13280-1\right]=2655{,}91.$$

Таким чином, після 24 місяців робітник буде мати на своєму рахунку накопичення 2 655,9 гривень.

b) Для знаходження величини рахунку накопичення безпосередньо після здійснення n внеску, слід рахувати $(n-1)$ місяць першого вкладу. Після $(n-1)$ місяця перший вклад величиною 100 гривень зросте до $100\cdot(1{,}005)^{n-1}$, другий вклад зросте до $100\cdot(1{,}005)^{n-2}$ і т.д. Таким чином, загальним значенням рахунку накопичення буде сума

$$S= 100\cdot(1{,}005)^{n-1} + 100\cdot(1{,}005)^{n-2} + ...+ 100\cdot(1{,}005) + 100.$$

Знову одержали суму геометричної прогресії з першим членом 100 (розглядаємо її в оберненому порядку) і знаменником $q = 1{,}005$. Тому вона буде мати вигляд

$$S=\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\frac{100\left[\left(1{,}005\right)^{n}-1\right]}{1{,}005-1}=20000\left[\left(1{,}005\right)^{n}-1\right]. \quad (1)$$

◈ **Зауваження.** *Формула* (1) *дозволяє знайти величину накопичених коштів при умовах задачі за довільну кількість місяців. Наприклад, після 59 місяців на рахунку буде*

$$20\,000\cdot[(1{,}005)^{59}- 1] = 20\,000\cdot[(1{,}34885- 1] = 6\,977 \text{ гривень.}$$

Тепер узагальнимо проведені при розв’язанні прикладу 1 міркування на випадок, коли перший внесок на рахунок накопичення дорівнює величині P, а поетапний відсоток зростання величини коштів дорівнює R за кожен певний період. У фінансових розрахунках застосовують позначення

$$i = \frac{R}{100}. \qquad (2)$$

При таких позначеннях величина накопичених коштів на рахунку після (n – 1) періоду їх зберігання буде

$$S = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \ldots + P(1+i) + P.$$

Якщо цю суму записати в оберненому порядку, то одержимо суму геометричної прогресії n членів, з першим членом $b_1 = P$ та знаменником $q = 1 + i$. Тому, згідно з формулою суми скінченної геометричної прогресії маємо

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{P\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)-1} = \frac{P}{i}\left[(1+i)^n - 1\right]. \qquad (3)$$

◈ **Зауваження.**

1) *Якщо у формулі* (3) *покласти* $P = 100$, $i = 0{,}005$, *то ми одержимо результат прикладу 1.*

2) *У фінансових розрахунках формула* (3) *використовується у вигляді*

$$s = P \cdot s_{n/i}, \qquad (4)$$

де значення $s_{n/i}$ *для різних n та i вказані в спеціальних розрахункових таблицях (дивись, наприклад, таблицю 1).*

Так, розв'язок прикладу 1, а) за формулою (4) *буде згідно табличному значенню* $s_{n/i}$:

$$s = P \cdot s_{n/i} = 100 \cdot s_{25/0{,}005} = 100(26{,}559115) = 2655{,}91.$$

3.4.2. Розрахунки ренти

Деяка частина населення держав з ринковою економікою живе за рахунок ренти, тобто регулярно на протязі певного терміну (наприклад, на початку кожного року на протязі 20 років) одержують раніше обумовлену величину коштів з відповідного рахунка в банку або страховій компанії.

Виникає задача: скільки коштів треба покласти на рахунок ренти для виконання відповідних умов?

Перш ніж розв'язати цю задачу у загальному випадку, розглянемо конкретний приклад.

■ **Приклад 2.** В день 60-річчя містер Стоун відкрив рахунок ренти в страховій компанії на своє ім'я з умовами, що він буде одержувати щорічно у свій день народження, починаючи з наступного року 5 000 доларів на протязі 10 років. Компанія прийняла його кошти і відкрила йому рахунок ренти з щорічним зростанням вкладених коштів на 8%. Яку суму внесено на рахунок ренти містера Стоуна?

✎ *Розв'язання.* Позначимо через A_1 частину усього внеску, яка забезпечила виконання умов містера Стоуна та компанії через 1 рік, тобто у день 61-річчя. Ця частина ренти на протязі одного року знаходилась на рахунку і тому, згідно з умовою страхової компанії, одержала 8% прибутку, тобто стала $1{,}08A_1$. За умовою містера Стоуна ця величина повинна дорівнювати 5 000 доларів. Отже, з рівності

$$1{,}08A_1=5\ 000$$

знаходимо

$$A_1=5\ 000(1{,}08)^{-1}.$$

Таким чином, саме таку суму коштів треба було внести на рахунок у день 60-річчя для того, щоб у день 61 річниці одержати 5 000 доларів.

Тепер позначимо через A_2 частину первинного внеску, яка через два роки буде сплаченою у кількості 5 000 доларів. Ця частина ренти знаходилась на рахунку на протязі двох років і одержала щорічно 8% прибутку, тобто прийняла значення $(1{,}08)^2A_2$. З рівності $(1{,}08)^2A_2= 5\ 000$ випливає

$$A_2 = 5\ 000(1{,}08)^{-2}.$$

Таким чином, якщо вклад на рахунок ренти дорівнював A_2, то в день 62 річниці містер Стоун одержав 5 000 доларів. Якщо містер Стоун у день свого 60-річчя зробив внесок на рахунок ренти величиною $A_1 + A_2$, тоді його умова одержання 5 000 доларів у дні 61 та 62 річниць буде задоволена.

Аналогічно можна впевнитись, що внесок

$$A_3 = 5000(1{,}08)^{-3}$$

дозволить йому отримати 5 000 доларів у день 63 річниці і т.д. Для одержання останніх 5 000 доларів у день 70-річчя треба було зробити початковий внесок величиною

$$A_{10} = 5\ 000(1{,}08)^{-10}.$$

Для повного виконання умов містера Стоуна, він повинен одержувати 5 000 доларів усі 10 років, а тому загальний внесок на рахунок ренти повинен бути

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10} = 5000\left(1{,}08\right)^{-1} + 5000\left(1{,}08\right)^{-2} +$$

$$+5000\left(1{,}08\right)^{-3} + \ldots + 5000\left(1{,}08\right)^{-10}.$$

Таким чином, шукана величина внеску A на рахунок ренти є сума 10 членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 5\ 000(1{,}08)^{-1}$ і знаменником $q = (1{,}08)^{-1}$, її сумою буде

$$A = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{5000\cdot\left(1{,}08\right)^{-1}\left[1-\left(1{,}08\right)^{-10}\right]}{1-\left(1{,}08\right)^{-1}}.$$

Помножимо чисельник та знаменник дробу на (1,08) тоді одержимо

$$A = \frac{5000\left[1-\left(1{,}08\right)^{-10}\right]}{1{,}08-1} = \frac{5000}{0{,}08}\left(1-\left(1{,}08\right)^{-10}\right) = \frac{5000}{0{,}08}\left(1-0{,}4632\right) =$$

$$= 33550.$$

Отже, містер Стоун повинен вкласти на рахунок ренти 33 550 доларів, щоб одержувати по 5 000 доларів щорічно на протязі 10 років.

Тепер розглянемо загальний випадок ренти.

Позначимо через A величину внеску на рентний рахунок. Нехай з цього рахунку роблять виплати розміром P регулярно, з постійним періодом часу на протязі n періодів, починаючи через один після відкриття рахунка ренти. Нехай величина внеску зростає кожного періоду на R відсотків.

Як і в приклад 2, щоб отримати першу виплату у розмірі P після першого періоду часу треба вкласти в рахунок ренти таку кількість коштів A_1, яка задовольняє рівність

$$A_1(1 + i) = P,$$

де $i = \dfrac{R}{100}$.

З цієї рівності знаходимо значення A_1 вигляду

$$A_1 = P\left(1+i\right)^{-1}.$$

Аналогічно знаходимо внесок A_2, який зростає до P після двох періодів часу

$$A_2 = P\left(1+i\right)^{-2},$$

а також частину внеску A_n, яка зростає: до P після n періодів

$$A_n = P\left(1+i\right)^{-n}.$$

Загальна величина внеску A на рахунок ренти є сумою

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = P\left(1+i\right)^{-1} + P\left(1+i\right)^{-2} + \ldots + P\left(1+i\right)^{-n}.$$

тобто A — це сума геометричної прогресії n членів, перший член якої $b_1 = P(1 + i)^{-1}$, а знаменник $q = (1+ i)^{-1}$.

Тому

$$A = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{P\left(1+i\right)^{-1}\left[1-\left(1+i\right)-n\right]}{1-\left(1+i\right)}.$$

Спростивши останній дріб шляхом множення чисельника і знаменника на $(1 + i)$ одержимо

$$A = \frac{P}{i}\left[1-\left(1+i\right)^{-n}\right]. \quad (5)$$

Фінансисти використовують формулу (5) у вигляді

$$A = Pa_{n/i},$$

де $a_{n/i} = i^{-1}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$ табульована для різних значень $i = \dfrac{R}{100}$ та n.

Наприклад, $a_{10/0,08} = 6,710081$ у таблиці, тому

$$A = Pa_{10/0,08} = 5000 \cdot a_{10/0,08} = 5000 \cdot 6,710081 = 33550,$$

як і в прикладі 2.

■ **Приклад 3.** ***Щорічна рента.***

Місіс Стоун у свою 59 річницю зробила внесок 120 000 доларів у страхову компанію, як ренту. Компанія страхування життя погодилась надавати місіс Стоун 6% щорічного прибутку з внеску і проводити щорічні виплати на протязі 15 років. Скільки коштів щорічно буде одержувати місіс Стоун з цього рахунку?

Розв'язання. У даному випадку відома величина внеску на рахунок ренти A = 120 000, а також відсоток прибутку R = 6, тобто

$$i = \frac{R}{100} = \frac{6}{100} = 0,06.$$

Підставимо значення A та i у формулу (5) або (6) і одержимо шукану величину P:

$$120000 = P \cdot a_{15/0,06} = P \cdot 9,712249$$

(значення a взято з таблиці 1). З останньої рівності знаходимо

$$P = \frac{120000}{9,712249} = 12355,53.$$

Отже, місіс Стоун буде одержувати щорічну рентну виплату величиною 12 355,53 доларів.

3.4.3. Погашення боргу

Процес повернення боргу регулярно, певними частинами, в певний термін і на протязі обумовленого часу із виплатою певного відсотка називають ***погашенням боргу*** або його ***амортизацією***.

Наприклад, деяка особа взяла у банка в борг 5 000 доларів з умовою, що борг буде повертати щомісячно на протязі 24 місяців з обумовленим банком відсотком його зростання.

Виникає питання: якою повинна бути щомісячно сплата боргу з врахуванням відсотку його зростання?

З математичної точки зору задача про погашення боргу аналогічна до задачі про ренту. Дійсно, задачу про ренту можна розглядати як задачу погашення боргу страховою компанією, яка взяла внесок A в борг на певних умовах і повертає його регулярно величиною P.

Тому формули (5), (6) мають місце і для задачі погашення боргу, тобто

$$A = P \cdot a_{\bar{n}/i} \Rightarrow P = \frac{A}{a_{n/i}}. \qquad (7)$$

За формулою (7) можна розв'язати задачу погашення боргу.

■ **Приклад 4.** На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8 000 доларів. Цю позику йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету на протязі 5 років. Скільки коштів повинен повернути студент кожного року після закінчення університету?

Розв'язання. У даному випадку борг A = 8 000 доларів, час його повернення n = 5, відсоток зростання R = 8, $i = \frac{R}{100} = 0{,}08.$ Шукану величину P щорічної сплати боргу студентом знайдемо за формулою (7):

$$P = \frac{8000}{a_{5/0{,}08}}.$$

У таблиці 1 знаходимо $a_{5/0,08} = 3,99271$, тому

$$P = \frac{8000}{3,99271} = 2003,65.$$

Отже, для погашення боргу студент повинен в кінці кожного року сплачувати фонду навчання 2 003,65 доларів.

Вправи до розділу 3.4

1. Кожного року батьки вносять P доларів на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунку на R відсотків. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

a) $P = 800$; $R = 2$; $n = 17$; b) $P = 500$; $R = 1/2$; $n = 12$;
c) $P = 300$; $R = 3$; $n = 25$; d) $P = 200$; $R = 3$; $n = 18$;
e) $P = 500$; $R = 5$; $n = 27$; f) $P = 150$; $R = 2$; $n = 30$;
g) $P = 250$; $R= 1/2$; $n = 11$; h) $P = 80$; $R = 5$; $n = 29$.

2. Батько бажає відкрити рахунок ренти на ім'я доньки у страховій компанії, яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків. Його умова – сплачувати на початку кожного року P доларів на протязі n років, починаючи з наступного року. Яку кількість A коштів він повинен зараз покласти на рахунок?

a) $P = 2000$; $R = 8$; $n = 3$; b) $P = 3000$; $R = 6$; $n = 3$;
c) $P = 6000$; $R = 6$; $n = 5$; d) $P = 7000$; $R = 6$; $n = 5$;
e) $P = 4000$; $R = 8$; $n = 4$; f) $P = 5500$; $R = 6$; $n = 4$;
g) $P = 2800$; $R = 8$; $n = 2$; h) $P = 3000$; $R = 8$; $n = 12$.

3. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг A доларів. Цю позику йому надано із R% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу на протязі n років (на початку кожного року після закінчення університету). Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

a) $A = 10000$; $R = 8$; $n = 5$; b) $A = 9000$; $R = 8$; $n = 5$;
c) $A = 6000$; $R = 6$; $n= 10$; d) $A = 18000$; $R = 8$; $n = 20$;
e) $A = 12000$; $R = 6$; $n = 15$; f) $A = 6000$; $R = 6$; $n = 8$;
g) $A = 7500$; $R = 8$; $n = 5$; h) $A = 12000$; $R = 6$; $n = 17$.

3.5. Різницеві рівняння

⬢ **Означення 1.** *Нехай $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ – послідовність дійсних чисел.* ***Різницевим рівнянням порядку k*** *називають рівняння, що зв'язує y_0, $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n+k}$ для кожного значення n ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).*

■ **Приклад 1.** Визначити порядок різницевих рівнянь:

a) $y_{n+3} = 3ny_n$; b) $y_{n+2} = 2 - 5y_{n+1} = y_n$; c) $y_{n+1}^2 + 8y_n^3 + y_n = 4$.

Рівняння a) 3 порядку тому, що зв'язує y_n з y_{n+3}.
Рівняння b) 2 порядку тому, що зв'язує y_n, y_{n+1}, y_{n+2}.
Рівняння c) першого порядку тому, що зв'язує y_n, y_{n+1}.

◈ **Зауваження.** *В означенні 1 індекс n змінюється від 0 і приймає цілі додатні значення. Але n може починати змінюватись не обов'язково з 0, а з інших значень. Наприклад, з (–1) або 3 і таке інше. У таких випадках n буде приймати відповідні можливі значення.*

⬢ **Означення 2.** ***Розв'язком різницевого рівняння*** *називають таку множину значень y_n, яка задовольняє різницеве рівняння для усіх можливих значень n, при яких y_n визначена як функція n.*

■ **Приклад 2.** Показати, що послідовність

$$y_n = \frac{1}{2}n(n+1),\ 1,2,3,\ldots \tag{1}$$

є розв'язком різницевого рівняння

$$y_n - y_{n-1} = n. \tag{2}$$

➯ *Розв'язання.* Підставимо у формулу (1) значення $n = 1, 2, 3, 4$. Одержимо:

$$y_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1) = 1; \qquad y_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+1) = 3;$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3+1) = 6; \qquad y_4 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4+1) = 10.$$

Перевіримо, що усі ці значення задовольняють рівняння (2).

Маємо:

$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2 \equiv 2$; $y_3 - y_2 = 6 - 3 = 3 \equiv 3$; $y_4 - y_3 = 10 - 6 = 4 \equiv 4$.

Щоб закінчити розв'язування, треба показати, що послідовність вигляду (1) задовольняє рівняння (2) для усіх можливих n. Для цього спочатку знайдемо y_{n-1}. Член послідовності визначено для усіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ формулою (1). Підставивши замість n у формулу (1) $(n - 1)$, одержимо

$$y_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Тепер підставимо y_n та y_{n-1} у ліву частину рівняння (2). Тоді

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n[n+1-n+1] = n \equiv n.$$

Отже, послідовність (1) задовольняє різницеве рівняння (2) для усіх $n = 1, 2, 3, \ldots$, тому ця послідовність і буде розв'язком рівняння (2).

✦ **Теорема 1.** ***Загальним розв'язком різницевого рівняння вигляду***

$$y_n = ay_{n-1},$$

де a ***задана стала, буде*** $y_n = ca^n$, ***де*** c ***довільна стала. Значення сталої*** c ***визначається за формулою***

$$c = y_p a^{-p},$$

якщо заданий один член послідовності y_p.

Доведення. Різницеве рівняння для $n = 1, 2, 3, \ldots$ має вигляд:

$$\begin{array}{ll} n = 1: & y_1 = ay_0 \\ n = 2: & y_2 = ay_1 = a(ay_0) = a^2 y_0 \\ n = 3: & y_3 = ay_2 = a(a^2 y_0) = a^3 y_0 \\ \ldots & \ldots \\ n = n: & y_n = a^n y_0 \end{array} \qquad (3)$$

Перша частина теореми доведена із $c = y_0$.

Якщо у формулі (3) взяти $n = p$, тоді одержимо $y = a^p y_0$, але $y_0 = c$, тому $y_p = a^p c \Rightarrow c = y_p a^{-p}$, що і треба було довести.

Розв'язок $y_n = ca^n$ різницевого рівняння $y_n = ay_{n-1}$ зростає за показниковим законом при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Відмітимо, що запільний розв'язок різницевого рівняння залежить від довільної сталої c. Для її знаходження треба мати ще якусь інформацію.

■ **Приклад 3.** Знайти розв'язок рівняння $y_{n+1} = -0{,}5y_n$, для якого $y_5 = 2$.

Розв'язання. У даному випадку $a = -0{,}5$ і згідно з теоремою 1 загальним розв'язком рівняння буде

$$y_n = c(-0{,}5)^n ,$$

де $c = y_p a^{-p} = y_5(-0{,}5)^{-5} = 2(-0{,}5)^{-5} = -2^6$.

Підставивши знайдене c у загальний розв'язок рівняння, одержимо

$$y_n = -2^6\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^{n+1}\cdot 2^{6-n}.$$

Ознайомимось тепер з іншою теоремою, яка має особливе значення в математиці фінансів.

✦ **Теорема 2.** ***Загальним розв'язком різницевого рівняння***

$$y_n = ay_{n-1} + b, \tag{4}$$

де a ***та*** b ***— задані сталі,*** $a \neq 1$***, є послідовність***

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1},$$

де c ***— довільна стала. Значення*** c ***можна визначити, якщо задано хоча б один член послідовності*** y_n***. Якщо відомий*** y_p***, тоді***

$$c = a^{-p}\left[y_p + \frac{b}{a-1}\right].$$

Доведення. Позначимо $z_n = y_n + \dfrac{b}{a-1}$.

Тоді

$$z_n - az_{n-1} = \left[y_n + \frac{b}{a-1} \right] - a\left[y_{n-1} + \frac{b}{a-1} \right] = y_n - ay_{n-1} + \frac{b(1-a)}{a-1}. \quad (5)$$

Із рівняння (4) випливає, що $y_n - ay_{n-1} = b$, $\frac{1-a}{a-1} = -1$, тому (5) можна записати так $z_n - az_n = b - b = 0$.

Отже, z_n задовольняє рівняння $z_n - az_n = 0$, тому за твердженням теореми 1 загальним розв'язком цього рівняння буде $z_n = ca^n$, де c — довільна стала. Повертаючись від z_n до y_n, одержимо:

$$y_n = z_n - \frac{b}{a-1} = ca^n - \frac{b}{a-1},$$

що й було потрібно.

Твердження теореми відносно знаходження c випливає з останньої рівності, а саме

$$y_p = ca^p - \frac{b}{a-1}.$$

◈ **Зауваження.** *При $a = 1$ в рівнянні* (4) *загальний розв'язок буде мати вигляд*

$$y_n = y_0 + nb. \quad (6)$$

■ **Приклад 4.** Знайти розв'язок різницевого рівняння

$$y_n - 2y_{n-1} = 3; \quad y_1 = 5.$$

↳ *Розв'язання.* Задане рівняння має вигляд (4) при $a = 2$, $b = 3$. Тому його загальним розв'язком буде

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c \cdot 2^n - \frac{3}{2-1} = c \cdot 2^n - 3.$$

Поклавши у цій рівності $n = 1$ і використовуючи значення y_1, одержимо

$$y_1 = c \cdot 2^1 - 3 = 2c - 3 = 5 \Rightarrow c = 4.$$

Отже, шуканий розв'язок буде таким

$$y_n = 4 \cdot 2^n - 3.$$

3.5.1. Застосування різницевих рівнянь в математиці фінансів

У фінансових розрахунках часто використовують різницеві рівняння замість геометричної прогресії. Для розуміння цього способу розв'язування фінансових задач розв'яжемо, з використанням різницевих рівнянь, приклад 1 розділу 3.4.

■ **Приклад 5.** Кожного місяця робітник вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку $\frac{1}{2}\%$ за кожен місяць. Треба знайти величину його накопичень:

a) одразу після здійснення n-го внеску;

b) одразу після здійснення 25 внеску.

Розв'язання. Нехай y_n – значення рахунку відразу після n вклада. Тоді перше, початкове значення величини рахунка буде $y_1 = 100$. Ми можемо виразити y_n через y_{n-1} таким чином:

Значення рахунку після n вкладу = значенню після $(n - 1)$ вкладу + відсоток прибутку + останній вклад,

тобто

$$y_n = y_{n-1} + 0{,}005\, y_{n-1} + 100 \Rightarrow y_n = 1{,}005\, y_{n-1} + 100.$$

Остання рівність є різницевим рівнянням вигляду, який вказано у теоремі 2. Згідно з твердженням цієї теореми загальним розв'язком рівняння буде

$$y_n = ca^n - \frac{b}{a-1} = c(1{,}005)^n - \frac{100}{1{,}005-1} = c(1{,}005)^n - 20000.$$

При $n = 1$ будемо мати $y_1 = c \cdot 1{,}005 - 20000 = 100 \Rightarrow$ c = 20000.

Отже, розв'язком для випадку a) буде

$$y_n = 20000 \cdot [(1{,}005)^n - 1],$$

у випадку b) одержимо:

$$y_{25} = 20\,000 \cdot [(1{,}005)^{25} - 1] = 20\,000 \cdot [1{,}1380 - 1] = 2\,655{,}91.$$

Одержані відповіді співпадають з відповідями прикладу 1 розділу 3.4, але одержані іншим способом.

У загальному випадку, коли перший внесок на рахунок накопичення P, відсоток прибутку кожного місяця або року R, одержимо величину накопиченого y_n за формулою:

$$y_n = p \cdot s_{n/i}, \text{ де } i = \frac{R}{100}; \ s_{n/i} \text{ – табульовані.}$$

Остання формула співпадає з одержаною раніше іншим способом формулою (4) розділу 3.4.

Вправи до розділу 3.5

1. Визначити порядок різницевих рівнянь:

a) $ny_{n+1} + (n + 1)y_n = n^3$; b) $y_{n+3} = y_n + y_{n+2}$;

c) $3y_{n+4} = \sqrt{ny_{n+1}} + y_n$; d) $y_{n+2} - 5y_n = 2n$.

2. Показати, що послідовність $y_n = 2^n$ є розв’язком різницевого рівняння $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$.

3. Обчислити перших 4 члена послідовності $y_{n+1} \cdot y_n + 2y_n^2 = n$, якщо $y_0 = 2$.

4. Знайти розв’язок рівняння $y_n = -5\,y_{n-1}$, якщо $y_2 = -3$.

5. Знайти при $y_0 = 2$ розв’язки рівнянь:

a) $y_n + y_{n-1} = 3$; b) $y_n + 3y_{n-1} = 3$.

6. 2000 гривень зберігаються з простим 8% прибутком за кожен рік, y_n – величина вкладу після a років зберігання. Запишіть різницеве рівняння для y_n і його розв’язку. Чому буде дорівнювати величина вкладу через 10 років?

Частина 4

МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

4.1. Різновиди матриць

⬢ **Означення 1.** ***Матрицею*** *називають таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в m рядках та n стовпцях.*

Матриці позначають великими літерами, наприклад A, B, C... та круглими дужками.

Матриця, яка має m рядків та n стовпців, називається матрицею розміру $m \times n$ (перший множник завжди вказує кількість рядків). Така матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожен елемент a_{ij} матриці A має два індекси: перший індекс i вказує номер рядка, в якому знаходиться цей елемент, другий індекс j вказує номер стовпця, який містить цей елемент. Так, елемент a_{23} знаходиться на перетині другого рядка та третього стовпця матриці A.

Матриця розміру $m \times 1$ називається ***матрицею-стовпцем*** або ***вектором-стовпцем***. Матриця розміру $1 \times n$ називається ***матрицею-рядком*** або ***вектором-рядком***.

Наприклад, нехай задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має розмір 2×3, матриця B розміру 3×4, C – матриця-стовпець розміру 4×1, D – матриця-рядок 1×4.

Матрицю називають ***квадратною порядку n***, якщо кількість її рядків однакова з кількістю стовпців і дорівнює n.

Наприклад, квадратна матриця A порядку n має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Множина елементів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці A порядку n утворюють ***головну діагональ матриці,*** а множина елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}$ утворює ***допоміжну*** (або ***неголовну***) ***діагональ матриці***.

Квадратна матриця, у якій $a_{ij} \neq 0$ лише при $i = j$ називається ***діагональною***. Діагональна матриця з елементами $a_{ii} = 1$ називається ***одиничною матрицею*** і найчастіше позначається E або I.

Наприклад, нехай задані матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B – діагональна матриця 4-*го* порядку, E – одинична матриця порядку 3, 0 – нульова квадратна матриця порядку 3.

Для скорочення матриці можна записати у вигляді $\{a_{ij}\}$, коли розмір матриці A відомий, або $\{a_{ij}\}_{m\times n}$.

Матриці A та B називають ***рівними***, якщо:

1) вони мають однаковий розмір;

2) їх відповідні елементи рівні, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для усіх $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Якщо в матриці A рядки записати стовпцями із збереженням їх порядку, то одержану матрицю називають ***транспонованою*** і позначають A^T, а вказана операція перетворення матриці A називається ***транспонуванням матриці A***. Наприклад,

$$\text{якщо} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{тоді} \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриці широко використовуються в плануванні виробництва та транспортних перевезень. Вони дозволяють розробляти різні варіанти плана, полегшують дослідження залежності між різними економічними показниками.

■ **Приклад 1.** Мале підприємство виробляє 4 види продукції – A, B, C та D, використовуючи на кожну з них різну кількість двох матеріалів та праці (кількості робочих годин). Конкретна інформація вказана у таблиці.

Вироби:	***A***	***B***	***C***	***D***
Одиниць матеріалу X:	250	300	170	200
Одиниць матеріалу Y:	160	230	75	0
Кількість робочих годин:	80	85	120	100

У цій ситуації є 12 дійсних чисел, які можна впорядкувати і записати у вигляді матриці

$$F = \begin{pmatrix} 250 & 300 & 170 & 200 \\ 160 & 230 & 75 & 0 \\ 80 & 85 & 120 & 100 \end{pmatrix}$$

розміру 3×4. Кожен рядок та кожен стовпець цієї матриці має певний зміст. Наприклад, елементи другого рядка вказують кількість витраченого матеріалу *Y* на виробництво продукції *A*, *B*, *C* та *D*; елементи другого стовпця матриці вказують кількість витрачених матеріалів *X*, *Y* та робочих годин на виробництво продукції *B*.

4.2. Найпростіші дії з матрицями

Найпростішими діями з матрицями називають *множення матриці на число, їх додавання та віднімання, множення матриць.*

Добутком матриці A на число k називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці *A* та числа *k*:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць A та B однакового розміру $m\times n$ називається матриця *C* розміру $m\times n$, елементи якої c_{ij} дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі елементів a_{ij} та b_{ij} матриць *A* та *B*, тобто

$$A\pm B=C=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \dots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 50 & 30 & 40 \\ 18 & 16 & 12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 \\ 14 & 15 & 10 \end{pmatrix},$$

тоді

$$A+B=\begin{pmatrix}50+20 & 30+18 & 40+20\\ 18+14 & 16+15 & 12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70 & 48 & 60\\ 32 & 31 & 22\end{pmatrix}.$$

Розглянемо ще один приклад. Якщо матриця F відповідає виробничим параметрам за перший квартал року, а матриця Q, побудована по даним тих же параметрів за другий квартал року, тоді $F + Q$ буде характеризувати ці параметри за перший та другий квартали, тобто за півроку.

Для знаходження добутку AB матриць A та B необхідно, щоб кількість стовпців матриці A (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці B (другого множника). Добутком AB матриці A розміру $m\times n$ і матриці B розміром $n\times p$ називається матриця C розміром $m\times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто кожен елемент матриці C знаходять за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\,. \tag{3}$$

◈ **Зауваження.** *Добуток матриць взагалі не має властивості комутативності, тобто $AB\neq BA$. Якщо добуток двох матриць має властивість $AB = BA$, тоді кажуть, що матриці комутують.*

■ **Приклад 2.** Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \quad \text{та} \quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

↳ *Розв'язання.* У матриці A три стовпця, у матриці X три рядки, тому ці матриці можна множити. Добутком цих матриць буде матриця-стовпець

$$AX=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}. \tag{4}$$

■ **Приклад 3.** Нехай

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

знайти AB та BA.

↳ *Розв'язання.*

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(-2)+2\cdot 3+3\cdot 1 & 1+4+9 & 2+2+6\\ 4(-2)+5\cdot 3+6\cdot 1 & 4+10+18 & 8+5+12\\ 2(-2)+1\cdot 3+4\cdot 1 & 2+2+12 & 4+1+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 14 & 10\\ 13 & 32 & 25\\ 3 & 16 & 13\end{pmatrix},$$

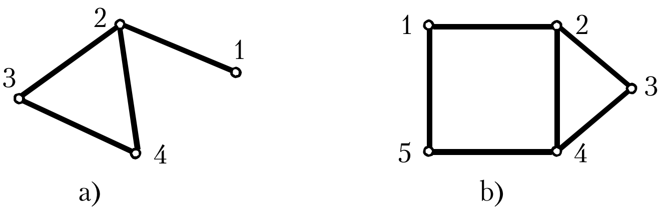
$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4+4 & -4+5+2 & -6+6+8\\ 3+8+2 & 6+10+1 & 9+12+4\\ 1+12+4 & 2+15+2 & 3+18+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 3 & 8\\ 13 & 17 & 25\\ 17 & 19 & 29\end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

◈ **Зауваження.** *Ділення матриць* $\dfrac{A}{B}$ *розглядають як добуток* AB^{-1}, *де* B^{-1} *– матриця, обернена до матриці* B, *визначення та знаходження якої розглянемо пізніше, після введення нових понять.*

■ **Приклад 4.** ***(З теорії графів). Графом*** називають певну кількість точок (його вершин), деякі з них з'єднані лініями (ребрами). На малюнку 1 задані два графи з 4 та 5 вершинами.



Мал. 1.

Занумеруємо вершини цифрами 1, 2, 3, ... та визначимо матрицю A з елементами a_{ij} таким чином:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо вершини } i \textit{ та } j \textit{ з'єднані ребром;} \\ 0, & \textit{якщо вершини } i \textit{ та } j \textit{ не з'єднані ребром.} \end{cases}$$

Треба побудувати матриці A та A^2 для випадків a) та b), зображених на малюнку 1. Показати, що елемент з індексами ij матриці A^2 визначає кількість шляхів довжини 2 (двох послідовно пройдених ребер) з вершини i у вершину j графа.

✎ *Розв'язання.*

У випадку a) згідно з визначенням елементів a_{ij} одержуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^2 буде мати вигляд

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо зміст елементів A^2. Елементи i-го рядка цієї матриці рівні кількості вказаних в умові напрямків з точки i. Так, точка $i = 1$ має лише один напрямок, що пов'язує її з вершиною 2, що не дорівнює $j = 1$, тобто $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$ тому, що не має інших ребер між точкою 1 та 2; $a_{13} = 1$ та $a_{14} = 1$ тому, що точка 1 має лише одне ребро, що зв'язує її з точкою 2, $2 \neq 3$, $2 \neq 4$.

У випадку b) згідно з визначенням елементів a_{ij} та вигляду поєднань вершин, зображених на малюнку 1, b) маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця квадратна п'ятого порядку, тому A^2 також буде квадратною матрицею п'ятого порядку, а саме

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вправи до розділів 4.1 та 4.2

1. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

1. Розмір кожної з цих матриць.

2. Матрицю $F = (N + 1)A - (N + 2)B$.

3. Коли виконуються рівності: a) $AX = C$; b) $AX = Y$; c) $BY = Z$?

4. За допомогою якої матриці можна представити матрицю Z через матрицю X, якщо $Z = BY$, $Y = AX$?

5. Обчислити $D^2 - H^2$ та $(D - H)(D + H)$ і показати, що

$$D^2 - H^2 \neq (D - H)(D + H).$$

6. Записати наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 2x - y + 4z = 13 \\ 3y - 2z = 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_3 + 5x_4 - x_1 = 7 \\ x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3y + 4z = 7 \\ 5z + x = 9 \end{cases}$.

7. При виробництві своєї продукції фірма використовує 4 різних види сировини M_1, M_2, M_3, та M_4 вартістю 5, 7, 6 та 3 гривні за одиницю виміру. На виготовлення одиниці продукції потрібно $4(N + 1)$, $3(N - 1)$, $2(N + 1)$ та $5(N + 1)$ одиниць відповідного виду сировини. Виразити загальну вартість сировини потрібної для виготовлення одиниці виробу, як добуток двох матриць.

8. Фірма використовує три різних види сировини M_1, M_2 та M_3, для виробництва двох видів продукції P_1 та P_2. Для виготовлення кожної одиниці P_1 потрібно 3, 2 та 4 одиниці сировини M_1, M_2 та M_3, а для виготовлення кожної одиниці P_2 потрібно 4, 1, 3 одиниць сировини,

відповідно. Припустимо, що фірма виготовляє $(N + 2)\cdot 20$ одиниць виробів P_1 та $30(N + 2)$ одиниць виробів P_2 кожного тижня. Знайти:

a) необхідну щотижневу кількість сировини;

b) вартість сировини для виготовлення одиниць виробів P_1 та P_2, якщо вартість одиниці сировини M_1, M_2 та M_3, буде 6, 10 та 12 гривень;

c) чому дорівнюють загальні щотижневі витрати виробництва продукції P_1 та P_2?

9. Знайти добуток матриць AB або BA.

$$\text{a) } A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix};\quad \text{b) } A=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -4 & -1\end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\3 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix};$$

$$\text{d) } A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\4 & -5 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\\0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\text{e) } A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 1\\-2 & 0 & 3 & -1\\1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 1\\4 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix};$$

$$\text{f) } A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\6 & 9 & -5\\4 & 7 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\4 & -1 & 3\\9 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

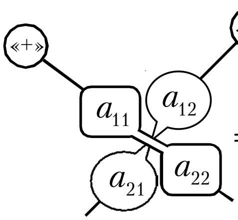
4.3. Визначники

Визначником n-го порядку квадратної числової матриці A порядку n називають число, яке знаходять з елементів матриці A за певним правилом і позначають $|A|$ або $\Delta(A)$.

Правило знаходження визначника 2 порядку. Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та допоміжної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} . \qquad (1)$$

Схему цієї формули можна зобразити таким чином



$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Знак (+) вказує, що добуток елементів головної діагоналі треба брати зі своїм знаком, знак (–) означає, що добуток елементів неголовної діагоналі треба брати з протилежним знаком.

■ **Приклад 1.** Обчислити визначники:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Будемо обчислювати задані визначники за формулою (1):

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22$;

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = 12$;

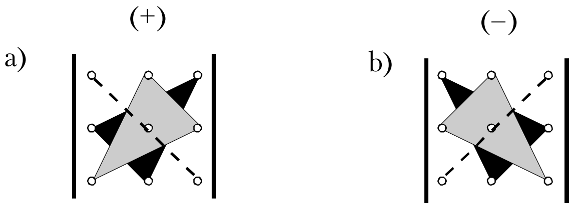
c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 5\cdot 6 = 16 - 30 = -14$.

Правило знаходження визначника 3-го порядку. Визначник третього порядку знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - \qquad (2)$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Кожен доданок у правій частині (2) має 3 множники з різних рядків та стовпців. Три перших доданка із знаком (+) є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі (дивись схему *a)* малюнка 1). Три останні доданки у правій частині (2) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників із основами паралельними неголовній діагоналі (мал. 1, *b*).



Мал. 1.

Ця схема обчислення визначника третього порядку називається ***правилом Саріуса.*** Існують також інші схеми обчислення визначника 3-го порядку.

■ **Приклад 2.** Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Згідно з формулою (2) одержимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot0+(-3)\cdot3\cdot(-5)+1\cdot6\cdot0-(-5)\cdot4\cdot0-1\cdot(-3)\cdot0-$$

$$-3\cdot6\cdot2=0+45+0-0-0-36=9.$$

Для обчислення визначників порядку $n > 3$ використовують алгебраїчні доповнення та вказане нижче правило.

Означення 1. ***Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку*** *називається визначник $(n-1)$ порядку, який одержуємо з визначника $|A|$ шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.*

Означення 2. ***Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника*** *називають мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто*

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{3}$$

Приклад 3. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21}, та a_{33} визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} позначимо A_{21} та A_{33}, відповідно. Згідно з означенням 2

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21};\quad A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = M_{33}. \tag{4}$$

Мінори M_{21} та M_{33} знайдемо згідно з означенням 1:

$$M_{21} = \begin{array}{c|ccc|} & ❶ & ② & ③ \\ ① & 2 & 3 & -1 \\ ❷ & 1 & 4 & 2 \\ ③ & -3 & 1 & 4 \end{array} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot4-(-1)\cdot1=12+1=13$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} ① & ② & ❸ \end{array} \\ \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ❸ \end{array} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5$$

Підставимо ці значення мінорів у відповідні рівності (4), одержимо шукані алгебраїчні доповнення

$$A_{21} = -13; \ \ A_{33} = 5.$$

Тепер можемо сформулювати правило обчислення визначника n-го порядку.

Правило. *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.*

У випадку використання i-го рядка це правило математично можна записати так

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ik}A_{ik} + \dots + a_{in}A_{in}. \quad (5)$$

Рівність (5) називають ***розкладом визначника за елементами i-го рядка***. Визначник можна розкласти і за елементами k-го стовпця (k = 1, 2, ..., n).

Отже, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення визначників (n – 1) порядку шляхом розкладу визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця.

◈ **Зауваження.** *Для скорочення обчислень визначника доцільно його розкласти за елементами такого рядка чи стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. У такому випадку не треба знаходити* *алгебраїчні доповнення до елементів, що дорівнюють 0 (добуток 0 на будь-яке алгебраїчне доповнення дорівнює нулеві).*

Таким чином, для ефективного використання методу обчислення визначника шляхом його розкладу за елементами будь-якого рядка або стовпця треба навчитись робити еквівалентні перетворення визначника, які дають можливість одержати нулі у деякому рядку або стовпці.

Виконання таких перетворень здійснюється з використанням деяких властивостей визначника.

Властивості визначників

1. *Визначник при транспонуванні не змінюється.*

Пояснення дамо на прикладі визначників другого порядку. Нехай

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=15+8=23,\ \ \Delta\left(A^T\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=15+8=23.$$

Праві частини рівні, тому і ліві також рівні, тобто $\Delta(A) = \Delta\left(A^T\right)$.

▼ **Наслідок.** *У визначнику рядки та стовпці мають однакові властивості.*

2. *Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.*

Наприклад

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=23; \qquad \begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-8-15=-23,$$

тому

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}.$$

3. *Якщо визначник має два однакових рядки (стовпця), то він дорівнює нулю.*

Дійсно, якщо ми поміняємо місцями рівні рядки (стовпці), то визначник не зміниться, але згідно властивості 2 він повинен змінити знак на протилежний. Тому визначник повинен дорівнювати 0.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0.$$

4. *Якщо у визначнику усі елементи одного рядка (стовпця) помножити на однакове дійсне число k, то визначник зросте також в k разів.*

Наприклад

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11,$$

$$\Delta(A_1) = \begin{vmatrix} k4 & k5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4k - 15k = k(-11).$$

тобто $\Delta(A_1) = k(A)$, але $|A_1|$ одержано з визначника $|A|$ шляхом множення усіх елементів першого рядка на k.

▼ **Наслідок 1.** *Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.*

▼ **Наслідок 2.** *Якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.*

5. *Визначник, у якого відповідні елементи двох будь-яких рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.*

Доведення цієї властивості випливає з властивостей 3 та 4.

6. *Якщо у визначнику елементи i-го рядка (k-го стовпця) є сумою двох доданків, тоді він дорівнює сумі двох відповідних визначників.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. *Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, помножені на одне й те ж саме число, то визначник не зміниться.*

■ **Приклад 4.** Нехай заданий визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Використовуючи a_{13}=1, одержимо два 0 в третьому стовпці.

Перетворимо визначник таким чином:

1) елементи першого рядка визначника помножимо на (–3) та додамо до відповідних елементів другого рядка визначника;

2) елементи першого рядка визначника помножимо на (–2) та додамо до відповідних елементів третього рядка визначника Δ. Отримаємо визначник, який позначимо Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Перевіримо, що $\Delta_1 = \Delta$. Для цього обчислимо ці визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot2 + 2\cdot3\cdot2 + 1\cdot4\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot2\cdot2 - 4\cdot3\cdot3 =$$

$$= 12 + 12 + 4 - 4 - 4 - 36 = -16,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 16 - 0 - 0 = -16.$$

Отже, цей приклад ілюструє:

1) справедливість властивості 7;

2) цю властивість доцільно застосувати до перетворення визначників 4-го та вищих порядків, щоб одержати якомога більше нулів у

якомусь стовпці (або рядку) і тим самим спростити обчислення заданого визначника.

■ **Приклад 5.** Обчислити визначник 4-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перетворимо цей визначник таким чином, щоб зробити якомога більше нулів у якомусь стовпчику, краще у першому, бо там вже є один нуль. Для цього елементи першого рядка помножимо на 3 та додамо до відповідних елементів третього рядка, потім елементи першого рядка помножимо на (–5) та додамо до відповідних елементів четвертого рядка. Одержимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 14 \\ 0 & -9 & 9 & -12 \end{vmatrix}.$$

Тепер визначник доцільно розкласти за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 14 \\ -9 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 14 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Тут ми використали наслідок 1 властивості 4 і спростили визначник. Обчислимо його:

$$\Delta = 3(20 - 96 - 84 + 60 - 42 + 64) = 3(-78) = -234.$$

Вправи до розділу 4.3

Обчислити визначники:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. 10. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 5 \\ -7 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 8 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 9 & 16 \\ 1 & 1 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

4.4. Ранг матриці та обернена матриця

Нехай задана матриця A розміру $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виберемо в ній довільно k рядків та k стовпців. Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю k-го порядку, визначник якої називають мінором k-го порядку матриці A. Обираючи різними способами k рядків та k стовпців, одержимо деяку кількість мінорів k-го порядку. Матриця має мінори будь-якого порядку: від першого (елементи матриці-мінори 1-го порядку) до найменшого із чисел m та n.

Розглянемо в матриці A ті її мінори різних порядків, які відмінні від нуля і нехай їх найбільший порядок = r.

⬢ **Означення 1.** ***Рангом матриці*** *називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.*

Ранг матриці позначають $r(A)$ або r_A або просто r. Ранг матриці можна знаходити методом обвідних мінорів або простіше – методом елементарних перетворень.

⬢ **Означення 2.** ***Елементарними перетвореннями матриці*** *називають такі перетворення:*

1) перестановка рядків (стовпців) матриці;

2) множення всіх елементів рядка (стовпця) на число $\lambda \neq 0$*;*

3) додавання до елементів рядка(стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Всі ці перетворення не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

■ **Приклад 1.** Знайти ранг матриць:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -3 & -1\\ 3 & 6 & -3 & 10\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Ранг матриць будемо знаходити методом елементарних перетворень.

a) Елементи першого рядка матриці помножимо на (–3) і додамо до відповідних елементів другого рядка матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що ранг цієї матриці дорівнює 1 (нижче головної діагоналі – нуль та один елемент головної діагоналі $\neq 0$).

b) Зробимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\times(-2),(-1)}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}(-1)\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $r(A) = 2$.

c) Знову робимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}^{\times(-2),(-2)}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 3 & -7 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix}.$$

Оскільки можна третій та четвертий стовпці поміняти місцями і отримати третій елемент головної діагоналі, який $\neq 0$, то $r(A) = 3$.

d) Перетворимо матрицю аналогічно попередньому

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}^{\times(-3),(-3)} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \times 10 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $r(A) = 2$.

⬢ **Означення 3.** *Матриця A^{-1} називається* ***оберненою матрицею до матриці A****, якщо виконуються рівності*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{1}$$

тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця.

Не всяка матриця має обернену. В алгебрі матриць доведено, що матриця A має обернену матрицю A^{-1} при виконанні двох умов:

1) матриця A квадратна;

2) визначник $|A|$ матриці A не дорівнює нулю.

Обернену матрицю A^{-1} до матриці A можна знаходити двома способами:

1) за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{11} & A_{11} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{21} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, (алгебраїчні доповнення до i-го рядка розташовані у i-му стовпці ($i = 1, 2, ..., n$).

2) а також з використанням означення оберненої матриці та елементарних перетворень матриць.

■ **Приклад 2.** Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку впевнимося, що матриця A має обернену A^{-1}.

Матриця A має три рядки та три стовпця, тому вона квадратна порядку 3. Її визначник

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot2\cdot5+2\cdot(-4)\cdot2+3\cdot(-1)\cdot(-3)-2\cdot2\cdot(-3)-3\cdot2\cdot5-5-(-1)(-4)\cdot1=$$

$$=10-16+9+12-30-4=-19\neq0.$$

Отже, матриця A має обернену A^{-1}, яку знайдемо за формулою (2). У даному випадку алгебраїчними доповненнями до елементів матриці A будуть:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=6;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-23;\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-7;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=11;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-2;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-5;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

Таким чином, одержали

$$A^{-1}=\frac{-1}{19}\begin{pmatrix}6 & -7 & -2\\ -23 & 11 & -5\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

■ **Приклад 3.** Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ 3 & 7 & 10\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Задана матриця A квадратна порядку 3, її визначник:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ 3 & 7 & 10\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot10+2\cdot7\cdot3+2\cdot7\cdot3-3\cdot3\cdot5-2\cdot2\cdot10-7\cdot7\cdot1=0.$$

Отже, ця матриця оберненої не має.

◈ **Зауваження.** *Якщо матриця A квадратна другого порядку* $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, *визначник якої* $|A|\neq 0$, *то обернену до неї матрицю* A^{-1} *можна знайти за формулою*

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

тобто треба елементи головної діагоналі матриці A поміняти місцями, елементи неголовної діагоналі помножити на (–1) і одержану матрицю помножити на $\frac{1}{|A|}$.

■ **Приклад 4.** Знайти обернену матрицю до матриці $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 6\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задана квадратна матриця другого порядку, її визначник

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 6\end{vmatrix}=2\cdot6-4\cdot1=12-4=8\neq0.$$

тому для знаходження A^{-1} можна застосувати формулу (3).

Одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

■ **Приклад 5.** ***(Модель міжгалузевого планування потреб та пропозицій).*** Таблицею задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості.

Галузеві пропозиції	**Галузеві потреби**			**Потреби інших галузей**	**Кількість усіх пропозицій**
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	72	180
Витрати праці	20	24	72		

a) Визначити матрицю потреб-пропозицій A.

b) Припустимо, що через три роки потреби інших галузей зростуть до 24, 33 та 75 показників для галузей 1, 2, 3, відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

↳ *Розв'язання.*

a) Елементи шуканої матриці A дорівнюють відношенню потреб i-тої галузі до загальної кількості пропозицій цієї галузі. Тому для знаходження елементів i-го стовпця (i = 1, 2, 3) матриці A треба поділити потреби i-тої галузі, вказані у таблиці, на загальну кількість пропозицій цієї галузі.

Таким чином, ми одержуємо матрицю потреб-пропозицій вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

b) Нехай E-одинична матриця третього порядку. Позначимо:

$$D=\begin{pmatrix}24\\33\\75\end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець нових потреб,

X – матриця нових пропозицій, що відповідають новим потребам:

$$B=E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,2&0,4&0,1\\0,3&0,1&0,3\\0,3&0,3&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8&-0,4&-0,1\\-0,3&0,9&-0,3\\-0,3&-0,3&0,8\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=B^{-1}\cdot D. \qquad (4)$$

Для обчислення майбутніх пропозицій залишилось знайти B^{-1}. Матриця B квадратна третього порядку, її визначник

$$|B|=\begin{vmatrix}0,8&-0,4&-0,1\\-0,3&0,9&-0,3\\-0,3&-0,3&0,8\end{vmatrix}=0,336.$$

Для знаходження матриці B^{-1}, яка існує, знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці B: B_{11} = 0,63; B_{12} = 0,33; B_{13} = 0,36; B_{21} = 0,35; B_{22} = 0,61; B_{23} = 0,36; B_{31} = 0,21; B_{32} = 0,27; B_{33} = 0,6.

Отже, обернена матриця B^{-1} має вигляд

$$B^{-1}=\frac{1}{0,336}\begin{pmatrix}0,63&0,35&0,21\\0,33&0,61&0,27\\0,36&0,36&0,6\end{pmatrix}.$$

Підставимо D та знайдену B^{-1} у формулу (4), одержуємо

$$X=\frac{1}{0,336}\begin{pmatrix}0,63&0,35&0,21\\0,33&0,61&0,27\\0,36&0,36&0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24\\33\\75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}126,25\\143,75\\195\end{pmatrix}.$$

Таким чином, через три роки першій галузі треба виробити 126,25 одиниць продукції, другій галузі потрібно виробити 143,75 одиниць продукції, а третій галузі треба виробити 195 одиниць продукції .

Вправи до розділу 4.4

1. Знайти ранг матриці:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Знайти обернену матрицю до заданої матриці:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Таблицею задані показники потреб-пропозицій трьох галузей промисловості (N – номер варіанта):

Галузеві пропозиції	**Галузеві потреби**			**Потреби інших галузей**	**Кількість усіх пропозицій**
	1	2	3		
1	2	40	30	10	100
2	30	20	90	60	200
3	40	100	60	100	300
Витрати праці	10	40	120		

Треба:

a) Визначити матрицю A потреб-пропозицій;

b) Припустимо, що через 5 років потреби інших галузей зростуть до $24 + N$, $33 + N$ та $75 + N$ на продукцію галузей 1, 2, 3, відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити нові потреби?

4.5. Питання для самоперевірки

1. Дати означення матриці та її розміру. Які існують різновиди матриць?

2. Які елементи утворюють головну та неголовну діагоналі матриці?

3. За якими правилами матрицю помножають на дійсне число, знаходять алгебраїчну суму матриць, добуток матриць?

4. Чи завжди добуток матриць має властивість комутативності?

5. Що таке граф і як його можна описати матрицею?

6. За якими правилами обчислюють визначники 2, 3 та n-го порядків?

7. Як визначають і знаходять мінор та алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A?

8. Сформулюйте властивості визначника.

9. Дати означення рангу матриці та вказати методи його знаходження.

10. Як визначають та позначають обернену матрицю до матриці A?

11. При яких умовах існує обернена матриця?

12. Які ви знаєте способи знаходження оберненої матриці?

Частина 5

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У цій частині розглянемо різновиди систем лінійних алгебраїчних рівнянь, способи їх дослідження та розв'язування.

5.1. Різновиди систем лінійних алгебраїчних рівнянь

⬢ **Означення 1.** *Система алгебраїчних рівнянь називається* ***лінійною****, якщо вона може бути записана у вигляді*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

де $x_1, x_2, \ldots x_n$, – невідомі; a_{ij} – дійсні числа, які називають ***коефіцієнтами системи*** *(індекс i вказує рівняння, а індекс j невідоме, при якому записано цей коефіцієнт); b_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ – вільні (від невідомих) члени або їх називають правими частинами рівнянь.*

Якщо $b_k = 0$ для усіх $k = 1, 2, \ldots, m$, тоді систему називають ***однорідною****. Якщо хоча б один вільний член b_k не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається* ***неоднорідною.***

⬢ **Означення 2.** ***Розв'язком системи*** **(1)** *називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, підстановка яких у систему замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перетворює кожне рівняння системи у тотожність (іноді кажуть, що ця множина задовольняє систему рівнянь).*

⬢ **Означення 3.** *Система лінійних алгебраїчних рівнянь, що має хоча б один розв'язок, називається* ***сумісною,*** *а система, що не має розв'язку, називається* ***несумісною.***

5.1.1. Теорема Кронекера-Капеллі

Німецький математик *Леопольд Кронекер (1823–1891)* та італійський математик *Альфред Капеллі (1855–1910)* довели дуже важливу теорему, яка використовується у багатьох випадках.

Позначимо через A основну матрицю системи (1), яка складена з коефіцієнтів при невідомих, а через $\tilde{A}$ – розширену матрицю цієї системи, яка одержана шляхом доповнення матриці A стовпцем вільних членів, тобто

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix};\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{m3} & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

✦ **Теорема Кронекера-Капеллі.** ***Система лінійних алгебраїчних рівнянь* (1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці***

$$\boldsymbol{r(A) = r(\tilde{A}),} \tag{2}$$

причому, система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\boldsymbol{r(A) = r(\tilde{A}) = n.} \tag{3}$$

■ **Приклад 1.** Дослідити сумісність системи

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0{,}5 \end{cases}.$$

➯ *Розв'язання.* Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з 4 невідомими. Для перевірки умови (2) теореми ***Кронекера-Капеллі*** знайдемо ранги основної та розширеної матриць заданої системи, застосовуючи до матриць елементарні перетворення.

Розширену матрицю одержуємо шляхом дописування до основної матриці системи стовпця вільних членів.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&+1\\1&-1&-1&1&0\\1&-1&-2&2&-0{,}5\end{array}\right)^{x(-1)}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&-1\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&-3&-3&-1{,}5\end{array}\right).$$

Еквівалентну матрицю отримали шляхом множення елементів першого рядка на (-1) та додавання до елементів другого та третього рядків. Тепер елементи другого рядка помножимо на $\left(-\frac{3}{2}\right)$ і додамо до елементів третього рядка, а потім поміняємо місцями другий та третій стовпчики.

$$\tilde{A}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&-1&1\\0&0&-2&2&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&1\\0&-2&0&2&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

З останнього запису випливає, що $r\left(\tilde{A}\right)=2$ та $r(A)=2$, тобто $r(A)=r\left(\tilde{A}\right)$, а це означає, що задана система рівнянь є сумісною.

5.1.2. Еквівалентні системи

⬢ **Означення. 4.** *Системи лінійних алгебраїчних рівнянь називають* ***еквівалентними****, якщо їх розв'язки співпадають.*

Розглянемо довільну систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (1). Якщо в цій системі рівняння поміняти місцями, будь-яке рівняння помножити на дійсне число $k\neq 0$, тоді розв'язок системи не зміниться, тобто система матиме інший вигляд, еквівалентний початковому.

Відомо, що сума скінченного числа доданків не зміниться, якщо їх поміняти місцями. Тому розв'язок системи не зміниться, якщо ми в усіх рівняннях доданки з x_k поміняємо місцями з доданками, які містять x_i, але це приведе до перепозначення невідомих. Розв'язок системи не зміниться, якщо ми будь-яке рівняння системи помножимо на дійсне число $k \neq 0$ і додамо почленно до іншого рівняння системи. Вказані перетворення системи називають елементарними перетвореннями системи. Доцільно замість системи рівнянь розглядати її розширену матрицю та робити перетворення з цією матрицею. Саме такі елементарні перетворення були проведені при розв'язуванні прикладу 1.

5.2. Знаходження єдиного розв'язку

Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок у випадку виконання умов (3), тобто коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи та кількості невідомих.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має однакову кількість рівнянь та невідомих, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & +\ldots & +\ldots & +\ldots & =\ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}. \qquad (4)$$

Якщо основний визначник $\Delta(A)$ цієї системи (визначник основної матриці коефіцієнтів цієї системи) не дорівнює нулю, то ранги основної та розширеної матриць системи будуть рівними і дорівнювати кількості невідомих *n*. Отже, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі така система має єдиний розв'язок.

У випадку $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ система (4) *однорідна,* її єдиний розв'язок тривіальний, тобто $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Якщо система (4) *неоднорідна,* її єдиний розв'язок можна знаходити різними способами.

У випадку, коли кількість рівнянь та невідомих $n \leq 3$, часто використовують правило Крамера або матричний метод розв'язування. У випадку, коли $n > 3$ доцільно використовувати метод Гаусса (приведення системи до трикутного вигляду) або більш ефективний метод – метод Гаусса-Жордана.

Слід зауважити, що правило Крамера та матричний метод можна застосовувати і для великих значень n, але вони потребують більше часу і багато розрахунків.

Ознайомимось з матричним методом та правилом Крамера у цьому розділі. Найбільш досконалий метод Гаусса-Жордана розглянемо у розділі 5.3.

Правило Крамера (швейцарський математик, 31.07.1704–04.01.1752). *Якщо основний визначник $\Delta(A)$ неоднорідної системи n в лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами*

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta(A)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

де Δ_k – допоміжний визначник, який одержують з основного визначника $\Delta(A)$ шляхом – заміни його k-го стовпця стовпцем вільних членів системи.

■ **Приклад 2.** Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}.$$

Розв'язання. Задана неоднорідна система 3 лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Основний визначник цієї системи

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 32 + 10 + 60 - 12 - 4 = 31 \neq 0.$$

Тому, згідно з правилом Крамера, задана система має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами (5).

Спочатку знайдемо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -8 & -3 & 4 \\ -13 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 104 - 40 - 195 + 48 + 8 = -93,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 4 & -13 & -3 \end{vmatrix} = 24 - 32 - 130 + 160 - 12 + 52 = 62,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -8 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 39 + 64 - 4 - 24 - 52 + 8 = 31.$$

Тепер за формулами (5) знаходимо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta(A)} = \frac{-93}{31} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta(A)} = \frac{62}{31} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta(A)} = \frac{31}{31} = -1.$$

Отже, розв'язком цієї системи буде (–3; 2; 1).

5.2.1. Матричний метод

Якщо позначити

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

то згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases} \tag{4}$$

у матричній формі:

$$AX = B. \tag{6}$$

Якщо матриця A квадратна порядку n і її визначник $\Delta(A)$ не дорівнює нулю, тоді існує обернена до A матриця A^{-1}, тому можна рівність (6) помножити на A^{-1} зліва. Одержимо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \tag{7}$$

За означенням оберненої матриці маємо:

$$A^{-1}A = E,$$

тому (7) прийме вигляд:

$$EX = A^{-1}B.$$

Але множення матриці-стовпця X на матрицю E не змінює X, тобто $EX = X$. Таким чином, одержуємо формулу:

$$X = A^{-1}B. \tag{8}$$

за якою і знаходять розв'язок системи (4) матричним методом.

Отже, матричний метод можна застосовувати у випадку, коли квадратна матриця A має не рівний нулю визначник.

Для розв'язування неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими матричним методом доцільно здійснювати такий порядок дій:

1. Записати основну матрицю системи A і знайти її визначник $\Delta(A)$. Якщо $\Delta(A) = 0$, то система розв'язку не має.

2. Якщо $\Delta(A) \neq 0$, тоді знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A.

3. Помножити обернену матрицю A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів системи. Одержаний при цьому стовпець згідно з формулою (8) і буде розв'язком системи.

■ **Приклад 3.** Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & & -2x_3 & =-1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4+1-1+2 = 6.$$

Для запису оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{12} = -3; \quad A_{22} = -3; \quad A_{32} = 3; \quad A_{13} = 1; \quad A_{23} = -3; \quad A_{33} = 1.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою (8) знаходимо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & +0\cdot(-1) & +2\cdot 2 \\ (-3)\cdot 1 & +(-3)\cdot(-1) & +3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 & +(-3)\cdot(-1) & -1\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вправи до розділу 5.2

N – номер варіанта.

1. За правилом Крамера розв'язати системи рівнянь:

a) $\begin{cases} x+y & +2z & =N \\ x-(N+1)y & +z & =-1 \\ x-y & +2z & =N-2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (N+2)x & -3y & +z & =2N+2 \\ x & +y & -z & =0 \\ 2x & -y & +z & =6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x-y & +2z & =3 \\ x-y & -z & =0 \\ x-2y & +(N+2)z & =N+1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x- & (N+3)y & +z & =2-N \\ 2x & +3y & -z & =4 \\ x & +y & -z & =0 \end{cases}$.

2. Розв'язати системи матричним методом

a) $\begin{cases} 3x & +y & +z & =N \\ 2x & +Ny & +z & =0 \\ (N+1)x & +3y & -z & =0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y & +z & =N+2 \\ x-Ny & +z & =0 \\ x+y & -(N+1)z & =0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x & +y & +z & =N \\ Nx & +y & & =0 \\ 3x & -2y & +(N+1)z & =-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x & +y & -z & =-N \\ Nx & -y & -z & =1 \\ 2(N+1)x & +2y & -2z & =0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} Nx & -y & -z & =0 \\ x & +y & +2z & =N \\ x & -y & -(N+1)z & =1 \end{cases}$.

5.3. Методи Гаусса та Гаусса-Жордана

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має нескінченну кількість розв'язків у таких випадках:

1. Коли однорідна система має n рівнянь з n невідомими і її основний визначник $\Delta(A)$ дорівнює нулю.

2. Коли кількість рівнянь неоднорідної системи не дорівнює кількості невідомих, а система рівнянь є сумісною.

3. Коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих та дорівнює n, система рівнянь сумісна $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ але $r < n$.

Видатний німецький математик, астроном, фізик і геодезист Карл Фрідріх Гаусс (30.04.1777–23.02.1855) розробив метод розв'язування таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Суть метода Гаусса полягає в тому, що шляхом елементарних перетворень систему треба привести до трикутного вигляду, коли усі елементи головної діагоналі основної матриці системи дорівнюють 1, а елементи основної матриці, що знаходяться нижче її головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такий вигляд системи дозволяє знайти усі невідомі. Метод Гаусса можна застосовувати і до систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що мають єдиний розв'язок.

Щоб краще зрозуміти суть метода Гаусса, розглянемо декілька прикладів.

■ **Приклад 1.** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x & -4y & +3z & =1 \\ x & -2y & +4z & =3 \\ 3x & -y & +5z & =2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент a_{11} основної матриці дорівнював 1. Одержимо:

$$\begin{cases} x & -2y & +4z & =3 \\ 2x & -4y & +3z & =1 \\ 3x & -y & +5z & =2 \end{cases}.$$

Тепер перше рівняння помножимо на (–2) і додамо до другого (щоб одержати $a_{21}= 0$), а потім помножимо перше рівняння на (–3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати $a_{31} = 0$). Тоді будемо мати систему

$$\begin{cases} x & -2y & +4z & =3 \\ & & -5z & =-5 \\ & 5y & -7z & =-7 \end{cases}.$$

Тепер друге рівняння поділимо на (–5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x & -2y & +4z & =3 \\ & y & -\frac{7}{5}z & =-\frac{7}{5} \\ & & z & =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 3 & -4\cdot 1 & +2\cdot 0 \\ y = & \frac{7}{5}\cdot 1 & -\frac{7}{5} & \\ z = & 1 & & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Отже, система має єдиний розв’язок (–1, 0, 1).

◈ **Зауваження.** *Елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. Розв’язання прикладу 1 у такий спосіб виглядає так:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

■ **Приклад 2.** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Задана система 3-х рівнянь з 4-ма невідомими. Виконаємо елементарні перетворення з розширеною матрицею.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що основна та розширена матриці мають рівні ранги: $r(A) = r\left(\tilde{A}\right) = 2$. Знайдемо мінор другого порядку, який не дорівнює нулю. Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Мінор, який не дорівнює нулю, та має порядок, рівний рангу $r = r(A) = r(\tilde{A})$, називають ***базисним мінором***, тому обраний нами мінор – базисний.

Невідомі x_1 та x_2, для яких елементи базисного мінора є коефіцієнтами, називають ***базисними невідомими***. Інші невідомі системи x_3 та x_4 – вільні. Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2 \\ 2x_2 = 3x_3 - x_4 + 1 \end{cases}.$$

Вільні невідомі перенесли у праву частину системи. Ми одержали базисні змінні x_1 та x_2 як функції x_3 та x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 = x_3 + x_4 + 2 - x_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Вільним невідомим x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, де C_1 та C_2 – довільні сталі. Отже, одержуємо нескінченну кількість розв'язків системи вигляду:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{4} + \frac{3C_2}{4} + \frac{3}{4} \\ \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{2} + \frac{1}{2} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

5.3.1. Поняття різновидів розв'язків

Розв'язки прикладу 2 приймають різні значення, якщо сталим C_1 та C_2 надавати конкретні значення.

Коли розв'язок розглядають залежним від будь-яких значень C_1 та C_2, тоді його називають ***загальним розв'язком відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь***.

Якщо взяти $C_1 = C_2 = 0$, то одержаний розв'язок називають ***базисним***. У випадку прикладу 2 базисним розв'язком буде:

$$X_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо одній сталій надати значення 0, а іншій 1, тоді одержані розв'язки називають ***фундаментальними***.

У системі прикладу 2 є два фундаментальних розв'язки:

$$X_{\phi,1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad X_{\phi,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Невід'ємний базисний розв'язок називають ***опорним розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь***.

Саме базисні, фундаментальні та опорні розв'язки систем найчастіше використовують економісти.

Головною метою дисципліни «Математичне програмування» є розробка методів знаходження опорних розв'язків та вибору оптимального розв'язку серед них.

5.3.2. Метод Гаусса-Жордана з використанням розрахункових таблиць

В економічних дослідженнях дуже часто необхідно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма невідомими і метод Гаусса для них не дуже зручний тому, що після приведення матриці системи до трикутного вигляду треба ще провести певну кількість розрахунків, щоб одержати усі невідомі.

Метод Гаусса буде досконалішим, якщо при елементарних перетвореннях можна одержати рівними нулю не тільки елементи, що лежать нижче головної діагоналі, а й ті елементи, що лежать вище головної діагоналі. Саме цього вдається добитися методом Гаусса-Жордана, який треба обов'язково зрозуміти і оволодіти розробленою економістами технікою його застосування з використанням розрахункових таблиць.

Перетворення Гаусса-Жордана дозволяють розв'язувати довільні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, знаходити ранг матриці, обернену матрицю.

При розв'язуванні довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса-Жордана треба послідовно зробити декілька кроків перетворення Гаусса-Жордана з певним правилом переходу від однієї таблиці до іншої.

Кроком перетворення Гаусса-Жордана називають елементарні перетворення (множення рівнянь на число, алгебраїчна сума різних рівнянь), за допомогою яких задана система зводиться до еквівалентної системи.

Алгоритм кроку перетворення Гаусса-Жордана

1. *Обираємо розв'язувальний елемент* $a_{ij} \neq 0$.

2. *Елементи* i*-го рядка (його називають розв'язувальним) ділимо на* a_{ij} *і запишемо в* i *рядок розрахункової таблиці.*

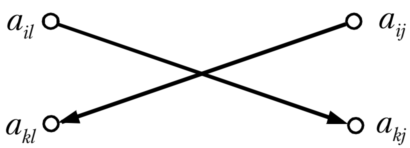
3. *В розв'язувальному* j *стовпці замість* a_{ij} *пишуть одиницю, а замість інших елементів цього стовпця пишуть нулі.*

4. *Усі інші елементи розрахункової таблиці, в тому числі і контрольного стовпця, знаходять за формулою*

$$\tilde{a}_{kl} = \frac{a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{kj} \cdot a_{il}}{a_{ij}} \qquad (1)$$

$$k = 1, 2, \ldots, m; \;\; l = 1, 2, \ldots, n; \;\; k \neq i, \;\; j \neq l.$$

Обчислення елементів $\tilde{a}_{kl}$ за формулою (1) *доцільно виконувати з використанням схеми прямокутника*



5. *Роблять перевірку правильності розрахунків шляхом порівняння суми елементів рядка з відповідним елементом контрольного стовпця.*

■ **Приклад 3.** Виконати крок перетворень Гаусса-Жордана з використанням розрахункової таблиці для системи

$$\begin{cases} 4x_1 & -5x_2 & +2x_3 & =-12 \\ 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & =13 \\ -2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & =-8 \end{cases}.$$

Розв'язання. Запишемо задану систему у вигляді розрахункової таблиці 1.

Елементи останнього контрольного стовпця повинні дорівнювати сумі елементів відповідного рядка таблиці.

За алгоритмом кроку перетворень Гаусса-Жордана зробимо перехід до розрахункової таблиці 2:

1) обираємо розв'язувальний елемент $a_{13} = 2$;

2) елементи першого рядка таблиці (розв'язувального) ділимо на 2 і запишемо у перший рядок таблиці 2.

3) у третьому (розв'язувальному) стовпці $\tilde{a}_{13} = 1$, а інші елементи дорівнюють нулю;

Таблиця 1

x_1	x_2	x_3	b_i	k
4	–5	$\boxed{2}$	–12	–11
3	2	–2	13	16
–2	3	4	–8	–3

Таблиця 2

x_1	x_2	x_3	b_i	k
2	–5/2	1	–6	–11/2
7	–3	0	1	5
–10	13	0	16	19

4) решту елементів таблиці 2 обчислюємо за формулою (1) з використанням схеми прямокутника:

$$\tilde{a}_{21} = \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2)}{2} = \frac{6+8}{2} = 7;$$

$$\tilde{a}_{31} = \frac{(-2) \cdot 2 - 4 \cdot 4}{2} = \frac{4-16}{2} = -10;$$

$$\tilde{a}_{22} = \frac{2\cdot 2-(-2)\cdot(-5)}{2} = \frac{4-10}{2} = -3.$$

Аналогічно знаходимо:

$\tilde{a}_{24} = 1$; $\tilde{a}_{25} = 5$; $\tilde{a}_{32} = 13$; $\tilde{a}_{34} = 16$; $\tilde{a}_{35} = 19$.

5) перевіримо правильність розрахунків

2 – 5/2 + 1 – 6 = –11/2; –11/2 = –11/2;

7 – 3 + 1 = 5; 5 = 5;

–10 + 13 + 16 = 19; 19 = 19.

Рекомендації для скорочення розрахунків

1. Розв'язувальним елементом доцільно обирати одиницю, тоді формули (1) спрощуються.

2. Якщо у розв'язувальному стовпці розрахункової таблиці є нуль, то відповідний рядок з цієї таблиці переписують без змін.

3. Якщо в розв'язувальному рядку розрахункової таблиці є нуль, то відповідний стовпець переписуємо без змін.

Наприклад, в i розв'язувальному рядку $a_{il} = 0$, тоді l-й стовпець таблиці переписуємо без змін.

4. Якщо в таблиці є два пропорційних рядки, то один з них можна викреслити.

Наступні кроки перетворень Гаусса-Жордана виконуються таким же чином, при цьому кожного разу розв'язувальний елемент треба обирати з інших рядків та стовпців.

Після послідовного виконання максимально можливого числа кроків перетворення Гаусса-Жордана, наприклад r, одержимо систему, яка може бути записана у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

x_1	x_2	...	x_k	...	x_r	x_{r+1}	...	x_n	b_i	k
1	0	...	0	...	0	b_{1r+1}	...	b_{1n}	c_1	k_1
0	1	...	0	...	0	b_{2r+1}	...	b_{2n}	c_2	k_2
0	0	...	0	...	0	...	...	...	...	...
0	0	...	1	...	0	...	...	...	...	...
0	0	...	0	...	1	b_{rr+1}	...	b_{rn}	c_r	k_r

Система, що записана у таблиці 3, зветься ***системою у базисному вигляді***.

Можливі такі випадки:

1) $r = n$, тоді система має єдиний розв'язок $x_k = c_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

2) $r \le m < n$, тоді система має множину розв'язків.

Загальний розв'язок системи буде

$$\begin{cases} x_1 = & c_1 & -b_{1r+1} \cdot x_{r+1} & -\ldots - b_{1n}x_n \\ x_2 = & c_2 & -b_{2r+1} \cdot x_{r+1} & -\ldots - b_{2n}x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_r = & c_r & -b_{rr+1} \cdot x_{r+1} & -\ldots - b_{rn}x_n \end{cases}. \qquad (2)$$

Невідомі $x_1, x_2, ..., x_r$, відносно яких система розв'язана, називають ***базисними,*** а невідомі $x_{r+1}, x_{r+2} ... x_n$, називають ***вільними*** або ***небазисними***.

Якщо у загальному розв'язку (2) усі вільні невідомі прирівняти нулю, то одержимо базисний розв'язок системи:

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, ..., x_r = c_r,\ x_{r+1} = 0,\ ...,\ x_n = 0.$$

Якщо одну вільну невідому прирівняти одиниці, а інші нулю, тоді одержимо фундаментальний розв'язок.

Невід'ємний базисний розв'язок системи називають ***опорним розв'язком цієї системи.***

3) При перетворенні системи одержали рівняння, усі коефіцієнти якого дорівнюють нулю, а права частина c_j не дорівнює нулю. В цьому випадку система несумісна.

■ **Приклад 4.** Розв'язати методом Гаусса-Жордана систему

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & =7 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 & =-2 \\ & x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +6x_5 & =23 \\ 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & =12 \end{cases}.$$

↳ *Розв'язання.* Розв'язання будемо проводити з використанням розрахункової таблиці 4 та формул (1).

Таблиця 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	c_i	k
$\boxed{1}$	1	1	1	1	7	12
3	2	1	1	–3	–2	2
0	1	2	2	6	23	34
5	4	3	3	–1	12	26
1	1	1	1	1	7	12
0	–1	–2	–2	–6	–23	–34
0	$\boxed{1}$	2	2	6	23	34
0	–1	–2	–2	–6	–23	–34
1	0	–1	–1	–5	–16	–22
0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	2	6	23	34
0	0	0	0	0	0	0

Отже, задана система сумісна і має множину розв'язків. Базисні невідомі x_1 та x_2, вільні невідомі x_3, x_4 та x_5.

Загальним розв'язком заданої системи буде

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}.$$

Базисним розв'язком системи буде

$$X_b = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальних розв'язків три:

$$E_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ 21 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 21 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad E_3 = \begin{pmatrix} -11 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При базисних невідомих x_1 та x_2 базисний розв'язок X_b не є опорним (перша компонента від'ємна).

Але при розв'язуванні системи можна взяти інші розв'язуванні елементи і одержати базисними інші невідомі, наприклад, x_2 та x_3. При цих базисних невідомих базисний розв'язок можливо буде опорним.

Вправи до розділу 5.3

Розв'язати методом Гауса-Жордана системи:

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$. 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0,5 \end{cases}$. 4. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$. 6. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$. 8. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$.

5.4. Задачі економічного змісту

Задача знаходження коефіцієнтів повних та непрямих витрат, плану та програми виробництва

Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. Прямі виграти одиниць i-го цеха, що використовуються (проміжний продукт) для випуску одиниці виробу продукції j-го цеха, а також кількість одиниць продукції i-го цеха, призначених до реалізації (кінцевий продукт), задані у таблиці 5.

Таблиця 5

Продукція цехів	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	**2**	**3**	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначити:

1) коефіцієнти повних витрат;
2) план (валовим випуск) кожного цеха;
3) виробничу програму цехів;
4) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Розв'язання. Таблицею 5 задана матриця витратних коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо: виробничу програму підприємства X, де $X = \begin{pmatrix} x \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

(x_1, x_2, x_3 – плани валового випуску продукції цехів); валовий випуск товарної продукції Y, де $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

Виробничі взаємні зв'язки підприємства задовольняють умовам

$$\begin{cases} x_1 & -\left(0\cdot x_1+0,2\cdot x_2+0\cdot x_3\right) & =200 \\ x_2 & -\left(0,2\cdot x_1+0\cdot x_2+0,1\cdot x_3\right) & =100 \Rightarrow \\ x_3 & -\left(0\cdot x_1+0,1\cdot x_2+0,2\cdot x_3\right) & =300 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 & -0,2x_2 & & =200 \\ -0,2x_1 & +x_2 & -0,1x_3 & =100\,. \\ & -0,1x_2 & +0,8x_3 & =300 \end{cases} \tag{1}$$

У матричному вигляді:

$X - AX = Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y$, де E – одинична матриця.

Позначимо $E - A = B$. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) у матричному вигляді буде

$$BX = Y, \tag{2}$$

причому

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0,2&0\\0,2&0&0,1\\0&0,1&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-0,2&0\\-0,2&1&-0,1\\0&-0,1&0,8\end{pmatrix}.$$

Елементи матриці B^{-1} – це коефіцієнти повних витрат. Тому, щоб задовольнити першу вимогу задачі, треба знайти B^{-1}. Матриця B квадратна 3-го порядку, її визначник $|B| = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758$. Тому B^{-1} існує і систему (1) можна розв'язати матричним методом.

Для знаходження матриці B^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці B:

$$\begin{array}{lll} B_{11}=0,79; & B_{21}=0,16; & B_{31}=0,02; \\ B_{12}=0,16; & B_{21}=0,8; & B_{32}=0,1; \\ B_{13}=0,02; & B_{23}=0,1; & B_{33}=0,96. \end{array}$$

Отже, оберненою до B матрицею буде

$$B^{-1}=\frac{1}{0,758}\begin{pmatrix}0,79 & 0,16 & 0,02\\ 0,16 & 0,8 & 0,1\\ 0,02 & 0,1 & 0,96\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,04 & 0,21 & 0,03\\ 0,21 & 1,05 & 0,13\\ 0,03 & 0,13 & 1,27\end{pmatrix}.$$

1. Коефіцієнти повних витрат знайдені (це елементи матриці B^{-1}).
2. Знайдемо розв'язок системи (1) матричним методом:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=B^{-1}Y=\begin{pmatrix}1,04 & 0,21 & 0,03\\ 0,21 & 1,05 & 0,13\\ 0,03 & 0,15 & 1,27\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}238\\ 186\\ 400\end{pmatrix}.$$

Отже, плани валового випуску продукції: для першого цеху $x_1 = 238$, для другого – $x_2 = 186$, для третього – $x_3 = 400$.

3. Визначимо виробничу програму кожного цеха використовуючи витратні коефіцієнти a_{ij} (елементи матриці A) та співвідношення:

$$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0\cdot 238=0;\quad x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,2\cdot 186=37,2\approx 37;$$
$$x_{13}=a_{13}\cdot x_3=0\cdot 400=0;\quad x_{21}=a_{21}\cdot x_1=0,2\cdot 238=47,6\approx 48;$$
$$x_{22}=a_{22}\cdot x_2=0\cdot 186=0;\quad x_{23}=a_{23}\cdot x_3=0,1\cdot 400=40;$$
$$x_{31}=a_{22}\cdot x_2=0\cdot 186=0;\quad x_{32}=a_{32}\cdot x_2=0,1\cdot 186=18,6\approx 19;$$
$$x_{33}=a_{33}\cdot x_3=0,2\cdot 400=80.$$

Таким чином одержали:

4. Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат C_{ij} (елементи матриці C) визначається як різниця повних внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці B^{-1}) та прямих витрат (елементи a_{ij} матриці A). У матричному вигляді матриця коефіцієнтів непрямих витрат буде:

$$C=B^{-1}-A=\begin{pmatrix}1,04 & 0,21 & 0,03\\ 0,21 & 1,05 & 0,13\\ 0,03 & 0,13 & 1,27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0,2 & 0\\ 0,2 & 0 & 0,1\\ 0 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,04 & 0,01 & 0,03\\ 0,01 & 1,05 & 0,03\\ 0,03 & 0,03 & 1,07\end{pmatrix}.$$

◈ **Зауваження.** *У випадку більшої кількості цехів на підприємстві задача розв'язується таким же чином, але вимір матриць буде більшим.*

Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь (аналог системи (1)*) буде залежати від багатьох невідомих, то її розв'язок доцільно знаходити методом Гаусса-Жордана.*

Задача знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів

У таблиці 6 для розглянутого у цьому розділі підприємства задані витратні норми двох видів сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожного цеха, трудомісткість в людино-годинах на одиницю продукції, вартість одиниці відповідної сировини та вартість однієї робочої людино-години.

Таблиця 6

Показники	**Норми витрат цехів**			**Вартість**
	1	**2**	**3**	
Сировина *a*)	1,4	2,4	0,8	5
Сировина *b*)	0	0,6	1,6	12
Паливо	2	1,8	2,2	2
Трудомісткість	10	20	20	1,2

Треба знайти:

1) сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програми виробництва;

2) коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеха;

3) повні витрати сировини, палива та праці кожним цехом та підприємством;

4) внутрішньовиробничі витрати цехів;

5) внутрішньовиробничі витрати на кожну одиницю товарної продукції.

↳ *Розв'язання.* Таблиця 6 дозволяє скласти матрицю D норм витрат сировини, палива та праці розміру 4×3:

$$D=\begin{pmatrix} 1,4 & 2,4 & 0,8 \\ 0 & 0,6 & 1,6 \\ 2 & 1,8 & 2,2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

та матрицю рядок V вартості сировини, палива, робочих людино-годин: $V = (5; 12; 2; 1{,}2)$.

1. Сумарні витрати сировини, палиш, трудових ресурсів для виконання програми підприємства одержимо шляхом множення матриці норм витрат D на матрицю X валового випуску продукції:

$$D \times X = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 2{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 1{,}6 \\ 2 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 \cdot 238 & +2{,}4 \cdot 186 & +0{,}8 \cdot 400 \\ 0 \cdot 238 & +0{,}6 \cdot 186 & +1{,}6 \cdot 400 \\ 2 \cdot 238 & +1{,}8 \cdot 186 & +2{,}2 \cdot 400 \\ 10 \cdot 238 & +20 \cdot 186 & +20 \cdot 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 752 \\ 1692 \\ 1412 \end{pmatrix}.$$

Отже, для виконання програми підприємства треба витратити: сировини a) – 1100 одиниць; сировини b) – 752 одиниці; палива – 1692 одиниці; робочих людино-годин – 1412.

2. Коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожного цеха знаходимо шляхом множення матриці норм витрат D на матрицю коефіцієнтів повних витрат B^{-1}:

$$M = D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 2{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & 1{,}6 \\ 2 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ 10 & 20 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}04 & 0{,}21 & 0{,}03 \\ 0{,}21 & 1{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}03 & 0{,}13 & 1{,}27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}98 & 2{,}94 & 1{,}37 \\ 0{,}17 & 0{,}84 & 2{,}11 \\ 2{,}52 & 2{,}61 & 3{,}09 \\ 15{,}2 & 24{,}8 & 28{,}3 \end{pmatrix}.$$

Елементи k-го стовпця одержаної матриці M вказують кількість витрат сировини a), сировини b), палива та робочих людино-годин необхідну для виготовлення одиниці продукції k-го цеха.

3. Витрати сировини, палива та праці кожним з цехів одержимо шляхом множення витратної норми кожного цеху на його валовий випуск продукції:

$$\begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 238 = \begin{pmatrix} 333 \\ 0 \\ 476 \\ 2380 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 0{,}6 \\ 1{,}8 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot 186 = \begin{pmatrix} 449 \\ 112 \\ 337 \\ 3720 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}6 \\ 2{,}2 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot 400 = \begin{pmatrix} 320 \\ 640 \\ 880 \\ 8000 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця повних витрат сировини, палива та праці усього підприємства буде мати вигляд:

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3720 & 8000 \end{pmatrix}.$$

4. Виробничі витрати цехів одержимо шляхом множення, матриці-рядка вартостей V на матрицю повних витрат

$$\begin{pmatrix} 5; & 12; & 2; & 1{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 333 & 449 & 320 \\ 0 & 112 & 640 \\ 476 & 337 & 880 \\ 2380 & 3720 & 8000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5473; & 8751; & 20640 \end{pmatrix}.$$

Отже, вартість витрат першого цеху 5473, другого – 8 751, третього – 20640.

5. Внутрішньовиробничі витрати на одиницю товарної продукції цехів знаходять множенням рядка вартостей V на матрицю M прямих витрат:

$$\begin{pmatrix} 5; & 12; & 2; & 1{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}98 & 2{,}94 & 1{,}37 \\ 0{,}17 & 0{,}84 & 2{,}11 \\ 2{,}52 & 2{,}61 & 3{,}09 \\ 15{,}2 & 24{,}8 & 28{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35{,}2; & 59{,}6; & 72{,}3 \end{pmatrix}.$$

◈ **Зауваження.** *У випадку більшої кількості видів сировини та наявності інших видів витрат задача розв'язується таким же чином.*

5.5. Завдання для індивідуальної роботи з частини 5

Методом Гаусса-Жордана, з використанням розрахункової таблиці, знайти загальний, базисний та фундаментальні розв'язки системи (N – номер варіанта):

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - (N+3)x_2 + x_3 - x_4 = 2 - N \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}.$$

2. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - (N+1)x_3 + Nx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = N \\ Nx_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N + 2 \\ x_1 - Nx_2 + x_3 - Nx_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - (N+1)x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + (N+2)x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ (N+1)x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = N + 2 \end{cases}.$$

Частина 6

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

6.1. Векторна алгебра і деякі її застосування

6.1.1. Вектори

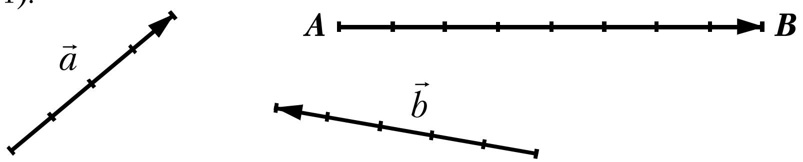
⬢ **Означення 1.** ***Вектором*** *називають величину, яка характеризується не тільки своїм числовим значенням (довжиною), але й напрямком.*

Вектори позначають $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ або ***a***, ***b***, ***c***.

При позначенні вектора двома літерами (наприклад, $\overrightarrow{AB}$) перша літера вказує точку початку вектора, а друга – точку його кінця. В економіці вектори часто позначають однією великою літерою.

Довжину (модуль) вектора позначають $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

Геометрично вектор зображують як напрямлений відрізок (див. мал. 1).



Мал. 1.

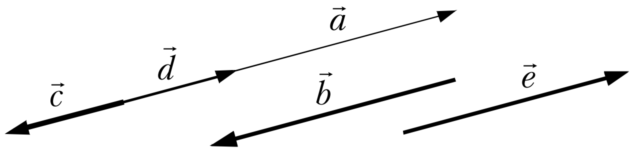
Зображені на цьому малюнку вектори мають довжину: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $|\overrightarrow{AB}| = 8$, якщо одиниця масштабу: .

Нульовим вектором *називають вектор, початок і кінець якого співпадають.*

Такий вектор позначають $\vec{0}$, його довжина дорівнює нулю, а напрям – довільний.

Рівними *називають вектори, які мають однакові довжини та напрямки:* $\vec{a} = \vec{b}$.

Колінеарними *називають вектори, які розташовані на одній прямій або паралельних прямих (див. мал. 2).*



Мал. 2.

Усі зображені на мал. 2 вектори колінеарні.

Протилежними *називають колінеарні протилежно спрямовані вектори однакової довжини.*

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$ позначають $\left(-\vec{a}\right)$.

Ортом вектора $\vec{a}$ *називають вектор* $\vec{a}_0$*, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з* $\vec{a}$*, тобто* $\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \vec{a}_0$.

Компланарними *називають вектори, що лежать в одній площині.*

В економічних дослідженнях n упорядкованих параметрів розглядають як вектор n-вимірного простору E_n.

Матриця-рядок та матриця-стовпець містять упорядковані елементи, тому їх можна розглядати як вектори простору відповідного виміру.

Наприклад: $\left(3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 6\right) \in E_5$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_4$.

Елементи вектора-рядка та вектора-стовпця називають ***координатами вектора***. Смисл такої назви пояснимо нижче, після визначення проекцій вектора на координатні осі.

6.1.2. Деякі економічні приклади

В розділі 4 частини 5 наведені приклади застосування векторів до задач мікроекономіки.

Так, використовувались вектор-рядок вартості $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, компоненти якого – вартості різної сировини, палива, робочої людино-години, та вектор-стовпець потреб $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ інших галузей до продукції цехів 1, 2, 3.

Зараз ознайомимось з іншими прикладами застосування векторів.

Продуктивна функція. *При аналізі закономірностей виробництва використовується продуктивна функція, яка, по суті, є співвідношенням між використаними у виробництві ресурсами і випущеною продукцією.*

Нехай в деякому виробничому процесі є n виробничих ресурсів. Кількість i-го ресурсу, який використали за проміжок часу t, позначимо x_i. Тоді виробничі ресурси – це вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Нехай підприємство випускає m різних виробів. Кількість j виробу позначимо y_i. Тоді випуск усіх виробів буде вектор $Y = (y_1, y_2 \ldots, y_m)$. Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ – вектор параметрів виробництва (наприклад, різні види транспортних чи інших витрат). Продуктивна функція пов'язує вектори ресурсів *X*, випуску *Y* та параметрів $\vec{a}$, тобто

$$F(X, Y, \vec{a}) = 0.$$

Продуктивна функція задається аналітично або таблично.

Продуктивну функцію, розв'язану відносно *Y*, тобто вигляду

$$Y = f(X, \vec{a}),$$

називають ***функцією випуску***, а розв'язану відносно вектора *X*, тобто вигляду

$$X = \varphi\left(Y, \vec{a}\right),$$

називають ***функцією виробничих витрат***.

Зрозуміло, що ці функції у конкретних випадках (коли вказано закони f та φ) використовують правила дій з векторами.

Математичні моделі економічних задач

Навіть найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів.

Для дослідження динамічних моделей різних процесів стан економічної системи, що вивчається, в момент часу t описується за допомогою вектора X із n-вимірного простору, а керування процесом в той самий момент часу описується за допомогою вектора $\vec{U}(t)$ із m-вимірного простору.

Таким чином, в динамічних моделях використовуються вектори n- та m-вимірних просторів, координати яких залежать від часу t.

6.1.3. Координати векторів

Спочатку нагадаємо поняття числової осі та систем координат.

Числовою віссю називають пряму, на якій визначено:

1) напрям $(\rightarrow)$ зростання;
2) початок відліку (точка 0);
3) відрізок, який приймають за одиницю масштабу.

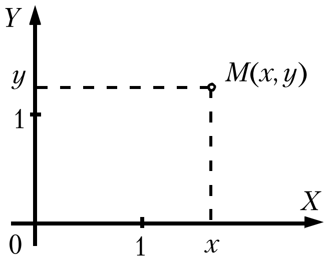
Дві взаємно перпендикулярні числові осі із загальним початком відліку (точка 0) називають ***прямокутною декартовою системою координат на площині*** (у двовимірному просторі E_2).

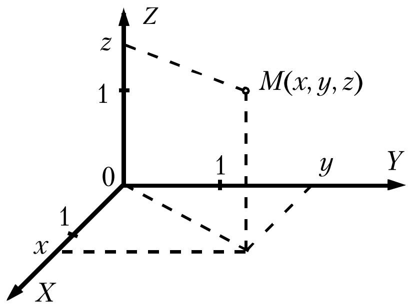
Три взаємно перпендикулярні числові осі із загальним початком відліку (точка 0) називають ***прямокутною декартовою системою координат у просторі*** (у тривимірному просторі E_3).

На малюнку 3 зображені:

a) прямокутна декартова система координат на площині;

b) прямокутна декартова система координат у просторі.





Мал. 3.

Вісь Ox називають ***віссю абсцис***; Oy – ***вісь ординат***; Oz – ***вісь аплікат***. Орт осі Ox позначають $\vec{i}$, орт осі Oy – вектор $\vec{j}$, орт осі Oz – вектор $\vec{k}$.

Упорядкована пара чисел що відповідає точці M площини xOy, називається ***декартовими прямокутними координатами точки M***, це позначають $M(x, y)$.

Упорядкована трійка чисел (x, y, z), що відповідає точці M простору $Ozyx$, називається ***координатами точки M декартової прямокутної системи координат у просторі***, це позначають $M(x, y, z)$.

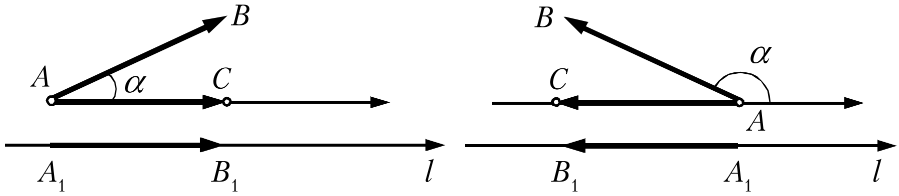
Відмітимо, що існують інші системи координат на площині та у просторі.

Дамо поняття проекції вектора на вісь. Нехай заданий вектор $\overrightarrow{AB}$ та вісь l. З точок A і B опускаємо перпендикуляри на вісь l. Одержимо точки A_1 та B_1 – проекції точок A та B.

⬢ **Означення 2.** ***Проекцією вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на вісь*** *називається довжина вектора* $\overrightarrow{A_1B_1}$*, яка взята із знаком «+», якщо напрям співпадає з напрямом осі та із знаком «–», якщо напрями протилежні* (див. мал. 4).

Позначають: $np_l\overrightarrow{AB}$.

⬢ **Означення 3.** ***Кутом між двома векторами*** *(або* ***між вектором та віссю****) називають найменший кут між їх напрямами при умові, що вектори зведені до спільного початку* (див. мал. 4).



a)

b)

Мал. 4.

Знайдемо $np_l\overrightarrow{AB}$.

У випадку а) маємо:

$$np_l\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|'=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha .$$

У випадку b) маємо:

$$np_l\overrightarrow{AB}=-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|=-\left|\overrightarrow{AC}\right|=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\alpha .$$

Таким чином, проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута між вектором і віссю.

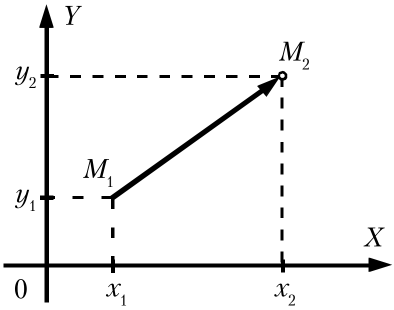
⬢ **Означення 4.** ***Координатами вектора*** *називають проекції вектора на осі координат.*

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати a_x,a_y,a_z тобто $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і утворює з осями координат кути α, β, γ, тоді,

$$a_x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha,\ \ a_y=\left|\vec{a}\right|\cos\beta,\ \ a_z=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma .$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, називають ***напрямними косинусами вектора***. З попередніх формул маємо:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\ \ \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\ \ \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}.$$



Мал. 5.

Розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1, y_1)$ – початок вектора, $M_2(x_2, y_2)$ – кінець вектора (див. мал. 5). В цьому випадку

$$np_{0x}\overrightarrow{M_1M_2} = x_2 - x_1,$$

$$np_{0y}\overrightarrow{M_1M_2} = y_2 - y_1,$$

тобто координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ – це впорядкована пара чисел $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Аналогічно одержуємо, що координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ у просторі буде впорядкована трійка чисел $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Отже, можна сформулювати правило:

Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора.

Наприклад, вектор $\vec{a}$, початок якого знаходиться в точці $M_1(2,-3,0)$, кінець – в точці $M_2(1,1,2)$, має координати

$\vec{a}$ =(1 – 2; 1 + 3; 2 – 0) = (–1; 4; 2).

◈ **Зауваження.** *Вектор $\overrightarrow{OA}$ (де точка O – початок координат) називають **радіусом-вектором точки A** і позначають $\vec{r}$. Координати вектора $\vec{r}$ співпадають з координатами точки A.*

По аналогії з векторами $\vec{a} = (a_x, a_y)$ із E_2 та $b = (b_x, b_y, b_z) \in E_3$ вектор-рядок та вектор-стовпець, які містять n елементів, розглядають як вектори із n-вимірного простору E_n, а їх елементи називають ***координатами вектора***.

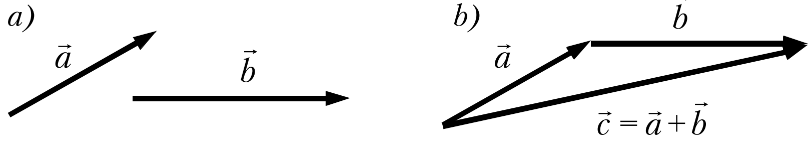
Наприклад,

$$\vec{X} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_7\right) \in E_7; \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in E_4.$$

6.1.4. Дії з векторами

⬢ **Означення 5.** ***Сумою двох векторів*** $\vec{a}$ ***та*** $\vec{b}$ *називають вектор* $\vec{c}$*, який сполучає початок автора* $\vec{a}$ *з кіпцем вектора* $\vec{b}$ *при умові, що початок вектора* $\vec{b}$ *вміщено в кінець вектора* $\vec{a}$.

Наприклад, задані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (мал. 6, *а*). Для побудування суми цих векторів $\vec{a}$ перенесли паралельно самому собі, в його кінець вмістили початок вектора $\vec{b}$ та сполучили початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ (мал. 6, *b*).

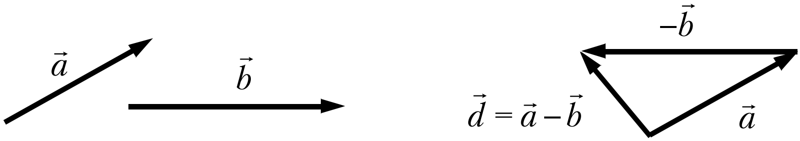


Мал. 6.

Суму кількох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots, \vec{l}$ визначають аналогічно: початок кожного наступного вектора вміщують в кінець попереднього. Одержують ламану лінію і тоді вектор, який сполучає початок першого вектор з кінцем останнього і є сумою цих всіх векторів.

◈ **Зауваження.** *Різницю двох векторів* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *будують як суму вектора* $\vec{a}$ *та вектора* $\left(-\vec{b}\right)$.

Наприклад:



Мал. 7.

⬢ **Означення 6.** ***Добутком вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** k *називають вектор* $\vec{b} = k\vec{a}$, *колінеарний з вектором* $\vec{a}$, *що має довжину в* k *раз більшу, ніж* $\vec{a}$ *та напрям такий самий, як* $\vec{a}$, *якщо* $k > 0$ *і протилежний до* $\vec{a}$, *якщо* $k < 0$.

⬢ **Означення 7.*****Скалярним добутком векторів*** $\vec{a}$ ***та*** $\vec{b}$ *називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута* φ *між ними. Скалярний добуток векторів* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *позначають* $\vec{a} \cdot \vec{b}$, *або* $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Отже, згідно з означенням:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi. \qquad (1)$$

Тепер розглянемо дії з векторами, заданими в координатній формі.

1. ***Правило множення вектора на число.***

Щоб помножити вектор $\vec{a}$ *на число k, треба усі координати вектора помножити на число k, тобто* $k\vec{a} = \left(k\vec{a}_1,\ ka_2, \ldots, ka_n\right)$.

2. ***Правило знаходження алгебраїчної суми векторів.***

Координати алгебраїчної суми скінченної кількості векторів дорівнюють такій же алгебраїчній сумі відповідних координат цих векторів.

Так, у випадку алгебраїчної суми трьох векторів:

$$\vec{a} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right),\ \vec{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right),\ \vec{c} = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right),$$

їх алгебраїчна сума $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ знаходиться за формулою

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\left(a_1-b_1+c_1,\ a_2-b_2+c_2,\dots,a_n-b_n+c_n\right).$$

3. *Знаходження скалярного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.*

Згідно з правилом множення матриць одержимо:

$$a\cdot b=\left(a_1,a_2,\dots,a_n\right)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n, \qquad (2)$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат.

Якщо $\vec{a}=\vec{b}$, тоді кут між ними φ дорівнює нулю, cos0°=1 і з формули (1) випливає, що $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$.

Звідси одержуємо $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, або, враховуючи формулу (2)

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}. \qquad (3)$$

Із формули (1) маємо:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}. \qquad (4)$$

Підставимо формули (2) та (3) у формулу (4), тоді одержимо формулу для знаходження косинуса кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у вигляді:

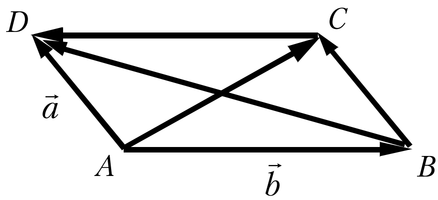
$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}}. \qquad (5)$$

Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, тоді φ = 90°, cos90° = 0 і одержимо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \qquad (6)$$

■ **Приклад.** Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ = (2, 1, 0) та $\vec{b}$ = (0, –2, 1).

Розв'язання. За умовою задачі паралелограм побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (див. мал. 8).



Мал. 8.

Позначимо цей паралелограм *ABCD* ($\vec{a}$ та $\vec{b}$ – довільні):

$$\vec{a}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC};\ \ \vec{b}=\overrightarrow{AB};\ \ -\vec{b}=\overrightarrow{CD};\ \ \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b};\ \ \overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}.$$

Отже, діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (довільних) будуть вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b};$ та $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$. Знайдемо координати цих векторів для заданих векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}=\left(2+0;\ 1+(-2);\ 0+1\right)=\left(2;\ -1;\ 1\right),$$

$$\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}=\left(2-0;\ 1-(-2);\ 0-1\right)=\left(2;\ 3;\ -1\right).$$

Тепер за формулою (5) можна знайти косинус потрібного кута, який позначимо φ:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{2\cdot 2+(-1)\cdot 3+1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{4-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=0.$$

З рівності $\cos\varphi=0$ випливає, що $\varphi=\pi/2$, тобто ці вектори взаємно перпендикулярні.

6.1.5. Розклад вектора за базисом

⬢ **Означення 8.** ***Лінійно залежними*** *називають вектори* $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$, *якщо існує хоча б одне дійсне число* α_i $\left(i=1,\ 2,\ldots,n\right)$, *що не дорівнює нулю і виконується рівність*

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0. \tag{7}$$

⬢ **Означення 9.** ***Лінійно незалежними*** *називають вектори* $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$, *якщо рівність* (7) *виконується тільки тоді, коли усі* $\alpha_i=0$ $\left(i=1,\ 2,\ldots,\ n\right)$.

В системі векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$ число лінійно незалежних векторів дорівнює рангу матриці, яка складена з координат цих векторів.

Дійсно, якщо систему векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$ із простору E_m розглядати як матриці-стовпці з m заданими елементами, тоді рівняння (7) можна записати у вигляді однорідної системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$. Кількість базисних невідомих такої системи дорівнює рангу r основної матриці системи, тобто матриці, складеної іt координат векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$.

Таким чином, серед чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$ існує r не рівних нулю. Згідно з означенням 8 звідси випливає, що вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$ лінійно залежні.

Для лінійно залежних векторів має місце рівність (7), з якої завжди можна один вектор виразити через лінійну комбінацію інших.

Якщо вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$ із простору E_n (кожен з них має n координат) лінійно незалежні, тоді $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, тобто система n однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має тривіальний розв'язок. Але це можливо лише тоді, коли визначник матриці, складеної з координат векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$, не дорівнює нулю.

■ **Приклад 1.** Визначити лінійну залежність або незалежність системи векторів $\vec{a}_1 = (-1, -2, -3)$; $\vec{a}_2 = (7, 8, 9)$; $\vec{a}_3 = (-4, -5, 6)$ та системи векторів $\vec{b}_1 = (3, -2, 4, 1)$; $\vec{b}_2 = \left(-1,\ 2, -1,\ 2\right)$; $\vec{b}_3 = (1, 2, 2, 5)$.

Розв'язання. Спочатку розглянемо систему векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$. Знайдемо ранг матриці, складеної з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці $|A| = -48 + 72 + 105 - 96 + 84 - 45 = 72$ не дорівнює нулю, тому $r(A) = 3$ і вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ лінійно незалежні.

Тепер розглянемо систему векторів $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$. Матриця B складена з координат цих векторів має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця розміру 3×4 має ранг $r(B) = 2$.

Тому вектори $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$ лінійно залежні.

⬢ **Означення 10.** ***Базисом n-вимірного простору*** E_n *називають будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору.*

Довільний вектор $\vec{d}$ n-вимірного простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \ldots,\ \vec{a}_n$ так:

$$\vec{d} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n. \tag{8}$$

Числа $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ називаються ***координатами вектора*** $\vec{d}$ ***у базисі векторів*** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$.

■ **Приклад 2.** Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (5, 4, 3)$, $\vec{a}_2 = (-3, -1, 2)$ та $\vec{a}_3 = (-3, 1, 3)$ утворюють базис в E_3, та розкласти вектор $\vec{d} = (12, 9, 10)$ за цим базисом.

Розв'язання. Кожен із заданих векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ має три координати, тому належить тривимірному простору E_3. Матриця складена з координат цих векторів

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

має визначник $|A| = -15 - 24 - 9 - 9 + 36 - 10 = -31 \neq 0$, тому вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ лінійно незалежні. Згідно з означенням 10 базису, ці вектори утворюють базис в E_3.

Вектор $\vec{d}$ також має три координати, тобто належить E_3. Тому його можна представити у вигляді (8) або

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні. Тому з останньої рівності одержимо

$$\begin{cases} 5x_1 & -3x_2 & -3x_3 & = 12 \\ 4x_1 & -x_2 & +x_3 & = 9 \\ 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 10 \end{cases}.$$

Матричним методом можна знайти розв'язок цієї системи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -9 & 24 & -17 \\ 11 & -19 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ -62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо розклад $\vec{d}$ за базисом

$$\vec{d} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 .$$

Координатами вектора у базисі будуть (3, 2, –1).

◈ **Зауваження.** *Два лінійно залежних вектори задовольняють рівність* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, *тому вони колінеарні. У колінеарних векторів координати пропорційні, тобто*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} .$$

6.1.6. Вправи з векторної алгебри

1. Взяти довільний вектор $\vec{a}$ і побудувати вектори

$$3\vec{a}, \quad -2\vec{a}, \quad \vec{a}/3, \quad \vec{a}/|\vec{a}|, \quad -3\vec{a}_0 .$$

2. Використовуючи два довільних вектора $\vec{a}$ та $\vec{b}$, побудувати

$$\vec{a}+\vec{b}, \; \vec{a}-\vec{b}, \; \vec{b}-\vec{a}, \; 2\vec{a}-3\vec{b} .$$

3. Паралелограм *ABCD* побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ та $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, та $\overrightarrow{MD}$, де *M* – точка перетину діагоналей.

4. При якому розташуванні вектора $\vec{a}$ відносно осі $\vec{l}$ його проекція:

a) додатна; b) від'ємна; c) дорівнює нулю?

5. Знайти координати векторів

$2\vec{a}+5\vec{b}$ та $2\vec{b}-\vec{a}$, якщо $\vec{a}$ = (2, –4, 2), $\vec{b}$ = (–3, 2, –1).

6. Побудувати ромб $ABCD$ і записати вектори, що утворені сторонами ромба та:

a) мають рівні модулі; b) колінеарні; c) рівні між собою.

7. Задані точки $M_1(1, 2, 3)$ та $M_2(3, -4, 6)$. Треба:

a) знайти координати векторів $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ $\vec{b} = \overrightarrow{M_2M_1}$;

b) знайти довжину відрізка M_1M_2 та косинуси кутів α, β, γ, що утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат;

c) знайти орт вектора $\vec{a}$.

8. Задана точка A $(-2, 3, -6)$. Обчислити:

a) координати радіус-вектора $\vec{r}$ точки A;

b) модуль $\vec{r}$ та косинуси кутів між $\vec{r}$ та осями координат.

9. Чому дорівнює скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

a) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні і однаково напрямлені;

b) $\vec{a}$ та $\vec{b}$ протилежні;

c) $\vec{a} \perp \vec{b}$;

d) $\vec{a} = \vec{b}$.

10. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 4$. Обчислити:

a) $\vec{a}\vec{b}$; b) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; c) $|\vec{a} + \vec{b}|$; d) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

11. Задані вектори $\vec{a} = (1, -2, 4)$, $\vec{b} = (3, 0, -1)$. Знайти модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ та його напрямні косинуси.

12. Задані точки $A(-1, 3, -7)$, $B(2, -1, 5)$, $C(0, 1, -5)$. Знайти $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

13. Перевірити колінеарність векторів

$$\vec{a} = (2, -1, 3) \text{ та } \vec{b} = (-6, 3, -9).$$

14. Чи утворюють базис у тривимірному просторі вектори

$$\vec{a} = (1, 2, 2);\ \vec{b} = (1, 2, 3);\ \vec{c} = (1, 2, -2).$$

15. Знайти:

а) усі можливі базиси системи векторів

$$a_1 = (1, 1, 1);\ a_2 = (1, 2, 2);\ a_3 = (1, 1, 3);\ a_4 = (1, 1, -2).$$

b) координати $\vec{a}_4$ у базисі $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$.

Завдання для індивідуальної роботи

Задані чотири вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$. Довести, що вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі та $\left|\vec{d}\right|$.

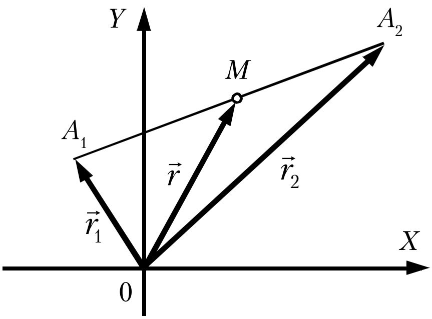
16. $a = (2, 1, 0)$; $b = (4, 3, -3)$; $c = (-6, 5, 7)$; $d = (34, 5, -26)$.
17. $a = (1, 0, 5)$; $b = (3, 2, 7)$; $c = (5, 0, 9)$; $d = (-4, 2, -12)$.
18. $a = (4, 5, 2)$; $b = (3, 0,1)$; $c = (-1, 4, 2)$; $d = (5, 7, 8)$.
19. $a = (3, -5, 2)$; $b = (4, 5, 1)$; $c = (-3, 0, -4)$;$d = (-4, 5, -16)$.
20. $a = (-2, 3, 5)$; $b = (1, -3, 4)$; $c = (7, 8, -1)$; $d = (1, 20, 1)$.
21. $a = (1, 3, 5)$; $b = (0, 2, 0)$; $c = (5, 7, 9)$; $d = (0, 4, 16)$.
22. $a = (2, 4, -6)$; $b = (1, 3, 5)$; $c = (0, -3, 7)$; $d = (3, 2, 52)$.
23. $a = (4, 3, -1)$; $b = (5, 0, 4)$;. $c = (2, 1,2)$; $d = (0, 12, -6)$.
24. $a = (3, 4, -3)$; $b = (-5, 5, 0)$: $c = (2, 1,-4)$; $d = (8, -16, 17)$.
25. $a = (-2, 1, 7)$; $b = (3, -3, 8)$; $c = (5, 4, -1)$; $d = (18, 25, 1)$.

6.1.7. Опуклі множини

У курсі «Математичне програмування» та в деяких економічних дослідженнях використовуються поняття опуклої лінійної комбінації векторів та опуклої множини.

Спочатку ознайомимось з поняттям опуклої лінійної комбінації векторів.

Нехай на площині задані точки A_1 та A_2, що визначають відрізок A_1A_2, зображений на малюнку 9. Знайдемо радіус-вектор $\vec{r}$ довільної точки M цього відрізка через радіуси-вектори $\vec{r}_1$, та $\vec{r}_2$ точок A_1 та A_2.



Мал. 9.

Вектори

$$\overrightarrow{A_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1; \quad \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

колінеарні і однаково напрямлені, тому вони пропорційні. Отже, існує таке t, що:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = t\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right), \quad 0 \le t \le 1.$$

Звідси одержимо:

$$\vec{r} = \left(1-t\right)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2.$$

Якщо позначити $1-t = t_1, \quad t = t_2$, то остання рівність матиме вигляд

$$\vec{r} = t_1\vec{r}_1 + t_2\vec{r}_2, \tag{9}$$

$$t_1 + t_2 = 1, \quad t_1 \ge 0, \quad t_2 \ge 0. \tag{10}$$

⬢ **Означення 11.** ***Опуклою лінійною комбінацією векторів*** $\vec{r}_1$ ***та*** $\vec{r}_2$ *називають комбінацію (9) цих векторні при умові (10).*

Рівняння (9) з умовою (10) можна розуміти як векторне рівняння відрізка A_1A_2.

⬢ **Означення 12.** ***Опуклою лінійною комбінацією k n-вимірних векторів*** $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_k$ *називають комбінацію*

$$\vec{x}=t_1\vec{x}_1+t_2\vec{x}_2+\ldots+t_k\vec{x}_k \qquad (11)$$

при умовах

$$t_1+t_2+\ldots+t_k=1,\ \ t_i\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,k. \qquad (12)$$

■ **Наприклад.** Лінійна комбінація $\frac{1}{3}\vec{x}_1+\frac{5}{12}\vec{x}_2+\frac{1}{4}\vec{x}_3$, має

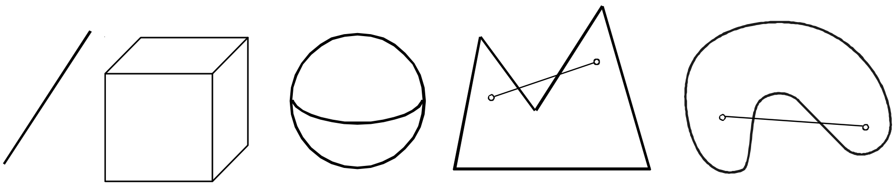
$$t_1=\frac{1}{3}>0,\ \ t_2=\frac{5}{12}>0,\ \ t_3=\frac{1}{4}>0,\ \ t_1+t_2+t_3=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=1,$$

тому вона опукла.

⬢ **Означення 13.** ***Опуклою множиною*** *називають множину, дві довільні точки якої визначають відрізок, що належить цій множині.*

Відрізок, півпряма, пряма, кут менший 180°, коло, півплощина, куб, тетраедр, куля – опуклі множини.

На малюнку 10 зображені різні множини. У випадках a)–c) ці множини опуклі, у випадках d) та e) вони не опуклі.



a) *b)* *c)* *d)* *e)*

Мал. 10.

⬢ **Означення 14.** ***Межевою точкою множини*** *називають таку точку, в околі якої, як завгодно малого радіуса з центром в цій точці, є точки, що належать множині, і є точки, що не належать множині.*

Межею множини називають сукупність всіх її межевих точок.

Множину, якій належить її межа, називають ***замкненою***.

Опуклі замкнені множини бувають обмеженими і не обмеженими. Множина називається ***обмеженою***, якщо існує таке число $c > 0$, що відстань довільної точки M множини від початку координат обмежена, тобто $|OM| < c$.

⬢ **Означення 15.** *Опукла замкнена множина в n-вимірному просторі, що має скінченне число кутових точок, називається **опуклим n-вимірним многогранником**, якщо вона обмежена, і **випуклою n-вимірною многогранною множиною**, якщо вона не обмежена.*

Кутові точки називають ***вершинами***, відрізки, що сполучають дві сусідні вершини, називають ***ребрами***.

⬢ **Означення 16.** ***Опорною прямою многокутника в двовимірному просторі** називається пряма, яка має з многокутником, розташованим по одну сторону від неї, принаймні одну спільну точку.*

Опорна пряма з многокутником може мати спільну вершину або ребро.

Останні поняття узагальнюють на випадок n-вимірного простору.

⬢ **Означення 17.** ***Опорною гіперплощиною опуклої замкненої множини n-вимірного простору** називається гіперплощина, що мас з цією множиною, розташованою по одну сторону від неї, хоча б одну спільну точку.*

Опорна гіперплощина з множиною може мати спільну вершину, ребро або грань.

6.2. Аналітична геометрія

Основні поняття, методи та формули аналітичної геометрії широко застосовуються в багатьох навчальних дисциплінах вищих економічних навчальних закладів, а також в різноманітних економічних задачах. Найчастіше використовуються рівняння прямої та кривих ліній на площині, рівняння площини та прямої в просторі та їх графіки.

6.2.1. Предмет та метод аналітичної геометрії

З шкільного курсу математики відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об'єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції.

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами.

Для застосування методів алгебри до розв'язування задач геометрії встановлюється зв'язок між геометричним об'єктом та числами. Способом встановлення такого зв'язку є метод координат, який першим систематично використовував французький математик *Рене Декарт (1596–1650).*

При цьому методі найпростішому геометричному образу – точці ставиться у відповідність упорядкована множина чисел – координат цієї точки. Більш складні геометричні образи розглядають як множину точок, що задовольняє певним умовам. Ці умови зв'язують координати точок у відповідне рівняння.

Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об'єкта.

Отже, ***основним методом аналітичної геометрії є метод координат.***

6.2.2. Основні та найпростіші задачі аналітичної геометрії

В аналітичній геометрії вивчаються дві основні задачі:

1. *Складання рівняння геометричного об'єкта, який розглядають як геометричне місце певних точок.*

2. *Дослідження властивостей геометричного об'єкта за його рівнянням і побудова його.*

Виділяють також дві найпростіші задачі аналітичної геометрії:

1) знаходження відстані між двома точками;

2) ділення відрізка у заданому відношенні.

Розв'яжемо найпростіші задачі аналітичної геометрії.

Знаходження відстані між двома точками

Нехай задані точки M_1 та M_2. Якщо вони лежать в площині *xOy*, то кожна з них має дві координати $M_1\left(x_1, y_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2\right)$. Якщо вони із тривимірного простору, то кожна з них має три координати $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$.

Якщо ці точки із *n*-вимірного простору, то кожна з них має *n* координат.

Відстань між двома точками M_1 та M_2 дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, координати якого дорівнюють різниці однойменних координат точки M_2 та M_1. Але довжина вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат. Отже, маємо, що відстань між двома заданими точками M_1 та M_2 знаходять за формулами:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}, \qquad (1)$$

коли M_1 та M_2 належить E_2;

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \ldots + \left(z_2 - z_1\right)^2}, \qquad (2)$$

коли $M_1,\ M_2 \in E_3$;

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(y_1 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - x_2\right)^2 + \ldots + \left(y_n - x_n\right)^2}, \qquad (3)$$

коли $M_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ та $M_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \in E_n$.

Ділення відрізка у заданому відношенні

Нехай є заданий відрізок M_1M_2 тобто відомі координати його кінців – точок M_1 та M_2.

Поділити відрізок M_1M_2 у відношенні λ означає, що треба знайти координати точки *M* такої, що виконується відношення

$$\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}} = \lambda .$$

З цієї рівності випливає: $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$.

Остання рівність означає, що вектори $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{MM_2}$ колінеарні, тому їх координати пропорційні, тобто в просторі E_3 маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda ,$$

де $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $M\left(x, y, z\right)$.

З рівності $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ одержимо

$$x - x_1 = \lambda\left(x_2 - x\right) \Rightarrow x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \Rightarrow \left(1 + \lambda\right)x = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогічно з рівності $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$ одержимо $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, а з рівності $\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda$ одержимо $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Отже, в тривимірному просторі координати точки $M(x, y, z)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ, знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (4)$$

У випадку двовимірного простору координата $z_1 = z_2 = 0$ тому координати точки $M(x, y)$ знаходять за першими двома формулами із (4).

Якщо точка M поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тоді вона знаходиться у середині відрізка, $\lambda = 1$ і формули (4) приймають вигляд

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{5}$$

Якщо точки $M_1\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$, $M_2\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right) \in E_n$, тоді координати точки $M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ, знаходять за формулами

$$x_k = \frac{a_k + \lambda b_k}{1 + \lambda},\ \ k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{6}$$

■ **Приклад 1.** Знайти відстань між точками $M_1(6,\ 5,\ -3)$ та $M_2(1, 2, 7)$, а також координати точки M, що поділяє відрізок навпіл.

➯ *Розв'язання.* За формулою (3) знайдемо відстань між точками:
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{M}_1 M_2}\right| = \sqrt{(1-6)^2 + (2-5)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{25 + 9 + 100} = \sqrt{134}.$$

Координати точки M, що поділяє відрізок M_1M_2 навпіл знайдемо за формулами (5):

$$x = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2};\ \ y = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2};\ \ z = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

Отже, шукана точка $M\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$.

6.2.3. Рівняння ліній на площині

⬢ **Означення 1.** ***Рівнянням лінії l на площині*** *називають рівняння із змінними x та y, якому задовольняють координати довільної точки M цій лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить лінії l.*

Математично це означення можна записати так:

$F(x,y)=0$ буде рівнянням лінії l на площині, якщо:

$$F(x,y)=0,\ M(x,y)\in l;$$

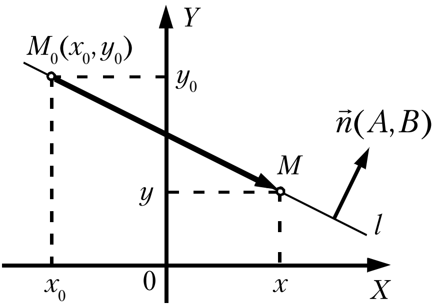
$$F(\tilde{x},\tilde{y})\neq 0,\ M(\tilde{x},\tilde{y})\notin l.$$

Найпростішою лінією на площині є пряма. Щоб скласти рівняння прямої лінії на площині треба якимось способом задати умови, які визначають її положення відносно координатних осей. Способів може бути декілька, тому можна одержувати рівняння прямої різного вигляду.

При складанні рівнянь ліній на площині будемо використовувати апарат векторної алгебри.

6.2.4. Різновиди рівняння прямої на площині

а) *Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}(A,B)$* (див. мал. 1)**.**



Мал. 1.

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ цієї прямої і розглянемо вектор

$$\overline{M_0M} = (x-x_0;\ y-y_0).$$

Вектори $\overline{M_0M}$ та $\vec{n}$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (7)$$

Координати будь-якої точки прямої задовольняють рівняння (7), а координати точки, що не лежить на цій прямій, не задовольняють рівняння (7). Тому рівняння (7) є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B)$.

b) *Загальне рівняння прямої*

✦ **Теорема.** *Будь-яке рівняння першого степеня відносно x та y визначає пряму лінію на площині.*

Доведення. Розглянемо довільне рівняння першого степеня відносно x та y

$$Ax + By + C = 0. \tag{8}$$

Це рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Нехай (x_0, y_0) – один з цих розв'язків. Тоді

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{9}$$

Віднімаючи із рівняння (8) рівняння (9), одержимо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{10}$$

Ліву частину цієї рівності можна розглядати як скалярний добуток векторів $\vec{n} = (A, B)$ та $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_o;\, y - y_o)$. Ці вектори перпендикулярні тому, що їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже, кінці вектора $\overrightarrow{M_0M}$ належать прямій, що перпендикулярна вектору $\vec{n}$ і проходить через точку M_0. Рівняння (8) та (10) еквівалентні, тому рівняння (8) є рівнянням прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n} = (A, B)$, що і треба було довести.

⬢ **Означення 2.** *Рівняння вигляду $Ax + By + C = 0$ називають* ***загальним рівнянням прямої***.

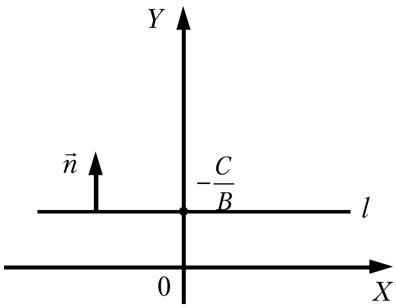
Це рівняння при різних числових значеннях A, B, C визначає будь-яку пряму на площині.

Проведемо дослідження загального рівняння прямої. Нехай в загальному рівнянні (8) довільний член $C = 0$. Тоді рівняння матиме вигляд $Ax + By = 0$. Це рівняння задовольняють координати точки $O(0, 0)$. Тому в цьому випадку ($C = 0$) пряма проходить через початок координат.

Нехай в рівнянні (8) $A = 0$. Тоді рівняння приймає вигляд

$$By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}. \tag{11}$$

У цьому випадку пряма перпендикулярна вектору $\vec{n} = (O, B)$, який є паралельним осі Oy, тому пряма паралельна осі Ox і відтинає від осі Oy відрізок, що дорівнює $-\dfrac{C}{B}$ (див. мал. 2).



Мал. 2.

Якщо в рівнянні (8) коефіцієнт $B = 0$, то воно приймає вигляд

$$Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}. \quad (12)$$

Рівняння (12) є рівнянням прямої, як;і паралельна осі Oy і відтинає від осі Ox відрізок, що дорівнює $-\frac{C}{A}$.

Якщо в загальному рівнянні прямої $A = C = 0$, тоді рівняння приймає вигляд $y = 0$ і є рівнянням осі Ox.

Якщо $B = C = 0$, тоді загальне рівняння приймає вигляд $x = 0$ і буде рівнянням осі Oy.

◈ **Зауваження 1.** *Рівняння прямої у загальному вигляді* (8) *з конкретними числовими значеннями коефіцієнтів A, B, та C використовуються дуже часто.*

Для побудови прямої у системі координат xOy, заданої загальним рівнянням, доцільно знайти точки перетину прямої з осями координат і через ці дві точки провести пряму.

Якщо в рівнянні покласти $x = 0$, то одержимо точку перетину прямої з віссю Oy. При $y = 0$ одержуємо точку перетину прямої з віссю Ox.

Якщо в загальному рівнянні коефіцієнт A, що стоїть при x, дорівнює нулю, то пряма горизонтальна, а при $B = 0$ пряма буде вертикальною.

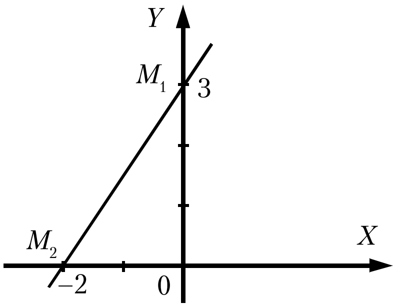
■ **Приклад 2.** Побудувати лінію, рівняння якої $3x - 2y + 6 = 0$.

↳ *Розв'язання.* Задано рівняння першого степеня відносно x та y, тому ця лінія – пряма, її рівняння задано у загальному вигляді. Для побудови цієї прямої знайдемо точки її перетину з осями координат.

При $x = 0$ маємо

$$-2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3.$$

При $y = 0$ маємо $3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$. Отже, пряма проходить через точки $M_1(0, 3)$ та $M_2(-2, 0)$.



Мал. 3.

Через ці дві точки можна провести лише одну пряму (див. мал. 3).

◈ **Зауваження 2.** Якщо дві прямі задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

та

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тоді умова їх паралельності має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{13}$$

а умовою їх перпендикулярності буде

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{14}$$

Косинус кута між прямими знаходять за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{15}$$

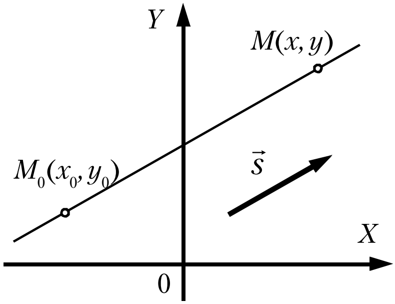
Відстань d від заданої точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, що задана загальним рівнянням, знаходять за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{16}$$

c) ***Канонічне рівняння прямої***

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{s} = \left(l, m\right)$ (див. мал. 4).

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на прямій і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0, y - y_0\right)$. Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{s}$ паралельні, тому їх координати пропорційні, тобто



Мал. 4.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (17)$$

Якщо точка $M(x, y)$ не лежить на прямій, тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{s}$ не будуть паралельними і рівність (17) не виконується.

Отже, рівність (17) є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{s}=(l,m)$.

Рівняння вигляду (17) називають ***канонічним рівнянням прямої***, а вектор $\vec{s}=(l,m)$ – ***напрямним вектором прямої***.

d) Якщо напрямним вектором прямої взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ тоді одержимо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$ вигляду

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (18)$$

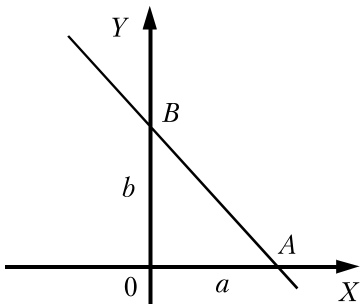
e) З рівняння (18) легко отримати рівняння прямої вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (19)$$

яке називають ***рівнянням прямої у відрізках,*** оскільки пряма відтинає від координатних осей відрізки a та b (див. мал. 5).

Дійсно, пряма проходить через точки $A(a, 0)$ та $B(0, b)$. Підставивши координати цих точок у рівняння (18), одержимо

$$\frac{x-0}{a-0}=\frac{y-b}{0-b}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$



Мал. 5.

◈ **Зауваження 3.** Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}$$

та

$$\frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2},$$

то умовою їх перпендикулярності буде

$$l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0. \qquad (20)$$

Умова паралельності прямих має вигляд:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}. \qquad (21)$$

Косинус кута φ між цими прямими знаходять за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}. \qquad (22)$$

f) ***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

Нехай α кут нахилу прямої до осі Ox, тобто кут, на який потрібно повернути вісь Ox, щоб вона співпала з прямою.

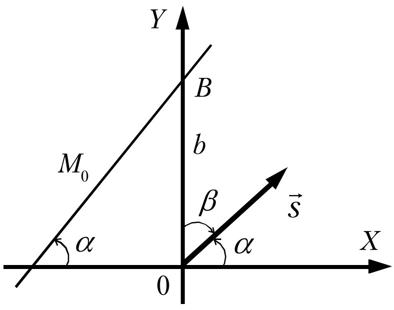
Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутом нахилу α (див. мал. 6).

Нехай напрямним вектором буде $\vec{s}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. Але

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, тому $\cos\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, тому $\vec{s}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

Використовуючи канонічне рівняння прямої (17), одержимо:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}\Rightarrow y-y_0=\operatorname{tg}\alpha\cdot(x-x_0).$$



Мал. 6.

Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = k$, тоді остання рівність буде виглядати так:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (23)$$

Це рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k.

Якщо в рівнянні (23) розкрити дужки і позначити $y_0 - kx_0 = b$, то рівняння (23) прийме вигляд:

$$y = kx + b. \quad (24)$$

При $x = 0$ ця пряма перетинає вісь Oy в точці $B(0, b)$.

Рівняння (24) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*** $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут нахилу прямої до осі Ox, b – відрізок, який відтинає пряма від осі Oy.

◈ **Зауваження 4.** *Рівняння з кутовим коефіцієнтом вигляду* (24) *часто використовується в економічних задачах, тому треба вміти будувати пряму в системі xOy по її рівнянню з кутовим коефіцієнтом.*

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$y = k_1x + b \quad \text{та} \quad y = k_2x + b_2,$$

тоді кут φ між цими прямими знаходять за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (25)$$

умова паралельності прямих має вигляд:

$$k_1 = k_2, \quad (26)$$

а ***умова перпендикулярності*** виглядає так:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \text{або} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (27)$$

◈ **Зауваження 5.** *Рівняння прямої у різних формах дуже часто використовуються, тому для більш глибокого їх засвоєння доцільно усі поняття, позначення та формули систематизувати, наприклад, таким чином, як у таблиці 4, що додається в кінці цього підручника.*

6.2.5. Криві лінії другого порядку

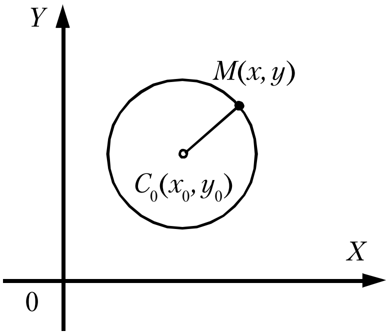
⬢ **Означення 3.** ***Кривими лініями другого порядку*** *називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня.*

а) ***Рівняння кола***

⬢ **Означення 4.** ***Колом*** *називають геометричне місце точок, рівновіддалених від фіксованої точки – центра кола.*

Знайдемо рівняння кола.

Позначимо $C(x_0, y_0)$ – центр кола радіуса R. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ кола (див. мал. 7).



Мал. 7.

Тоді, за означенням кола, $\left|\overrightarrow{CM}\right| = R$. Але $\overrightarrow{CM} = (x - x_0, y - y_0)$.

Тому

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Звідси одержимо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (28)$$

Цю рівність задовольняють координати довільної точки $M(x, y)$, що належить колу, і не задовольняють координати точки, що не належить колу.

Отже, рівність (28) є рівнянням кола, яке називають ***канонічним рівнянням кола***.

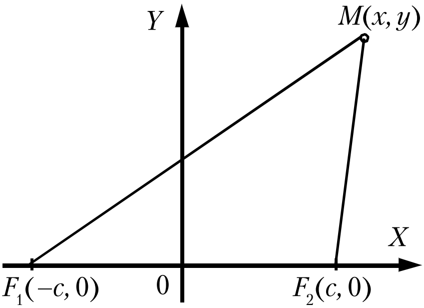
Якщо центр кола знаходиться в точці 0(0, 0). тоді рівняння кола спрощується і приймає вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (28')$$

b) ***Рівняння еліпса***

⬢ **Означення 5.** ***Еліпсом*** *називають геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) дорівнює постійній величині 2a.*

Знайдемо рівняння еліпса. Позначимо через F_1 та F_2 фокуси еліпса. Вісь абсцис Ox проведемо через фокуси F_1 та F_2, а вісь Oy



Мал. 8.

проведемо через середину відрізка $[F_1, F_2]$ перпендикулярно до осі Ox (див. мал. 8).

Позначимо відстань між фокусами $2c$. У такій системі координат $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$, $2a > 2c$. Візьмемо довільну точку $M(x,\ y)$ еліпса. За означенням 5 еліпса маємо

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

але

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y};\quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ ,$$

тому одержуємо рівняння еліпса вигляду:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Будемо спрощувати це рівняння. Перенесемо один корінь у праву частину рівняння та піднесемо до квадрату обидві частини:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2\,.$$

Знову піднесемо до квадрату обидві частини, тоді одержимо

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $a^2\left(a^2 - c^2\right)$ і одержимо:

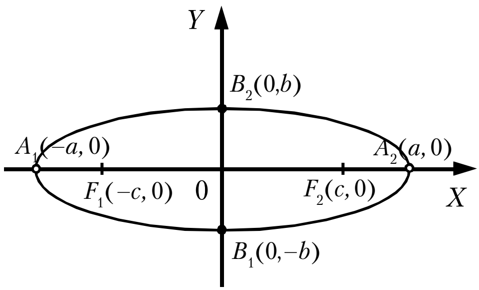
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1\,.$$

Оскільки $a^2 > c^2$, то можна позначити

$$b^2 = a^2 - c^2\,, \tag{29}$$

тоді рівняння еліпса матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{30}$$



Мал. 9.

Рівняння (30) називають ***канонічним рівнянням еліпса***. Дослідження рівняння еліпса дозволяє зробити висновок, що параметри рівняння a та b дорівнюють півосям еліпса, що розташовані на осях координат Ox та Oy, відповідно. Еліпс має форму, зображену на мал. 9.

с) ***Рівняння гіперболи***

⬢ **Означення 6.** ***Гіперболою*** *називають геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) дорівнює постійній величині 2a.*

Виведення рівняння гіперболи здійснюється аналогічно до виведення рівняння еліпса. Таким же чином позначаються фокуси F_1, F_2, та довільна точка M гіперболи. За означенням гіперболи маємо;

$$\left\| F_1M \right| - \left| F_2M \right\| = 2a \Rightarrow \left| F_1M \right| - \left| F_2M \right| = \pm 2a .$$

Перехід в останній рівності до координатної форми та алгебраїчні перетворення дозволяють одержати рівняння гіперболи вигляду:

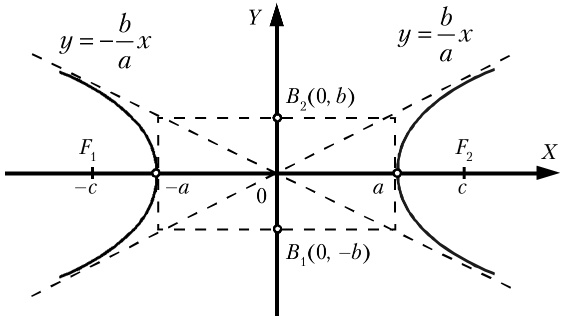
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 .$$

Для гіперболи $c^2>a^2$, тому $b^2=c^2-a^2$ і рівняння гіперболи буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{31}$$

який називають ***канонічним рівнянням гіперболи***.

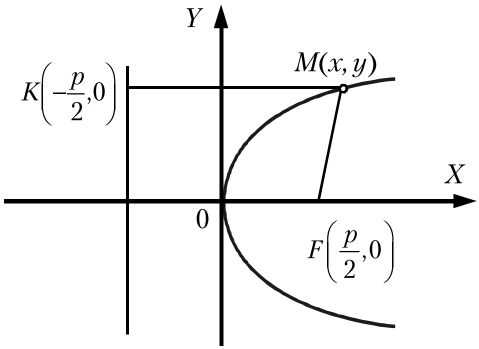
Дослідження рівняння (31) дозволяє одержати властивості гіперболи та її вигляд (див. мал. 10).



Мал. 10.

d) ***Парабола та її рівняння***

⬢ **Означення 7.** ***Параболою*** *називають геометричне місце точок, відстань яких до заданої прямої (директриси) та заданої точки (фокуса) рівні.*



Мал. 11.

Для одержаним рівняння параболи у системі координат xOy вісь Ox побудуємо перпендикулярно до директриси і так, щоб вона проходила через фокус параболи – точку F. Початок координат візьмемо посередині між фокусом та директрисою (див. мал. 11).

Відстань між фокусом F та директрисою позначимо p.

Тоді $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, рівнянням директриси буде $x = -\frac{p}{2}$. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ параболи.

Згідно з означенням параболи маємо:

$$|FM| = |KM|.$$

У координатній формі ця рівність має вигляд:

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\ .$$

Ця рівність є рівнянням параболи. Піднесемо до квадрату обидві частини і, спростивши одержаний вираз, одержимо рівняння вигляду:

$$y^2 = 2px, \tag{32}$$

яке називають ***канонічним рівнянням параболи***.

◈ **Зауваження 6.** *Парабола* $y^2=-2px$ *розташована зліва від осі* Oy, *симетрично з параболою* $y^2=2px$.

Рівняння $x^2 = 2qy$ визначає параболу, віссю симетрії якої буде вісь Oy, а рівняння директриси має вигляд: $y=-\frac{q}{2}$.

◈ **Зауваження 7.** *Якщо задано алгебраїчне рівняння другого степеня вигляду*

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0, \tag{33}$$

то для визначення геометричного образу, який описує це рівняння, треба звести це рівняння до одного з канонічних рівнянь кривих ліній другого порядку шляхом виділення повних квадратів.

■ **Приклад 3.** Визначити лінію, рівняння якої

$$2x^2 - 8x + y^2 + 6y + 1 = 0,$$

та побудувати її.

↳ *Розв'язання.* Спочатку об'єднаємо члени рівняння, які містять x та y окремо, тоді одержимо:

$$\left(2x^2-8x\right)+\left(y^2+6y\right)+1=0\,.$$

Рівняння не зміниться, якщо ми у першу дужку додамо та віднімемо 8, а в другій дужці 9. Тоді матимемо.

$$\left(2x^2-8x+8-8\right)+\left(y^2+6y+9-9\right)+1=0\,.$$

Виділимо повні квадрати:

$$2(x-2)^2+(y+3)^2-8-9+1=0 \Rightarrow 2(x-2)^2+(y+3)^2=$$

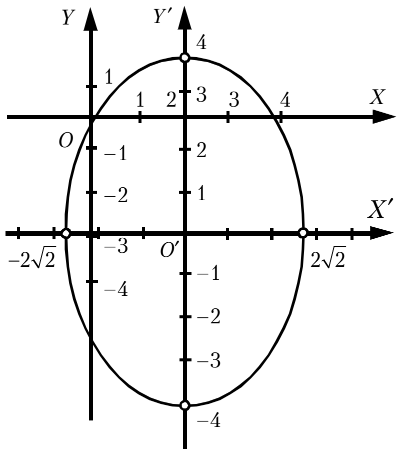
$$=16 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y+3)^2}{16}=1. \qquad (34)$$

Позначимо

$$\begin{cases} x-2=x' \\ y+3=y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-3 \end{cases}.$$

Якщо ми побудуємо нову систему координат $x'O'y'$, початок якої в точці $O'(2,-3)$, а осі $O'x'$ та $O'y'$ паралельні осям старої системи *Ox* та *Oy*, тоді у новій системі $x'O'y'$ координат рівняння (34) має вигляд:

$$\frac{(x')^2}{8}+\frac{(y')^2}{16}=1.$$



Мал. 12.

Це є канонічне рівняння еліпса з півосями $a=2\sqrt{2}\approx 2{,}82$, b = 4.

Отже, задане рівняння є рівнянням еліпса, який можна зобразити у системі координат (див. мал. 12).

◈ **Зауваження 8.** *Для зведення рівняння вигляду* $Ax^2 + By^2 + Cx^2 + F =$ $= 0$ *до канонічного рівняння треба мати на увазі таке:*

a) якщо коефіцієнти A та B одного знаку і рівні, то це буде рівняння кола;

b) якщо A та B одного знаку, але не рівні, то це буде рівняння еліпса;

c) якщо A та B різних знаків, то це буде рівняння гіперболи;

d) якщо A = 0 або B **=** *0, то це буде рівняння параболи.*

6.2.6. Задачі економічного змісту

а) ***Дослідження впливу розширення тракторного парку на зростання врожаю зернових***

В 1980 р. держава мала 108,5 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 8,5 ц зернових.

В 1995 р. держава мала 510 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 21 ц зернових.

Позначимо час – x, кількість тисяч тракторів – y; врожай, який одержали з одного гектара, позначимо – z (центнерів).

За умовою задачі маємо чотири точки:

$$A(x_1, y_1): \ x_1 = 1980, \ y_1 = 108{,}5;$$

$$B(x_2, y_2): \ x_2 = 1995, \ y_2 = 510;$$

$$M_1(x_1, z_1): \ x_1 = 1980, \ z_1 = 8{,}5;$$

$$M_2(x_2, z_2): \ x_2 = 1995, \ z_2 = 21.$$

Знайдемо рівняння прямих – графіків зростання тракторного парку та врожайності зернових з одного гектара за 1980–1995 роки у вигляді $y = kx + b$ – рівняння прямої з куто-вим коефіцієнтом.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, одержимо:

$$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{y-108{,}5}{510-108{,}5} \Rightarrow \frac{x-1980}{15} = \frac{y-108{,}5}{401{,}5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 401{,}5x - 401{,}5 \cdot 1980 = 15y - 15 \cdot 108{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y = 15 \cdot 108{,}5 + 401{,}5 \cdot x - 401{,}5 \cdot 1980 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y = 401{,}5x - 793342{,}5 \Rightarrow y = \frac{401{,}5}{15}x - \frac{793342{,}5}{15}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання тракторного парку буде:

$$k_1 = \frac{401{,}5}{15} \approx 26{,}77.$$

Використовуючи точки M_1 та M_2, аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання врожайності зернових з одного гектара.

$$\frac{x-1980}{1995-1980}=\frac{z-8{,}5}{21-8{,}5}\Rightarrow\frac{x-1980}{15}=\frac{z-8{,}5}{12{,}5}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 12{,}5x - 1980\cdot 12{,}5 = 15z - 8{,}5\cdot 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5z = 12{,}5x\cdot 12{,}5\cdot 1980 - 8{,}5\cdot 15 \Rightarrow 15z = 12{,}5\text{x} - 24877{,}5.$

Отже, її кутовий коефіцієнт буде:

$$k_2=\frac{12{,}5}{15}\approx 0{,}83.$$

З умов задачі можна зробити висновок, що при зростанні тракторного парку врожайність зернових з 1 га зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка зростання кількості тракторів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання врожайності зернових.

Таким чином, зростання тракторного парка сприяє зростанню врожайності зернових, але не пропорційно.

Зростання кількості тракторів – зростання енергоозброєності сільського господарства не є основним факторам у підвищенні ефективності сільського господарства. Необхідно враховувати вплив інших факторів, наприклад, якості насіння, культуру агротехніки.

b) *Визначення рентабельності транспортного постачання*

Транспортні витрати перевезення одиниці вантажу (y) залізничним та автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами:

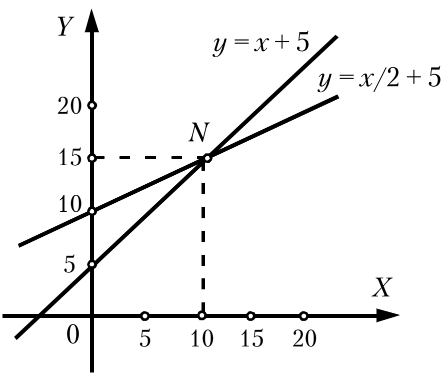
$$y=\frac{1}{2}x+10 \quad \text{та} \quad y=x+5,$$

де x вимірюється десятками км.

Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення (див. мал. 13).

Графіки прямих перетинаються в точці $N(10,\ 15)$. Для перевірки координат точки N знайдемо точку перетину аналітично:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 20 \\ x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow y = 15;\ x = 10\ .$$



Мал. 13.

Графіки витрат дозволяють зробити висновок:

a) коли $x \in [0,10)$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати у перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

b) коли $x \in [10,\infty)$, тобто $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

c) ***Визначення витрат палива судном на підводних крилах***

Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна.

Треба знайти аналітичну залежність між витратами палива m та швидкістю судна V, враховуючи, що при V = 40 км/год витрачено 20 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

✎ *Розв'язання.* Згідно з умовою задачі шукану залежність можна записати у вигляді:

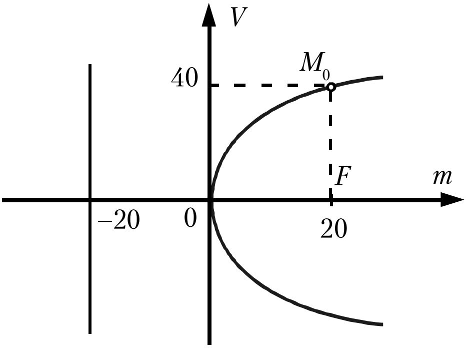
$$V^2 = km\ ,$$

де k – деякий коефіцієнт пропорційності.

Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дозволяє зробити висновок, що витрати палива змінюються за параболічним законом. При m = 0 швидкість V = 0, тобто парабола проходить через початок системи координат mOV. Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $M_0(20, 40)$, тому її координати задовольняють рівняння параболи:

$$40^2 = k \cdot 20 \Rightarrow k = 80.$$

Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкістю судна буде:



Мал. 14.

$$V^2 = 80 \cdot m \Rightarrow m = \frac{V^2}{80}.$$

Графік цієї залежності зображено на малюнку 14. З останньої формули випливає, що при швидкості 60 км/год витрати палива (у літрах) за годину повинні дорівнювати

$$m = \frac{60^2}{80} = 45 \text{ (літрів)}.$$

d) ***Рівновага доходу та збитків***

Компанія виробляє вироби *A* та продає їх по 2 долари за кожний. Керівництво компанії встановило, що сума Y_B загальних щотижневих витрат (в доларах) на виготовлення виробів *A* кількістю *x* (тисяч одиниць) має таку закономірність

$$Y_B = 1000 + 1300x + 100x^2.$$

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів *A*, яка забезпечує рівновагу витрат та доходу.

↬ *Розв'язання.* Доход від продажу *x* тисяч виробів *A* вартістю 2 долари за кожний буде:

$$Y_Д = 2000x.$$

Для рівноваги доходу та витрат треба щоб виконувалась рівність:

$$Y_B = Y_Д \Rightarrow 1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 5.$$

Отже, ця задача має дві точки рівноваги. Компанія може виробляти 2000 ($x = 2$) виробів *A* з доходом та витратами 4000 доларів, або 5000 ($x = 5$) виробів з доходом та витратами 10000 доларів.

Розглянемо на цьому прикладі можливості компанії. Позначимо щотижневий прибуток P, тоді

$$P = Y_Д - Y_В = 2000x - \left(1000 + 1300x + 100x^2\right) =$$

$$= -1000 + 700x - 100x^2 = -100\left(x-2\right)\left(x-5\right).$$

З останньої рівності випливає, що при $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Коли $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ і маємо $P > 0$, тобто компанія одержить прибуток. При інших значеннях x, тобто коли $x \notin [2, 5]$ будемо мати $P < 0$ – компанія несе збитки.

6.2.7. Рівняння прямої та площини в просторі

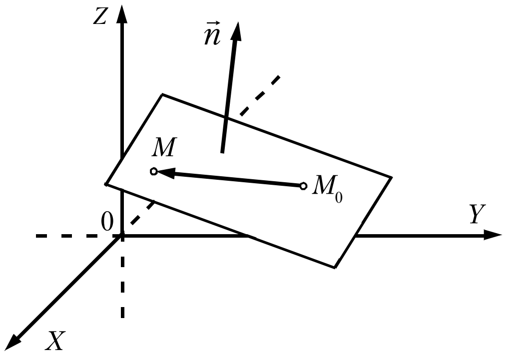
а) ***Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданому вектору*** $\vec{n} = (A, B, C)$ (мал. 15).

Візьмемо довільну точку площини $M(x, y, z)$ і побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{n}$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже, маємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (35)$$



Мал. 15.

Координати довільної точки M, що лежить в площині, задовольняють рівність (35), а координати точки M, що не лежить в площині, не задовольняють рівність (35). Отже, рівність (35) є рівнянням площини в просторі.

b) ✦ Теорема. ***Будь-яке рівняння першого степеня відносно x, y, z визначає площину.***

Доведення. Розглянемо довільне рівняння першого степеня відносно x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{36}$$

Це рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Нехай (x_0, y_0, z_0) один з цих розв'язків. Тоді маємо:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{37}$$

Різниця рівнянь (36) та (37) має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{38}$$

Ліву частину цієї рівності можна розглядати як скалярний добуток векторів $\vec{n} = (A, B, C)$ та $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

З рівності нулю скалярного добутку випливає, що $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$. Отже, кінці вектора $\overrightarrow{M_0M}$ лежать в площині, перпендикулярній $\vec{n}$ і яка проходить через точку M_0, тобто рівняння (38), а значить і (36), визначає площину перпендикулярну вектору $\vec{n}$.

⬢ **Означення 8.** *Рівняння вигляду* (36) *називають* ***загальним рівнянням площини в просторі.***

Дослідження загального рівняння площини дозволяє визначити її положення в просторі. Так, рівняння вигляду

$$Ax + By + Cz = 0 \quad (D = 0)$$

визначає площину, що проходить через початок координат; рівняння вигляду $Ax + By = 0$ в просторі визначає площину, яка паралельна осі Oz і проходить через початок координат; рівняння $x = 0$ визначає площину yOz; $y = 0$ визначає площину xOz; $z = 0$ визначає площину xOy.

■ **Приклад 1.** Задані точки $M_0(4, 6, 1)$, $M_1(1, 0, -2)$, $M_2(4, -2, 4)$. Треба:

a) скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно відрізку M_1M_2;

b) одержане рівняння звести до загального вигляду;

c) побудувати цю площину в системі $Oxyz$.

🖎 *Розв'язання.*

а) Спочатку знайдемо координати вектора:

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (4 - 1, -2 - 0, 4 - (-2)) = (3, -2, 6).$$

Підставивши координати вектора $\vec{n}$ та точки M_0 в рівняння (35), одержимо:

$$3(x - 4) - 2(y - 6) + 6(z - 1) = 0.$$

b) В одержаному рівнянні розкриємо дужки, тоді

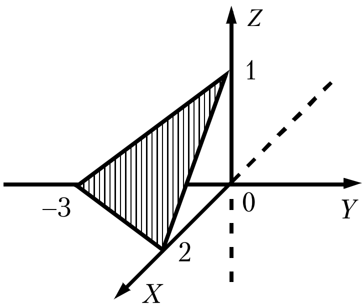
$$3x - 12 - 2y + 12 + 6z - 6 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 6z - 6 = 0.$$

с) Для побудови площини в просторі знайдемо точки перетину площини з осями координат, тоді побудуємо площину по 3-х точках:

При $x = 0$, $y = 0$ маємо $6z - 6 = 0 \Rightarrow z = 1$.

При $x = 0$, $z = 0$ маємо $-2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -3$.

При $y = 0$, $z = 0$ маємо $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$.



Мал. 16.

Побудуємо в системі координат ці три точки (див. мал. 16).

Задана рівнянням площина проходить через точки $M_3(0, 0, 1)$, $M_4(0, -3, 0)$, $M_5(2, 0, 0)$ і на мал. 16 заштрихована.

◈ **Зауваження 1.** *Рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ *знаходять за формулою:*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (39)$$

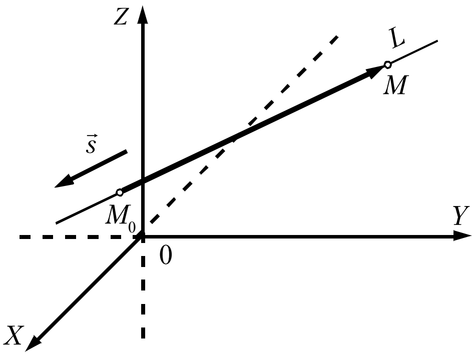
с) *Канонічні та параметричні рівняння прямої в просторі*

Нехай здана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій L та вектор $\vec{s} = (l, m, p)$ паралельний прямій. Знайдемо рівняння цієї прямої.

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ на прямій і розглянемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\right)$$

(мал. 17).



Мал. 17.

Вектори $\overline{M_0M}$ та $\vec{s}$ паралельні, тому їх координати пропорційні,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}. \quad (40)$$

Якщо точка M не належить прямій L, тоді координати цих векторів не пропорційні і (40) не має місця. Отже, співвідношення (40) є рівняннями прямої L, які називають ***канонічними рівняннями прямої***. Вектор $\vec{s}$ називають ***напрямним вектором прямої***.

Позначимо через t загальне значення відношень канонічних рівнянь прямої L:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}=t\,.$$

Звідси одержуємо:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt\,. \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad (41)$$

Ці рівняння називають ***параметричними рівняннями прямої в просторі***, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s}=(l,m,p)$.

В рівняннях (41) t розглядають як параметр, що довільно змінюється в інтервалі $(-\infty,\infty)$. Координати x, y, z точки M залежать від t, тому при зміні t точка $M(x, y, z)$ рухається по прямій L.

d) ***Рівняння прямої, що проходить через дві точки***

Нехай на прямій задані дві точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Знайдемо рівняння такої прямої. Нехай напрямним вектором прямої буде вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$. Тоді, підставляючи координати вектора $\vec{s}$ в рівняння (40), одержимо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \tag{42}$$

яке називають ***рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*** M_1 ***та*** M_2.

■ **Приклад 2**. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3, -5, 2)$ та $M_2(1, -1, -4)$.

↬ *Розв'язання.* За формулами (42) маємо:

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y+5}{-1+5} = \frac{z-2}{-4-2} \Rightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-6}$$

або

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

це канонічні рівняння прямої.

Для одержання параметричних рівнянь цієї прямої використовуємо формули (41), тоді:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 - 2t \qquad t \in \left(-\infty, \infty\right). \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

d) ***Деякі важливі формули***

Вкажемо деякі формули, які можуть бути корисними при розв'язуванні багатьох задач і які доведені у більш повному курсі аналітичної геометрії.

1. Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, знаходять за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{43}$$

2. Косинус кута φ між двома площинами, що задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, знаходять за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{44}$$

Умова паралельності площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{45}$$

Умова перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{46}$$

3. Косинус кута φ між двома прямими, заданими канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ та } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

знаходять за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}. \tag{47}$$

Умова паралельності прямих має вигляд:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{48}$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2 = 0. \tag{49}$$

■ **Приклад 3.** Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ та площини $2x + y + z - 6 = 0$.

Розв'язання. Шукані координати точки перетину (x, y, z) повинні задовольняти рівнянням прямої та площини. Параметричними рівняннями заданої прямої будуть

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = 4+2t \end{cases}. \tag{50}$$

Підставимо ці x, y та z в рівняння площини:

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0 \Rightarrow 5t + 5 - 0 \Rightarrow t = -1.$$

Підставивши знайдене t в формули (50), одержимо координати точки перетину:

$$x = 2 - 1 = 1; \quad y = 3 - 1 = 2; \quad z = 4 - 2 = 2.$$

Отже, точкою перетину буде $M(1, 2, 2)$.

6.2.8. Поверхні другого порядку

⬢ **Означення 9.** *Поверхні в просторі називаються* ***поверхнями другого порядку****, якщо їх рівняння містять хоча б одну з координат x, y, z у другому степені.*

Вкажемо визначення та рівняння деяких поверхонь в просторі.

а) *Сфера та її рівняння*

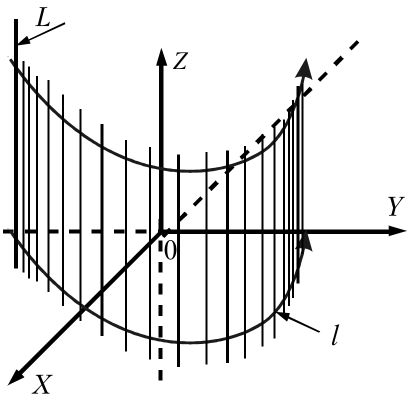
⬢ **Означення 10.** ***Сферою*** *називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки – центра сфери.*

Якщо центром сфери є $C\left(x_0, y_0, z_0\right)$, а радіус R**,** тоді рівнянням сфери буде:

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2. \tag{51}$$

⬢ **Означення 11.** *Поверхня називається* ***циліндричною****, якщо вона утворена прямою (твірна), паралельною до заданої прямої L і яка проходить через задану лінію l (напрямна лінія).*

Приклад циліндричної поверхні зображено на мал. 18.



Мал. 18.

Якщо твірна циліндричної поверхні паралельна осі *Oz*, а напрямна *l* лежить в площині *xOy* і задана рівняннями

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}, \qquad (52)$$

тоді рівнянням циліндричної поверхні буде

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z\in(-\infty;\infty) \end{cases}. \qquad (53)$$

Рівняння $F(x, z)= 0$ визначає циліндричну поверхню з твірною, що паралельна *Oy*, при $F(y, z) = 0$ твірна паралельна осі *Ox*.

Наприклад, рівняння $4x^2+3y^2=1$ визначає еліптичний циліндр, твірна якого паралельна *Oz*.

Рівняння $\frac{x^2}{8}-\frac{z^2}{4}=1$ визначає гіперболічний циліндр, твірна якого паралельна *Oy*.

Рівняння $y^2 = 8z$ визначає в просторі параболічний циліндр, твірна якого паралельна осі *Ox*.

b) *Поверхні обертання*

Правило. *Для одержання рівняння поверхні обертання навколо однієї з координатних осей треба:*

1) в рівнянні лінії обертання залишити незмінною координату, однойменну з віссю обертання;

2) другу координату рівняння лінії обертання замінити на плюс-мінус квадратний корінь із суми квадратів двох інших просторових координат.

Наприклад, нехай обертається пряма $z = ky$ навколо осі *Oy*. Згідно з правилом в рівнянні $z = ky$ залишимо незмінною координату *y*, а замість *z* підставимо $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Таким чином, одержимо рівняння конуса:

$$\pm\sqrt{x^2+z^2}=ky \text{ або } x^2+z^2-k^2y^2=0.$$

Підкреслимо, що наведене правило дозволяє одержати рівняння багатьох важливих поверхонь.

$\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – рівняння еліпсоїда обертання навколо Oz;

$\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – рівняння гіперболоїда обертання навколо Oz;

$x^2+y^2=2qz$ – рівняння параболоїда обертання навколо Oz.

6.2.9. Вправи до розділу 6.2

1. Визначити, які з точок $M_1(3, 1)$, $M_2(2, 3)$, $M_3(6, 3)$, $M_4(-3, 3)$, $M_5(3, -1)$, $M_6(-2, 1)$ належать прямій $2x - 3y - 3 = 0$ і які не належать їй.

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-1, 3)$:
a) паралельно прямій $x - 5y + 2 = 0$;
b) перпендикулярно до прямої $3x - y + 4 = 0$.

3. Знайти точки перетину прямої $2x - 3y - 12 = 0$ з осями координат, записати рівняння цієї прямої у відрізках та побудувати її.

4. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(2,-3)$:
a) паралельно осі Ox;
b) паралельно осі Oy;
c) перпендикулярно до прямої $x - 3y - 7 = 0$.

5. Довести, що пряма $2x - 3y + 2 = 0$ паралельна прямим:

a) $6x - 9y + 5 = 0$; b) $y=\dfrac{2}{3}x$; c) $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{2}$;

та перпендикулярна прямим:

a) $3x + 2y - 5 = 0$; b) $y=\dfrac{-3}{2}x+6$; c) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-3}$.

6. Знайти відстань між паралельними прямими:
a) $x - 2y + 6 = 0$ та $2x - 4y + 7 = 0$;
b) $2x - 3y + 2 = 0$ та $6x - 9y + 5 = 0$;
c) $2x - 3y + 2 = 0$ та $y = \frac{2}{3}x$.

7. Знайти кут між прямими:
a) $5x - y + 7 = 0$ та $2x - 3y + 1 = 0$;
b) $2x + y = 0$ та $y = 3x - 4$;
c) $3x - 2y + 7 = 0$ та $2x + 3y - 3 = 0$;
d) $x - 2y - 4 = 0$ та $2x - 4y + 3 = 0$;
e) $y = -2x + 3$ та $y = 3x + 5$.

8. Визначити при яких a та b прямі $ax - 2y - 1 = 0$ та $6x - 4y - b = 0$:
a) мають одну спільну точку; b) паралельні; c) співпадають?

9. Скласти рівняння висот трикутника з вершинами $A(0, -1)$, $B(1, -3)$ та $C(-5, 2)$.

10. Побудувати на площині область розв'язків системи лінійних нерівностей:

a) $\begin{cases} x + 4y \le 53 \\ x - y \le 3 \\ 7x + 3y \ge 71 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x - 5y \ge 17 \\ x + 2y \le 34 \\ -4x + 9y \ge 17 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 11x - 3y \ge 24 \\ 9x + 4y \le 110 \\ -2x - 7y \ge 15 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x - y \ge 6 \\ 9x + 8y \le 157 \\ -3x + 11y \ge 16 \end{cases}$.

11. Знайти точки рівноваги та області прибутку і збитків компанії, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю p гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність:
a) $p = 4$ $y_в = 2{,}8x + 600$;
b) $p = 7$ $y_в = 1000 + 5x$;
c) $p = 10$ $y_в = 80 - 4x + 0{,}1x^2$;
d) $p = 10$ $y_в = 2000 + 100\sqrt{x}$.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(4,\ 6,\ 1)$, $M_2(1,\ 0,\ -2)$, $M_3(4,\ -2,\ 4)$, привести його до загального вигляду. Побудувати цю площину.

13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2,\ 1,\ -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\ = (1,\ -2,\ 3)$.

14. Побудувати площини, що задані рівняннями:

a) $2x - y - 2z + 5 = 0$; b) $x + 5y - z = 0$;

c) $3x - 2y - 2 = 0$;d) $5y - 3z = 0$; e) $x + 2 = 0$.

15. Виявити паралельність пар площин:

a) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ та $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

b) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ та $2x + y + 2z - 1 = 0$;

c) $x - 3z + 2 = 0$ та $2x - 6z - 7 = 0$.

а також перпендикулярність пар площин:

a) $3x - y - 2z = 0$ та $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

b) $2x + 3y - z - 3 = 0$ та $x - y - z + 5 = 0$;

c) $2x - 5y + z = 0$ та $3x - y - 5z + 1 = 0$.

16. Знайти координати фокуса, рівняння директриси, а також побудувати параболу:

a) $y^2 = -12x$; b) $x^2 = 4y$; c) $x^2 = -5y$; d) $y^2 = 6x$.

17. Визначити координати вершин, фокусів, а також побудувати гіперболу:

a) $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$; b) $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$; c) $4x^2 - 9y^2 - 25 = 0$.

18. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо відомо:

a) парабола розташована у правій півплощині симетрично відносно осі Ox і її параметр $p = 3$;

b) парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно осі Ox і її параметр $p = 0{,}5$;

c) парабола розташована у верхній півплощині симетрично відносно осі Oy і її параметр $p = \dfrac{1}{4}$. Побудувати ці параболи, їх фокуси та директриси.

19. Скласти канонічне рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо:

a) півосі еліпса дорівнюють 5 та 2;

b) відстань між фокусами дорівнює 6, а більша вісь 10;

c) еліпс проходить через точки $M_1\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ та $M_2\left(-2, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

20. Побудувати у системі координат піраміду $M_1M_2M_3M_4$:

a) $M_1(3, 1, 4)$ $M_2(-1, 6, 1)$ $M_3(-1, 1, 6)$ $M_4(0, 4, -1)$;
b) $M_1(6, 6, 2)$ $M_2(5, 4, 7)$ $M_3(2, 4, 7)$ $M_4(7, 3, 0)$;
c) $M_1(7, 5, 3)$ $M_2(9, 4, 4)$ $M_3(4, 5, 7)$ $M_4(7, 9, 6)$.

6.2.10. Завдання для індивідуальної роботи з аналітичної геометрії

1. Використовуючи задані координати вершин трикутника ABC побудувати трикутник та скласти чи знайти:

a) довжину сторони AC;
b) загальне рівняння AC;
c) відстань точки B від AC;
d) рівняння медіани сторони BC у канонічній формі;
e) кут ACB:
f) рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно AC (N – номер варіанта).

N	**Координати**		
	A	***B***	***C***
1.	$(N; N+1)$	$(N+2; N+6)$	$(N+3; N+5)$
2.	$(N+1; N)$	$(N; N+2)$	$(N+4; N+3)$
3.	$(N+2; N+1)$	$(N+3; N+2)$	$(N+4; N)$
4.	$(N+1; N+3)$	$(N+2; N+4)$	$(N+1; N)$

2. Побудувати графіки прямих і знайти координати точок їх перетину (N – номер варіанта):

a) $(N + 1)x + (N + 2)y - 2N - 3 = 0$ та $y = (N + 3)x - N - 2$;
b) $(N + 3)x - (N + 4)y + N + 5 = 0$ та $x = (N + 1)y - 2N - 1$;
c) $(N + 2)x + (N + 1)y - 4N - 5 = 0$ та $(N + 5)x - (N + 3)y + 2N + 4 = 0$;
d) $(N + 4)x + Ny - 5N - 16 = 0$ та $(N + 1)y - (N + 3)x - 3N - 1 = 0$.

Частина 7

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Математичний аналіз вивчає змінні величини та функціональні залежності між ними. Під час досліджень широко застосовуються метод граничного переходу та метод координат, який дозволяє не тільки наглядно представляти залежності, що вивчаються, але й встановлювати нові залежності.

7.1. Функції та способи їх задання

7.1.1. Характеристики змінних величин

⬢ **Означення 1.** ***Величиною*** *називають те, що можна виразити в певних одиницях та характеризувати числовим значенням.*

Наприклад, площа та довжина кола – величини тому, що вимірюються в певних одиницях і характеризуються деяким числовим значенням. Коло не буде величиною тому, що для нього характерна лише певна форма.

Величини бувають розмірні та безрозмірні. ***Розмірністю величини*** *називають ту одиницю, через яку величина виражається.*

Наприклад, розмірність площі – см^2, м^2, км^2.

Додавати та віднімати можна величини лише однакової розмірності. Множити та ділити величини можна будь-якої розмірності.

Наприклад, швидкість $10\ {}^{км}\!/_{год}$.

Якщо поділити дві величини однакової розмірності, то одержимо безрозмірну величину. Наприклад, $\dfrac{5\ см}{10\ см}=\dfrac{1}{2}$.

В математиці найчастіше вивчають безрозмірні величини, які повністю характеризуються лише своїм числовим значенням. Величини бувають постійні та змінні.

⬢ **Означення 2.** *Величина, числове значення якої при розглядаємих умовах не змінюється, називається* ***постійною***.

Змінною величиною називається величина, яка при умовах, що розглядаються, може приймати різні числові значення.

До основних характеристик змінної величини відносяться: неперервність або дискретність, монотонність, обмеженість (повна або часткова) або необмеженість.

7.1.2. Поняття та характеристики функцій

Часто при дослідженні певного явища доводиться мати справу одночасно з деякою кількістю змінних величин. Наприклад, для виготовлення виробів кількістю y застосовують x сировини, z палива і т.д.

Деякі з розглядаємих змінних можуть бути зв'язані одна з іншою так, що зміна однієї величини приводить до зміни іншої величини. В цьому випадку кажуть, що між цими величинами існує функціональна залежність.

Серед функціонально залежних величин можна вказати такі величини, значення яких можна обирати довільно (ці величини називають незалежними змінними), тоді як значення інших величин визначаються значеннями незалежних змінних (їх називають залежними величинами).

Наприклад, якщо розглядати зв'язок між *величинами кормів* x та *надоїв* y, тоді доцільно за незалежну змінну прийняти x, а надої $y = f\left(x\right)$ буде залежною змінною.

⬢ **Означення 3.** *Змінна величина* y *називається* ***функцією змінної величини*** $\boldsymbol{x}$, *якщо вказаний закон, за яким кожному значенню* x, *взятому з області можливих значень, відповідає певне дійсне значення* y. *Змінну величину* x *називають* ***незалежною змінною*** *або* ***аргументом***.

Якщо y є функцією x, то кажуть, що величини x та y зв'язані функціональною залежністю і позначають $y = f\left(x\right)$ (замість літери f можна використовувати інші літери: F, Φ, u, v, φ, y).

⬢ **Означення 4.** *Функція* $y = f\left(x\right)$ *називається* ***однозначною***, *якщо кожному значенню* x *відповідає одне значення* y. *Функцію* y

називають ***багатозначною****, якщо кожному значенню x відповідає декілька значень y.*

Існує декілька способів задання функції: аналітичний, табличний, графічний, мовний та програмний. В математиці найчастіше використовують перші три способи, тому детально їх розглянемо.

1. При аналітичному способі функція задається однією або декількома рівностями, що зв'язують залежні та незалежні змінні.

Наприклад:

a) $3x - 2y = 6$; b) $y = 3x^2 - 4$; c) $y = \begin{cases} 2x-1, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le 1 \\ x+3, & x > 1 \end{cases}$.

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент x з функцією y, не розв'язано відносно y, а задано у вигляді $F(x, y) = 0$ (випадок *a)*), тоді змінну y називають ***неявною функцією x***.

2. При табличному способі функціональна залежність задається у вигляді таблиці, в якій для кожного числового значення x вказано відповідне числове значення y. Наприклад:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$
y	3	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	-3	$-\frac{9}{2}$

або

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Цей спосіб дуже часто використовується в економіці.

3. Графічний спосіб найбільш наглядний і базується на застосуванні методу координат. При цьому способі функціональна залежність зображується лінією, яку називають ***графіком функції***.

◈ **Зауваження 1**. *Якщо функція задана аналітично, тобто за допомогою деякої формули, то неважко перейти до табличного або графічного способу завдання цієї функції. Перехід від табличного або графічного способів завдання функції до аналітичного способу потребує певних знань та навичок. Іноді такий перехід вдається здійснити лише наближено.*

7.1.3. Деякі властивості функцій

Функція є змінною величиною, тому вона може бути монотонною або не монотонною, обмеженою (зверху або знизу, або зверху та знизу) або необмеженою. Крім цих властивостей часто використовують властивості парності та періодичності.

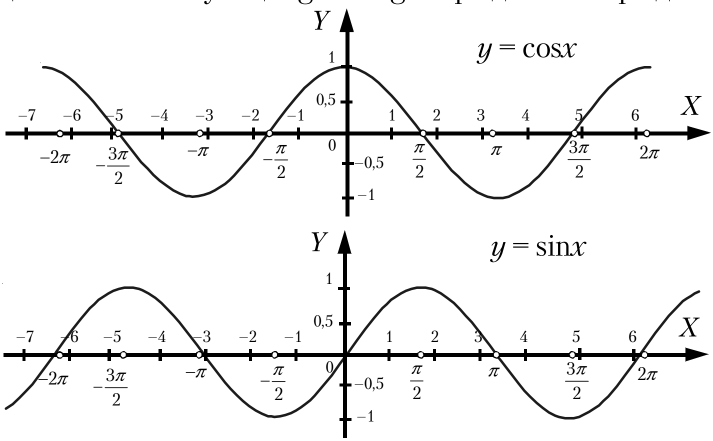
⬢ **Означення 5.** *Функція $y = f(x)$ називається* ***парною****, якщо* $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$, *тобто при заміні x на $(-x)$ функція не змінюється. Функція $y = f(x)$ називається* ***непарною****, якщо $f(-x) = -f(x)$, тобто при заміні x на $(-x)$ функція лише змінює свій знак на протилежний.*

Відмітимо, що графіки парних функцій симетричні відносно осі ординат, а непарних функцій – симетричні відносно початку координат.

Наприклад, функція $y = \cos x$ є парною функцією тому, що $\cos(-x) = \cos x$, а її графік є симетричним відносно осі Oy. Функція $y = \sin x$ є непарною функцією тому, що $\sin(-x) = -\sin x$, а її графік є симетричним відносно початку координат (див. мал. 1).

⬢ **Означення 6.** *Функція $y = f(x)$ називається* ***періодичною****, якщо існує таке постійне число ω, що виконується рівність* $f\left(x+\omega\right)=f\left(x\right)$ *для будь-якого x.*

Найменше додатне число ω, що задовольняє цю рівність, називають ***періодом функції***. Наприклад, функції $\sin x$ та $\cos x$ періодичні з періодом $\varpi = 2\pi$. Функції $\mathrm{tg}\, x$ та $\mathrm{ctg}\, x$ періодичні з періодом $\varpi = \pi$.



Мал. 1.

7.1.4. Області визначення та значень функції, заданої аналітично

⬢ **Означення 7.** ***Областю визначення функції*** *називають сукупність усіх тих значень аргументу* x *, для яких значення* y *, обчислене за формулою, будуть певними дійсними числами.*

Наприклад, якщо $y = x^2$, то x може приймати будь-які значення, тобто областю визначення цієї функції буде числова вісь $(-\infty < x < \infty$, символ ∞ означає нескінченність).

Якщо $y = \sqrt{x^2 - 2}$, то y приймає дійсні значення лише при

$$x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2}.$$

Таким чином, областю визначення цієї функції буде об'єднання областей $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right)$.

⬢ **Означення 8.** ***Областю значень функції y = f(x)*** *називають сукупність усіх значень* y *, коли* x *змінюється в області визначення цієї функції.*

Так, для функцій $\sin x$ та $\cos x$ областю значень буде відрізок $[-1,1]$.

7.1.5. Основні елементарні функції

1. ***Степенева*** функція $y = x^n$, де n – дійсне число.

2. ***Показникова*** функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

3. ***Експоненціальна*** функція *(показникова з* $a = e$*)* $y = e^x$, де $e \approx 2{,}7182$.

4. ***Логарифмічна*** функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

5. ***Натуральна логарифмічна*** функція $y = \ln x$.

6. ***Тригонометричні*** функції:

$y = \sin x$,	$y = \cos x$,
$y = \mathrm{tg}\, x$,	$y = \mathrm{ctg}\, x$,
$y = \sec x$,	$y = \mathrm{cosec}\, x$.

7. ***Обернені тригонометричні*** функції:

y = arcsin$x$, y = arccos$x$,
y = arctg$x$, y = arcctg$x$,
y = arcsec$x$, y = arccosec$x$.

◈ **Зауваження 2.** *Основні елементарні функції та їх графіки вивчають у середній школі, вони відіграють важливу роль в математичному аналізі, тому ці функції, їх області визначення та графіки треба добре знати.*

7.1.6. Складні та елементарні функції

⬢ **Означення 9.** *Якщо змінна величина y залежить від другої змінної величини u, яка в свою чергу є функцією x, то y називають* ***функцією від функції*** *або* ***складною функцією****. Математично це можна записати так:*

$$\text{якщо } y=f(u),\ u=\varphi(x), \text{ то } y=f\left[\varphi(x)\right].$$

Кажуть: y – складна функція x, u – проміжний аргумент, x – аргумент (незалежна змінна).

Наприклад:

1) $y = \sin^3 x$, або $y = u^3$, де $u = \sin x$.
2) $y = \operatorname{arctg} x^2$, або $y = \operatorname{arctg} u$, де $u = x^2$.

◈ **Зауваження 3.** *Від вміння швидко розщепляти складну функцію на основні елементарні залежать навички техніки диференціювання.*

⬢ **Означення 10.** ***Елементарною функцією*** *називають таку функцію, яку можна задати однією формулою вигляду $y = f(x)$, де вираз правої частиш складено з основних елементарних функцій та постійних за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня та побудови функції від функції.*

Наприклад, функція

$$y=\frac{\lg^2 x+4\sqrt{3x}-\operatorname{arctg} x+10^x}{5-x+\operatorname{tg} x}$$

буде елементарною функцією, а $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $\left(y = n! \right)$ не буде елементарною функцією тому, що для одержання y треба зробити n операцій множення, але із зростанням n кількість таких операцій буде необмеженою.

7.2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

⬢ **Означення 11.** *Змінна величина x називається* ***нескінченно малою****, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної стає і залишається менше будь-якого, скільки завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто $|x| < \varepsilon$.*

Нескінченно малі величини найчастіше позначають літерами α, β, γ.

Наприклад, величина $\dfrac{1}{10^n}$ при $n \to \infty$ є нескінченно малою.

◈ **Зауваження 4.** *Нескінченно мала величина є змінною величиною. Але, якщо постійну величину* О *розглядати як змінну величину, що приймає одне й те ж значення, то в цьому розумінні вона є нескінченно малою, тобто якщо $\alpha = 0$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon$ виконується для будь-якого $\varepsilon > 0$.*

Жодну іншу постійну величину, якою б малою вона не була (наприклад, розмір електрона), не можна назвати нескінченно малою.

Розглянемо деякі властивості нескінченно малих величин.

✦ **Теорема 1.** ***Алгебраїчна сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.***

Доведення. Нехай задано k нескінченно малих величин $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_k$. Доведемо, що їх алгебраїчна сума $\left(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k \right)$ буде величиною нескінченно малою. Візьмемо скільки завгодно мале $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням нескінченно малих в процесі їх зміни наступить такий момент, починаючи з якого будуть виконуватися нерівності:

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{k},\ |\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{k},\ldots,\ |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Звідси, використовуючи властивості модуля, одержимо:

$$|\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k} + \ldots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon .$$

Отже, маємо: $|\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k| \le \varepsilon$.

Ця нерівність, згідно з означенням 11, означає, що $(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k)$ є нескінченно малою величиною. Теорема доведена.

✦ **Теорема 2.** ***Добуток обмеженої величини на нескінченно малу величину є величина нескінченно мала.***

Доведення. Нехай y – обмежена величина, α – нескінченно мала. Для обмеженої величини y існує таке число M, що $|y| \le M$. Згідно з означенням нескінченно малої в процесі змінювання наступить такий момент, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Тому, починаючи з деякого моменту, буде виконуватись нерівність

$$|y\alpha| = |y| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Ця нерівність означає, що $y \cdot \alpha$ є величиною нескінченно малою, що і треба було довести.

▼ **Наслідок 1.** *Добуток постійної величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала.*

▼ **Наслідок 2.** *Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.*

Дійсно, постійні та нескінченне малі величини обмежені величини, тому для них має місце твердження теореми 2.

⬢ **Означення 12.** *Змінна величина* x *називається* ***нескінченно великою****, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи* *з якого абсолютна величина x стає і залишається більше будь-якого, скільки завгодно великого, наперед заданого додатного числа N, тобто $|x| > N$.*

Наприклад, величина 10^n при $n \to \infty$ є величина нескінченно велика.

Між нескінченно великими і нескінченно малими величинами існує простий зв'язок: якщо x нескінченно велика величина, то $y = \frac{1}{x}$ – нескінченно мала, і навпаки, якщо y – нескінченно мала і $y \neq 0$, то $x = \frac{1}{y}$ буде нескінченно великою величиною.

Тому можна довести, що алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно великих величин буде величиною нескінченно великою, добуток нескінченно великої величини на обмежену величину також буде нескінченно великою величиною.

Ділення нескінченно малих та нескінченно великих величин поки що не визначено і буде розглянуто далі, після визначення границі змінної величини.

7.3. Границя змінної та її властивості

Із всієї множини змінних величин виділимо такі, процес зміни яких відбувається особливим чином, що дозволяє назвати ці величини прямуючими до границі.

7.3.1. Поняття границі

⬢ **Означення 13.** *Постійна величина a називається* ***границею змінної величини*** x*, якщо абсолютна величина різниці* $x - a$ *є величиною нескінченно малою, тобто* $|x - a| < \varepsilon$.

Якщо число a є границею змінної x, то кажуть, що x прямує до границі a і позначають так: $\lim x = a$ або $x \to a$.

З цього означення границі випливає, що границя нескінченно малої величини дорівнює нулю, тобто $\lim \alpha = 0$ або $\alpha \to 0$.

Нескінченно велика величина x границі не має, але умовно вважають, що границя нескінченно великої величини є ∞, тобто $|x| \to \infty$ або $\lim x = \pm\infty$.

Із означення 13 випливає: якщо в процесі своєї зміни змінна величина має границю, то лише одну, а сама змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу величину, тобто $x = a + \alpha$. Саме цей факт в математичному аналізі часто використовується.

Тепер розглянемо границю різновидів змінної величини – послідовності та функції.

⬢ **Означення 14.** *Число* a *називається* ***границею послідовності*** $x_1,\ x_2, \ldots\ x_n$, *якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер N, що для усіх n > N виконується нерівність* $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначають границю послідовності так:

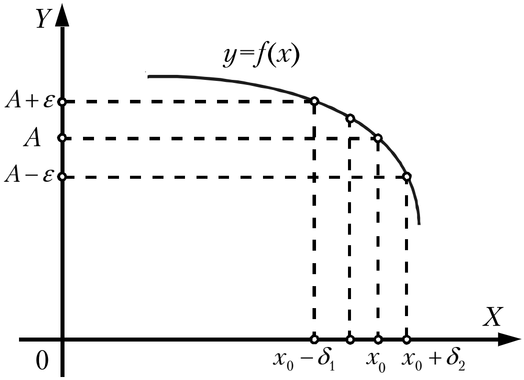
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

Відмітимо, що номер N залежить від ε і найчастіше він зростає, коли ε зменшується.

⬢ **Означення 15.** *Число A називається* ***границею функції y = f(x) при*** $x \to x_0$, *якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке число* $\delta > 0$, *що для усіх x, відмінних від* x_0 *і які задовольняють нерівність* $|x - x_0| < \delta$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Відмітимо, що δ залежить від ε і найчастіше зменшується, коли зменшується ε.

Покажемо на графіку (мал. 2), як здійснюється прямування функції $f(x)$ до границі A. Відклавши на осі Oy ε-окіл точки A, знайдемо проміжок $(x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_2)$ осі Ox, для усіх точок якого значення



Мал. 2.

функції $f(x)$ не виходить із смуги завширшки 2ε. Із δ_1, та δ_2 візьмемо менше і позначимо його δ. Тепер для усіх x, таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \delta$.

◈ **Зауваження 5.** *Якщо функція* $y = f(x)$ *має границею число* A_1, *лише при умові, що* $x \to x_0$ *зліва, то використовують такий запис:*

$$A_1 = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

а число A_1, *називають* ***однобічною границею функції*** $y = f(x)$ ***зліва***.

Якщо число A_2 *є границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *справа, то використовують запис:*

$$A_2 = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

а число A_2 *називають* ***однобічною границею функції*** $y = f(x)$ ***справа***. *Ці границі функції називають* ***однобічними***.

Для існування границі A функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб існували в цій точці границі функції зліва та справа і щоб вони були рівні, тобто $A_1 = A_2 = A$.

7.3.2. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих

Ділення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин не визначено тому, що їх відношення може бути нескінченно малою або нескінченно великою або постійною величиною.

Дійсно, нехай α – нескінченно мала величина, тоді $\beta=\alpha^2$, $\gamma=3\alpha$ також нескінченно малі величини.

Маємо:

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$ – нескінченно мала величина,

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}$ – нескінченно велика величина,

$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha}=3$ – постійна величина.

Використовуючи ділення, можна порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини.

⬢ **Означення 16.** *Нескінченно малі величини α та β називаються* ***нескінченно малими одного порядку малості****, якщо їх відношення має скінченну границю, відмінну від нуля, тобто якщо* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq 0$.

Якщо $k=1$, то α та β називають ***еквівалентними нескінченно малими величинами***.

⬢ **Означення 17.** *Якщо відношення двох нескінченно малих величин є нескінченно мала величина, тобто* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, *то α називають* ***нескінченно малою величиною вищого порядку малості в порівнянні з β.***

Наприклад, якщо $\alpha=\beta^3$, то $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\beta^3}{\beta}=\lim\beta^2=0$.

Нескінченно великі величини порівнюють таким же чином.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

7.3.3. Ознаки існування границі змінної величини

Не слід вважати, що будь-яка змінна величина має границю. Розглянемо, наприклад, послідовність

$$x_n = \left(-1\right)^{n-1}: \ 1, \ -1, \ 1, \ -1, \ldots$$

Ця послідовність не має границі тому, що при будь-якому n сусідні два значення цієї змінної відрізняються за модулем на дві одиниці Отже, для $\varepsilon < 1$ на числовій осі не має такої точки, ε -окіл якої містив би усі значення x, починаючи з деякого N.

В курсі математичного аналізу для студентів університетів математичної спеціальності доведені такі ознаки існування границі змінної величини.

✸ **Ознака 1.** *Якщо в одному процесі змінна величина y заключена між двома іншими змінними x та z, які мають однакову границю a, то й змінна величина y має границю, що дорівнює a. Іншими словами: якщо $x \le y \le z$, та $\lim x = a$, $\lim z = a$, то y також має границю $\lim y = a$.*

Цю ознаку іноді називають теоремою про двох міліціонерів.

✸ **Ознака 2.** *Обмежена монотонна змінна величина мас границю.*

Ця ознака вказує умови, при яких існує границя змінної величини.

Перша ознака вказує не тільки умови існування границі змінної величини, але й величину самої границі.

7.3.4. Основні властивості границі змінної величини

✦ **Теорема 3.** ***Якщо x = C – постійна величина, то*** $\lim C = C$, ***тобто, границя постійної величини дорівнює самій постійній.***

Дійсно, якщо усі значення x дорівнюють C, то виконується нерівність $|x - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, де ε – скільки завгодно мале додатне число. Ця нерівність означає, що C є границею $x = C$.

✦ **Теорема 4.** ***Границя алгебраїчної суми скінченної кількості змінних величин, що мають границі, дорівнює такій самій алгебраїчній сумі границь доданків, тобто***

$$\lim(x \pm y \pm ...z) = \lim x \pm \lim y \pm ...\lim z.$$

Доведення. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$, ..., $\lim z = c$. Змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу величину, тому можна записати:

$$x = a + \alpha,\ y = b + \beta,...,\ z = c + \gamma,$$

де α, β,..., γ – нескінченно малі величини. Тепер маємо:

$$x \pm y \pm ... \pm z = (a \pm b \pm ... \pm c) + (\alpha \pm \beta \pm ... \pm \gamma).$$

В останній дужці правої частини цієї рівності маємо нескінченно малу величину, а в першій дужці – постійна величина. Отже,

$$\lim(x \pm y \pm ...z) = a \pm b \pm ... \pm c = \lim x \pm \lim y \pm ...\lim z,$$

що й треба було довести.

✦ **Теорема 5.** ***Границя добутку скінченної кількості змінних величин, що мають границю, дорівнює добутку границь множників, тобто***

$$\lim\left(x \cdot y \cdot \ldots \cdot z\right) = \lim x \cdot \lim y \cdot \ldots \cdot \lim z.$$

Доведення. Спочатку доведемо твердження теореми для двох множників. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$, тоді $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, де α та β – нескінченно малі величини.

Згідно з властивостями нескінченно малих величин

$$\gamma = a \cdot \beta + \alpha \cdot b + \alpha \cdot \beta$$

також нескінченно мала. Тому

$$x \cdot y = a \cdot b + \gamma \text{ або } \lim(x \cdot y) = a \cdot b = \lim x \cdot \lim y .$$

Тим самим твердження теореми для двох множників доведене.

У випадку трьох множників доведення твердження теореми випливає із доведення для двох множників та рівностей:

$$\lim(x \cdot y \cdot z) = \lim\left[(x \cdot y) \cdot z\right] = \lim(x \cdot y) \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z$$

Аналогічно доводиться твердження теореми для будь якої кількості множників.

▼ **Наслідок 1.** *Постійний множник можна виносити за знак границі, тобто*

$$\lim Cx = \lim C \cdot \lim x = C \lim x .$$

▼ **Наслідок 2.** *Границя цілого додатного степеня змінної величини дорівнює тому ж степеню границі цієї змінної величини, тобто*

$$\lim\left(x^n\right) = \left(\lim x\right)^n .$$

✦ **Теорема 6.** ***Границя частки від ділення двох змінних величин дорівнює частці від ділення їх границь, якщо тільки границя дільника не дорівнює нулю, тобто***

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \quad \lim y \neq 0.$$

Доведення. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$. Тоді $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, де α та β – нескінченно малі величини.

Розглянемо різницю

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha b - ab - a\beta}{b^2 + \beta b} = \frac{\alpha b - a\beta}{b^2 + \beta b} .$$

Величини $a\beta,\ \alpha b,\ \beta b$ – нескінченно малі, тому чисельник правої частини є нескінченно малою величиною, а знаменник –

скінченною величиною. Отже, дріб $\dfrac{\alpha b - a\beta}{b^2 + \beta b}$ буде нескінченно малою величиною, яку позначимо через γ. Тепер маємо:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \gamma \text{ або } \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \gamma.$$

Знайдемо границю обох частин останньої рівності:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

що і треба було довести.

Розпишемо деякі особливі випадки обчислення границі частки $\dfrac{y}{z}$.

1. Якщо $\lim z = \infty$, а y – обмежена величина, тоді

$$\lim \frac{y}{z} = \lim\left(y \cdot \frac{1}{z}\right) = \lim y \cdot \lim \frac{1}{z} = 0.$$

Наприклад, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x^2} = 0.$

2. Якщо $\lim y \neq 0$, а $\lim z = 0$, тоді

$$\lim \frac{y}{z} = \lim\left(y \cdot \frac{1}{z}\right) = \lim y \cdot \lim\left(\frac{1}{z}\right) = \infty.$$

тому, що $\dfrac{1}{z}$ – нескінченно велика величина.

Наприклад, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty.$

7.3.5. Чудові границі

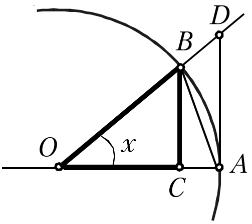
Перша чудова границя

При знаходженні границі виразів, що містять тригонометричні функції, часто використовують границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (1)$$

яку називають ***першою чудовою границею.***

Для доведення рівності (1) побудуємо коло одиничного радіуса та кут $AOB = x$ (радіан), де $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ (див. мал. 3).



Мал. 3.

Побудуємо лінію синуса BC та лінію тангенса AD. Із мал. 3 видно, що площа ΔAOB менше площі сектора AOB, а остання менше площі ΔAOD.

Площа ΔOAB дорівнює $\dfrac{1}{2}\sin x$, площа сектора OAB дорівнює $\dfrac{1}{2}x$, а площа ΔOAD дорівнює $\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\, x$. Отже, маємо нерівності $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$.

При $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ маємо $\sin x>0$, тому нерівності можна поділити на $\sin x$. Одержимо $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$.

Для обернених величин можна записати такі нерівності

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \qquad (2)$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, то за першою ознакою існування границі змінної величини із нерівностей (2) одержимо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (3)$$

Отже, рівність (1) доведена для $x>0$. При $x<0$ позначимо $x=-t,\ t>0,$ тоді

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t}.$$

Тому, для $x<0$ маємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{\sin t}{t} = 1. \qquad (4)$$

Із рівностей (3) та (4) випливає рівність (1), яку треба було довести.

■ **Наприклад**,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5.$$

Друга чудова границя

Розглянемо послідовність $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1,2,3,\ldots$ та підрахуємо декілька її значень

$$u_1 = 2;\ u_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25; \qquad u_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}37;$$

$$u_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2{,}441; \qquad u_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2{,}488;\ \ldots$$

Бачимо, що $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$. Можна довести, що для будь-якого n має місце нерівність $u_n < u_{n+1}$ яка означає, що змінна u_n монотонно зростає. В той же час усі підраховані значення u_n задовольняють нерівність $u_n < 3$. Можна показати, що ця нерівність має місце для усіх значень n. Отже, змінна u_n монотонно зростає і залишається обмеженою зверху числом 3. Згідно другої ознаки існування границі змінної величини робимо висновок, що ця змінна u_n має скінченну границю.

⬢ **Означення 18.** *Скінченну границю послідовності* $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *називають* ***числом*** e, *тобто*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{5}$$

Оскільки для будь-яких значень $n > 1$ мають місце нерівності $2 < u_n < 3$, тому число e задовольняє нерівностям $2 < e < 3$.

Число e – ірраціональне, воно часто використовується в математиці та економіці і дорівнює $e \approx 2{,}718281\ldots$.

В практичних підрахунках наближено приймають $e \approx 2{,}72$. Рівністю (5) ми визначили число e при $n \to \infty$, коли n приймає лише цілі та додатні значення. Можна довести таке твердження:

Якщо змінна $x \to \infty$, *приймаючи будь-які дійсні (раціональні та ірраціональні) додатні значення, то функція* $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *має своєю границею також число* e, *тобто*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{6}$$

Якщо в лівій частині рівності (6) зробити заміну $\frac{1}{x}=\alpha$ то ця рівність приймає вигляд

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \tag{7}$$

Рівності (6) та (7) називають ***другою чудовою границею***. Цю границю часто використовують в різних галузях техніки, економіки.

■ **Приклад 1.** Обчислити $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$ при постійному *a*.

✎ *Розв'язання.* Будемо використовувати другу чудову границю. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a}=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}=e^{a}.$$

7.4. Неперервні функції та дії з ними

7.4.1. Неперервність функції в точці і на відрізку

Нехай $y=f\left(x\right)$ і аргумент x змінюється від значення $x=x_1$, до значення $x=x_2$. Різницю між цими значеннями аргументу називають ***приростом аргументу*** і позначають Δx.

Отже, $\Delta x=x_2-x_1$.

При $x=x_1$, маємо $y_1=f\left(x_1\right)$, а при $x=x_2$ маємо $y_2=f\left(x_2\right)$. Різницю функції, яка викликана зміною аргументу, називають ***приростом функції*** і позначають Δy.

Отже,

$$\Delta y=y_2-y_1=f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right).$$

Тепер можна перейти до поняття неперервності функції. Дамо два означення неперервності функції в точці, які досить часто використовуються.

⬢ **Означення 19.** *Якщо нескінченно малому приросту аргументу* Δx *в точці* $x = x_0$ *відповідає нескінченно малий приріст* Δy *функції, що визначена в точці* x_0 *та в її околі, то функцію* $y = f(x)$ *називають* ***неперервною при*** $x = x_0$ ***або в точці*** x_0.

Із цього означення випливає, що для дослідження неперервності функції в точці $x = x_0$ достатньо впевнитись, що при $\Delta x \to 0$ буде $\Delta y \to 0$.

⬢ **Означення 20.** *Функцію* $y = f(x)$ *називають* ***неперервною при*** $x = x_0$, *якщо:*

1) $f(x)$ *існує при* $x = x_0$ *та в деякому околі точки* x_0;

2) *існує скінченна границя* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *незалежно від способу прямування* x *до* x_0, *тобто* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Останню умову можна записати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left[\lim_{x \to x_0} x\right] = f(x_0).$$

Ця ознака нижче буде використана для класифікації точок розриву.

⬢ **Означення 21.** *Якщо функція неперервна в кожній точці деякого інтервалу* (a,b), *то її називають* ***неперервною в інтервалі*** (a,b). *Якщо функція визначена при* $x = a$ *і* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, *то кажуть, що* $f(x)$ *неперервна в точці* a *справа.*

Якщо $f(x)$ *визначена при* $x=b$ і $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$, *то кажуть, що* $f(x)$ *в точці* $x=b$ *неперервна зліва.*

Якщо $f(x)$ *неперервна в кожній точці інтервалу* (a,b) *та неперервна на кінцях інтервалу, відповідно справа та зліва, то функцію* $f(x)$ *називають* ***неперервною на відрізку*** $[a,b]$.

■ **Приклад 2.** Знайти інтервал неперервності функції $y=x^2$.

✎ *Розв'язання.* Будемо використовувати означення 19 неперервності функції. Візьмемо довільну точку x_0 на числовій осі та позначимо через Δx приріст x. Тоді функція $y=x^2$ одержить приріст

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Якщо $\Delta x\to 0$, то згідно з властивостями нескінченно малих величин, $\Delta y\to 0$, тобто Δy є нескінченно малою. Отже, функція неперервна в точці x_0. Це твердження має місце для будь-якої точки числової осі, тому функція $y=x^2$ неперервна на всій числовій осі.

■ **Приклад 3.** Знайти $\lim\limits_{x\to 3} x^2$.

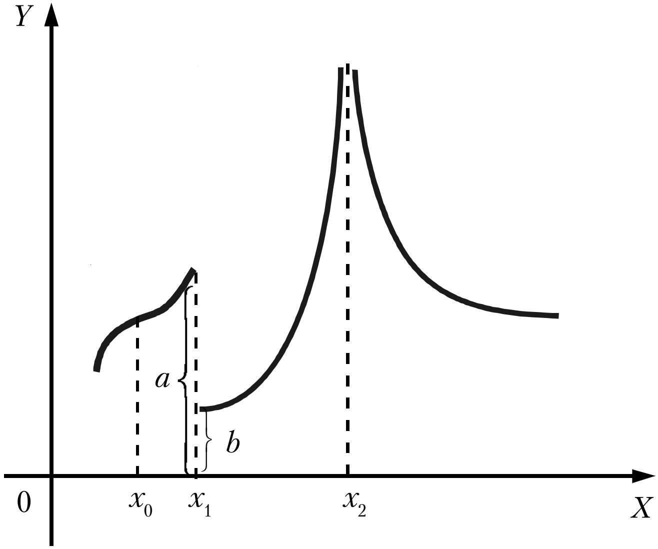
Разв'язання. В прикладі 2 одержали, що функція $y=x^2$ неперервна при $-\infty<x<\infty$. Тому для знаходження її границі при $x\to 3$ достатньо замість x підставити $x = 3$, тобто перейти до границі під знаком функції

$$\lim_{x\to 3} x^2=(3)^2=9.$$

7.4.2. Класифікація розривів функції

Якщо при деякому $x = x_1$ будь-яка із умов неперервності означення 20 не виконується, то кажуть, що функція в цій точці має розрив, а точку x_1 називають *точкою розриву функції.*

Поняття неперервності та розриву функції можна наочно показати на графіку функції (див. мал. 4).



Мал. 4.

В околі точки x_0 графік має вигляд неперервної лінії. При будь-якому прямуванні $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$. В точках x_1 та x_2 інша ситуація. При наближенні x до x_1 зліва $f(x) \to a$, а при $x \to x_1$ справа $f(x) \to b$, тобто $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ залежить від способу прямування x до x_1. В точці x_2 умова неперервності функції також не виконується тому, що $\lim\limits_{x \to x_2} f(x) = \infty$, тобто не існує скінченної границі.

Графік функції, що зображений на малюнку 4, має розриви в точках x_1 та x_2.

Розриви функції бувають ліквідовні та неліквідовані:

1) якщо функція $f(x)$ не визначена в точці x_1 або визначена, але мають місце співвідношення

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_1 + 0} f(x) \neq f(x_1),$$

то розрив в точці x_1 називають ***ліквідовним***. В цьому випадку функцію можна визначити або змінити її значення в точці x_1 так, щоб виконувались рівності

$$\lim_{x \to x_1 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_1 + 0} f(x) = f(x_1).$$

2) ***неліквідовні*** розриви поділяються на розриви ***першого та другого роду:***

a) якщо однобічні границі функції $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x)$ існують та скінченні, але не рівні між собою, то x_1 називають ***точкою розриву першого роду***, а різницю $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x)$ називають ***стрибком функції***;

b) якщо хоча б одна з однобічних границь не існує або дорівнює ∞, то розрив в цій точці називають розривом ***другого роду***.

На малюнку 4 функція має розрив першого роду в точці x_1, її стрибок дорівнює $b - a$, а в точці x_2 функція має розрив другого роду.

7.4.3. Властивості неперервних функцій та дії з ними

Приведемо без доведень властивості неперервних функцій.

✦ **Теорема 7 (Вейєрштрасса).** ***Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі числа M та m, що***

$$m \le f(x) \le M \quad \textit{для усіх } x \in [a,b].$$

✦ **Теорема 8.** ***Усі основні елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області існування.***

✦ **Теорема 9.** ***Алгебраїчна сума, добуток (скінченної кількості доданків та множників) та частка функцій, неперервних при*** $x = x_0$ ***(в останньому випадку дільник в цій точці не повинен дорівнювати нулю) є також неперервна функція при*** $x = x_0$.

✦ **Теорема 10.** ***Неперервна функція від неперервної функції є також неперервна функція.***

✦ **Теорема 11.** ***Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області існування.***

7.5. Задачі економічного змісту

■ **Приклад 4. (*Витрати, доход та прибуток*).** Економічним підрозділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою

$$V(x) = 20000 + 40x \text{ (гривень)},$$

а доход $D(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї продукції, виражається формулою

$$D(x) = 100x - 0{,}001x^2 \text{ (гривень)}.$$

Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A, але бажає збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

↳ *Розв'язання.* Запланований приріст продукції буде

$$\Delta x = 3200 - 3100 = 100 \text{ (одиниць продукції } A).$$

Приріст витрат

$$\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = [20000 + 40 \cdot 3200] - [20000 + 40 \cdot 3100] = 148000 - 144000 = 4000.$$

Приріст доходу

$\Delta D(x) = D(3200) - D(3100) = (1003200 - 0{,}013200] -$
$-[1003200 - 0{,}013100] = 217600 - 213900 = 3700.$

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді

$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0{,}01x^2 - (20000 + 40x) =$
$= 60x - 0{,}01x^2 - 20000.$

Приріст прибутку буде

$\Delta P(x) = P(3200) - P(3100) = [60 \cdot 3200 - 0{,}013200^2 - 20000] -$
$-[603100 - 0{,}013100^2 - 20000] = 69600 - 69900 = -300.$

Отже, прибуток зменшиться на 300 гривень.

Середня величина приросту прибутку на одиницю приросту продукції буде

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{-300}{100} = -3.$$

Отже, кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 3 гривні.

■ **Приклад 5. (*Зміна кількості населення*).** Зміна кількості населення деякого міста за час t, що вимірюється роками, здійснюється за формулою

$$P(t) = 10000 + 1000t - 120t^2.$$

Визначити середню швидкість зростання населення в період між часом: a) $t = 3$ та $t = 5$; b) $t = 3$ та $t = 3\frac{1}{2}$.

➪ *Розв'язання.* Середню швидкість зростання населення міста за час t знайдемо за формулою

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}.$$

a) В цьому випадку: $\Delta t = 5 - 3 = 2$

$\Delta P(t) = P(5) - P(3) = [10000 + 5000 - 120 \cdot 25] -$
$-[10000 + 3000 - 1209] = 2000 - 1920 = 80.$

Середня швидкість зростання населення міста в цей період буде $80{:}2 = 40$.

b) В цьому випадку: $\Delta t = 3\frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}$.

$$\Delta P(t) = P\left(3\frac{1}{2}\right) - P(3) = \left[10000 + 3\frac{1}{2}\cdot 1000 - 120\cdot\left(3\frac{1}{2}\right)^2\right] -$$

$$-\left[10000 + 3000 - 120\cdot 9\right] = 500 - 390 = 110.$$

Отже, середня швидкість зростання населення міста в цей час буде $\frac{110}{1} = 220$.

7.6. Вправи

1. Знайти значення функції в заданих точках.

a) $F(x, y) = x^3 - 3xy - y^2 + 2x + y$ при $x = 4$, $y = 3$;

b) $f(x) = 2\cos 4x + \sqrt{x+1}$ при $x = 0$;

c) $f(x) = 2\ln\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ при $x = 1$;

d) $\varphi(t) = \frac{2t-3}{t^2+1}$ при $t = 1$;

e) $y = 8x - 2x^2$ при $x = 1$ та при $x = \frac{1}{2}$.

2. Задану функцію записати у вигляді ланцюга рівностей, кожна ланка якого містить основну елементарну функцію:

a) $y = \arcsin\left(3^{-x}\right)$; b) $y = \lg\sin 3x$; c) $y = (3\cos x)^5 + \ln 2^{6x^2}$.

3. Знайти область існування функції:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; b) $f(x) = 3\cos 2x + \sqrt{x+2}$;

c) $y = \ln\sqrt{1-x}$; d) $y = \sin\sqrt{x} + 3$; e) $y = \frac{1+x^2}{4-x^2}$.

4. Довести, що задана змінна є нескінченно малою або нескінченно великою:

a) $\alpha_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; b) $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$; c) $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

d) $\alpha_n = (-1)^n n^2$; e) $\alpha_n = 2^{\sqrt{n}}$.

5. Знайти вказані границі:

a)

1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x-1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^4-2x^2+3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$;

b)

1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^2+3x+1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^2+4x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

c)

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{6x^3-4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{x2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$;

d)

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{4}\left[\ln(3x+4)-\ln 3x\right]$;

е)

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{\sqrt{x}-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{\frac{10}{2x}}$.

6. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Треба: 1) встановити, чи буде функція неперервною в кожній точці; 2) у випадку розриву функції знайти її однобічні границі зліва та справа; 3) зробити схематичний малюнок.

a) $y=5^{\frac{1}{x-4}},\ x_1=2,\ x_2=4$; b) $y=6^{\frac{1}{x-3}},\ x_1=4,\ x_2=3$;

c) $y=7^{\frac{1}{x-5}},\ x_1=7,\ x_2=5$; d) $y=10^{\frac{1}{x-9}},\ x_1=8,\ x_2=9$;

e) $y=4^{\frac{1}{x-1}},\ x_1=3,\ x_2=1$; f) $y=8^{\frac{1}{x-2}},\ x_1=4,\ x_2=2$.

7. Задачі економічного змісту.

а) мале підприємство встановило, що витрати на виготовлення x окремих виробів задовольняють такій закономірності

$$V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000.$$

Знайти: приріст витрат, коли кількість виробів зросте з 50 до 100 та середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, коли їх кількість зросте з 50 до 60.

b) загальний щотижневий доход D в гривнях, одержаний підприємством після продажу виготовлених x одиниць виробів, має таку закономірність

$$D(x)=500x+2x^2.$$

Визначити середнє значення доходу на одиницю приросту виготовленої продукції, якщо її кількість x зросте з 100 до 120.

7.7. Завдання для індивідуальної самостійної роботи

1. Знайти область визначення функції:

a) $y=\sqrt{x^2+(N+1)x-N}$; b) $y=\log_{N+1}\left(x^2-(N-1)x-N\right)$.

2. Знайти границі:

a) $\lim\limits_{x\to N}\dfrac{x^2+3x-N^2}{x+N}$; b) $\lim\limits_{x\to(N+1)}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+N}{\sqrt{x-N}-1}$.

3. Дослідити неперервність функції та побудувати її графік:

a) $y=\begin{cases}x^{N+1}, & x<1;\\ \sqrt{x}, & x>1;\end{cases}$ b) $y=\begin{cases}(x-3)(x-1), & x\ge 1;\\ x^2+Nx, & x<1.\end{cases}$

Частина 8

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

8.1. Похідна і диференціал

8.1.1. Деякі задачі, що привели до поняття похідної

а) Задача про швидкість прямолінійного руху

Нехай тіло рухається прямолінійно вздовж осі $0s$, але нерівномірно. Тоді координата s точки буде змінюватись з часом за деяким законом, тобто $s = s(t)$. Починаючи з деякого моменту t, за час Δt тіло пройде шлях $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Середня швидкість v_c руху за проміжок Δt буде $v_c = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух в окремі моменти часу. Так, на початку проміжку Δt тіло могло рухатись прискорено, а в кінці цього проміжку часу – уповільнено.

Коли проміжок часу Δt зменшується, тоді v_c наближається до швидкості руху в момент t, що відповідає початку проміжку Δt.

⬢ **Означення 1.** ***Миттєвою швидкістю*** v ***(або швидкістю в момент*** t***)*** *називають границю відношення приросту шляху* Δs *до приросту часу* Δt, *коли* $\Delta t \to 0$, *тобто*

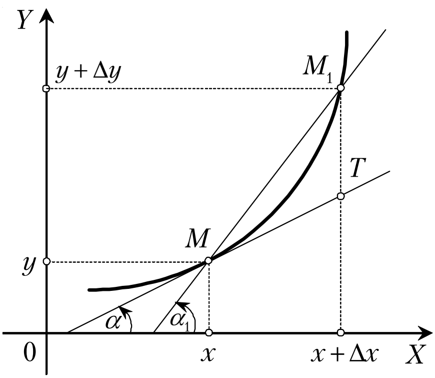
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1}$$

Миттєва швидкість v залежить від часу t, а також від вигляду функції $s = s(t)$.

b) Задача про дотичну

Нехай задана функція $y = f(x)$. Графіком цієї функції на площині xOy буде деяка крива лінія.

⬢ **Означення 2.** ***Дотичною до кривої*** $y = f(x)$ ***в точці*** $\boldsymbol{M}(x, y)$ ***(точка дотику)*** *називають граничне положення МТ січної* MM_1, *коли точка* M_1, *рухаючись вздовж кривої, прямує до точки дотику М* (див. мал. 1).



Мал. 1.

З малюнка видно, що тангенс кута нахилу січної MM_1 до осі Ox буде

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Із означення дотичної випливає, що її кутовий коефіцієнт $k = \mathrm{tg}\alpha$ є границя, до якої прямує кутовий коефіцієнт $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$ січної при необмеженому наближенні точки M_1 до точки M, тобто при $\Delta x \to 0$.

Отже, одержали

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

c) Задачі про маргінальні вартість, доход, прибуток

Маргінальними витратами називають гранично можливі витрати в умовах хоча б постійного відтворення виробництва відповідної продукції. Аналогічно визначають маргінальні доходи та прибуток.

Позначимо через $V(x)$, $D(x)$ та $P(x)$ витрати, доходи та прибуток виробництва x одиниць продукції. Кожна з цих величин є певною функцією кількості одиниць x виробленої та проданої продукції.

Якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, то ці функції одержать приріст

$$\Delta V(x) = V(x+\Delta x) - V(x);$$

$$\Delta D(x) = D(x+\Delta x) - D(x);$$

$$\Delta P(x) = P(x+\Delta x) - P(x).$$

Відношення приросту функцій до Δx характеризує приріст відповідної функції на одиницю приросту продукт, а границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ стає маргінальною.

Отже, маємо:

Маргінальна вартість

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Маргінальний доход

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x+\Delta x) - D(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Маргінальний прибуток

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x}. \tag{5}$$

Розглядаючи різні задачі, ми одержимо однакові формули (1)–(5) для їх розв'язків, а саме, шукану величину знаходять шляхом застосування граничного переходу до відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

8.1.2. Означення похідної та деякі її інтерпретації

⬢ **Означання 3.** ***Похідною функції*** $y = f(x)$ ***за аргументом*** x *називають границю відношення приросту функції* Δy *до приросту аргументу* Δx*, коли* Δx *довільним образом прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то її позначають через* $f'(x)$ *або* y' *або* $\dfrac{dy}{dx}$*, або*

$\dfrac{df(x)}{dx}$. *Отже, математично похідна функції визначається за формулою:*

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}. \tag{6}$$

Відмітимо, що похідну $f'(x)$ одержали за допомогою граничного переходу при постійному x, тому при $x=a$ вона приймає конкретне значення, яке позначають $f'(a)$ або $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

⬢ **Означання 4.** ***Операцію знаходження похідної функції*** $y=f(x)$ *називають диференціюванням цієї функції. Функцію* $f(x)$, *яка має похідну в точці x, називають диференційованою в точці x. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою у цьому проміжку.*

Повертаючись до розглянутих вище задач, які привели до поняття похідної, робимо такі висновки:

1) механічний зміст похідної: похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості в момент t тіла, що рухається за законом $S=S(t)$;

2) геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою x;

3) економічний зміст похідної: похідні $V'(x)$, $D'(x)$, $P'(x)$ дорівнюють маргінальній вартості, доходу та прибутку, відповідно.

Нижче, у розділі 8.6, буде детально розглянуто ще один приклад економічного змісту похідної першого порядку, а саме еластичність функції, яку часто застосовують при розв'язанні економічних задач.

8.1.3. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції

✦ **Теорема.** ***Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x_0, то вона в цій точці неперервна.***

Доведення. Якщо $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то згідно з означенням похідної при $x = x_0$ існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

В силу того, що границя змінної величини відрізняється від самої змінної лише на нескінченно малу α, то з останньої рівності маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x. \qquad (7)$$

Оскільки $f'(x_0)$ – постійна величина, то з властивостей нескінченно малих випливає, що обидва доданки в правій частині (7) є нескінченно малих величинами. Їз (7) випливає, що $\Delta y \to 0$, тобто функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0. Теорема доведена.

▼ **Наслідок.** *З цієї теореми випливає, що неперервність функції є необхідною умовою диференційованості функції. Це означає, що в точках розриву функція не має похідних, тобто вона не диференційована.*

Функція, яка неперервна в точці x_0, може бути не диференційованою в цій точці. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але не має похідної в цій точці тому, що

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \text{ а } \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

тобто границя відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від способу прямування $\Delta x \to 0$.

8.1.4. Означення диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в інтервалі (a,b), $x \in (a,b)$.

Згідно з означенням похідної функції $y = f(x)$ маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу α, тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \tag{8}$$

Функція диференційована в точці x, тому вона неперервна в цій точці, але тоді при $\Delta x \to 0$ величини Δy, $f'(x)\Delta x$ та $\alpha \cdot \Delta x$ будуть нескінченно малими. Порядок малості цих трьох величин різний: $f'(x)\Delta x$ та Δy мають однаковий порядок малості, а величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою вищого порядку малості. Отже, при $f'(x) \neq 0$ перший додаток у правій частині рівності (8) є головною частиною приросту функції. Він є лінійним відносно Δx.

⬢ **Означення 5.** *Головну лінійну частину приросту функції називають диференціалом цієї функції. Диференціал функції* $y = f(x)$ *позначають* dy *або* $df(x)$.

Таким чином,

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Отже, для знаходження диференціала функції $y = f(x)$, що має похідну в точці x, треба помножити значення цієї похідної на приріст аргумента Δx або на dx $(\Delta x = dx)$.

З рівності

$$dy = f'(x)dx \tag{9}$$

одержимо $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, тобто похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Диференціали часто застосовують для знаходження наближених значень функції.

8.2. Знаходження похідних першого порядку

8.2.1. Основні правила диференціювання

Правила сформулюємо у вигляді теорем.

✦ **Теорема 1.** ***Похідна постійної величини*** C ***дорівнює нулю, тобто*** $C'=0$**.**

Доведення. Дійсно, нехай $y=C$, тоді $\Delta y=0$ для будь-якого Δx, в тому числі і при $\Delta x\to 0$. Згідно з означенням похідної

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

що і треба було довести.

✦ **Теорема 2. Якщо кожна із функцій** $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ **(*n* – *скінчене число*) *диференційована в деякі точці*** x***, то їх алгебраїчна сума також є диференційованою в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі їх похідних, тобто***

$$\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right]'=f'(x)\pm f_2'(x)\pm\ \ldots\ \pm f_n'(x). \quad \textbf{(10)}$$

Доведення. Нехай $y=f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ \ldots\ \pm f_n(x)$ і аргумент x одержує приріст Δx. Тоді y також одержує приріст

$$\Delta y=\left[f_1(x+\Delta x)\pm f_2(x+\Delta x)\pm\ \ldots\ \pm f_n(x+\Delta x)\right]-$$
$$-\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right]=\Delta f_1\pm\Delta f_2\pm\ \ldots\ \pm\Delta f_n.$$

Згідно з властивостями границі і з тим, що існують похідні функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ маємо, що y' існує, причому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta x} \pm \ldots \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta x}.$$

Підставивши значення y, одержуємо

$$\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x),$$

що і треба було довести.

Аналогічно можна довести слідуючі теореми.

✦ **Теорема 3.** ***Якщо кожна з функцій*** $u(x)$ ***та*** $v(x)$ ***диференційована в точці*** x***, то добуток цих функцій також має похідну в точці*** x***, причому цю похідну знаходять за формулою***

$$\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \qquad \textbf{(11)}$$

✦ **Теорема 4.** ***Якщо*** $u(x)$ ***та*** $v(x)$ ***мають похідні в точці*** x ***і*** $v(x) \neq 0$***, то частка цих функцій також має похідну в точці*** x***, яку знаходять за формулою***

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}. \qquad \textbf{(12)}$$

✦ **Теорема 5.** ***Якщо*** $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ ***і функції*** f ***та*** φ ***диференційовані функції своїх аргументів, то існує похідна по*** x ***складної функції*** y***, причому вона дорівнює добутку похідної функції*** y ***по проміжному аргументу*** u ***та похідної функції*** φ ***по аргументу*** x***, тобто***

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad \textbf{(13)}$$

8.2.2. Похідні основних елементарних функцій

✦ **Теорема 1.** ***Якщо*** $y=\log_a x \ \ (a>0,\ \ a\neq 1)$***, то*** $y'=\frac{1}{x}\log_a e$.

Доведення. Нехай x довільна точка із $(0,\infty)$. Візьмемо приріст аргумента $\left|\Delta x<x\right|$ і знайдемо приріст функції

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Звідси, за допомогою граничного переходу, використовуючи другу чудову границю, одержимо

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e.$$

▼ **Наслідок.** *При* $a=e$, *маємо: якщо* $y=\ln x$, *то* $y'=\frac{1}{x}$.

✦ **Теорема 2.** ***Якщо*** $y=x^{\alpha}$***, де*** α ***– довільне дійсне число, тоді***

$$y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Доведення. Функція $y=x^{\alpha}$ визначена лише для $x>0$ для довільних α, тому вона додатня і її можна прологарифмувати, тоді $\ln y=\alpha\ln x$.

Використовуючи правило диференціювання складної функції, одержимо

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\alpha\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y'=y\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\alpha\cdot x^{\alpha}\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1},$$

що і треба було довести.

Аналогічно доводять слідуючу теорему.

✦ **Теорема 3.** ***Якщо*** $y = a^x$ ***, то*** $y' = a^x \cdot \ln a$ **.**

▼ **Наслідок.** *Якщо* $y = e^x$, *то* $y' = e^x$.

✦ **Теорема 4.** ***Якщо*** $u = \sin x$ ***, то*** $u' = \cos x$ **.**

Якщо $v = \cos x$ ***, то*** $v' = -\sin x$ **.**

Доведення. Доведення проведемо, спираючись на означення похідної. Дамо x приріст Δx, тоді приростом функції буде

$$\Delta u = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\Delta v = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Використовуючи першу чудову границю і властивості неперервних функцій, одержимо

$$u' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

$$v' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -\sin x,$$

що і треба було довести.

✦ **Теорема 5.** ***Якщо*** $u = \mathrm{tg}x$ ***,*** $v = \mathrm{ctg}x$ ***, то***

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi;\ v' = \frac{-1}{\sin^2 x},\ x \neq n\pi.$$

Доведення. Маємо: $u = \mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $v = \mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Використовуючи правило диференціювання частки, одержимо

$$u' = (\mathrm{tg}x)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$v' = (\mathrm{ctg}x)' \frac{(\cos)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

що і треба було довести.

8.2.3. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично

Якщо функціональна залежність між y та x задана неявно, тобто рівністю $F(x,y) = 0$, тоді для знаходження похідної по x функції y треба продиференціювати тотожність $F(x,y(x)) \equiv 0$, враховуючи, що y залежить від x, а потім розв'язати рівняння, яке одержали, відносно y'.

■ **Приклад.** Знайти y', якщо $y^2 - 2px = 0$.

↳ *Розв'язання.* Продиференціюємо задане рівняння по x:

$$2y \cdot y' - 2p = 0 \Rightarrow 2y \cdot y' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}.$$

Використовуючи цей спосіб, знаходять похідні обернених тригонометричних функцій, а саме:

якщо $y = \arcsin x$, то $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

якщо $y = \arccos x$, то $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

якщо $y = \mathrm{arctg} x$, то $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

якщо $y = \mathrm{arcctg} x$, то $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

Нехай залежність y від x задана параметрично у вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \tag{14}$$

де t – параметр.

При зміні t змінюється x та y, а точка з координатами (x, y) рухається по деякій лінії на площині, яка є графіком залежності y від x.

Якщо t одержить приріст Δt, то x та y також одержать прирісти

$$\Delta x = \varphi(\Delta t + t) - \varphi(t),\ \Delta y = \psi\left(\Delta t + t\right) - \psi\left(t\right),$$

причому при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$. Тому

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{\psi'\left(t\right)}{\varphi'\left(t\right)}.$$

Отже, похідну функції, яка задана параметрично, знаходять за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{15}$$

Усі правила та одержані формули знаходження похідних доцільно записати у вигляді таблиці і добре запам’ятати тому, що вони часто використовуються. Така таблиця є в цьому підручнику (дивись таблицю 5 наприкінці).

8.2.4. Приклади з економічним змістом

■ **Приклад 1.** Для функції витрат підприємства (у гривнях)

$$V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$$

знайти маргінальну вартість як функцію x та обчислити маргінальну вартість, коли вироблено $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ та $x_3 = 150$ одиниці продукції.

✎ *Розв'язання.* Згідно з пунктами 1.1 та 1.2 цього розділу для знаходження маргінальної вартості треба знайти похідну функції витрат, тобто

$$V'(x) = \left[0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000\right]' = 3\cdot 0{,}001x^2 - 0{,}6\cdot x + 40\,.$$

Одержали функцію маргінальної вартості для довільної кількості x виготовлених одиниць продукції, коли приріст x зростає на достатньо малу величину.

При $x_1 = 50$ одержимо

$$V'(50) = 0{,}003\cdot(50)^2 - 0{,}6\cdot 50 + 40 = 7{,}5 - 30 + 40 = 17{,}5\,.$$

При $x_2 = 100$ маємо

$$V'(100) = 0{,}003\cdot(100)^2 - 0{,}6\cdot 100 + 40 = 30 - 60 + 40 = 10\,.$$

Коли $x_3 = 150$, тоді

$$V'(150) = 0{,}003\cdot(150)^2 - 0{,}6\cdot 150 + 40 = 67{,}5 - 90 + 40 = 17{,}5\,.$$

Отже, можна казати, що вартість виготовлення 51-ої та 151-ої одиниць продукції підприємства буде 17 гривень 50 копійок $(\Delta x = 1)$, а вартість 101-ої одиниці буде лише 10 гривень.

■ **Приклад 2.** Для функції витрат виробництва x одиниць продукції (у гривнях) вигляду $V(x) = 1000 + 10x + 0{,}1x^2$ знайти маргінальну вартість та середню вартість виробництва одного виробу підприємства.

↳ *Розв'язання.* Маргінальна вартість виробництва буде

$$V'(x) = 10 + 0,2x .$$

Середня вартість виготовлення одиниці продукції буде

$$\bar{V}(x) = \frac{V(x)}{x} = \frac{1000}{x} + 10 + 0,1x .$$

Неважко бачити, що ці величини зовсім різні.

■ **Приклад 3.** Визначити маргінальний доход виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів знаходиться за формулою

$$x = 1000 - 100p ,$$

де p – роздрібна вартість одного виробу.

↳ *Розв'язання.* Спочатку визначимо роздрібну вартість p одиниці виробу як функцію кількості x, виготовлених виробів.

Із заданої рівності

$$x = 1000 - 100p \Rightarrow 100p = 1000 - x \Rightarrow p = 10 - 0,01x .$$

Функція доходу буде

$$D(x) = x \cdot p = x(10 - 0,01x) = 10x - 0,01x^2 .$$

Для знаходження маргінального доходу при $x = 300$ треба знайти значення $D'(x)$ при $x = 300$. Шляхом диференціювання функції $D(x)$ одержимо

$$D'(x) = 10 - 0,02x .$$

Отже, маємо

$$D'(300) = 10 - 0,02 \cdot 300 = 10 - 6 = 4 .$$

■ **Приклад 4.** Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них – p, причому

$$p + 0,1x = 80 ,$$

а функція витрат $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях).

Знайти маргінальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

↳ *Розв'язання.* У даному випадку функцією доходу буде

$$D(x) = x \cdot p = x(80 - 0{,}1x) = 80x - 0{,}1x^2.$$

Прибуток від виготовлення та продажу x виробів буде

$$P(x) = D(x) - V(x) = 80x - 0{,}1x^2 - (5000 + 20x) = 60x - 0{,}1x^2 - 5000.$$

Знайдемо маргінальний прибуток для довільного x:

$$P'(x) = \left(60x - 0{,}1x^2 - 5000\right)' = 60 - 0{,}2x.$$

Тому для $x = 150$ та $x = 400$ одержимо:

$$P'(150) = 60 - 0{,}2 \cdot 150 = 30,$$

$$P'(400) = 60 - 0{,}2 \cdot 400 = -20.$$

Отже підприємство буде мати збитки розміром 20 гривень за кожний виріб, який буде виготовлено та продано при зростанні кількості виробів.

■ **Приклад 5. (*Прибуток та реклама*).** Мале підприємство може виготовити та продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень. Якщо підприємство витрачає x гривень на рекламу виробів, тоді кількість проданих виробів дорівнює

$$1000\left(1 - e^{-0{,}001x}\right) - x \cdot 10^{-1}.$$

Знайти швидкість зміни прибутку, відносно зміни витрат на рекламу при $x = 1000$ та $x = 3000$.

↳ *Розв'язання.* Оскільки кожен виріб дає 10 гривен прибутку, тому задана кількість проданих виробів дає прибуток $P = 10000\left(1 - e^{-0{,}001x}\right) - x$ з урахуванням витрат на рекламу. Швидкість змін прибутку відносно зміни витрат на рекламу знайдемо шляхом диференціювання P:

$$P' = -10000\left(e^{-0{,}001x}\right)' - 1 = -10000 \cdot (-0{,}001)e^{-0{,}001x} - 1 = 10e^{-0{,}001x} - 1.$$

При $x = 1000$ та $x = 3000$ маємо

$$P'(1000) = 10 \cdot e^{-1} - 1 = 10 \cdot 0,3679 - 1 = 2,679,$$

$$P'(3000) = 10 \cdot e^{-3} - 1 = 10 \cdot 0,0498 - 1 = -0,502.$$

Отже, при витратах на рекламу 3000 гривень прибутки спадають.

■ **Приклад 6.** Нехай валовий продукт деякої держави змінюється з часом t за формулою

$$\Pi = 100 + t \text{ (мільярдів гривень),}$$

а кількість населення змінюється за законом

$$P = 120 + 2t \text{ (мільйонів).}$$

Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Розв'язання. Позначимо через $y(t)$ частину валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

За умовою цього прикладу

$$y(t) = \frac{\Pi}{P} = \frac{100 + t}{120 + 2t} \text{ (тисяч гривень на одну особу).}$$

Використовуючи механічний зміст похідної та правило диференціювання частки, знаходимо шукану швидкість

$$y'(t) = \frac{(100+t)' \cdot (120+2t) - (100+t) \cdot (120+2t)'}{(120+2t)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (120+2t) - 2(100+t)}{(120+2t)^2} =$$

$$= \frac{120 + 2t - 200 - 2t}{4(60+t)^2} = \frac{-80}{4(60+t)^2} = \frac{-20}{(60+t)^2}.$$

Отже, частина валового продукту кожного громадянина з часом зменшується.

8.2.5. Вправи до розділу 8.2

1. Знайти похідні першого порядку заданих функцій

a) $y=(x+1)\left(x^3+3\right)$; b) $u=\left(y+\dfrac{3}{y}\right)\cdot\left(y^2-5\right)$;

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$; d) $y=\dfrac{t^2-7t}{t-5}$; e) $u=\left(2x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$;

f) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; g) $y=x^2e^{-x}$; h) $y=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$.

2. Знайти диференціали першого порядку функцій

a) $y=\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$; b) $y=\sin^3 2x$; c) $y=3^{\cos x}$;

d) $y=\ln\mathrm{ctg}^3\sqrt{x}$; e) $y=\left(e^{\sin x}-1\right)^2$; f) $y=3\mathrm{arctg}x^2$;

g) $y=x\cdot\arcsin 2x$.

3. Знайти границі функцій при $x\to x_0$.

a) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$, $x_0=0$;

b) $f(x)=\dfrac{\left(\ln-\dfrac{1}{2}x^2\right)'}{1-x^3}$, $x_0=1$;

c) $f(x)=\left(2^x+3^x\right)':\left(2^x-3^x\right)'$, $x_0\to\infty$;

d) $f(x)=\left(e^x-x\right)':x$, $x_0=2$.

4. Знайти похідні першого порядку функцій, заданих неявно та параметрично

a) $x\sin y - y\cos x = 0$; b) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$;

c) $xy + \ln y - 2\cdot\ln x = 0$; d) $y\ln x - x\ln y = x + y$;

e) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = 1 - \ln\sin t \end{cases}$; f) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x = \mathrm{ctg}\, t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

5. Розв'язати задачі з економічним змістом, використовуючи похідну.

a) Знайти маргінальний доход підприємства, якщо кількість виготовлених та проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p зв'язані рівністю $x = 4000 - 2p$.

b) Розв'язати задачу a) при умові, що $x = 4000 - 10\sqrt{p}$.

c) Функція витрат підприємства має вигляд

$$V(x) = 2000 + 10x - 0{,}1x^2 + 0{,}002x^3 \text{ (тисяч гривень).}$$

Знайти маргінальні витрати при $x = 50$, $x = 100$ та $x = 120$.

8.3. Похідні вищих порядків

8.3.1. Поняття похідних n-го порядку

Нехай функція $y = f(x)$ визначена та має похідну першого порядку в інтервалі (a,b). Тоді її похідна $y' = f'(x)$ також буде функцією, що визначена в (a,b). Можна чекати, що ця функція $f'(x)$ має похідну в деякій точці x інтервалу (a,b). Таку похідну називають

другою похідною або похідною другого порядку функції $y = f(x)$ ***в точці*** x ***і позначають***

$$f''(x) \text{ або } y'',\ y''_x \text{ або } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогічно визначають похідні третього, четвертого порядків.

⬢ **Означення 6.** *Нехай* n = 1, 2, 3,... *Якщо функція* $y = f(x)$ *має похідну* $(n-1)$ *порядку, диференційовану в деякій точці* x *інтервалу* (a,b), *то похідну від* $f^{(n-1)}(x)$ *називають похідною* n*-го порядку і позначають так:*

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ y_x^{(n)}, \text{ або } \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Згідно з цим означенням *n* похідна функції $y = f(x)$ визначається рівністю

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'. \qquad (16)$$

Похідні вищих порядків мають широке застосування.

Так, якщо функція $S = S(t)$ описує закон руху матеріальної точки, то її перша похідна $S'(t)$ дає величину миттєвої швидкості, а друга похідна $S''(t)$ дорівнює швидкості зміни швидкості, тобто це є прискорення в момент t.

Якщо $V(x)$ є функція виробничих витрат (витрати на виготовлення x виробів), то $V'(x)$ дає маргінальну вартість, тобто витрати на досить малу частину виготовлення додаткової продукції. Друга похідна $V''(x)$ дає швидкість зміни маргінальної вартості відносно змін кількості випуску продукції.

■ **Приклад 7. (*Аналіз функції витрат*).** Для функції витрат

$$V(x)=0{,}001x^3-0{,}3x^2+40x+1000$$

маргінальна вартість буде

$$V'(x)=0{,}003x^2-0{,}6x+40,$$

друга похідна має вигляд

$$V''(x)=0{,}006x-0{,}6=0{,}006(x-100).$$

Коли $x=150$ маємо: $V'(150)=17{,}5$; $V''(150)=0{,}3$.

Остання рівність означає, що кожна додаткова одиниця виробленої продукції спричиняє зростання на 0,3 маргінальної вартості.

■ **Приклад 8.** Знайти похідну першого та вищих порядків функції

$$y=3x^4-5x^3+7x^2-1.$$

↳ *Розв'язання.* Шляхом послідовного диференціювання знаходимо:

$$y'=12x^3-15x^2+14x$$

$$y''=36x^2-30x+14$$

$$y^{(3)}=72x-30$$

$$y^{(4)}=72$$

Для $n\geq 5$ маємо $y^{(n)}=0$.

Вкажемо декілька формул, які використовуються при знаходженні похідних порядку $n>2$.

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{17}$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \tag{18}$$

$$(y\pm u\pm v)^{(n)}=y^{(n)}\pm u^{(n)}\pm v^{(n)} \tag{19}$$

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + C_n^1 u^{(n-1)}\cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)}\cdot v'' + C_n^3 u^{(n-3)}\cdot v^{(3)} + \ldots$$
$$+u\cdot v^{(n)}, \qquad (20)$$

де $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

8.3.2. Вправи до розділу 8.3

1. Знайти похідні усіх порядків функції

$$y = 3x^5 + 7x^3 - 4x^2 + 12.$$

2. Знайти u'', якщо $u = \dfrac{1}{x^2+1}$.

3. Знайти y'', якщо $y = (x+1)e^{-x}$.

4. Знайти маргінальну вартість та швидкість її зміни відносно кількості виробів для функції витрат

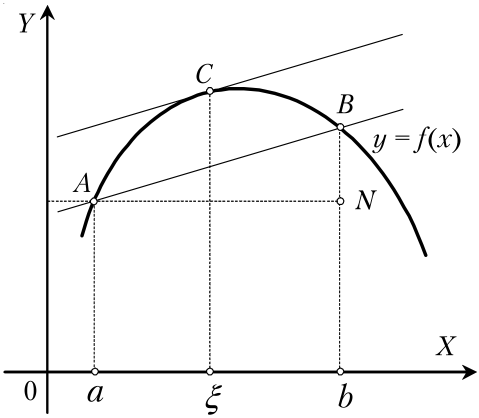
$$V(x) = 500 + 30x - 0{,}1x^2 + 0{,}002x^3.$$

8.4. Основні теореми диференціального числення

Застосування похідних під час дослідження функції базується на слідуючи теоремах, що доведені математиками Франції у XVII та XVIII століттях.

✦ **Теорема Лагранжа (про скінчений приріст функції).** ***Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і має похідну в усіх точках інтервалу (a,b), то всередині цього інтервалу існує хоча б одна точка $\xi\,(a<\xi<b)$ така, що виконується рівність***

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi). \qquad \mathbf{(21)}$$



Мал. 2.

Дамо геометричне доведення цієї теореми. Проведемо січну AB до графіка $y=f\left(x\right)$ (див. мал. 2) і будемо пересувати цю січну паралельно самій собі, поки вона не стане дотичною до графіка функції в деякій точці C з абсцисою ξ. Відмітимо, що дотичну до графіка функції можна провести в кожній точці, що лежить всередині $\left[a,b\right]$, тому що за умовою теореми функція має похідну в усіх точках $\left(a,b\right)$.

Кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту січної, а саме

$$\frac{BN}{AN}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}.$$

Але, згідно з геометричним змістом похідної, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці C дорівнює $f'\left(\xi\right)$. Одержимо рівність

$$\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}=f'\left(\xi\right),$$

що і треба було довести.

Рівність (21) називають ***формулою Лагранжа.*** Її можна записати у вигляді

$$f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\cdot\left(b-a\right), \qquad (22)$$

і тоді доведену теорему можна сформулювати так: скінчений приріст диференційованої функції на відрізку дорівнює відповідному приросту аргументу, помноженому на значення похідної функції в деякій внутрішній точці відрізка.

✦ **Теорема Ролля *(про нулі похідної)*. *Якщо функція*** $y = f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a,b]$***, диференційована в усіх внутрішніх точках цілого відрізка, а на його кінцях приймає рівні значення, то похідна*** $f'(x)$ ***дорівнює нулю хоча б в одній внутрішній точці*** $\xi(a < \xi < b)$ ***цього відрізка.***

Доведення. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і диференційована в усіх внутрішніх точках, тоді для $f(x)$, згідно з теоремою Лагранжа, має місце рівність (22). За умовою теореми Ролля $f(b) = f(a)$, тому одержуємо

$$(b-a)\cdot f'(\xi) = 0.$$

Але $b \neq a$, тому $b - a \neq 0$ і з останньої рівності випливає, що $f'(\xi) = 0$. Теорема доведена.

Теорема Ролля має простий геометричний зміст: якщо функція задовольняє умовам теореми Лагранжа і приймає рівні значення на кінцях відрізка, то знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка функції буде паралельна осі абсцис.

✦ **Правило Лопіталя. *Нехай*** $f(x)$ ***та*** $g(x)$ ***– неперервні та мають похідні в усіх*** $x \neq a$ ***з околу точки*** $x = a$***, а в точці*** a ***рівні нулю або нескінченності. Тоді границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто***

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \textbf{(23)}$$

Якщо відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ знову є невизначеністю вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ і похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ задовольняють умовам правила Лопіталя, то для обчислення границі можна застосувати правило Лопіталя вдруге і т.д.

■ **Приклад 9.** Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

↬ *Розв'язання.* Уданому випадку $f(x)=x^3$ та $g(x)=e^x$ задовольняють умовам правила Лопіталя. Відношення їх є невизначеність вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x\to\infty$. Застосувавши правило Лопіталя, одержуємо:

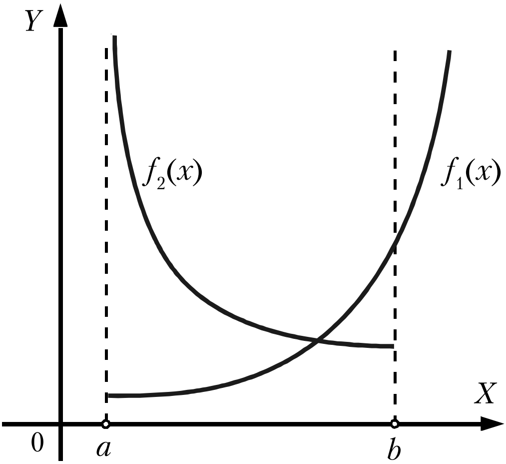
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

8.5. Оптимізація та побудова графіка функції

При дослідженні функції, заданої аналітично, важливо визначити її інтервали зростання, спадання, опуклість графіка функції, при яких x функція має найбільше та найменше значення і т.д. Нижче буде показано, що розв'язання цих питань значно спрощується, якщо застосовувати похідну.

8.5.1. Зростання, спадання та екстремуми функції

⬢ **Означення 7.** *Функцію* $y=f(x)$ *називають* ***зростаючою (спадною) в проміжку*** (a,b), *якщо більшому значенню аргументу в цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо із нерівності* $x_2>x_1$ *випливає нерівність* $f(x_2)>f(x_1)$, *то*



Мал. 3.

функція $f(x)$ – зростаюча, а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $f(x)$ спадна.

На малюнку 3 бачимо, що в (a,b) функція $f_1(x)$ – зростаюча, а $f_2(x)$ – спадна.

Необхідна ознака зростання (спадання) функції

Якщо диференційована функція зростає (спадає) в деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна (недодатна) в цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f(x)$ – диференційована функція і зростає в (a,b). Згідно з означенням похідної

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо x та $x + \Delta x$ належать (a,b), то в силу зростання функції $y = f(x)$ знаки приросту функції та приросту аргументу однакові. Тому

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \text{ при } \Delta x \neq 0.$$

Оскільки границя додатної величини не може бути від'ємною, тому переходом до границі в цій нерівності одержимо

$$f'(x) \geq 0.$$

Тим самим твердження ознаки доведено у випадку зростання функції.

У випадку спадної функції доведення аналогічне. У цьому випадку прирости функції та аргументу мають різні знаки, тому

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0 \quad \text{і} \quad f'(x)\le 0,$$

що і треба було довести.

Достатня ознака зростання (спадання) функції

Якщо похідна диференційованої функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає в цьому проміжку.

Якщо похідна диференційованої функції від'ємна всередині деякого проміжку, то функція спадає в цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f'(x)>0$ при $a<x<b$. Для довільних $x_1<x_2$, що належать (a,b), згідно з теоремою Лагранжа маємо

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot f'(\xi),$$

де $x_1<\xi<x_2$, а тому $\xi\in(a,b)$. Із нерівностей $x_2-x_1>0$ та $f'(\xi)>0$ випливає $f(x_2)-f(x_1)>0$ або $f(x_2)>f(x_1)$ при $x_2>x_1$. Але це означає, що $f(x)$ зростаюча функція в (a,b).

Друге твердження достатньої ознаки доводиться аналогічно.

⬢ **Означення 8.** *Зростаюча або спадна функція називається* ***монотонною****. Проміжки, в яких задана функція зростає або спадає, називають* ***проміжками монотонності цієї функції****.*

Для знаходження *інтервалів монотонності* заданої функції $y=f(x)$ доцільно дотримуватись такого порядку дій:

1) знайти похідну $f'(x)$;

2) знайти корені рівняння $f'(x)=0$;

3) визначити знак похідної $f'(x)$ в кожному із інтервалів, на які поділяється область існування функції $f(x)$ знайденими коренями рівняння $f'(x)=0$;

4) за одержаними знаками похідної зробити висновок, в якому інтервалі функція зростає, а в якому спадає.

■ **Приклад 10.** Витрати виробництва визначені функцією

$$V(x)=2x^3-6x+7 .$$

Знайти її інтервали монотонності.

✎ *Розв'язання.* Задана функція існує при $x\in(-\infty,\infty)$, але має економічний зміст лише для $x>0$.

Знаходимо похідну:

$$V'(x)=6x^2-6=6(x^2-1).$$

Із $$6(x^2-1)=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1.$$

Ці значення поділяють вісь *Ox* на інтервали $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$. В кожному з цих інтервалів $V'(x)$ має постійний знак.

При $x\in(-\infty,-1)$ $V'(x)>0$.

При $x\in(-1,1)$ $V'(x)<0$.

При $x\in(1,\infty)$ $V'(x)>0$.

Отже, функція $V(x)$ зростає при $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ і спадає в інтервалі $(-1,1)$. З економічної точки зору, ця функція спадає в інтервалі $(0,1)$ і зростає в $(1,\infty)$.

⬢ **Означення 9.** *Функція* $f(x)$ *має при* $x = x_0$ *максимум (мінімум), якщо існує такий окіл точки* x_0*, для усіх точок* x *якого виконується нерівність*

$$f(x_0) > f(x) \text{ для максимуму,}$$

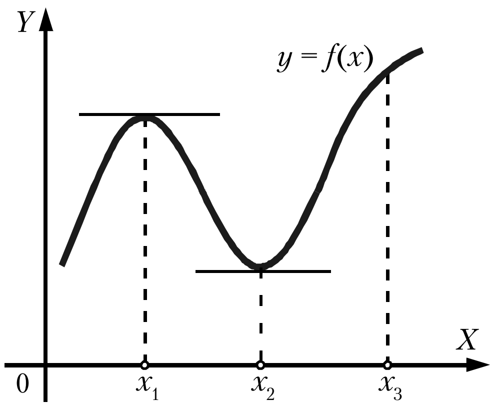
$$f(x_0) < f(x) \text{ для мінімуму.}$$

Узагальненим терміном понять максимуму та мінімуму є ***екстремум.***

Значення аргументу $x = x_0$ (тобто точки x_0) при якому функція $f(x)$ має екстремум (максимум або мінімум) називають ***точкою екстремуму функції*** (максимуму або мінімуму, відповідно).

В економічних дисциплінах екстремум функції називають її ***локальним оптимумом***, а процес знаходження екстремального значення функції називають ***оптимізацією***.

Функція, графік якої зображено на малюнку 4, має в точці x_1 максимум, а в точці x_2 – мінімум. В означенні 9 окіл точки x_0 може бути малим, тому екстремум має локальний характер, він не залежить від поведінки функції в точках, що віддалені від екстремальної точки. Так, на малюнку 4: $f(x_3) > f(x_1) = y_{\max}$.



Мал. 4.

В точках екстремуму диференційованої функції дотична до графіка функції паралельна осі *Ox*, тому її кутовий коефіцієнт дорівнює нулю.

Рівність

$$f'(x) = 0 \qquad (24)$$

називають ***необхідною умовою існування екстремуму функції*** $y = f(x)$, а розв'язки цього рівняння називають

підозрілими на екстремум точками*. *Критичними точками першого роду називають корені рівняння (24) та точки, в яких $f'(x)$ не існує.

Щоб визначити, в яких з критичних точок функція має екстремум, треба застосувати достатні умови існування екстремуму, які описує слідуюча теорема.

✦ **Теорема (достатні умови існування екстремуму функції).** ***Якщо*** $f(x)$ ***диференційована в околі критичної точки першого роду*** $x = x_0$ ***і її похідна*** $f'(x)$:

1) ***зліва від цієї точки (при*** $x < x_0$***) додатна, а справа (при*** $x > x_0$***) від'мна, то в точці*** x_0 ***функція має максимум;***

2) ***зліва (при*** $x < x_0$***) від'ємна, а справа (при*** $x > x_0$***) додатна, то в точці*** x_0 ***функція має мінімум;***

3) ***зліва та справа від точки*** x_0 ***має однаковий знак, то в точці*** x_0 ***функція не має екстремуму.***

Доведення. Нехай при переході аргументу x через точку x_0 зліва направо похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус. Це означає, що зліва від x_0 знаходиться проміжок зростання функції, а справа – проміжок спадання функції. Тому, точка x_0 є точкою максимуму функції. Аналогічно впевнюються, що при зміні знака похідної з мінуса на плюс при переході x через x_0 зліва направо, точка x_0 буде точкою мінімуму функції $f(x)$. Якщо похідна не змінює свого знака при переході x через x_0, то це означає, що функція $f(x)$ з обох сторін точки x_0 зростає або спадає і тому в точці x_0 функція не має екстремуму. При доведенні використали існування похідної зліва та справа від точки x_0, а в точці x_0 похідна може не існувати.

У зв'язку з тим, що екстремум функції – локальний оптимум дуже часто використовується в економічній практиці, дамо схему дослідження функції на екстремум:

1) знаходять похідну $f'(x)$ заданої функції;

2) знаходять критичні точки першого роду (значення x, при яких $f'(x)$ не існує або дорівнює 0);

3) визначають знак $f'(x)$ в околі кожної критичної точки;

4) роблять висновок, чи має функція екстремум у знайдених точках і який саме (мінімум чи максимум);

5) обчислюють екстремальні значення функції в точках екстремуму.

Доцільно у ході дослідження використовувати таблицю по аналогії з наведеним нижче прикладом.

■ **Приклад 11.** Знайти екстремуми функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

Розв'язання. Розв'язання проведемо згідно вказаної схеми.

1) знаходимо похідну: $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$;

2) знаходимо критичні точки першого роду:

із $$6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,$$

інших точок не має тому, що y' визначена при усіх $x \in (-\infty, \infty)$;

3) критичні точки x_1 та x_2 поділяють область існування функції на інтервали постійного знака похідної (записуємо критичні точки та відповідні інтервали у перший рядок таблиці 1). Визначаємо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі (записуємо ці знаки у другий рядок таблиці 1);

4) згідно з достатніми умовами існування екстремуму функції робимо висновок відносно кожної критичної точки. (Характер поведінки функції відображаємо у третьому рядку таблиці 1);

5) Обчислимо максимальне та мінімальне значення функції:

Таблиця 1

x	$(-\infty,-1)$	$x_1=1$	$(1,2)$	$x_2=2$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$y_{\max}=y(1)=2\cdot1-9\cdot1+12\cdot1+7=12,$$

$$y_{\min}=y(2)=2\cdot8-9\cdot4+12\cdot2+7=11.$$

8.5.2. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Функція, неперервна на відрізку $[a,b]$, досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значень. Ці значення вона може досягнути на одному з кінців відрізку або всередині відрізку.

Тому для знаходження найбільшого та найменшого значень функції $y=f(x)$ на $[a,b]$ треба:

1) знайти всі критичні точки першого роду;

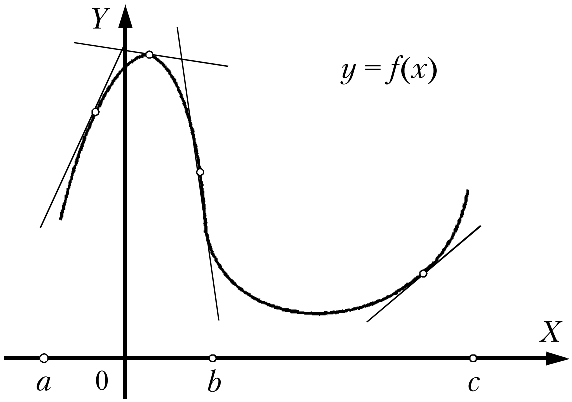
2) визначити значення функції на кінцях відрізка, тобто обчислити $f(a)$ та $f(b)$, та в тих критичних точках, що належать відрізку;

3) із одержаних значень функції обрати найбільше та найменше значення функції на відрізку.

8.5.3. Опуклість та угнутість графіка. Точки перегину

⬢ **Означення 10.** *Криву $y=f(x)$ називають* ***опуклою на інтервалі*** *(a,b), якщо усі точки графіка функції лежать нижче її дотичних на цьому інтервалі.*

Криву $y=f(x)$ називають ***угнутою*** *на (a,b), якщо усі точки графіка функції лежить вище її дотичних на цьому інтервалі.*



Мал. 5.

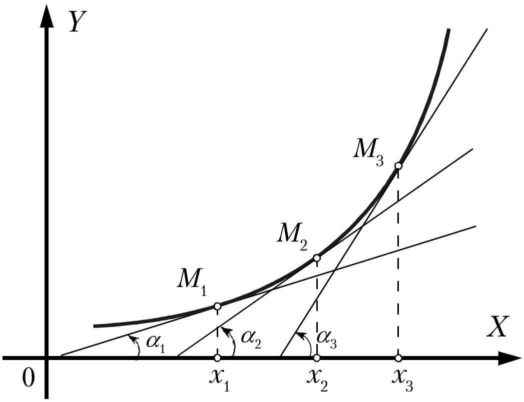
Функція, зображена на малюнку 5, на інтервалі (a,b) опукла, а на інтервалі (b,c) угнута.

⬢ **Означення 11.** *Якщо в досить малому околі точки дотику* x_0 *крива зліва цієї точки лежить по один бік дотичної, а справа – з іншого боку дотичної, то точку* $(x = x_0)$ *називають* ***точкою перегину кривої***.

Тепер розглянемо ознаки опуклості та угнутості кривої.

✦ **Теорема.** ***Якщо в усіх точках інтервалу*** (a,b) $f''(x) > 0$ ***то крива*** $y = f(x)$ ***є угнутою на цьому інтервалі; якщо*** $f''(x) < 0$ ***на деякому інтервалі, то крива*** $y = f(x)$ ***опукла на цьому інтервалі.***

Замість строгого доведення теореми обмежимось геометричним поясненням. Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої угнутий (дивись наприклад, мал. 6).



Мал. 6.

Візьмемо декілька точок M_1, M_2, M_3, ... кривої, розташованих в порядку зростання їх абсцис $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$.

Кут нахилу дотичних до кривої в обраних точках також зростає, тобто $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$. Тому $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3 < \ldots$.

Але тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції в деякій точці дорівнює значенню похідної в цій точці, тому $f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3) < \ldots$, при $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$.

Отже, похідна $f'(x)$ – зростаюча функція, а тому її похідна додатна, тобто $\left[f'(x)\right]' > 0$ або $f''(x) > 0$.

Таким же чином можна пояснити ознаку опуклості. Згідно з означення 11 зліва та справа від точки перегину крива змінює опуклість на угнутість або угнутість на опуклість, тому друга похідна $f''(x)$ по різні сторони від точки перегину буде мати різні знаки, а в самій точці перегину дорівнює нулю або не існує. Звідси випливає слідуюче правило для знаходження точок перегину.

Правило. *Точка $x = x_0$ буде точкою перегину кривої $y = f(x)$, якщо:*

1) $f''(x_0) = 0$ *або* $f''(x_0)$ *не існує;*

2) *знаки* $f''(x)$ *зліва* $(x < x_0)$ *та справа* $(x > x_0)$ *різні.*

Якщо $f''(x)$ не змінює свій знак при переході аргументу через x_0, то при $x = x_0$ перегину не буде.

Рівність умови 1 цього правила називають *необхідною умовою,* а умову 2 – *достатньою умовою існування точок перегину графіка функції.*

⬢ **Означення 12.** *Значення x, при яких $f''(x) = 0$ або не існує, називають* ***критичними точками другого роду функції*** $f(x)$.

■ **Приклад 12.** Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину функції $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (крива Гауса).

Розв'язання. Знайдемо другу похідну цієї функції. Маємо:

$$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}},\ y'' = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 1\right).$$

Друга похідна визначена для усіх x. Тому критичні точки другого роду знайдемо із рівності $y'' = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Визначимо знак другої похідної при проходженні x через кожну критичну точку. За результатами цього дослідження складемо таблицю 2.

Таблиця 2

x	$(-\infty, -1)$	$x_1 = -1$	$(-1, 1)$	$x_2 = 1$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$		*точка перегину*		*точка перегину*	

Отже, обидві точки $x = -1$ та $x = 1$ є точками перегину; $(-1,\ 1)$ – інтервал опуклості; $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$ – інтервали угнутості графіка. Значення функції в точках перегину буде $y_{пер} = f(\pm 1) = e^{-1/2}$.

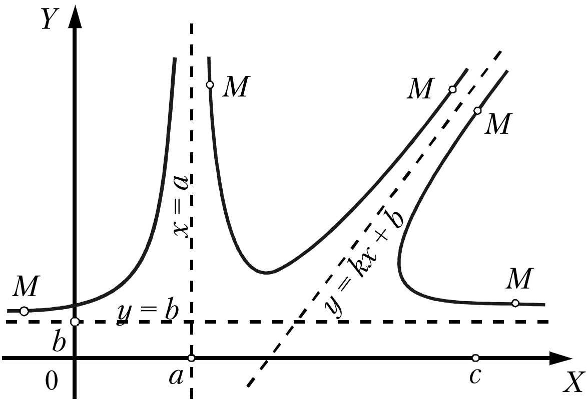
8.5.4. Асимптоти кривої

Означення 13. *Пряму лінію називають* ***асимптотою кривої*** $y = f(x)$*, якщо відстань точки M кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддалені точки M в нескінченність.*

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими, та горизонтальними (мал. 7).

Вертикальні асимптоти існують, коли функція має розриви другого роду. Якщо a точка такого розриву, то $x = a$ буде рівнянням вертикальної асимптоти.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, тобто у вигляді $y = kx + b$. Відстань



Мал. 7.

точки $M(x,y)$, що належить кривій $y=f(x)$, до прямої $y=kx+b$ можна наближено виразити через різницю між ординатами кривої та прямої при однаковому значенні x:

$$d=f(x)-(kx+b).$$

За означенням асимптоти $d\to 0$ при $x\to\pm\infty$, тобто

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0.$$

Якщо цю рівність поділити на x, то одержимо:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Але $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0$, тому

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (25)$$

Якщо не існує скінченого значення $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, то похилої асимптоти не існує. Якщо вказана границя існує, то за формулою (25) знаходимо k, а за формулою

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] \qquad (26)$$

знаходимо b і таким чином одержимо рівняння похилої асимптоти вигляду $y=kx+b$.

Якщо $k = 0$, то за формулою (26) одержимо

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x), \tag{27}$$

і пряма $y = b$ буде горизонтальною асимптотою.

■ **Приклад 13.** Знайти асимптоти кривої $y = x + e^{-x}$.

↳ *Розв'язання*. Задана функція не має точок розриву другого роду, тому крива не має вертикальних асимптот.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати використовуючи формули (25) та (26). Маємо:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^{x}} \right) = 1 .$$

При $x \to -\infty$ не має скінченної границі, тобто k не існує.

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(x + e^{-x} - x \right) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0 .$$

Отже, крива $y = x + e^{-x}$ має при $x \to \infty$ похилу асимптоту $y = x$.

8.5.5. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка

Графік заданої функції можна будувати по довільних точках. Для цього обирають довільним чином деяку кількість точок. Чим більше кількість обраних точок, тим точніше буде зображено графік функції.

Одержані вище результати дозволяють спростити цю задачу шляхом обирання не довільних точок, а характерних саме для заданої функції.

Для науково обґрунтованого дослідження функції та побудови її графіка доцільно дотримуватись такої схеми:

Перший етап *(використання виду заданої функції)*

1. Знаходимо область визначення функції, точки розриву, інтервали неперервності.
2. Досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність.
3. Знаходимо асимптоти графіка функції.
4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

Другий етап *(використання похідної першого порядку)*

5. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів та екстремальні значення функції.

Третій етап *(використання похідної другого порядку).*

6. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину та значення функції в точках перегину.

Четвертий етап.

7. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат отримані точки, асимптоти і будуємо графік функції з урахуванням інтервалів неперервності, зростання та спадання, опуклості та угнутості, асимптот графіка.

■ **Приклад 14.** Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Задана функція має розрив в точці $x=1$, тому $\left(-\infty,\ 1\right)\cup\left(1,\ \infty\right)$ область неперервності цієї функції.

Задана функція не буде парною або непарною.

Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть

$$\lim_{x\to1-0}\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=\infty.$$

Отже, пряма $x=1$ є вертикальна асимптота. Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x\left(x-1\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0\,.$$

Отже, похилих асимптот не має. Шукаємо горизонтальні асимптоти:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Тому пряма $y=0$ буде горизонтальною асимптотою.

Тепер знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

при $x=0$ маємо $y=-1$, тобто точку $M_0\left(0,\ -1\right)$;

при $y=0$ одержуємо $x=1/2$; тобто точку $M_1\left(1/2,\ 0\right)$.

Переходимо до другого етапу дослідження.

Похідна функція буде

$$y'=\frac{2\left(x-2\right)^2-2\left(x-1\right)\left(2x-1\right)}{\left(x-1\right)^4}=\frac{2x-2-4x+2}{\left(x-1\right)^3}=\frac{-2x}{\left(x-1\right)^3}.$$

Похідна не існує в точці $x=1$ і дорівнює нулю при $x=0$. Отже, критичною точкою першого роду буде лише точка $x=0$ тому, що $x=1$ не належить області визначення функції.

Складемо таблицю з врахуванням точки розриву та критичної точки.

Таблиця 3

x	$\left(-\infty,\ 0\right)$	$x=0$	$\left(0,\ 1\right)$	$x=1$	$\left(1,\ \infty\right)$
$f'\left(x\right)$	–	0	+	*не існує*	–
$f\left(x\right)$	↘	min	↗	*не існує*	↘

Отже, на інтервалі $(0,\ 1)$ функція зростає, а в інтервалах $(-\infty,\ 0)$ та $(1,\ \infty)$ – спадає.

Екстремальним значенням функції буде

$$y_{\min} = f(0) = -1.$$

Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка, точку перегину за відповідною схемою: друга похідна має вигляд

$$y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

Звідси знаходимо критичні точки другого роду:

$x = -1/2$ та $x = 1$, але точка $x = 1$ не належить області визначення функції.

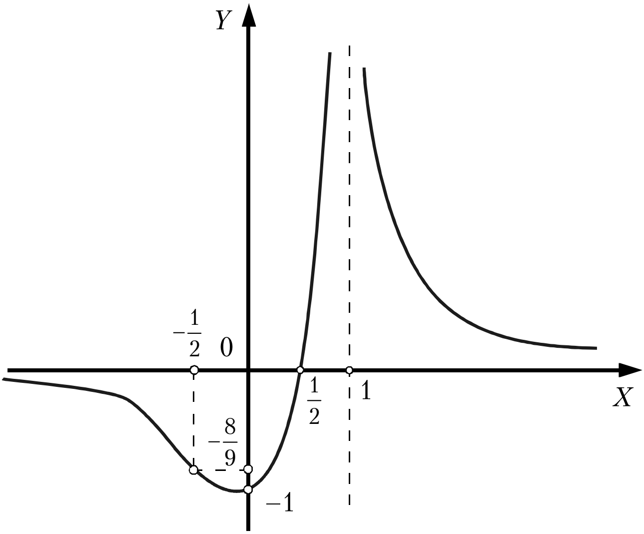
Складаємо таблицю з врахуванням точки розриву та $x = -1/2$.

Таблиця 4

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$x = -\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$	$x = 1$	$(1,\ \infty)$
$f''(x)$	–	0	+	*не існує*	+
$f(x)$	$\frown$	*точка перетину*	$\smile$	*не існує*	$\smile$

Отже, на інтервалі $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ графік функції опуклий, а в інтервалах $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ та $(1,\ \infty)$ графік угнутий.

Значення функції в точці перегину буде $y_{пер} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$.



Мал. 8.

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції (мал. 8).

8.5.6. Вправи до розділу 8.5.

1. Знайти інтервали зростання, спадання та екстремуми функції:

a) $y = x^2 + 2x - 3$; b) $y = \dfrac{x}{x-2}$; c) $y = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$;

d) $y = 2x^2 - \ln x$; e) $f(x) = x^2(x-12)^2$; f) $y = x^3 - 3x + 4$.

2. Знайти асимптоти графіка функції:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x-3}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$; c) $y = \dfrac{x^2}{2(1-x)}$.

3. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину функції:

a) $f(x) = (x+3)^{-1}$; b) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

c) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

4. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку $\left[a,\ b\right]$:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x$, $\left[-4;\ 4\right]$;

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x^2 + 1$, $\left[-1;\ 5\right]$;

c) $f\left(x\right) = \dfrac{x+6}{x^2+13}$, $\left[-5;\ 5\right]$;

d) $f\left(x\right) = \dfrac{x+3}{x^2+7}$, $\left[-3;\ 7\right]$;

e) $y = \dfrac{x-5}{x^2+11}$, $\left[-3;\ 7\right]$;

f) $f\left(x\right) = \dfrac{x-4}{x^2+9}$, $\left[-4;\ 6\right]$.

5. Розв'язати задачі:

a) Треба виготовити відкритий циліндричний бак об'єму *V*. Матеріал, з якого виготовляють дно бака коштує p_1 гривень за м^2, а вартість матеріалу бокової поверхні – p_2 за м^2. При якому співвідношенні радіуса дна до висоти витрати на матеріал будуть найменшими?

b) Полотняний намет об'єму *V* має форму прямого кругового конуса. При якому відношенні висота конуса до радіуса основи потрібна найменша кількість полотна для намету?

c) *Аналіз функції витрат.* Функція витрат виробництва має вигляд

$$V\left(x\right) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000\,.$$

Знайти, як змінюється маргінальна вартість на кожну одиницю продукції при $x = 150$.

d) *Аналіз функцій витрат, доходу та прибутку.* Для функції витрат $V\left(x\right) = 500 + 20x$ і заданої вартості одиниці продукції $p = 100 - x$, знайти інтервали, в яких функції витрат, доходу та прибутку зростають та спадають.

8.6. Один з прикладів економічного використання похідної

Розглянемо ще одне із можливих використань похідної в економічних задачах.

8.6.1. Поняття еластичності попиту

В багатьох задачах суттєву роль грає еластичність попиту. Ознайомимось з поняттям еластичності та деякими застосуваннями її.

Нехай p – вартість одного виробу, а x – кількість виробів, що виготовлена та продана за деякий певний інтервал часу. Нехай $x = f(p)$. Еластичність попиту позначають літерою η (ета) і визначають так:

$$\eta = \frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp} = \frac{pf'(p)}{f(p)}. \tag{28}$$

Дамо пояснення еластичності попиту η. Якщо вартість виробу зросте з p до $p + \Delta p$, тоді і кількість виробів також зміниться на величину $\Delta x = f(p + \Delta p) - f(p)$. Відносний приріст вартості буде $\frac{\Delta p}{p}$, а відносний приріст функції попиту буде $\frac{\Delta x}{x}$. Якщо відносний приріст помножити на 100, то одержимо відповідний відсоток змін початкової вартості та початкового попиту.

Наприклад, початкова вартість одного виробу 2 гривні зросла до 2,1 гривень, тоді $\Delta p = 2{,}1 - 2 = 0{,}10$ гривні. Отже, відносна вартість $\frac{\Delta p}{p} = 0{,}05$ вказує зростання початкової вартості. Якщо цю величину помножити на 100, то одержимо відсоток зміни початкової вартості кожного виробу:

$$100 \cdot \frac{\Delta p}{p} = 100 \cdot 0{,}05 = 5\%.$$

Аналогічно $100\cdot\dfrac{\Delta x}{x}$ дорівнює відсотку зміни початкового попиту. Якщо зростання вартості p викликає спад попиту, тоді $\Delta x < 0$.

Розглянемо відношення відносного приросту попиту до відносного приросту вартості одиниці продукції

$$\frac{\Delta x}{x}:\frac{\Delta p}{p}=\frac{p\Delta x}{x\Delta p}.$$

Це співвідношення показує, в скільки разів відносний приріст попиту більше відносного приросту вартості кожного виробу.

Якщо в останній рівності перейти до границі при $\Delta p\to 0$, то одержимо:

$$\eta=\frac{p}{x}\times\frac{dx}{dp}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{p\Delta x}{x\Delta p}.$$

Оскільки границя η відрізняється від виразу $\dfrac{p\Delta x}{x\Delta p}$ на нескінченно малу більшого порядку малості відносно $\Delta p\to 0$, то $\eta\approx\dfrac{p\Delta x}{x\Delta p}$, або відсоток зміни попиту $\approx\eta$. (Відсоток зміни вартості).

Наприклад, якщо зростання вартості на 2% викликає спадання попиту на 3%, тоді еластичність попиту буде $\eta=\dfrac{-3}{2}=-1{,}5$.

Якщо еластичність попиту $\eta=-0{,}5$, тоді 4% зростання вартості викликає зміну попиту на $(-0{,}5)\cdot 4\%=-2\%$.

⬢ **Означення 14.** *Якщо відсоток зміни попиту більше відсотка зміни вартості* $(\eta<-1)$, *тоді попит називають* ***еластичним.*** *Якщо відсоток зміни попиту менше відсотку зміни вартості* $(-1<\eta<0)$, *тоді попит називають* ***не еластичним****. Якщо* $\eta=-1$, *то попит називають* ***адекватним вартості одиниці вибору****.*

Поняття еластичності можна застосувати і до інших функцій економічного змісту.

Узагальнення формулюється так.

Нехай задана функція $y = f(x)$. Будемо називати $\frac{\Delta x}{x}$ відносним приростом аргументу, а $\frac{\Delta y}{y}$ – відносним приростом функції.

Якщо існує похідна функції $y = f(x)$, тоді існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{x}{y}\times\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\times\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\times f'(x),$$

яку називають ***еластичністю функції*** $y = f(x)$ ***відносно змінної*** x і позначають $E_x(y)$.

Отже, еластичність

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{29}$$

Ця еластичність є наближений відсоток приросту функції (зростання або спадання), відповідний приросту незалежної змінної на 1%.

■ **Приклад 15.** Встановити зв'язок між доходом підприємства та еластичністю попиту.

Розв'язання. Функція доходу підприємства

$$D(x)=x\cdot p,$$

де x – кількість виготовлених та проданих виробів, p – вартість кожного виробу. Маргінальний доход відносно вартості буде

$$\frac{dD(x)}{dp}=\frac{d}{dp}(x\cdot p)=x+p\frac{dx}{dp}=x\left(1+\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}\right)=x(1+\eta). \tag{30}$$

Якщо попит еластичний, то $\eta < -1$, тому $1+\eta < 0$ і з формули (30) випливає, що $\dfrac{dD}{dp} < 0$, тобто доход D, який розглядають як функцію вартості p, спадає.

Якщо попит не еластичний, то $-1 < \eta < 0$, тоді $1+\eta > 0$ і $\dfrac{dD}{dp} > 0$. Отже, у цьому випадку доход D зростає.

Якщо попит адекватний вартості, то $\eta = -1$, $1+\eta = 0$ і $\dfrac{dD}{dp} = 0$, тобто доход не змінюється.

8.6.2. Вправи до розділу 8.6

Задано зв'язок між кількістю виготовлених та проданих виробів x та вартістю кожного виробу p.

Треба:

a) визначити еластичність попиту при $p = 12$. При зростанні вартості на $8{,}5\%$ знайти наближене значення відсотку зміни попиту.

$$x = 250 - 30p + p^2 .$$

b) При $p = 250 - 0{,}5x$ і $0 < x < 250$ показати, що попит на x еластичний і функція доходу спадає, а також показати що при $250 < x < 500$ функція попиту не еластична і доход підприємства зростає.

8.7. Завдання для індивідуальної роботи з частини 8

1. Провести повне дослідження заданої функції та побудувати її графік:

a) $y = \dfrac{1}{x-N}$; b) $y = \dfrac{x+1}{x-N}$; c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+N}$;

d) $y = \dfrac{x^2 - N^2}{x^2+1}$; e) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-N^2}$; f) $y = e^{-2Nx}$;

g) $y = \dfrac{e^x}{x}$; h) $y = -\ln x$.

2. Розв'язати задачі.

a) Кількість хворих під час епідемії грипу в 1996 р. змінювалась з часом t (вимірюється днями) з початку вакцинації населення за законом

$$p(t) = \frac{200t}{t^2+100}.$$

Знайти час максимуму захворювань, інтервали зростання та спадання епідемії.

b) Температура повітря на протязі декількох днів змінювались за законом

$$T(t) = 24e^{-\left(t-\frac{1}{8}\right)^2}, \quad 0 \le t \le 16.$$

де t – час вимірювання температури. Побудувати графік цієї функції.

c) Промислова продукція держави на протязі t років, після 1990 р., змінювалась за законом

$$y = 500 \cdot \left(1 + 215e^{-0,07t}\right)^{-1}.$$

Коли випуск продукції зростав, а коли спадав?

d) Зміна населення держави з часом t здійснюється за законом

$$p(t) = \frac{A}{1+Be^{-t}},$$

де A та B – постійні величини. Знайти значення t, при якому швидкість зростання населення максимальна. Чому дорівнює ця максимальна швидкість?

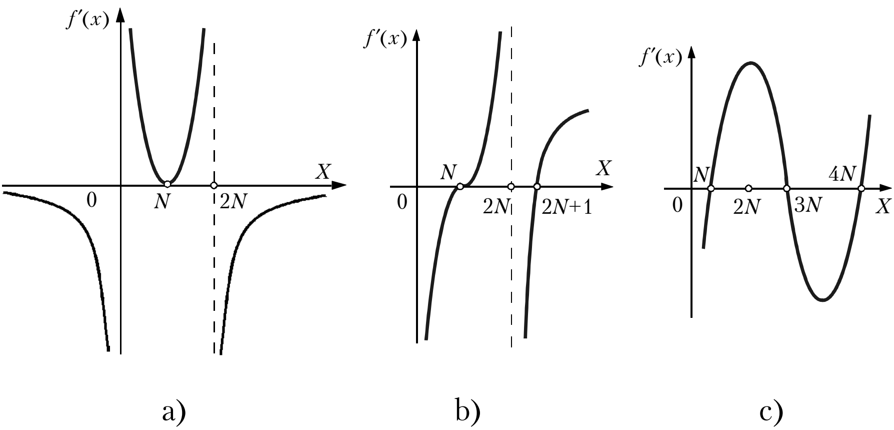
3. Знайти еластичність попиту та вказати стан доходу відповідного підприємства при $p=5$ та $p=15$, якщо заданий зв'язок між кількістю виготовлених та проданих виробів x та вартості кожного виробу p.

a) $x=\dfrac{N}{p^n}$; b) $x=(100+2N)(5-p)$;

c) $x=(50+5N)\cdot\left(4-\sqrt{p}\right)$; d) $x=(200+2N)\cdot\sqrt{9-p}$;

e) $x=(400+4N)-100p$; f) $\dfrac{x}{N\cdot 1000}+\dfrac{p}{8\cdot N}=1$.

4. За заданим графіком похідної неперервної функції знайти для всіх $f(x)$: інтервали зростання та спадання, інтервали опуклості та угнутості, кількість екстремальних точок, точок перегину та самі ці точки (див. мал. 9).



Мал. 9.

5. Знайти границі за правилом Лопіталя:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$.

6. Знайти границі:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Частина 9
ФУНКЦІЇЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

В частинах 7 та 8 ми розглянули функції однієї змінної вигляду $y = f(x)$, способи її задання, області визначення та значень, границю та неперервність, похідні функції та застосування їх до розв'язування різних задач.

В цій частині розглянемо аналогічні питання, але для функцій кількох змінних. Саме такі функції найчастіше використовуються у практичній діяльності менеджерів, бізнесменів та інших спеціалістів різних галузей, у тому числі й економіки.

Наприклад, температура T залежить від часу її вимірювання t та координат x, y, z точки M, в якій вимірюють температуру. Отже, температура залежить від чотирьох змінних тобто

$$T = f(x, y, z, t).$$

9.1. Функції, їх способи задання, області визначення, границі та неперервність

9.1.1. Поняття функції кількох змінних та області її визначення

При дослідженні процесів часто спостерігають одночасну зміну декількох величин і залежність однієї з них від інших.

⬢ **Означення 1.** *Якщо змінна величина w залежить від n незалежних змінних x_1, x_2 ... x_n, то її називають* ***функцією цих змінних****, а функціональну залежність позначають так:*

$$w = f(x_1, x_2, ..., x_n),\ \textit{або}\ w = f(M),\ \textit{де точка}\ M \in E_n.$$

Незалежні змінні рівноправні і називаються ***аргументами***.

⬢ **Означення 2.** *Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи x_1, x_2, ... x_n і при яких функція $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$*

приймає певні дійсні значення, називають ***областю визначення функції***.

Якщо функція визначена для усіх x_1, x_2 ... x_n з деякої області D та її межі dD, тоді кажуть, що функція визначена у замкненій області $D = D \bigcup dD$.

■ **Приклад 1.** Знайти область визначення функції

$$u = \sqrt{25 - (x+1)^2 - (y-2)^2 - z^2}.$$

Розв'язання. Задана функція u залежить від трьох змінних x, y та z. Вона приймає певні дійсні значення лише при умові

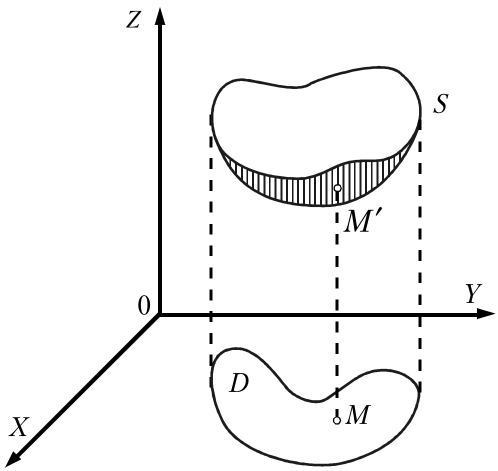
$$25 - (x+1)^2 - (y-2)^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 25.$$

Рівність $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ є рівнянням сфери з центром у точці $C(a,b,c)$ і радіусом R.

Отже, одержана нерівність означає, що областю визначення функції u буде куля радіуса 5 з центром в точці $C(-1,2,0)$. Нерівність нестрога, тому функція u визначена на сфері – межі цієї кулі. Отже, задана функція u визначена у замкненій області

$$\bar{D} = \left\{ (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 25 \right\}.$$

Згідно з основними поняттями аналітичної геометрії, функція двох змінних $z = f(x,y)$ в тривимірному просторі зображується деякою поверхнею. Кожна точка цієї поверхні M' має координати (x,y,z). Областю визначення функції $z = f(x,y)$ буде деяка область D площини xOy (див. мал. 1). Коли точка $M(x,y)$ пробігає область D, тоді точка $M'(x,y,z)$ пробігає поверхню S, рівняння якої $z = f(x,y)$.



Мал. 1.

Отже, функцію двох змінних x, y можна задати як функцію змінної точки M, що змінюється в області D, тобто

$$z = f(M).$$

Аналогічно можна розглядати і функцію n аргументів, як функцію точки M, що знімається в області D n-вимірного простору E_n, тобто $w = f(M)$, $M \in D \in E_n$.

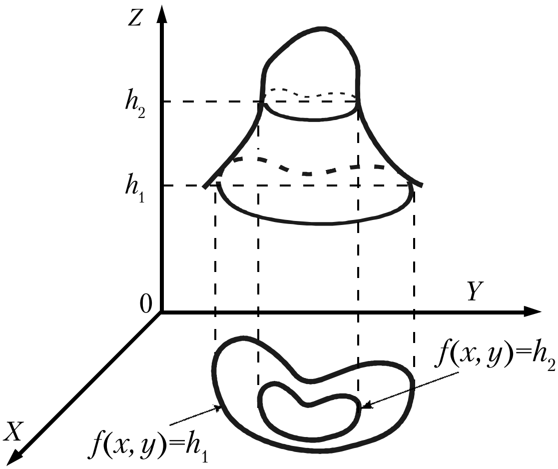
9.1.2. Способи задання функції кількох змінних

Функцію однієї змінної можна задавати аналітично, таблично, графічно, мовно і за допомогою комп'ютерної програми. Функцію двох змінних $z = f(x,y)$, крім цих способів, можна задавати ще й геометрично, за допомогою ліній рівня.

У табличному способі завдання функції $z = f(x,y)$ використовують таблицю з двома входами вигляду

x_k \ y_k	y_1	y_2	...	y_n
x_1				
x_2				
...				
x_n				

У кожній клітці вказують значення z для відповідної пари (x,y).



Мал. 2.

Розглянемо геометричний спосіб задання функції. Нехай графіком функції $z = f(x,y)$ буде поверхня, зображена на мал. 2. Неважко бачити, що різні точки цієї поверхні знаходяться на різній відстані від площини xOy.

Якщо придати z постійні значення h_1, h_2,..., то одержимо в площині аргументів лінії $f(x,y) = h_1$ та $f(x,y) = h_2$,..., які називають *лініями рівня функції* $f(x,y)$.

⬢ **Означення 3.** *Криві лінії* L, *що лежить у площині* xOy *і мають рівняння* $f(x,y) = c$ *(с – стала) називають* ***лініями рівня функції*** $z = f(x,y)$.

Іншими словами: лінія рівня – це множина усіх точок площини xOy, для яких функція $z = f(x,y)$ приймає одне значення.

■ **Приклад 2.** Визначити лінії рівня функції

$$z = (x-2)^2 + (y+3)^2.$$

Розв'язання. Згідно з означенням 3 рівняння ліній рівня має вигляд

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = c.$$

Якщо надати c різні числові значення (наприклад, $c=4$, $c=9$, $c=16$,...), то одержимо сукупність кіл з центром в точці $C(2,-3)$ з відповідними радіусами (наприклад, 2, 3, 4,...).

Відмітимо, що лінії рівні широко використовуються в топографії. На топографічних картах нанесені лінії рівня, для яких величина c дорівнює h^k. Величина h вказана на карті (наприклад, $h=3$ м) і дозволяє ефективно використовувати умови місцевості.

У випадку залежності функції від трьох та більшої кількості змінних найчастіше використовують аналітичний спосіб задання функції.

9.1.3. Границя та неперервність

⬢ **Означення 4.** ***Околом радіуса*** r ***точки*** $M_0\left(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0}\right)$ *називають сукупність усіх точок* $M\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ *простору* E_n, *відстань яких до точки* M_0 *менше або дорівнює* r, *тобто виконується співвідношення*

$$\sqrt{\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+...+\left(x_n-x_{n0}\right)^2}\le r.$$

⬢ **Означення 5.** *Число* A *називають* ***границею функції*** $w=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ $\left(\text{або } w=f(M)\right)$ ***в точці*** $M_0\left(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0}\right)$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon>0$ *знайдеться число* r *таке, що для усіх точок* $M\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ *з околу радіуса* r *точки* M_0, *відмінних від точки* M_0, *виконується нерівність*

$$\left|f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)-A\right|<\varepsilon \quad \text{або} \quad \left|f(M)-A\right|<\varepsilon.$$

Використовується позначення:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_{10}\\ x_2\to x_{20}\\ ...\ \to\ ...\\ x_n\to x_{n0}}} f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)=A \text{ або } \lim_{M\to M_0} f(M)=A.$$

⬢ **Означення 6.** *Функція* $w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ $\left(w = f\left(M\right)\right)$ *називається* ***неперервною в точці*** $M_0\left(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0}\right)$, *якщо вона визначена в цій точці і* $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right) = f\left(M_0\right)$ *незалежно від способу прямування точки* M *до точки* M_0.

Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається ***неперервною в цій області***.

Якщо функція неперервна в області D та на її межі dD, тоді кажуть що вона неперервна в замкненій області $\bar{D} = D \bigcup dD$.

При знаходженні області неперервності функції багатьох змінних доцільно використовувати слідуючу властивість неперервних функцій:

області визначення та неперервності функцій співпадають.

Крім цієї властивості неперервних функцій часто використовують ще таку властивість:

функція, неперервна в замкненій області D***, обмежена,*** тобто існують такі числа m та M, що виконується співвідношення $m \le f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right) \le M$ для усіх $\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right) \in \bar{D}$.

9.1.4. Вправи до розділу 9.1

1. Знайти значення заданої функції у вказаних точках:

a) $f\left(x,y,z\right) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $M_0\left(1,2,3\right)$, $M_1\left(-2,1,-4\right)$;

b) $f\left(x,y,t\right) = \dfrac{x+y+t}{x+y-t}$, $\left(x,y,t\right) = \left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)$, $\left(x,y,t\right) = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right)$;

c) $f\left(u,v\right) = u + \ln\left|v\right|$, $\left(u,v\right) = \left(2,1\right)$, $\left(u,v\right) = \left(-2,-e\right)$, $\left(u,v\right) = \left(0,e^3\right)$;

d) $f\left(x,y\right) = \dfrac{\left(x-1\right)\left(y-1\right)}{x+y}$; $M_0\left(1,-2\right)$, $M_1\left(3,-2\right)$, $M_2\left(2,-2\right)$.

2. Знайти області визначення та неперервності функцій:

a) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$; b) $z=\dfrac{3}{x^2+y^2}$; c) $z=\ln\left(4x^2+9y^2-36\right)$;

d) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; e) $u=xy+2yz-3zx$; f) $z=\dfrac{\ln(x-y)}{x+y}$.

3. Побудувати графіки ліній перетину поверхні $z=f(x,y)$ та площин $x=0,\ \pm1;\quad y=0,\ \pm1$:

a) $z=x^2-y^2$; b) $z=2x^2+y^2$;

c) $z=\sqrt{25-(x+3)^2-y^2}$; d) $z=2x^2-y^2$.

4. Обчислити границі:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2+1}}}{x^2+y^2}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(1+x^2\cdot y^2\right)^{\frac{-1}{x^2\cdot y^2}}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{4}{x^2+y^2}$.

5. Знайти розрив функції:

a) $z=\dfrac{1}{x-y}$; b) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$; c) $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2-9}$.

9.2. Частинні похідні та диференціал першого порядку

9.2.1. Частинні похідні першого порядку та за напрямом вектора

Якщо у функції декількох змінних $w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ змінна $x_k \left(k = 1,\ 2, ...,\ n\right)$ одержить частинний приріст Δx_k, а всі інші незалежні змінні зафіксувати, тоді функція одержить частинний приріст

$$\Delta_{x_k} w = f\left(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, ..., x_n\right) - f\left(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, ..., x_n\right)$$

за аргументом x_k.

⬢ **Означення 7.** *Якщо існує границя* $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} w}{\Delta x_k}$ *незалежна від способу прямування* $\Delta x_k \to 0$, *тоді її називають* ***частинною похідною першого порядку функції*** $w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ***по змінній*** $x_k \left(k = 1, 2,\ ...,\ n\right)$ *і позначають*

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} \quad \textit{або} \quad \frac{\partial f\left(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n\right)}{\partial x_k} \quad \textit{або} \quad w'_{x_k}.$$

Отже, за означенням частинна похідна буде

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} w}{\Delta x_k}. \qquad (1)$$

При знаходженні частинної похідної по змінній x_k усі інші аргументи слід вважати постійними величинами і тому можна використовувати правила диференціювання та таблицю похідних функцій однієї змінної.

У випадку функції двох змінних $z = f\left(x, y\right)$ можна надати геометричну та механічну інтерпретацію частинної похідної першого порядку, а саме:

– похідна $Z'_y\left(Z'_x\right)$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої лінії, яка утворюється перетином поверхні $Z=f\left(x,y\right)$ площиною $x=x_0\left(y=y_0\right)$;

– механічний зміст $Z'_y\left(Z'_x\right)$ – це швидкість зміни функції Z у напрямку осі $O_y\left(O_x\right)$, коли аргумент $x\left(y\right)$ не змінюється.

■ **Приклад 3.** Об'єм продажу нового продукту x залежить від часу t і витрат A підприємства на рекламу. Якщо t вимірювати тижнями, а A в гривнях, тоді ця залежність має вигляд

$$x=200\left(5-e^{-0,002A}\right)\left(1-e^{-t}\right).$$

Знайти $\dfrac{\partial x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial x}{\partial A}$ і вказати економічний зміст цих похідних при $t=1,\ A=400$.

↳ *Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=200\left(5-e^{-0,002A}\right)\left(1-e^{-t}\right)'_t=200\left(5-e^{-0,002A}\right)e^{-t},$$

$$\frac{\partial x}{\partial A}=200\left(1-e^{-t}\right)\left(5-e^{-0,002A}\right)'_A=0,4\left(1-e^{-t}\right)e^{-0,002A}.$$

При $t=1$ та $A=400$ одержимо

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\substack{t=1\\A=400}}=200\left(5-e^{-0,8}\right)e^{-1}\approx 335,$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial A}\right|_{\substack{t=1\\A=400}}=0,4\left(1-e^{-1}\right)e^{-0,8}\approx 0,11.$$

Частина похідної x'_t характеризує швидкість зміни об'єму продажу нового продукту за тиждень, коли витрати на рекламу не змінюється.

Частинна похідна x'_A характеризує швидкість зміни об'єму продажу продукту при зміні суми витрат на рекламу і постійному t. При витратах на рекламу 400 гривень швидкість зростання об'єму продажу продукту за один тиждень буде 0,11.

Частинну похідну функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ знаходять за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

де
$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}; \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}; \ \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}.$$

Напрям найбільшої швидкості зміни функції $u = f(x, y, z)$ співпадає з напрямом вектора (його називають *градієнтом функції* u)

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \qquad (3)$$

а величина цієї найбільшої швидкості дорівнює довжині цього вектора, тобто

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (4)$$

■ **Приклад 4.** Знайти величину найбільшої швидкості зміни функції $u = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}z^3$ в точці $M_0(1, 0, 9)$.

↬ *Розв'язання.* Частинні похідні першого порядку в цьому випадку будуть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 14xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 7x^2 - 7yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 14z^2 - \frac{7}{2}y^2.$$

Величину найбільшої зміни заданої функції u в будь-якій точці знайдемо за формулою (4)

$$\left|\operatorname{grad} u\right| = \sqrt{\left(14xy\right)^2 + 7^2\left(x^2 - yz\right)^2 + \left(14z^2 - \frac{7}{2}y^2\right)^2} =$$

$$= 7 \cdot \sqrt{4x^2y^2 + \left(x^2 - yz\right)^2 + \left(2z^2 - \frac{y^2}{2}\right)^2}.$$

Підставимо замість x, y, z координати точки M_0, тоді

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right| = 7 \cdot \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 0 + \left(1 - 0\right)^2 + 4 \cdot 81} = 7\sqrt{325} =$$

$$= 35\sqrt{13} \approx 35 \cdot 3{,}6 = 126 \quad (\textit{одиниць виміру}).$$

9.2.2. Повний приріст та повний диференціал функції

Нехай функція $z = f\left(x, y\right)$ в деякій області D неперервна і має частинні похідні f'_x та f'_y. Візьмемо в цій області D довільну точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ та знайдемо відповідне значення функції $f\left(x, y\right)$, потім дамо приріст обом аргументам і підрахуємо значення $f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$ функції в точці $M_1\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)$. Отже, ми одержимо приріст функції

$$\Delta z = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right),$$

який називають ***повним приростом функції*** $z = f\left(x, y\right)$ ***в точці*** $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Перетворимо Δz шляхом віднімання та додавання величини $f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right)$ до вигляду

$$\Delta z = \left[f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right)\right] + \left[f\left(x_0, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)\right].$$

Різниці у квадратних дужках можна розглядати як приріст функції тільки відносно одного аргументу.

Застосуємо до кожної різниці формулу скінченого приросту Лагранжа, одержимо

$$\Delta z = f_x'\left(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y\right)\cdot\Delta x + f_y'\left(x_0, y_0 + \theta_1\Delta y\right)\cdot\Delta y ,$$

де $0 < \theta$, $\theta_1 < 1$.

Якщо частинні похідні неперервні в точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$, тоді повний приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta z = f_x'\left(x_0, y_0\right)\cdot\Delta x + f_y'\left(x_0, y_0\right)\cdot\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y ,$$

де α та β прямують до нуля, коли $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

⬢ **Означення 8.** *Головна, лінійна відносно* Δx *та* Δy *частина повного приросту функції називається* ***повним диференціалом функції*** $z = f\left(x, y\right)$ *і позначається* dz *або* $df\left(x, y\right)$.

Отже, повний диференціал функції двох змінних знаходять за формулою

$$dz = f_x'\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f_y'\left(x_0, y_0\right)\Delta y . \qquad (5)$$

Оскільки $dz = \Delta z = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right)\Delta x - f\left(x_0, y_0\right)$, тому

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + f_x'\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f_y'\left(x_0, y_0\right)\Delta y . \qquad (6)$$

Формула (6) дозволяє знаходити наближене значення функції двох змінних.

■ **Приклад 5.** Зайти наближене значення функції $z = x^2 + 2xy + y^3$ в точці $M_1\left(1{,}03;\ 1{,}97\right)$.

↳ *Розв'язання.* Потрібне значення заданої функції знайдемо за формулою (6). Нехай $M_0\left(1,\ 2\right)$, тоді $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}03$.

$$z\left(M_0\right) = 1 + 2\cdot 1\cdot 2 + 2^3 = 13 ,$$

$$z'_x = 2x + 2y \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6,$$

$$z'_x = 2x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 14.$$

Підставимо ці значення у формулу (6) і одержимо:

$z(M_1) = 13 + 6 \cdot 0,03 + 14 \cdot (-0,03) = 13 + 0,18 - 0,42 = 12,76$.

9.2.3. Частинні похідні вищих порядків

⬢ **Означення 9.** *Частинну похідну першого порядку по змінній* x_m *від частинної похідної першого порядку функції по змінній* x_k *називають* ***частинною похідною другого порядку функції по змінним*** x_k ***та*** x_m *і позначають:*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_m \partial x_k} \quad \text{або} \quad w''_{x_k x_m} \quad \text{при} \quad k \neq m,$$

$$\frac{\partial^2 w}{(\partial x_k)^2} \quad \text{або} \quad w''_{x_k x_k} \quad \text{при} \quad k = m.$$

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Якщо мішані частинні похідні другого порядку неперервні, тоді

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

тобто мішана частина похідна другого порядку не залежить від порядку диференціювання функції.

Аналогічно визначають частинні похідні порядку $k > 2$.

■ **Приклад 6.** Довести, що функція $z = xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння

$$x \cdot z''_{xx} + y \cdot z''_{xy} = 0. \qquad (7)$$

➯ *Розв'язання.* Спочатку знайдемо частинні похідні заданої функції z, що входить до лівої частини рівняння (7):

$$z'_x = \left(xe^{y \cdot x^{-1}}\right)'_x = x'_x e^{y \cdot x^{-1}} + x \cdot \left(e^{y \cdot x^{-1}}\right)'_x = e^{y \cdot x^{-1}} - xe^{y \cdot x^{-1}} \cdot y \cdot x^{-2} =$$

$$= e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} = e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right);$$

$$z''_{xx} = \left(e^{y \cdot x^{-1}}\right)'_x \left(1 - \frac{y}{x}\right) + e^{y \cdot x^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{y}{x}\right)'_x = -e^{y \cdot x^{-1}} \cdot y \cdot x^{-2} \cdot \left(1 - \frac{y}{x}\right) +$$

$$+ e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x^2}\right) = e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x^3}\right) = \frac{y^2}{x^3} e^{\frac{y}{x}};$$

$$z''_{xy} = \left(e^{y \cdot x^{-1}}\right)'_y \left(1 - \frac{y}{x}\right) + e^{y \cdot x^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{y}{x}\right)'_y = e^{y \cdot x^{-1}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{y}{x}\right) +$$

$$+ e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}.$$

Підставимо знайдені z''_{xx} та z''_{xy} в ліву частину рівняння (7), тоді одержимо:

$$x \cdot z''_{xx} + y \cdot z''_{yx} = \frac{y^2}{x^2} e^{\frac{y}{x}} - \frac{y^2}{x^2} e^{\frac{y}{x}} = 0; \;\; 0 \equiv 0.$$

Отже, задана функція z задовольняє рівняння (7).

9.3. Приклади застосування частинних похідних до аналізу бізнеса

9.3.1. Маргінальна продуктивність виробництва

У бізнесі *маргінальною продуктивністю виробництва* називають гранично можливу продуктивність при умові постійного відтворювання виробництва.

Кількість та якість кінцевого випуску будь якої продукції фірми залежить від багатьох факторів, які фірма може змінювати. Найбільш важливі фактори – продуктивність праці та вкладений у виробництво капітал.

Позначимо через x кількість одиниць праці, K – суму капіталу, вкладеного фірмою у виробничий план. Величина x може вимірюватись річними робочими годинами або річною вартістю праці у гривнях.

Позначимо через P кінцевий результат, наприклад, кількість одиниць випущеної фірмою продукції. Тоді

$$P = f(x, K),$$

тобто P можна розглядати як функцію двох змінних. Ця функція називається *продуктивною функцією*.

У деяких випадках x та K залежні. Наприклад, фірма впровадила у виробництво нове обладнання (змінна K зросла на величину K_1), яке дозволило скоротити кількість праці у три рази. У цьому прикладі можна встановити функціональну залежність між x та K.

У загальних випадках x та K розглядають як незалежні змінні.

Частинну похідну першого порядку $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ називають *граничною продуктивністю праці при фіксованому* K, а $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ називають *граничною продуктивністю капіталу при фіксованій продуктивності праці* x.

Прибутки виробництва зростають якщо $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ зростає при фіксованому K, тобто коли $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} > 0$.

Підкреслимо, що $\dfrac{\partial P}{\partial K}$ характеризує зміну випуску продукції при постійних трудових затрат.

9.3.2. Попит на конкурентні товари

Попит на будь-який товар залежить від вартості його одиниці, якості, пакування та інших факторів, наприклад, вартості іншого товару. Так, попит на торт «Київський» залежить не лише від його вартості, але й від вартості тортів інших назв, наприклад «Барвінок».

Будемо казати, що товари A та B взаємозв'язані, якщо попит на товар A залежить не тільки від його вартості, але й від вартості товару B.

Позначимо P_A та P_B вартість одиниці відповідного товару. Нехай X_A та X_B – кількісний попит на товари A та B, відповідно. Якщо A та B взаємопов'язані, тоді X_A та X_B будуть функціями двох змінних, тобто

$$X_A = f\left(P_A, P_B\right); \;\; X_B = \varphi\left(P_A, P_B\right).$$

Частина похідної $\dfrac{\partial X_A}{\partial P_A}$ має зміст граничного попиту на товар A відносно його вартості P_A.

Частинна похідна $\dfrac{\partial X_A}{\partial P_A}$ – граничний попит на товар A відносно вартості P_B.

Товари A та B називають *конкурентними,* якщо

$$\frac{\partial X_A}{\partial P_A} > 0, \ \frac{\partial X_A}{\partial P_B} > 0 .$$

Еластичністю вартості товару A відносно P_A буде

$$\eta_{p_A} = \frac{P_A}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_A} .$$

Аналогічно визначається еластичність вартості товару A відносно P_B

$$\eta_{p_B} = \frac{P_B}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_B} .$$

9.4. Оптимізація

9.4.1. Поняття екстремуму, необхідні умови його існування

Функція багатьох змінних $w = f\left(M\right)$, $M \in E_n$ має максимум в точці M_0, якщо $f\left(M_0\right) > f\left(M\right)$ для усіх точок M із достатньо малого околу точки M_0.

Функція $w = f\left(M\right)$, $M \in E_n$ має мінімум в точці M_0, якщо $f\left(M_0\right) < f\left(M\right)$ для усіх точок M із достатньо малого околу точки M_0.

Максимуми та мінімуми функції кількох змінних називають ***екстремумами функції***, а точку M_0, де функція має екстремум, називають ***точкою екстремуму функції***.

✦ **Теорема.** ***(Необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція*** $w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ ***має екстремум в точці*** $M_0\left(x_{10}, x_{20}, ..., \ x_{n0}\right)$***, то кожна частинна похідна першого порядку функції дорівнює нулю або не існує в цій точці.***

▼ **Наслідок.** *Точки, в яких* $\frac{\partial w}{\partial x_k}\left(k=1,\ 2,\ldots,\ n\right)$ *не існують або дорівнюють нулю називають* ***критичними точками*** *або* ***підозрілими на екстремум.***

■ **Приклад 7.** Знайти критичні точки функції

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

➪ *Розв'язання* Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку заданої функції двох змінних:

$$z'_x = 2x - y + 3;\ \ z'_y = -x + 2y - 2.$$

Ці похідні існують для усіх x та y, тому критичними будуть лише точки, де частинні похідні дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Остання система лінійна, неоднорідна, з двома невідомими. Розв'язуючи систему за правилом Крамера, одержимо:

$$x = -\tfrac{4}{3};\ \ y = \tfrac{1}{3}.$$

Отже, критичною точкою буде $M_0\left(-\tfrac{4}{3},\ \tfrac{1}{3}\right)$.

9.4.2. Знаходження екстремуму функцій двох змінних

Необхідні умови існування екстремуму функцій кількох змінних дозволяють знаходити лише критичні точки.

У випадку функції двох змінних за допомогою достатніх умов існування екстремуму можна перевірити кожну критичну точку та виявити, який саме екстремум існує в цій точці.

✦ **Теорема.** ***(Достатні умови існування екстремуму). Нехай в околі критичної точки*** $M_0\left(x_0,\ y_0\right)$ ***функція*** $z = f\left(x,y\right)$ ***має неперервні частинні похідні до другого порядку включно***

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f\left(x_0,\ y_0\right)}{\left(\partial y\right)^2};\ a_{22}=\frac{\partial^2 f\left(x_0,\ y_0\right)}{\left(\partial y\right)};\ a_{12}=\frac{\partial^2 f\left(x_0,\ y_0\right)}{\partial x\partial y}.$$

Тоді:

1) $f\left(x,\ y\right)$ ***має максимум, якщо*** $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$ ***та*** $a_{11}<0$**;**

2) $f\left(x,\ y\right)$ ***має мінімум, якщо*** $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$ ***та*** $a_{11}>0$**;**

3) $f\left(x,\ y\right)$ ***не має екстремуму, якщо*** $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2<0$**;**

4) ***якщо*** $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=0$ ***, тоді екстремум в точці*** M_0 ***може існувати, а може і не існувати, тобто в цьому випадку треба використовувати іншу достатню ознаку.***

■ **Приклад 8.** Дослідити на екстремум функцію

$$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1.$$

Розв'язання. У прикладі 7 для цієї функції знайдена критична точка $M_0\left(-4/3,\ 1/3\right)$. Застосуємо достатню умову. Маємо:

$$z''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x-y+3\right)=2;\ z''_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x-y+3\right)=-1;\ z''_{yy}=2.$$

Тому $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=2\cdot 2-\left(-1\right)^2=3>0$ та $a_{11}=2>0$.

Згідно з другим твердженням теореми в точці $M_0\left(-4/3,\ 1/3\right)$ задана функція має мінімум:

$$z_{\min}=f\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\left(-\frac{4}{3}\right)-2\left(\frac{1}{3}\right)+1=$$
$$=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-4-\frac{2}{3}+1=-\frac{4}{3}.$$

9.4.3. Знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

Екстремум функції $z = f(x,y)$ при виконанні умови $\varphi(x,\ y) = 0$ називають ***умовним екстремумом функції***.

Умовні екстремуми часто використовуються при дослідженні оптимізації багатьох економічних та соціальних проблем.

Для знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа треба:

1) записати функцію Лагранжа вигляду

$$L(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda\varphi(x,\ y);$$

2) знайти критичні точки $M_k(x_k,\ y_k,\ \lambda_k)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases};$$

3) перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:

а) якщо в точці $M_k(x_k,\ y_k,\ \lambda_k)$ визначник третього порядку

$$\Delta(M_k) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & L''_{xx}(M_k) & L''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & L''_{xy}(M_k) & L''_{yy}(M_k) \end{vmatrix}$$

додатний, тоді точка M_k є точкою максимуму і

$$z_{\max} = f(M_k) = f(x_k,\ y_k);$$

б) якщо визначник $\Delta(M_k) < 0$, тоді точка M_k є точкою мінімуму і $z_{\min} = f(M_k) = f(x_{k,}\ y_k)$.

■ **Приклад 9.** Знайти екстремум функції $z = xy$ при умові що $x^2 + y^2 = 2$.

Розв'язання. Будемо шукати умовний екстремум з використанням функції Лагранжа

$$L = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right).$$

Необхідні умови існування тепер мають вигляд

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Виключаючи з цієї системи λ, одержимо:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x + 2y\left(\dfrac{-y}{2x}\right) = 0 \\ x^2 - y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}.$$

Отже, критичними точками будуть:

$$M_1(-1,-1),\ M_2(-1,\ 1),\ M_3(1,-1),\ M_4(1,\ 1).$$

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму запишемо визначник в довільній точці $M(x,y)$, враховуючи

$$\varphi'_x(M) = 2x;\ \varphi'_y(M) = 2y;\ L''_{xx} = 2\lambda = -\frac{y}{x};\ L''_{yy} = -\frac{y}{x};\ L''_{xy} = 1,$$

$$\Delta(M)=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -\dfrac{y}{x} & 1 \\ 2y & 1 & -\dfrac{y}{x} \end{vmatrix}=12xy+4\frac{y^3}{x}.$$

Тепер можна знайти значення цього визначника в кожній критичній точці і використати достатні умови:

$$\Delta(M_1)=12(-1)\cdot(-1)+4\frac{(-1)^3}{-1}=12+4=16>0,$$

$$z_{\max}=z(M_1)=(-1)\cdot(-1)=1.$$

$$\Delta(M_2)=12(-1)\cdot(1)+4\frac{(1)^3}{-1}=-12-4=-16<0,$$

$$z_{\min}=z(M_2)=(-1)\cdot(1)=-1.$$

$$\Delta(M_3)=12\cdot 1\cdot(-1)+4\frac{(-1)^3}{1}=-12-4=-16<0,$$

$$z_{\min}=z(M_3)=(-1)\cdot(1)=-1.$$

$$\Delta(M_4)=12+4=16>0,$$

$$z_{\max}=z(M_4)=1\cdot 1=1.$$

9.4.4. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функцій у замкненій області $\overline{D}$, які позначаються $\max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$, $\min\limits_{\overline{D}} f(x,y)$, відповідно, треба знайти екстремальні значення функції в точках, що лежать всередині D та на межі області, і обрати найбільше та найменше значення.

■ **Приклад 10.** Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0,\ y = 0;$ $x + y = 6.$

Розв'язання. Спочатку знайдемо критичні точки всередині області:

$$z'_x = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = xy(8 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = x^2(4 - x - y) - x^2 y = x^2(4 - x - 2y).$$

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}.$$

Всередині області $x \neq 0$ та, $y \neq 0$ тому

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

В критичній точці $M_1(2,\ 1)$ маємо $z(2,\ 1) = 4.$

Тепер проведемо дослідження функції на межі трикутника. На прямій $x + y = 6$ змінна $y = 6 - x$ і функція z приймає вигляд

$$z = x^2(6 - x)\cdot(4 - x + x - 6) = 2x^2(x - 6),\ \ x \in [0,\ 6].$$

Знайдемо найбільше та найменше значення цієї функції однієї змінної x на замкненому відрізку $[0,6]$: $z' = 6x^2 - 24x.$

Із рівності $z' = 0$ знаходимо: $6x(x - 4) = 0$, звідси випливає, що $x_1 = 4$ та $x_2 = 0$. Отже, $z(4) = -64$. При $x = 0$ та $x = 6$: $z(0) = 0$, $z(6) = 0.$

На прямій $y = 0$ маємо $z = 0.$

Отже, задана функція z має найбільше значення в точці $M_1(2,\ 1)$ всередині області, найменше значення – в точці $M_2(4,\ 2)$ на межі області.

Найбільше значення $\max\limits_{\bar{D}} z = z(2,\ 1) = 4$;

Найменше значення $\min\limits_{\bar{D}} z = z(4,2) = -64$.

9.5. Метод найменших квадратів

При дослідженні різних економічних та соціальних проблем часто одержують n значень величини x та відповідні їм значення величини y. Результати спостережень записують у вигляді таблиці

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

За даними цієї таблиці необхідно визначити вигляд функціональної залежності між x та y, тобто від табличної форми завдання функціональної залежності необхідно перейти до аналітичної форми її завдання вигляду $y = f(x)$.

Розв'язування цієї задачі можна розподілити на два етапи.

Спочатку, використовуючи графічне представлення точок $M_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, обирають форму залежності між x та y, тобто обирають вигляд функції $y = f(x)$.

У випадку лінійної залежності (точки M_k мало відхиляються від прямої лінії) між x та y обирають такий вигляд функціональної залежності: $y = ax + b$;

у випадку параболічної залежності: $y = ax^2 + bx + c$;

у випадку гіперболічної залежності: $y = a/x + b$;

у випадку показникової залежності: $y = a^x + b$.

На цьому етапі параметри a, b та c – невідомі.

Нехай в результаті першого етапу розв'язування задачі обрана залежність вигляду $y = f\left(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\right)$ з невідомими параметрами α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_m.

Для знаходження невідомих параметрів на другому етапі розв'язання задачі будують функцію

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k - f\left(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\right)\right)^2, \qquad (8)$$

залежну від m параметрів.

Ця функція дорівнює сумі квадратів відхилень точок $M_k\left(x_k, y_k\right)$ від обраної лінії, рівняння якої $y = f\left(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\right)$.

Будемо шукати такі значення параметрів α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_m при яких функція S приймає мінімальне значення, тому відхилення табличних даних (точок $M_k\left(x_k, y_k\right)$) від обраної функціональної залежності (відповідної лінії) буде мінімальним.

Необхідна умова для існування екстремуму функції S – рівність нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (9)$$

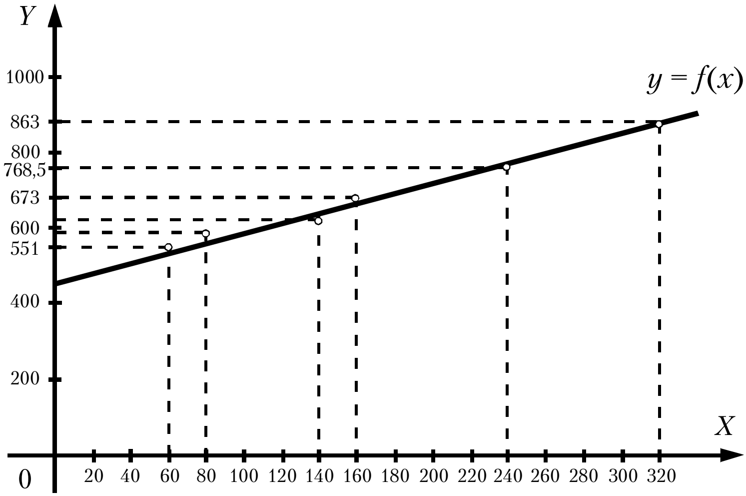
Ця умова є системою m алгебраїчних рівнянь з m невідомими. Розв'язок системи (9) і дає найкращі значення шуканих параметрів.

■ **Приклад 11.** Величина товарообміну x (тисяч гривень) та витрати обігу y (гривень) задані таблицею

x	60	80	140	160	240	320
y	551	576	628,5	673	768,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x.

↳ *Розв'язання.* Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки (див. мал. 3).



Мал. 3.

Малюнок дозволяє припустити існування лінійної залежності між y та x, тобто у вигляді: $y = ax + b$.

Запишемо для цієї задачі функцію S за формулою (8):

$$S = \sum_{k=1}^{6}\left(y_k - (ax+b)\right)^2 .$$

Згідно з методом найменших квадратів параметри a та b повинні надавати мінімум функції S.

Використовуючи необхідну умову (9), одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{6} 2\left(y_k - ax_k - b\right)\cdot\left(x_k\right) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{6} 2\left(y_k - ax_k - b\right)\cdot(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{6} x_k = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k x_k \\ a\sum\limits_{k=1}^{6} x_k + 6b = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k \end{cases} .$$

Розв'язок цієї системи можна знайти за правилом Крамера:

$$a=\frac{6\sum_{k=1}^{6}x_ky_k-\left(\sum_{k=1}^{6}x_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{6}y_k\right)}{6\sum_{k=1}^{6}x_k^2-\left(\sum_{k=1}^{6}x_k\right)^2}, \qquad (10)$$

$$b=\frac{\left(\sum_{k=1}^{6}x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{6}y_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{6}x_ky_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{6}x_k\right)}{6\sum_{k=1}^{6}x_k^2-\left(\sum_{k=1}^{6}x_k\right)^2}. \qquad (11)$$

Використовуючи значення x_k та y_k з таблиці, одержимо:

$$\sum_{k=1}^{6}x_k=60+80+140+160+240+320=1000.$$

$$\sum_{k=1}^{6}y_k=551+576+628{,}5+673+768{,}5+863=4080.$$

$$\sum_{k=1}^{6}x_ky_k=60\cdot551+80\cdot576+140\cdot628{,}5+160\cdot673+240\cdot768{,}5+$$
$$+320\cdot863=735410.$$

$$\sum_{k=1}^{6}x_k^2=(60)^2+(80)^2+(140)^2+(160)^2+(240)^2+(320)^2=215200.$$

Підставимо ці значення у формули (10) та (11).
Тоді одержимо

$$a=\frac{6\cdot735410-1000\cdot4080}{6\cdot215200-1000000}=\frac{60\cdot(73541-68000)}{100(6\cdot2152-10000)}=\frac{16623}{14560},$$

$$b=\frac{215200\cdot4080-735410\cdot1000}{6\cdot215200-1000000}=\frac{1000\cdot(2152\cdot408-735410)}{100(6\cdot2152-10000)}=$$
$$=\frac{356515}{728}.$$

Наближено можна вважати $a \approx 1{,}13$, $b \approx 489{,}71$.

Отже, одержали функціональну залежність вигляду

$$y = 1{,}13x + 489{,}71.$$

9.6. Питання для самоперевірки

1. Якими міркуваннями треба керуватись для знаходження областей визначення та неперервності функції кількох змінних?

2. Як позначають та знаходять частинні похідні першого та вищого порядків, повний диференціал, повний приріст функції?

3. Що характеризують і за якими формулами знаходять похідну за напрямом та градієнт функції трьох та двох змінних?

4. Як визначають екстремуми функції кількох змінних, умовний екстремум?

5. Як формулюють та використовують необхідні умови існування екстремуму функції кількох змінних?

6. Який мають вигляд і як формулюються достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?

7. Який вигляд мають необхідні та достатні умови існування умовного екстремуму функції двох змінних?

8. Який порядок дій при знаходженні умовного екстремуму з використанням функції Лагранжа?

9. Коли застосовують метод найменших квадратів?

10. Чим керуються, коли обирають функціональну залежність між x та y при переході від табличного задання функції до аналітичного?

11. Мінімум якої функції треба знаходити при використанні методу найменших квадратів?

9.7. Вправи до розділів 9.2–9.5

1. Зайти усі похідні другого порядку функції:

a) $z=\dfrac{2x}{y+1}$; b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; c) $z=2x^2y-3y^2$;

d) $z=5x^3+3y^4+10$; e) $z=x\ln y-y^2\ln x$; f) $z=e^{2x+3y}$;

g) $z=\left(3x+2y\right)^5$.

2.

a) Знайти похідні z'''_{yxx} та $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x\left(\partial y\right)^3}$ – функції $z=3x^4y^5$.

b) Знайти похідні z'''_{xyy} та z'''_{xxy} – функції $z=xe^{2x+y^2}$.

3. Для заданої функції знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ та градієнт в точці M_0:

a) $u=\ln\sqrt{2x^2+2y^2}$; $\vec{l}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $M_0\left(1,-1\right)$;

b) $z=2x^2-3y^2$; $\vec{l}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $M_0\left(0,-2\right)$;

c) $u=x^3+y^3-3xy$; $\vec{l}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_0\left(2,1\right)$;

d) $u=3x^2+2y^3+z^2$; $\vec{l}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_0\left(2,-2,1\right)$.

4. Зайти повний диференціал функції

a) $z=e^{\frac{x}{y}}$; b) $u=xy+2yz-z^2x$; c) $u=3x^2+4y^2+z^2$;

d) $w = x + 2y + 5\left(x^2 + y^2 - 3\right);$ e) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}};$

f) $w = \sqrt{y^2 - 4x};$ g) $u = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right).$

5. Знайти екстремуми функцій

a) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$ b) $z = e^{x-y} \cdot \left(x^2 - 2y^2\right);$

c) $z = e^{\frac{x}{2}} \cdot (x + y^2);$ d) $u = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y;$

e) $w = x^3 + y^3 - 3xy;$ f) $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$

g) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y;$ h) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

6. Знайти умовні екстремуми функцій:

a) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2};$

b) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $3x + y - 2 = 0;$

c) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0;$

d) $w = xy^2$ при $x + 2y = 1;$

e) $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36.$

7. Знайти найбільше та найменше значення функції в області D.

a) $z = 1 + x + 12y;$ $D = \left\{x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 1\right\};$

b) $z = x^2 y;$ $D = \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}.$

8. Методом най менших квадратів знайти рівняння прямої, що проходить через скупчення заданих точок:

a)

x	2	3	5	6	9	12
y	3	4	6	5	7	8

b)

x	3	4	5	6	7	8
y	0,7	1,9	2,1	2,5	3,4	4,5

c)

x	0	1	2	3
y	1	1,5	2,5	3

d)

x	2	3	4	5	6
y	2	4	3,5	5	6,5

Задачі з економічним змістом

9. Розв'язати задачі з використанням частинних похідних.

a) Відкритий циліндр радіуса r та висотою h виготовлено із матеріалу вартістю 20 гривень за $м^2$. Встановити можливу вартість циліндра V як функцію r та h. З якою швидкістю змінюється вартість при зміні r або h?

b) Закономірність втрати теплоти внаслідок конвекції має вигляд $y = c\left(T - T_0\right)V^{\frac{1}{3}}$, де T – температура тіла, T_0 – температура зовнішнього середовища, V – швидкість вітру, c – деяка стала.

Знайти: y'_T, y'_{T_0}, y'_V, та вказати їх смисл.

c) Задана функція попиту на товар A

$$X_A = 500 + 3P_B - 6P_A^2,$$

де P_A та P_B – вартість одиниці товарів A та B, відповідно. Визначити еластичність функції попиту відносно P_A та P_B, коли $P_A = 5$, $P_B = 30$.

d) Перевірити конкурентність товарів A та B, якщо функції попиту на ці товари

$$X_A = 500 + 8P_B - 4P_A^2; \;\; X_B = 300 - 9P_B + 2P_A.$$

e) Знайти маргінальну продуктивність праці та капіталу для продуктивної функції $P = c \cdot K^a \cdot x^{1-a}$, де c та a – постійні.

10. Розв'язати задачі оптимізації.

a)–b) Мале підприємство виробляє товари A та B. Загальні щоденні витрати C виробництва (у гривнях) x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі:

a) $C = 1500 - 7{,}5x - 15y - 0{,}3xy + 0{,}3x^2 + 0{,}2y^2$;

b) $C = 250 - 4x - 7y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$.

Визначити кількість одиниць товарів A та B, яку треба виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

c) Використовуючи x одиниць праці та y одиниць капіталу (тисяч гривень), підприємство виробляє продукцію, загальна вартість V якої (у тисячах гривень) має вигляд

$$V = 40 - 50y - 3x - 2xy + 1{,}5y^2 + x^2 .$$

Знайти кількість одиниць праці та капіталу, при яких підприємство має оптимальну загальну вартість продукції. Чому дорівнює значення оптимальної загальної вартості?

d) Підприємство виготовляє два різних типи товарів собівартістю 10 та 30 гривень. Річний попит на товари x_1 та x_2 відомий (у тисячах одиниць):

$$x_1 = 30 + 2P_2 - 5P_1;\; x_2 = 100 + P_1 + 2P_2 .$$

де P_1 та P_2 – ціна продажу товарів першого та другого типів, відповідно.

Визначити P_1 та P_2, при яких підприємство одержить максимальний прибуток. Знайти величину максимального річного прибутку.

e) При складанні телевізорів завод може використовувати кінескопи виготовлені в Кореї та Японії. Застосування кожного кінескопа із Кореї дає прибуток 5 гривень, а із Японії – 6 гривень.

Згідно з умовами постачання, кожного тижня завод може використати x та y (тисяч) кінескопів, виготовлених в Кореї та Японії, відповідно, причому $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 56 = 0$. Знайти максимальний щотижневий прибуток заводу і відповідний попит на кількість кінескопів з Кореї та Японії.

11. Розв'язати задачі з використанням методу найменших квадратів.

а) Таблицею задані величини товарного обігу x (тис. гривень).

x	60	80	120	160	240	320
y	5510	5760	6235	6750	7685	8635

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити її параметри.

b) В таблиці вказано кількість внесених добрив на 1 га (x) та врожай пшениці (y) центнерів.

x	1	2	3	5	7	9	11	12
y	24	26,5	28	37	40	46	49	50,5

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити її параметри.

c) Таблицею задані витрати пального на 100 км (y) в залежності від пробігу автомобіля (x) тис. км.

x	1	5	15	30	50	60	70	100	120	150
y	23,026	27,57	22,275	23,18	22,5	22,6	22,9	25	27,4	32,5

Обрати вигляд залежності між x та y і визначити параметри цієї залежності.

Частина 10

ІНТЕГРУВАННЯ

10.1. Антипохідні (первісна та невизначений інтеграл)

10.1.1. Поняття антипохідних та інтегрування

Із елементарної математики відомі взаємно обернені дії: додавання та віднімання, множення та ділення, піднесення до степеня та добування кореня, логарифмування та потенціювання. Іншою парою взаємно обернених математичних операцій є диференціювання та інтегрування.

У частині 8 викладено основи диференціального числення функцій однієї змінної. ***Диференціюванням функції***, як відомо, називають процес знаходження похідної $F'(x)$ або диференціала $dF(x) = F'(x)dx$ заданої функції $F(x)$.

Обернений процес – знаходження функції $F(x)$ за заданою похідною $F'(x) = f(x)$ або заданим диференціалом $dF(x) = f(x)dx$ – називають ***інтегруванням функції*** $f(x)$, а знайдену функцію $F(x)$ називають ***антипохідною*** або ***первісною***.

Частину математики, що вивчає цей процес та його застосування, називають ***інтегральним численням функції однієї змінної***.

Розглянемо приклад задач, що приводять до необхідності інтегрування функції.

Якщо функція $S(t)$ вказує закон зміни відстані S з часом t нерівномірного руху, то миттєва швидкість цього руху

$$V(t) = S'(t)$$

знаходиться диференціюванням функції $S(t)$.

Але іноді трапляється так, що швидкість нерівномірного руху $V(t)$ відома як функція часу t і треба знайти закон зміни $S(t)$ відстані S з часом t. У цьому випадку $S'(t)$ задана і треба визначити $S(t)$, тобто виконати операцію, обернену диференціюванню.

Інший приклад, якщо нам відома маргінальна функція витрат $V'(x)$ і треба знайти функцію продуктивних витрат $V(x)$ виробництва x одиниць продукції.

⬢ **Означення 1.** ***Первісною функцією для заданої функції*** $f(x)$ *називають таку функцію* $F(x)$, *похідна якої дорівнює* $f(x)$, *або диференціал якої дорівнює* $f(x)dx$.

Отже, первісна функція $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ задовольняє рівності

$$F'(x)=f(x) \quad \text{або} \quad dF(x)=f(x)dx.$$

Наприклад, функція $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ буде первісною для функції

$$f(x)=x^2 \text{ тому, що } \left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2 \text{ або } d\left(\frac{x^3}{3}\right)=x^2dx.$$

Згідно з правилами диференціювання, функції, що відрізняються лише постійним доданком, мають однакову похідну, тобто

$$\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x).$$

Тому, якщо $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має нескінченну кількість первісних функцій, відмінних одна від одної на постійний доданок, тобто функцій вигляду $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Наприклад, функція $f(x)=3x^2$ має первісні

$$x^3,\ x^3+1,\ x^3-7,\dots,\ x^3+C$$

тому, що похідні усіх цих функцій однакові і дорівнюють $3x^2$.

✦ **Теорема 1.** ***Будь-які дві первісні для заданої функції $f(x)$ відрізняються лише постійним доданком.***

Доведення. Нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні для функції $f(x)$. Тоді

$$F_1'(x)=F_2'(x)=f(x).$$

Звідси випливає, що

$$F_1'(x)-F_2'(x)=0 \text{ або } \left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=0.$$

Остання рівність означає, що

$$F_1(x)-F_2(x)=C \quad \text{або} \quad F_1(x)=F_2(x)+C,$$

що і треба було довести.

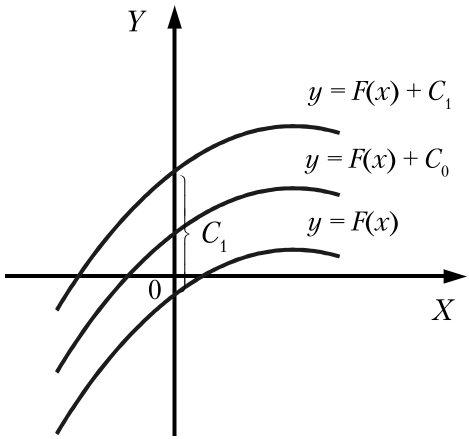
▼ **Наслідок.** *Щоб знайти усю нескінченну множину первісних функцій (сукупність антипохілнних) достатньо знайти лише одну первісну функцію, а усі інші одержати додаванням до неї постійної. Отже, сукупність первісних функцій має вигляд $F(x)+C$, якщо $F(x)$ – одна із первісних.*

⬢ **Означення 2.** *Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називають* ***невизначеним інтегралом*** *і позначають $\int f(x)dx$. Отже.*

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Знак $\int$ означає операцію інтегрування і називається ***знаком інтеграла***, вираз $f(x)dx$ називають ***підінтегральним виразом***, функцію $f(x)$ – ***підінтегральною***, змінну x, що стоїть під знаком диференціала, називають ***змінною інтегрування***, $F(x)$ – ***деяка первісна для заданої*** $f(x)$, а C – ***довільна постійна інтегрування***.

Процес знаходження невизначеного інтеграла називають ***інтегруванням***.



Мал. 1.

Якщо побудувати криву-графік однієї первісної функції $F(x)$ (мал. 1), то усі інші криві (графіки інших первісних для однієї функції) одержуються шляхом зміщення цієї кривої по Oy на величину, що дорівнює значенню постійної C.

10.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. *Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто* $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Дійсно, за означенням невизначеного інтеграла маємо

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \text{ де } F'(x)=f(x).$$

Тому

$$d\int f(x)dx = d\left[F(x)+C\right] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx\,.$$

2. *Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі функції та довільної сталої, тобто* $\int dF(x) = F(x)+C$.

Дійсно,

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$$

Зауважимо, що з першої властивості випливає, що комбінація символів "$d\int$", застосована до виразу $f(x)dx$, взаємно знищується. З другої властивості випливає, що комбінація символів "$d\int$", застосована до деякої функції $F(x)$, додає до цієї функції довільну сталу C.

10.1.3. Таблиця основних інтегралів

Згідно з означенням невизначеного інтеграла

$$\text{якщо}\quad dF(u) = f(u)du, \quad \text{то}\quad \int f(u)du = F(u)+C.$$

Тому, використовуючи таблицю диференціалів основних елементарних функцій, одержимо таблицю інтегралів

$d\left(\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n du,$ 1. $\displaystyle\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C,\ (n \neq -1);$

$d(\ln u) = \dfrac{du}{u},$ 2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C;$

$d\left(\dfrac{a^u}{\ln a}\right) = a^u du,$ 3. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C;$

$d\left(e^u\right) = e^u du,$ 4. $\displaystyle\int e^u du = e^u + C\,;$

$$d(\sin u) = \cos u du,$$

$$d(-\cos u) = \sin u du,$$

$$d(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u},$$

$$d(-\operatorname{ctg} u) = \frac{du}{\sin^2 u},$$

$$d\left(\arcsin\frac{u}{a}\right) = \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}},$$

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right) = \frac{adu}{a^2 + u^2},$$

5. $\int \cos u du = \sin u + C;$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C;$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$

Додамо до цієї таблиці ще три інтеграла, які часто використовуються.

11. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C.$

13. $\int \frac{u \cdot du}{u^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2 \pm a\right| + C.$

У цих формулах u може бути незалежною змінною $(u = x)$ або проміжним аргументом $(u = \varphi(x))$.

Основні (табличні) інтеграли грають важливу роль в інтегральному численні, тому їх треба запам'ятати. Більш повна таблиця невизначених інтегралів наведена у таблиці в кінці підручника.

10.1.4. Основні правила інтегрування

1. *Постійний множник A можна виносити за знак інтеграла:*

$$y = \int Af(u)du = A\int(u)du.$$

Дійсно, позначимо $y = A\int(u)du,$ тоді

$$dy = d\left[A\int f(u)du\right] = Ad\left[\int f(u)du\right] = A\int f(u)du.$$

Звідси одержуємо:

$$y = \int Af(u)du.$$

Отже,

$$\int Af(u)du = A\int f(u)du,$$

що і треба було довести.

Наприклад,

$$\int \frac{\cos x}{12}dx = \frac{1}{12}\int \cos x dx = \frac{1}{12}\sin x + C.$$

2. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює тій самій алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної із функцій-додатків:*

$$\int\left[f_1(u) \pm f_2(u) \pm \ldots \pm f_m(u)\right]du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du \pm \ldots \pm \int f_m(u)du. \quad (1)$$

Дійсно, позначимо

$$y = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du \pm \ldots \pm \int f_m(u)du \quad (2)$$

і знайдемо диференціал цієї функції

$$dy = d\int f_1(u)du \pm d\int f_2(u)du \pm \ldots \pm d\int f_m(u)du =$$

$$= f_1(u)du \pm f_2(u)du \pm \ldots \pm f_m(u)du.$$

Але тоді первісною буде

$$y = \int\left[f_1(u) \pm f_2(u) \pm \ldots \pm f_m(u)\right]du. \quad (3)$$

Ліві частини в (2) і (3) рівні, тому і праві частини також рівні, тобто має місце рівність (1), яку треба було довести.

Зауважимо, що застосування цих правил в деяких випадках потребують певних перетворень.

■ **Приклад 1.**

a) $\int (2x+1)^2\,dx = \int \left(4x^2+4x+1\right)dx = 4\int x^2dx + 4\int xdx + \int dx =$

$= 4\cdot\dfrac{x^3}{3} + 4\cdot\dfrac{x^2}{2} + x + C.$

b) Знайти антипохідні функцій $f(t) = \dfrac{3-5t+7t^2+t^3}{t^2}$.

Розв'язання. Сукупність усіх антипохідних – це невизначений інтеграл. Згідно з правилами інтегрування та таблиці інтегралів одержуємо:

$$\int \frac{3-5t+7t^2+t^3}{t^2}dt = \int\left(\frac{3}{t^2}-\frac{5}{t}+7+t\right)dt = 3\int t^{-2}dt - 5\int\frac{dt}{t} + 7\int dt +$$

$$+\int tdt = 3\frac{t^{-2+1}}{-1} - 5\ln t + 7t + \frac{t^{1+1}}{2} + C = -\frac{3}{t} - 5\ln|t| + 7t + \frac{t^2}{2} + C\,.$$

■ **Приклад 2.** Заданий маргінальний доход фірми

$$D'(x) = 15 - 0{,}01x\,.$$

Знайти функцію доходу та визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язання. Функцію доходу фірми можна знайти інтегруванням маргінального доходу, тобто

$$D(x) = \int D'(x)dx = \int(15-0{,}01x)dx = 15\int dx - 0{,}01\int xdx =$$

$$= 15x - 0{,}01\frac{x^2}{2} + C = 15x - 0{,}005x^2 + C\,,$$

де C – постійна інтегрування. Для знаходження C використаємо той факт, що доход повинен дорівнювати нулю, коли не продано жодної одиниці продукції, тобто при $x=0$ маємо

$$0=15\cdot 0-0{,}005\cdot(0)^2+C\Rightarrow C=0.$$

Отже, функція доходу фірми має вигляд

$$D(x)=15x-0{,}005x^2.$$

Якщо вартість кожної одиниці проданої фірмою продукції P і продали x одиниць продукції, то доход буде

$$D(x)=Px.$$

Отже, маємо

$$Px=15x-0{,}005x^2\Rightarrow P=15-0{,}005x.$$

Остання рівність описує потрібне відношення.

10.2. Методи інтегрування

Перш за все відмітимо, що в усіх табличних інтегралах підінтегральна функція є певною функцією, аргумент якої співпадає із змінною інтегрування.

Розглянемо, наприклад, інтеграл $\int\sin\left(x^2+1\right)dx$. В цьому випадку аргументом основної елементарної функції синус буде $u=x^2+1$, а змінна інтегрування – x, тому при знаходженні цього інтеграла не можна використати табличну формулу

$$\int\sin u\,du=-\cos u+C.$$

Заданий невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ можна знайти, якщо якимось чином вдається звести його до одного із табличних інтегралів.

Найбільш часто для знаходження заданого невизначеного інтеграла використовують методи: безпосереднього інтегрування, заміни змінної (підстановки), інтегрування частинами, а також знаходження заданого інтеграла за допомогою довідника.

Ознайомимось з основними методами інтегрування.

10.2.1. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод базується на рівності $dx = \frac{1}{a} d\left(ax + b\right)$, де a та b сталі і застосовується у тих випадках, коли підінтегральна функція заданого інтеграла має вигляд однієї із підінтегральних функцій табличних інтегралів, але її аргумент відрізняється від змінної інтегрування постійним доданком або постійним множником або постійним множником та постійним доданком.

■ **Приклад 3.** Знайти інтеграли:

a) $\int \left(x+3\right)^8 dx$; b) $\int \cos\frac{x}{2} dx$; c) $\int \sqrt[5]{\left(3x-7\right)^2 dx}$.

Розв'язання.

a) $\int \left(x+3\right)^8 dx = \int \left(x+3\right)^8 d\left(x+3\right) = \frac{\left(x+3\right)^{8+1}}{8+1} + C = \frac{\left(x+3\right)^9}{9} + C$.

У цьому випадку змінна інтегрування x відрізняється від аргументу степеневої функції $u^8 = \left(x+3\right)^8$ на постійний доданок 3;

b) $\int \cos\frac{x}{2} dx = \frac{1}{1/2} \int \cos\frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2} + C$.

У цьому випадку аргумент функції косинус відрізняється від змінної інтегрування x на множник $1/2$.

c) $\int \sqrt[5]{(3x-7)^2} dx = \frac{1}{3} \int \left(3x-7\right)^{\frac{2}{5}} d\left(3x-7\right) = \frac{1}{3} \frac{\left(3x-7\right)^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C =$

$= \frac{5}{21} \left(3x-7\right)^{\frac{7}{5}} + C$.

У цьому випадку змінна інтегрування x відрізняється від аргумента степеневої функції $u^{\frac{2}{5}} = \left(3x-7\right)^{\frac{2}{5}}$ постійним множником 3 та постійним доданком $\left(-7\right)$.

10.2.2. Метод підстановки (заміни змінної)

Цей метод містить два прийоми.

а) Якщо для знаходження заданого інтеграла $\int f\left(x\right)dx$ зробити підстановку $x = \varphi\left(t\right)$, тоді має місце рівність

$$\int f\left(x\right)dx = \int f\left[\varphi\left(t\right)\right]\varphi'\left(t\right)dt.$$

Після знаходження останнього інтеграла треба повернутись до початкової змінної інтегрування x. Для застосування цього прийому треба, щоб функція $x = \varphi\left(t\right)$ мала обернену $t = \psi\left(x\right)$.

■ **Приклад 4.** Знайти інтеграл $J = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

✎ *Розв'язання.* Зробимо підстановку $x = 5\sin\ t$, тоді

$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\cos t,\ dx = \left(5\sin t\right)' dt = 5\cos t \cdot dt.$

Отже, одержимо

$$J = \int \frac{25\sin^2 t \cdot 5\cos t \cdot dt}{5\cos t} = 25\int \sin^2 t \cdot dt = \frac{25}{2}\int \left(1-\cos 2t\right)dt =$$

$$= \frac{25}{2}\left(\int dt - \int \cos 2t dt\right) = \frac{25}{2}t - \frac{25}{4}\sin 2t + C.$$

Із рівності $x = 5\sin t$ одержимо $t = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$;

$$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{25-x^2}\,.$$

Отже,

$$J = \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} - \frac{25}{4}\cdot\frac{2x}{25}\sqrt{25-x^2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} - \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + C\,.$$

b) Якщо зробити заміну змінної, тобто $t=\varphi(x)$ тоді має місце рівність

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\,.$$

Після знаходження останнього інтеграла треба повернутись до змінної x, використовуючи рівність $t=\varphi(x)$.

■ **Приклад 5.** Знайти $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

✎ *Розв'язання.*

Нехай $\sqrt{x-3}=t,$ тоді $x-3=t^2 \Rightarrow x-3+t^2,\ dx=2tdt.$

Тому

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot 2t\cdot dt = 2\int\left(t^4+3t^2\right)dt =$$

$$= 2\int t^4dt + 6\int t^2dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C\,.$$

◈ **Зауваження:**

1. *Якщо підстановка обрана вдало, то одержаний інтеграл буде простішим і мета підстановки досягнута.*

2. *Якщо підінтегральний вираз містить корінь вигляду* $\sqrt{a^2-x^2}$, *то доцільно застосувати тригонометричну підстановку* $x=a\cos t$ або $x=a\sin t$.

3. *Знаходження вдалої підстановки для інтегрування певної множини функцій є значною подією в інтегральному численні. Видатний*

вчений XVIII ст., член Петербурзької академії наук Л.Ейлер вказав підстановку $t = x + \sqrt{x^2 \pm a}$ *для знаходження інтеграла* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$.

У цьому випадку

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}}\right)dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \frac{dt}{x + \sqrt{x^2 \pm a}}$$

або

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \frac{dt}{t}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$$

10.2.3. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується тоді, коли під інтегралом є добуток функцій, причому хоча б одна з них є трансцендентною (не степеневою).

Нехай u та v деякі функції x, тобто $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Розглянемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Інтегруючи обидві частини рівності, одержимо

$$\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du.$$

Звідси, враховуючи властивість невизначеного інтеграла, маємо

$$u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du.$$

Отже, одержали формулу

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \tag{4}$$

яку називають ***формулою інтегрування частинами***.

Ця формула дозволяє знаходження інтеграла $\int u \cdot dv$ звести до знаходження інтеграла $\int v \cdot du.$ При вдалому обранні u та dv інтеграл може бути табличним або простішим ніж заданий інтеграл $\int u \cdot dv.$

■ **Приклад 6.** Знайти $\int \ln x \cdot dx$.

↳ *Розв'язання.* Нехай $u = \ln x,\ \ dv = dx.$ Тоді $du = \dfrac{dx}{x},\ \ v = x$.

За формулою інтегрування частинами (4) одержимо

$$\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

Рекомендація до застосування методу інтегрування частинами

При обранні $u(x)$ та $dv(x)$ слід пам'ятати, що спрощення заданого інтеграла можливе за рахунок диференціювання функції $u(x)$. В інтегралах вигляду

$$\int P(x) \cdot e^x dx; \ \int P(x) \cdot \sin x dx; \ \int P(x) \cdot \cos x dx$$

($P(x)$ – багаточлен)

доцільно обирати $u = P(x)$, а залишену частину підінтегрального виразу позначати dv.

В інтегралах вигляду

$$\int P(x) \cdot \ln x dx, \ \int P(x) \cdot \operatorname{arctg} x dx, \ \int P(x) \cdot \arcsin x dx.$$

доцільно брати $dv = P(x) \cdot dx$, а залишок підінтегрального виразу дорівнювати u.

10.2.4. Інтегрування раціональних дробів

⬢ **Означення 3.** *Дріб називають* ***раціональним****, якщо його чисельник та знаменник є багаточленами, тобто дріб має вигляд*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

де a_i *та* b_k – *коефіцієнти багаточленів,* $i=0,\ 1,\ldots,\ n$; $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m$.

Раціональний дріб називається ***правильним***, якщо найвищий показник степеня чисельника n менше відповідного степеня m знаменника. Дріб називається ***неправильним***, якщо $n\geq m$.

Якщо $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дріб неправильний, тоді треба поділити чисельник на знаменник (за правилом ділення багаточленів) і одержати заданий дріб у вигляді суми багаточлена та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_{n-m}(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

⬢ **Означення 4.** ***Найпростішими раціональними дробами I, II, III та IV типу*** *називають правильні дроби вигляду:*

I. $\dfrac{A}{x-\alpha}$. *II.* $\dfrac{A}{(x-\beta)^k}\ \left(k\geq 2,\ \text{ціле}\right)$.

III. $\dfrac{Dx+E}{x^2+px+q}\ \left(\dfrac{p^2}{4}-q<0\right)$.

IV. $\dfrac{Gx+F}{\left(x^2+rx+s\right)^l}\ \left(l\geq 2,\ \text{ціле},\ \dfrac{r^2}{4}-s<0\right)$.

Умова $\frac{p^2}{4}-q<0$ означає, що квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів і на множники не розкладається. Те саме можна сказати і про квадратний тричлен x^2+rx+s.

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів І-го та ІІ-го типів знаходять методом безпосереднього інтегрування:

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-\alpha} = A\int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A\ln|x-a|+C.$$

$$\text{II. } \int \frac{Bdx}{(x-\beta)^k} = B\int (x-\beta)^{-k}\,d(x-\beta) = B\frac{(x-\beta)^{-k+1}}{-k+1}+C =$$

$$= \frac{B}{(-k+1)(x-\beta)^{k-1}}+C.$$

При інтегруванні найпростішого дробу ІІІ-го типу треба спочатку в знаменнику виділити повний квадрат, а потім той вираз, що під квадратом, замінити через нову змінну.

$$\text{III. } \int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Dx+E}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx =$$

$$\left(x+\frac{p}{2}=t,\ \textit{оскільки}\ x=t-\frac{p}{2},\ q-\frac{p^2}{4}>0,\ \textit{то}\ dx=dt, \right.$$

$$\left. \textit{позначимо}\ q-\frac{p^2}{4}=k^2 \right)$$

$$= \int \frac{D\left(t-\frac{p}{2}\right)+E}{t^2+k^2}dt = \int \frac{D\cdot t-\frac{Dp}{2}+E}{t^2+k^2}dt = D\int \frac{tdt}{t^2+k^2}+$$

$$+\frac{2E-Dp}{2}\int\frac{dt}{t^2+k^2}=D\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t^2+k^2\right|+\frac{2E-Dp}{2}\cdot\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C\,.$$

Повертаючись до змінної x, та враховуючи, що $k^2=\dfrac{4q-p^2}{4}$, або $k=\sqrt{\dfrac{4q-p^2}{2}}$, одержимо:

$$\int\frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx=\frac{D}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p^2}{2}\right)+q-\frac{p^2}{4}\right|+\frac{2E-Dp}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{4q-p^2}}+C=\frac{D}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2E-Dp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Інтеграл від найпростішого дробу типу IV шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу типу III.

У повному курсі вищої алгебри доведена така теорема.

✦ **Теорема 2.** ***Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів***.

Отже, інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування багаточлена $M_{n-m}(x)$ (при $n\geq m$) та суми найпростіших дробів. Відмітимо, що вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$. Можливі такі випадки:

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m).$$

В цьому випадку дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го типу:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-\alpha_m}. \qquad (5)$$

Невизначені коефіцієнти $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_m$ знаходять з тотожності (5).

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k.$$

Тоді дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го та II-го типу

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}. \qquad (6)$$

Коефіцієнти $A,\ B_1,\ldots,\ B_k$ знаходять з тотожності (6).

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k\cdot\left(x^2+px+q\right).$$

В цьому випадку дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го, II-го та III-го типів

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}. \qquad (7)$$

Коефіцієнти $A,\ B_1,\ B_2,\ldots,\ B_k,\ D$ та E знаходять з тотожності (7).

Приклад 7. Знайти $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – це правильний раціональний дріб, знаменник якого містить квадратний двочлен, який не розкладається на множники та один дійсний корінь $x=1$, тому цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів I та III типу:

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}=\frac{\left(Ax+B\right)}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}. \tag{8}$$

Невідомі коефіцієнти A, B, та C будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину рівності (8) треба привести до спільного знаменника, одержимо

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}=\frac{\left(Ax+B\right)\left(x-1\right)+C\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто

$$x=\left(Ax+B\right)\left(x-1\right)+C\left(x^2+1\right)\Rightarrow x=\left(A+C\right)x^2+\left(B-A\right)x+C-B. \tag{9}$$

Рівність (9) можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однаковому степеню x в обох частинах рівності однакові, тобто

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A=1\Rightarrow C=B=\frac{1}{2};\ A=-\frac{1}{2}\cdot \\ C-B=0 \end{cases}$$

Отже, розклад (8) тепер приймає вигляд

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}=\frac{-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\left(x^2+1\right)}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

Інтегруючи цю рівність, одержимо

$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\int\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C .$$

10.2.5. Інтегрування виразів, що містять ірраціональності

При інтегруванні виразів, що містять дробові степені змінної інтегрування (тобто ірраціональності), методом підстановки зводять підінтегральну функцію до раціонального дробу. Розглянемо декілька випадків.

1. Підінтегральна функція є раціональним дробом відносно x^{α}, де α дробове число. У цьому випадку вводять нову змінну $t = x^{1/q}$, де q – спільний знаменник дробових показників степеня змінної x.

■ **Приклад 8.** Знайти $J = \int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання. Маємо: $J = \int \dfrac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{4}}}$.

Спільний знаменник дробових показників степенів $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ змінної x дорівнює 12. Тому зробимо підстановку $t = x^{\frac{1}{12}}$, $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$ і ми одержуємо:

$$J = \int \frac{t^6\cdot 12}{t^{16} - t^{15}} t^{11}dt = 12\int\frac{t^2dt}{t-1} = 12\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 12\int\left(t+1\right)dt +$$

$$+12\int\frac{dt}{t-1} = 12\frac{(t+1)^2}{2}+12\ln|t-1|+C = 6\left(x^{\frac{1}{12}}+1\right)^2+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}-1\right|+C.$$

2. Підінтегральний вираз містить дробові степені лінійного двочлена $(ax+b)$. У цьому випадку доцільно зробити підстановку $t=(ax+b)^{\frac{1}{q}}$, де q – спільний знаменник дробових показників степенів двочлена.

■ **Приклад 9.** Знайти $J=\int\dfrac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Розв'язання. Нехай

$$t=(x+1)^{\frac{1}{2}},\quad x+1=t^2,\quad x=t^2-1,\quad dx=2tdt.$$

Тому

$$J=\int\frac{2t\cdot dt}{t^3+t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C.$$

10.3. Поняття інтегралів, що не виражаються елементарними функціями

Математиками доведено, що будь-яка неперервна функція має первісну i, отже, невизначений інтеграл. Але первісна елементарної функції не завжди буде елементарною функцією. Існують прості елементарні функції, первісні яких не можна виразити скінченою комбінацією елементарних функцій.

Доведено, наприклад, що жоден із інтегралів

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int e^{x^2}dx,\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int\frac{e^x}{x}dx,$$

$$\int\frac{dx}{\ln x},\quad \int x\cdot\operatorname{tg}x\,dx,\quad \int\sqrt{\sin x}\,dx,\quad \int\sin x^2dx,\quad \int\frac{e^x}{x}dx.$$

не виражається елементарними функціями. Такі інтеграли іноді зустрічаються у практичній діяльності, тоді їх розглядають як нові функції і обчислюють за допомогою рядів або нескінченних добутків елементарних функцій. Наприклад, доведено, що

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = C + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \ldots$$

Суму членів степеневого ряду правої частини приймають за нову функцію, яку позначають $\mathrm{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$ і називають ***синус інтегральний змінної*** x.

10.4. Вправи

1. Використовуючи правила інтегрування та таблицю основних інтегралів, знайти інтеграли:

a) $\int (5 + 3\sin x - 2\cos x)dx$; b) $\int \left(\frac{3}{x} + 4x^2 - \frac{5}{x^3} + \sqrt{x}\right)dx$;

c) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx$; d) $\int (2^x + 3^x - 8e^x)dx$;

e) $\int \left(\frac{3}{x^2 + 9} - e^x\right)dx$; f) $\int \left(x\ln 3 - \frac{l}{x\ln 2}\right)dx$;

g) $\int (x+2)\left(3x - \frac{1}{x}\right)dx$.

2. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграли:

a) $\int e^{3x-1}dx$; b) $\int \sin 2x dx$; c) $\int 2^{4x+6}dx$;

d) $\int (x+5)^{-\frac{4}{3}} dx$; e) $\int \frac{dx}{(3x+1)^2 + 4}$; f) $\int \frac{dx}{7x-1}$.

3. Методом заміни змінної знайти інтеграли

a) $\int \sin^2 x \cdot \cos\ x dx$; b) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x-6}$; c) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

d) $\int (x^2+7x+3)^{-4}(2x+7)dx$; e) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+3x+1)}$;

f) $\int \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)dx$; g) $\int \frac{\ln|2x|}{x}dx$.

4. Методом інтегрування частинами знайти інтеграли:

a) $\int x\cdot\cos 2x dx$; b) $\int x\ln x dx$; c) $\int x\cdot 3^x dx$; d) $\int x\cdot e^{-x}dx$;

e) $\int x\cdot\sin\frac{x}{3}dx$; f) $\int x^2\cdot e^x dx$; g) $\int x\cdot \operatorname{arctg} x dx$.

5. Знайти інтеграли

a) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$; b) $\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$; c) $\int \frac{(2x^2-1)dx}{x^3-5x^2+6x}$;

d) $\int \frac{dx}{x^3-a^2x}$; e) $\int \frac{(x+2)^2 dx}{x(x-1)^2}+\int \frac{(2x^2-3x+3)dx}{x^2+2x+1}$;

f) $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$; g) $\int \frac{(3x+2)dx}{(x-1)(2x+1)}+\int \frac{x^3dx}{x-2}$.

6. Використовуючи невизначений інтеграл, розв'язати задачі економічного змісту.

a) Маргінальний річний доход фірми задано рівністю

$$D'(x)=80-0{,}04x.$$

Знайти функцію річного прибутку цієї фірми та обмеження на вартість.

b) Граничні витрати деякої фірми на виготовлення x одиниць продукції задовольняють умову

$$V'(x)=100+0{,}04x.$$

Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

c) Маргінальна функція доходу малого підприємства

$$D'(x)=6-0{,}03x$$

і підприємство одержало доход 30 тисяч гривень після реалізації 100 одиниць продукції. Визначати функцію доходу цього підприємства. Який доход одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

d) Маргінальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики задані рівністю $V'(x)=\dfrac{x}{100}\cdot\sqrt{x^2+360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття. Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

e) Величина прискорення руху змінюється з часом t за законом $3+0{,}5t$. Знайти:

1) залежить швидкості руху від часу, якщо при $t=0$ швидкість дорівнює 60 одиниць;

2) шлях, який пройшов об'єкт за час t, якщо при $t=0$ початкова відстань дорівнювала нулю.

Частина 11

ВИЗНАЧЕНІ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Визначений інтеграл є одним із основних понять математичного аналізу і широко використовується в різних галузях науки, техніки та в економічних дослідженнях.

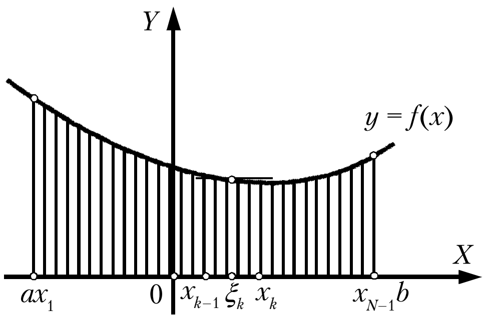
11.1. Означення та властивості визначеного інтеграла

11.1.1. Задачі, що привели до поняття визначеного інтеграла

Розглянемо дві задачі – геометричну та фізичну.

1. *Обчислення площі криволінійної трапеції*. Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$ і будемо поки що вважати, що $f(x) \geq 0$ для усіх $x \in [a,b]$.

Фігуру, обмежену кривою $y = f(x)$, відрізком $[a,b]$ осі Ox, прямими $x = a$ та $x = b$, називають ***криволінійною трапецією*** (див. мал. 1). В окремих випадках може $f(a) = 0$ або $f(b) = 0$ і тоді відповідна сторона трапеції стягується в точку.



Мал. 1.

Для обчислення площі S цієї криволінійної трапеції поділимо відрізок $[a,b]$ довільним чином на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \\ < \ldots < x_n = b.$$

Довжини цих частин

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Перпендикуляри до осі Ox, проведені із точок ділення до перетину із кривою $y = f(x)$, розділяють усю площу трапеції на n вузьких криволінійних трапецій. Замінимо кожну із цих трапецій прямокутником з основою Δx_k та висотою $f(\xi_k)$, де $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Сума площ усіх таких прямокутників буде дорівнювати

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Таким чином, площа S криволінійної трапеції наближено дорівнює цій сумі, тобто

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Ця формула буде тим точнішою, чим менша величина Δx_k.

Щоб одержати точну формулу для обчислення площі S криволінійної трапеції, треба в цій формулі перейти до границі, коли $\Delta x_k \to 0$. Тоді

$$S \approx \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (1)$$

2. *Обчислення шляху, який пройшла точка.* Нехай потрібно визначити шлях S, який пройшла матеріальна точка, що рухається в одному напрямі із змінною швидкістю $V(t)$ за час від t_0 до T.

Поділимо проміжок часу $T - t_0$ на n частин: $\Delta t_1,\ \Delta t_2, \ldots,\ \Delta t_n$. Позначимо через ξ_k довільний момент часу із проміжку Δt_k, а значення швидкості у цій точці позначимо $V_k = f(\xi_k),\ k = 1,2,\ldots,n.$

Точка, що рухається з постійною швидкістю V_k на проміжку часу Δt_k, проходить за цей час шлях $V_k \cdot \Delta t_k$, а за час $T - t_0$ вона пройде шлях

$$V_1 \Delta t_1 + V_2 \Delta t_2 + \ldots + V_n \Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} V_k \Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta t_k .$$

Будемо вважати, що шлях S, пройдений точкою, наближено дорівнює цій сумі. Коли $\Delta t_k \to 0$, тоді змінна швидкість на проміжку Δt_k мало відрізняється від постійної V_k. Тому дійсне значення шляху, пройденого точкою за час $T - t_0$ буде дорівнювати границі цієї суми при $\max \Delta t_k \to 0$, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta t_k . \qquad (2)$$

До аналогічної суми зводиться задача про роботу змінної сили, що направлена по прямій лінії – траєкторії руху точки, до якої прикладена ця сила та інші задачі.

11.1.2. Означення визначеного інтеграла та його зміст

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин точками ділення

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b .$$

У кожному проміжку $\left[x_{k-1,} x_k\right]$ довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ оберемо довільну точку ξ_k *і* обчислимо відповідне значення функції $f\left(\xi_k\right),\ \ k = 1,2,...,n$.

Побудуємо суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k$, яку називають інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

⬢ **Означення 1.** *Якщо існує скінчена границя інтегральної суми при* $\max\Delta x_k \to 0$*, незалежна від способу ділення відрізка* $[a,b]$ *на частини та вибору точок* ξ_k*, то ця границя називається* ***визначеним інтегралом від функції*** $f(x)$ ***на відрізку*** $[a,b]$ *і позначається*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Математично це означення можна записати так:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\max\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (3)$$

Відмітимо, що числа a та b називають ***нижньою*** та ***верхньою межами***, відповідно.

Згідно з цим означенням рівності (1) та (2) тепер можна записати у вигляді

$$S = \int_a^b f(x)dx, \; S = \int_{t_0}^{T} f(t)dt, \qquad (4)$$

тобто площа криволінійної трапеції S та шлях S, пройдений точкою із змінною швидкістю $V = f(t)$ виражаються визначеним інтегралом.

Перевірка існування скінченої границі інтегральної суми для кожної функції утруднена. Але такої перевірки робити не треба тому, що використовують таку відому теорему.

✦ **Теорема 1.** ***Якщо функція*** $f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a,b]$ ***або обмежена і має скінчену кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція*** $f(x)$ ***інтегрована на*** $[a,b]$.

11.1.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Із означення (3) визначеного інтеграла та основних теорем про границі випливають слідуючі властивості.

1. Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто якщо A – стала, то

$$\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx .$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожного доданку, тобто

$$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x) \right] dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_m(x)dx.$$

3. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

для будь-якої функції $f(x)$.

5. Якщо $f(x) \le \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

6. Якщо m та M – найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, де $a < \xi < b$.

8. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; $a < c < b$.

11.2. Обчислення визначених інтегралів

Раніше ми навчились знаходити невизначені інтеграли. Тому для обчислення визначених інтегралів доцільно встановити зв'язок між ними.

11.2.1. Зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами

⬢ **Означення 2.** *Визначений інтеграл з постійною нижньою межею та змінною верхньою межею називають* ***інтегралом із змінною верхньою межею***.

Щоб мати звичне позначення, змінну верхню межу позначимо через x, а змінну інтегрування t. Одержимо інтеграл $\int_a^x f(t)dt$, який є функцією x, тобто $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

✦ **Теорема 2.** ***Якщо*** $f(x)$ ***неперервна функція, то похідна визначеного інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї верхньої межі, тобто***

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{5}$$

Доведення. Надамо аргументу x приріст Δx, тоді функція $\Phi(x)$ одержить приріст, який згідно з властивістю 8 визначеного інтеграла можна записати у вигляді

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

До останнього інтеграла застосуємо властивість 7, тоді

$$\Delta\Phi(x)=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\cdot\Delta x\text{, де } x<\xi<x+\Delta x.$$

Згідно з означенням похідної маємо

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x),$$

що й треба було довести.

✦ **Теорема 3.** ***Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень будь-якої її первісної для верхньої та нижньої меж інтегрування, тобто якщо $F(x)$ є первісна функції $f(x)$, то має місце рівність***

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{6}$$

яка називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Доведення. Нехай $F(x)$ деяка первісна функції $f(x)$. За теоремою 2 $\int_a^x f(t)dt$ також первісна для $f(x)$. Але дві первісні функції $f(x)$ відрізняються лише на постійний доданок C. Тому

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C. \tag{7}$$

Ця рівність (7) при відповідному обранні C буде тотожністю, тобто має місце для усіх x.

Для визначення C візьмемо у формулі (7) $x = a$. Тоді

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a).$$

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Якщо у цій рівності покласти $x = b$, то одержимо

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Змінюючи змінну інтегрування t на x, одержимо формулу (6), що й треба було довести.

Відмітимо, що різницю $F(b) - F(a)$ позначають часто так:

$$F(x)\Big|_a^b, \text{ тобто } F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тому формулу Ньютона-Лейбніца (6) можна записати у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Ця формула вказує не тільки на зв'язок визначеного інтеграла з невизначеним, але й спосіб обчислення $\int_a^b f(x)dx$.

■ **Приклад 1.** Обчислити $\int_{-1}^2 3x^2 dx$.

Розв'язання.

$$\int_{-1}^{2} 3x^2dx = 3\int_{-1}^{2} x^2dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} = x^3\Big|_{-1}^{2} = 2^3-(-1)^3 = 8+1=9 .$$

11.2.2. Інтегрування частинами

Якщо проінтегрувати обидві частини рівності

$$d\big[u(x)\cdot v(x)\big] = v(x)du(x)+u(x)dv(x)$$

в межах від a до b, то одержимо

$$\int_a^b d\big[u(x)v(x)\big] = \int_a^b v(x)du(x)+\int_a^b u(x)dv(x) \Rightarrow u\cdot v\Big|_b^a = \int_a^b vdu+\int_a^b udv .$$

Звідси одержуємо важливу формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла:

$$\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_b^a - \int_a^b vdu . \qquad (8)$$

■ **Приклад 2.** Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} x\cos xdx$.

Розв'язання. Нехай $u = x$, $dv=\cos xdx$, тоді знаходимо $du=dx$, $v=\int\cos xdx=\sin x$ (взята первісна без сталої *C*).

Застосовуючи до заданого інтеграла формулу (8), одержимо

$$\int_0^{2\pi} x\cdot\cos xdx = x\cdot\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin xdx =$$

$$=2\pi\cdot\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0+\cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi-\cos 0 = 0 .$$

11.2.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

✦ **Теорема 4.** ***Нехай задано інтеграл*** $\int\limits_a^b f(x)dx$***, де*** $f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a,b]$***. Зробимо підстановку*** $x=\varphi(t)$***,*** $\alpha \le t \le \beta$***, де*** $\varphi(t)$ ***неперервна диференційована функція на відрізку*** $[\alpha,\beta]$***.***

Якщо: **1)** ***при зміні*** t ***від*** α **до** β ***змінна*** x ***змінюється від*** a ***до*** b***, тобто*** $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$***;***

2) ***складна функція*** $f[\varphi(t)]$ ***визначена і неперервна на відрізку*** $[\alpha,\beta]$***, тоді має місце рівність***

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{9}$$

Доведення. Нехай $F(x)$ деяка первісна для функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$. Розглянемо складну функцію $F[\varphi(t)]$. Застосовуючи правило диференціювання складної функції, одержимо

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt}=F'_\varphi[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Це означає, що функція $F[\varphi(t)]$ є первісною для функції $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

Звідси, за формулою Ньютона-Лейбніца і рівностей $\varphi(\alpha)=a$ та $\varphi(\beta)=b$, одержуємо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right]=$$

$$=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b} f(x)dx\,.$$

що й треба було довести.

■ **Приклад 3.** Обчислити $\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}dx$.

✎ *Розв'язання.* Нехай $t=\sqrt{1+x}$, тоді $t^2=1+x \Rightarrow x=t^2-1$, $dx=2tdt$. Знайдемо межі інтегрування, використовуючи рівність $t=\sqrt{1+x}$:

$$t_H=\sqrt{1+0}=1;\ t_B=\sqrt{1+3}=2.$$

Отже,

$$\int_{0}^{3} x\sqrt{1+x}dx=\int_{1}^{2}\left(t^2-1\right)2t^2dt=2\int_{0}^{2}\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2}=2\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-2\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)=$$

$$=2\frac{96-40-3+5}{15}=\frac{116}{15}=7\frac{11}{15}.$$

11.2.4. Методи наближеного обчислення

Для деяких неперервних підінтегральних функцій $f(x)$ первісну не можна виразити елементарними функціями. У цих випадках обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца неможливе.

Крім того, у практичній діяльності часто досить знати лише наближене значення визначеного інтеграла і знаходити це наближене значення такими методами, які дозволяють використовувати сучасну обчислювальну техніку.

Тому математики багатьох країн розробляють ефективні методи наближеного обчислення визначеного інтеграла.

Найбільш часто використовують три методи: метод прямокутників, метод трапецій та метод парабол (метод Сімпсона).

Якщо відрізок інтегрування $\left[a,b\right]$ поділити на n рівних частин довжиною $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ і позначити через ξ_k середню точку відрізку $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{b-a}{n}\left[f\left(\xi_1\right)+f\left(\xi_2\right)+\ldots+f\left(\xi_n\right)\right], \qquad (10)$$

яку називають ***формулою прямокутників***. Чим більше буде n тим менший буде крок $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ і права частина (10) буде давати більш точне значення інтеграла.

Якщо поділити відрізок інтегрування точками ділення

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

на n рівних частин довжиною $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ і позначити значення функції в точках ділення $f\left(x_k\right)$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{b-a}{n}\left[\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f\left(x_k\right)\right], \qquad (11)$$

яку називають ***формулою трапецій***. Легко бачити, що при зростанні n крок $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ зменшується, тому значення інтеграла буде більш точним.

Якщо відрізок інтегрування $\left[a,b\right]$ поділити на парну кількість рівних частин (тобто $n=2m$) і позначити $y_k=f\left(x_k\right)$, де $x_k=a+\Delta x\cdot k$ — точки ділення, $k=0,\ 1,\ldots,2m$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{b-a}{2m}\left[\begin{matrix}y_0+y_{2m}+2\left(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2}\right)+\\+4\left(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1}\right)\end{matrix}\right],\qquad(12)$$

яку називають ***формулою Сімпсона***. Ця формула дає більш точне значення визначеного інтеграла тому, що для її доведення використовується метод парабол, за яким на кожному відрізку $\left[x_{k-1},x_k\right]$ три значення функції $f\left(x\right)$ входять до інтегральної суми.

11.3. Невласні інтеграли

11.3.1. Поняття та різновиди невласних інтегралів

Згідно з теоремою існування визначеного інтеграла цей інтеграл існує, якщо виконані умови:

1) відрізок інтегрування $\left[a,b\right]$ скінченний;

2) підінтегральна функція $f\left(x\right)$ неперервна або обмежена і має скінченну кількість точок розриву. Якщо хоча б одна із умов не виконується, то визначений інтеграл називають ***невласним***.

Якщо не виконується перша умова, тобто $b=\infty$ або $a=-\infty$ або $a=-\infty$ та $b=\infty$, то інтеграли називають ***невласними інтегралами з нескінченними межами***.

Якщо не виконується лише друга умова, то підінтегральна функція $f\left(x\right)$ має точки розриву другого роду на відрізку інтегрування

$[a,b]$. В цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ називають ***невласним інтегралом від розривної функції або від функції, необмеженої в точках відрізку інтегрування.***

11.3.2. Дослідження невласних інтегралів

Дослідження невласних інтегралів проводять шляхом використання граничного переходу до визначеного інтеграла.

Інтеграли з необмеженими межами розглядають так:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx .$$

Якщо вказані границі існують (будуть скінченними числами), то відповідний інтеграл називають ***збіжним*** і він дорівнює своїй границі.

Якщо якась границя не існує або дорівнює нескінченності, то інтеграл називають ***розбіжним***.

■ **Приклад 4.** Обчислити інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

✎ *Розв'язання.* Згідно з означенням невласного інтеграла, маємо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1 .$$

Отже, цей інтеграл існує, збіжний і дорівнює 1.

У випадку необмеженої на $[a,b]$ функції $f(x)$ її точки розриву можуть бути на лівому кінці або на правому кінці або всередині проміжку інтегрування $[a,b]$. У цих випадках невласні інтеграли визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to 0}\int_a^{b-\xi} f(x)dx;\ \int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to 0}\int_{a+\xi}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi'\to 0}\int_a^{c-\xi'} f(x)dx + \lim_{\xi''\to 0}\int_{c+\xi''}^{b} f(x)dx.$$

Якщо вказані границі існують, то відповідний інтеграл називають ***збіжним***. У протилежному випадку інтеграл називають ***розбіжним***.

■ **Приклад 5.** Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{2x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. В точці $x=0$ підінтегральна функція необмежена, тобто вона має розрив всередині проміжку інтегрування. За означенням такого невласного інтеграла маємо

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{2x^2} = \lim_{\xi'\to 0}\int_{-1}^{-\xi'}\frac{dx}{2x^2} + \lim_{\xi''\to 0}\int_{\xi''}^{2}\frac{dx}{2x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{\xi'\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\xi'} - \frac{1}{2}\lim_{\xi''\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{\xi''}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\xi'\to 0}\left(\frac{-1}{\xi'}+1\right) - \frac{1}{2}\lim_{\xi''\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\xi''}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{\xi'\to 0}\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{\xi''\to 0}\frac{1}{\xi''} = \infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

11.4. Застосування визначених інтегралів

11.4.1. Обчислення площ

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)\geq 0$, то згідно з формулою (4), обчислення площі криволінійної трапеції, зображеної на мал. 1, можна знайти за формулою

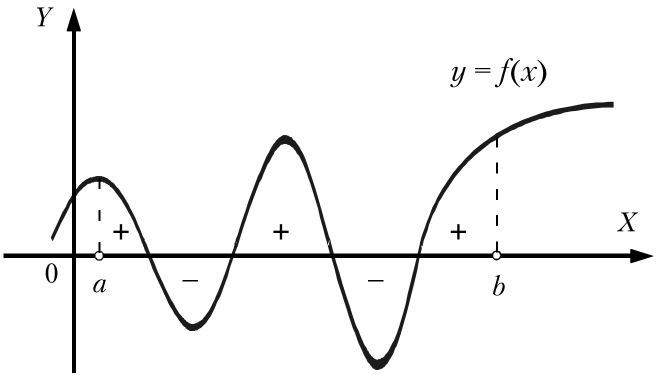
$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)\leq 0$, то криволінійна трапеція, обмежена кривою $f(x)$, відрізком $[a,b]$ та прямими $x=a$ і $x=b$, буде розташована нижче осі Ox. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ у цьому випадку буде ≤ 0. Але площа є невід'ємною величиною, тому площу криволінійної трапеції, розташованої нижче осі Ox, треба знаходити за формулою

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \text{ або } S=-\int_a^b f(x)dx,\ \left(f(x)\leq 0\right).$$

Якщо $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ декілька разів змінює свій знак, то інтеграл по відрізку $[a,b]$ треба розбити на суму інтегралів по часткових відрізках. Інтеграл буде додатним на тих відрізках, де $f(x)\geq 0$ та від'ємним там, де $f(x)<0$. Інтеграл по відрізку $[a,b]$ дає різницю площ, що лежать вище та нижче осі Ox (див. мал. 2).

Щоб одержати суму площ (без врахування розташування відносно осі Ox) треба знайти суму абсолютних величин інтегралів по часткових відрізках або обчислити інтеграл від абсолютного значення функції тобто



Мал. 2.

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx .$$

■ **Приклад 6.** Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 .$$

Розв'язання. Із аналітичної геометрії відомо, що цей еліпс має вигляд такий, як на мал. 3.

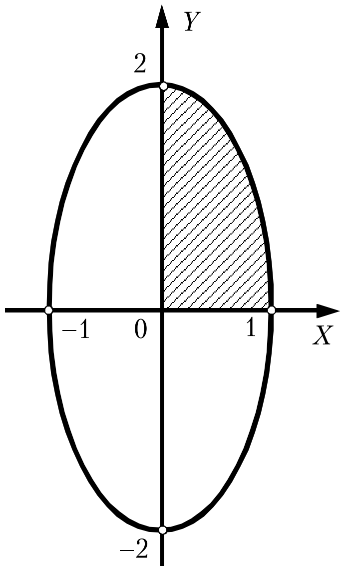
Шукана площа S дорівнює $4S_1$, де S_1 – площа заштрихованої частини еліпса, що розташована у першому квадранті Отже,

$$S = 4\int_0^1 y dx .$$

Із рівняння еліпса знаходимо y:

$$y^2 = 4\left(1 - x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 2\sqrt{1 - x} .$$



Мал. 3.

Для заштрихованої частини еліпса $y \geq 0$, тому $y = 2\sqrt{1-x^2}$ і ми одержуємо

$$S = 4\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}dx = 8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx. \qquad (13)$$

Заміна $x = \sin\ t$ дає:

$dx = \cos t \cdot dt$; $t = \arcsin x$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$;

$t_H = \arcsin 0 = 0$; $t_B = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t\ dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2tdt =$$

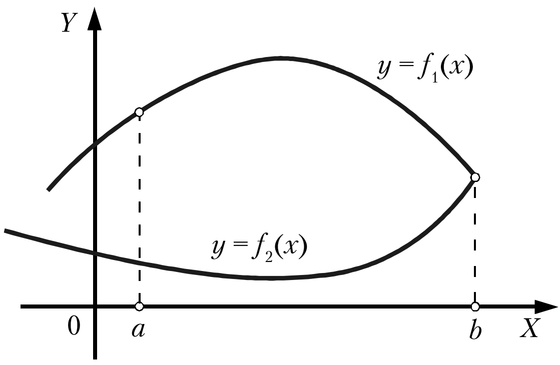
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

За формулою (13) одержимо

$$S = 8 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

(квадратних одиниць).

Якщо треба обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ (дивись, наприклад, мал. 4), то при $f_1(x) \geq f_2(x)$ її можна знайти за формулою



Мал. 4.

$$S = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) - \right]dx. \qquad (14)$$

■ **Приклад 7.** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

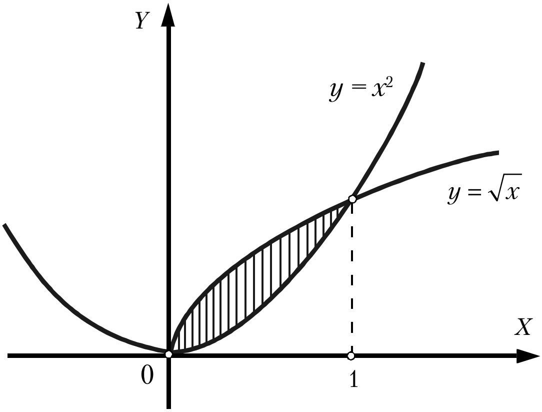
$$y=\sqrt{x} \text{ та } y=x^2.$$

Розв'язання. Спочатку зобразимо фігуру, площу якої треба знайти (мал. 5). Знайдемо точку перетину цих парабол. Координати точок перетину задовольняють обом рівнянням, тому

$$\sqrt{x}=x^2 \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow$$

$$x^4-x=0 \Rightarrow$$

$$x_1=0,\ x_2=1.$$



Мал. 5.

Отже, площа заштрихованої фігури буде

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ (квад. одиниць).}$$

11.4.2. Обчислення довжини дуги кривої

Нехай крива на площині має рівняння $y=f(x)$. Треба знайти довжину дуги $\overset{\frown}{AB}$ цієї кривої, обмежену прямими $x=a$ та $x=b$ (див. мал. 6).

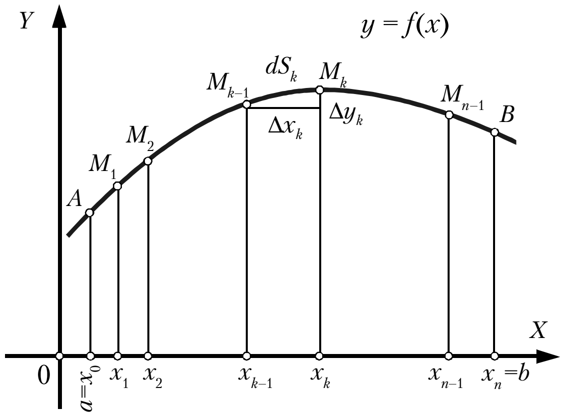
Візьмемо на $\overset{\frown}{AB}$ точки $A,\ M_1,\ M_2,\ldots,\ M_{n-1},\ B$ з абсцисами $a,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-1},\ b$ відповідно, та проведемо хорди

$$AM_1,\ M_1M_2,\ldots,\ M_{k-1}M_k,\ldots,\ M_{n-1}B,$$

довжини яких позначимо $\Delta l_1,\ \Delta l_2,\ldots,\ \Delta l_n$.

Одержимо ламану лінію, вписану в дугу $\overset{\frown}{AB}$. Довжиною ламаної буде

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k .$$



Мал. 6.

⬢ **Означення 3.** ***Довжиною l дуги*** $\overset{\frown}{AB}$ *називають границю, до якої прямує довжина вписаної ламаної, коли довжина її найбільшої частини прямує до нуля, тобто*

$$l = \lim_{max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k .$$

✦ **Теорема 5.** ***Якщо на відрізку*** $[a,b]$ ***функція*** $f(x)$ ***та її похідна*** $f'(x)$ ***неперервні, то довжина дуги кривої*** $y = f(x)$***, обмеженої прямими*** $x = a$ ***та*** $x = b$***, обчислюється за формулою***

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx . \tag{15}$$

Доведення. Із малюнка 6 бачимо, що за теоремою Піфагора

$$\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \right)^2} \cdot \Delta x_k .$$

Згідно з теоремою Лагранжа маємо:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \text{ де } x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

Тому $\Delta l_k = \sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}\cdot\Delta x_k$ і довжина вписаної ламаної буде

$$l_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}\cdot\Delta x_k .$$

За умовою теореми $f'(x)$ неперервна, тому і функція $\sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}$ також неперервна, а це означає, що існує скінченна границя

$$l = \lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}\cdot\Delta x_k = \int_a^b\sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}dx ,$$

що й треба було довести.

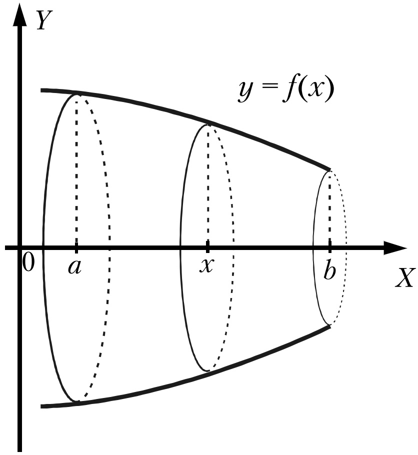
▼ **Наслідок.** *Якщо дуга задана параметрично* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a\le t\le\beta$*, то її довжину знаходять за формулою*

$$l = \int_a^\beta\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}dt . \qquad (16)$$

11.4.3. Обчислення об'єму та площі поверхні тіла обертання

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою $y=f(x)$ відрізком $[a,b]$ осі Ox та прямими $x=a$ та $x=b$, обертається навколо осі Ox (мал. 7). Тоді об'єм тіла обертання можна знайти за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx , \qquad (17)$$



Мал. 7.

а площу поверхні обертання за формулою

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx\,. \quad (18)$$

■ **Приклад 8.** Обчислити об’єм кулі радіуса R.

Розв’язання. Кулю можна розглядати як результат обертання півкруга, обмеженого частиною кола $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, навколо осі Ox.

Використовуючи рівність $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, симетричність кола відносно осі Oy та формулу (17), одержимо об’єм V кулі

$$V = \pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^R\left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (кубічних одиниць).}$$

11.4.4. Обчислення роботи

Нехай під дією сили F матеріальна точка M рухається по прямій OS і напрям сили співпадає з напрямом руху.

Тоді роботу A, виконану змінною силою $F(s)$ для переміщення точки M із положення $s = a$ до $s = b$ знаходять за формулою

$$A = \int_a^b F(s)\,ds\,. \quad (19)$$

■ **Приклад 9.** Стиск S гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі F. Обчислити роботу, виконану силою F для стиску пружини на 8 см, якщо для її стиску на 1 сантиметр потрібна сила в 1 кг.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі сила F пропорційна стиску S, тобто

$$F = K \cdot S,$$

де K – деяка постійна величина, коефіцієнт стиску пружини. Якщо стиск пружини вимірювати у метрах, а силу F у кілограмах, то за умовою задачі при $S = 0{,}01$ сила $F = 1$, тобто $1 = 0{,}01K \Rightarrow K = 100$, а тому $F = 100S$.

За умовою задачі сила F стиснула пружину на 8 см, тобто із положення $a = 0$ до $b = 0{,}08$.

За формулою (19) знаходимо шукану роботу:

$$A = \int_0^{0,08} 100 \cdot S \cdot dS = 100 \cdot \frac{S^2}{2}\Bigg|_0^{0,08} = \frac{100}{2} \cdot 0{,}0064 = 0{,}32 \text{ (кгм).}$$

11.5. Задачі економічного змісту

11.5.1. Витрати, доход та прибуток

Нехай $V(x)$ буде функцією загальних витрат на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ – функція маргінальних витрат. Тоді визначений інтеграл

$$\int_a^b V'(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) = V(a) \tag{20}$$

дорівнює зміні загальних витрат при зростанні кількості виробленої продукції від a до b одиниць.

Звідси випливає важливий наслідок.

Зміна виробничих витрат при зростанні виробленої продукції від a до b одиниць дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції маргінальних витрат $y = V'(x)$, відрізком $[a,b]$ та прямими $x = a$ та $x = b$.

Аналогічно, якщо $D'(x)$ та $P'(x)$ – функції маргінального доходу та прибутку, відповідно, то зміни доходу та прибутку при зростанні реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюється за формулами

$$\int_a^b D'(x)dx = D(b) - D(a), \tag{21}$$

$$\int_a^b P'(x)dx = P(b) - P(a). \tag{22}$$

■ **Приклад 10.** Функція маргінальних витрат фірми має вигляд

$$V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x.$$

Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 1 000 до 1 500 одиниць.

✎ *Розв'язання.* За формулою (20) зростання загальних витрат буде

$$\int_{1000}^{1500} V'(x)dx = \int_{1000}^{1500} (23{,}5 - 0{,}01x)dx = \left[23{,}5x - 0{,}01\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{1000}^{1500} =$$

$$= 23{,}5 \cdot 1500 - 0{,}005 \cdot (1500)^2 - \left[23{,}5 \cdot 1000 - 0{,}005 \cdot (1000)^2\right] =$$

$$= 2350 \cdot 5 - 50 \cdot 125 = 50 \cdot (235 - 125) = 5500.$$

Отже, витрати зростуть на 5 500 гривень.

11.5.2. Коефіцієнт нерівномірного розподілу прибуткового податку

Нехай y є частина загального прибуткового податку пропорційна частині x усього населення держави.

Наприклад, якщо $x=\frac{1}{2}$, а $y=\frac{1}{4}$, то це означає, що 50% населення сплачує 25% загального прибуткового податку.

Якщо $y=0{,}7$, коли $x=0{,}9$, то це означає, що 90% населення сплачує 70% прибуткового податку.

У загальному випадку x та y – дробові частини цілого ($0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$) і y є функцією x, тобто $y=f(x)$.

Будемо вважати, що не має осіб, які не сплачують прибуткового податку, тобто $f(0)=0$ і весь прибутковий податок сплачує 100% населення, тобто $f(1)=1$.

Графік функції $y=f(x)$, яка описує дійсний розподіл прибут--кового податку, називають ***кривою Лоренца***.

Припустимо, що крива Лоренца задана рівнянням

$$y=\frac{15}{16}x^2+\frac{1}{16}x \quad \text{(див. мал. 8).}$$

Коли $x=0{,}2$, маємо

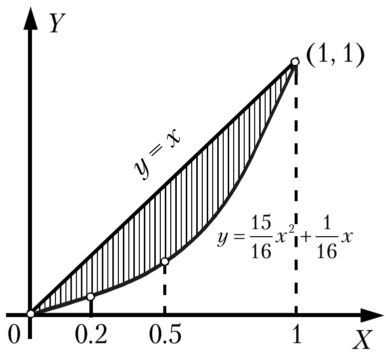
$$y=\frac{15}{16}(0{,}2)^2+\frac{1}{16}\cdot 0{,}2=0{,}05.$$

Це означає, що 20% населення сплачує 5% загального податку.

Коли $x=0{,}5$, маємо

$$y=\frac{15}{16}(0{,}5)^2+\frac{1}{16}\cdot 0{,}5=0{,}2656.$$

Це означає, що 50% населення сплачує тільки 26,56% податку.



Мал. 8.

Коефіцієнтом нерівності розподілу податку кривої Лоренца *називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою* $y = x$ *(на малюнку 8 вона заштрихована) до площі фігури, що лежить нижче прямої* $y = x$ *(на мал. 8 – це прямокутний трикутник:* $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$, $y = x$.

Коефіцієнт нерівного розподілу податку, що здійснюється за законом Лоренца, позначають L.

Площа трикутника $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Площу заштрихованої фігури одержимо з використанням визначеного інтеграла за формулою

$$S_2 = \int_0^1 \left(x - f\left(x \right) \right) dx .$$

Тому, згідно з означенням, коефіцієнт Лоренца обчислюють за формулою

$$L = \frac{S_2}{S_1} = 2\int_0^1 \left[x - f\left(x \right) \right] dx . \qquad (23)$$

У випадку кривої Лоренца вигляду

$$y = \frac{15}{16} x^2 + \frac{1}{16} x$$

коефіцієнт нерівності розподілу податку буде

$$L = 2\int_0^1 \left[x - \frac{15}{16} x^2 - \frac{1}{16} x \right] dx = 2\int_0^1 \left(\frac{15}{16} x - \frac{15}{16} x^2 \right) dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{15}{16} \int_0^1 \left(x - x^2 \right) dx = \frac{15}{8} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{15}{8} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{16} .$$

Відмітимо, що коефіцієнт нерівності розподілу податку завжди задовольняє співвідношення $0 \le L \le 1$.

Коли $L = 0$, прибутковий податок розподілено рівномірно, коли $L = 1$, нерівномірність розподілу податків найбільша.

11.5.3. Максимізація прибутку за часом

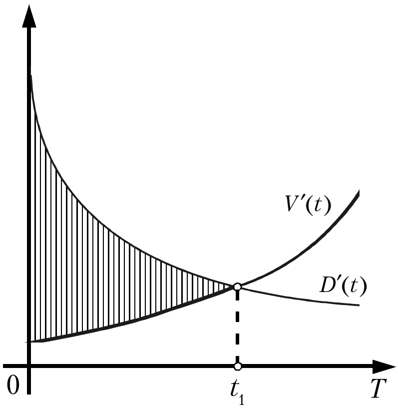
Нехай $V(t)$, $D(t)$ та $P(t)$ – загальні витрати, доход та прибуток, що змінюються з часом, тобто залежать від часу t. Тоді

$$P(t)=D(t)-V(t) \text{ або } P'(t)=D'(t)-V'(t).$$

Максимум загального прибутку буде тоді, коли

$$P'(t)=0 \text{ або } D'(t)=V'(t).$$

Іншими словами, існує такий час t, коли $D'(t)=V'(t)$, тобто швидкості зміни доходу та витрат рівні (див., наприклад, мал. 9).



Мал. 9.

Загальний прибуток за час t_1 можна знайти за формулою

$$P(t_1)=\int_0^{t_1} P'(t)dt=\int_0^{t_1}\left[D'(t)-V'(t)\right]dt \quad (24)$$

Із мал. 9 бачимо, що максимум прибутку дорівнює площі між кривими $D'(t)$ та $V'(t)$ на проміжку $t\in[0,t_1]$ (заштрихована частина).

■ **Приклад 11.** Швидкості зміни витрат та доходу підприємства після початку його діяльності визначалися формулами

$$V'(t)=5+2t^{2/3}, \text{ та } D'(t)=17-t^{2/3},$$

де V та D вимірювались мільйонами гривень, а t вимірювали роками. Визначити, як довго підприємство було прибутковим та знайти загальний прибуток, який було одержано за цей час.

Розв'язання. Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t)=V'(t)$:

$$5+2t^{2/3}=17-t^{2/3}\Rightarrow 3t^{2/3}=12\Rightarrow t^{2/3}=4\Rightarrow t_1=4^{3/2}=8.$$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час було одержано прибутку

$$P=\int_0^8\left[D'(t)-V'(t)\right]dt=\int_0^8\left[17-t^{2/3}-5-2t^{2/3}\right]dt=\int_0^8\left(12-3t^{2/3}\right)dt=$$

$$=\left(12t-3\frac{t^{5/3}}{5/3}\right)\Bigg|_0^8=96-\frac{9}{5}\cdot 32=38{,}9 \text{ (млн. гр.)}$$

11.5.4. Стратегія розвитку

■ **Приклад 12.** Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 10 млн. гривень у нове обладнання і одержувати 3 млн. гривень прибутку кожного року на протязі 10 років; 2) закупити на 15 млн. гривень більш досконале обладнання, яке дозволить одержати 5 млн. гривень прибутку щорічно на протязі 7 років.

Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна ставка 10%.

Розв'язання. Якщо $f(t)$ є прибуток за час t і $r=\dfrac{R}{100}$ є номінальна облікова щорічна ставка, то дійсне значення загального прибутку за час між $t=0$ та $t=T$ дорівнює

$$\int_0^T f(t)e^{-rt}dt.$$

При $R=10$ маємо $r=0{,}1$. Тому для першої стратегії дійсне значення прибутку за 10 років буде

$$P'=\int_0^{10}3e^{-0{,}1t}dt-10=\left[-30e^{-0{,}1t}\right]\Big|_0^{10}-10=30\left(1-e^{-1}\right)-10=8{,}96 \text{ (млн. грн.)}$$

Для другої стратегії одержимо:

$$P_2 = \int_0^7 5e^{-0,1t}dt - 15 = 50\left(1 - e^{-0,7}\right) - 15 = 10,17 \text{ (млн. грн.)}$$

Отже, друга стратегія краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку компанії.

11.6. Вправи

1. Обчислити інтеграли:

a) $\int_{-1}^{1} t^5 dt$; b) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx$; c) $\int_1^2 \left(3x^3 - 5x + 7\right)dx$;

d) $\int_1^2 \frac{(2x+1)(x-2)}{x}dx$; e) $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t}dt$; f) $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}dx$;

g) $\int_0^1 t \cdot e^{-t}dt$; h) $\int_0^2 x \cdot e^{2x}dx$.

2. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox та прямими:

a) $y = -x^2$, $x = 0$, $x = 3$; b) $y = -e^x$, $x = \ln 2$, $x = \ln 5$;

c) $y = x^2 - 4$, $y = 0$, $x = 3$; d) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 2$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

a) $y = x^2$, $y = 3x$, $x = 2$; b) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$;

c) $y = e^x$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$; d) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;

e) $y = x^3$, $y = x^2$; f) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$.

4. Використовуючи метод трапецій, знайти наближене значення інтеграла:

a) $\int_0^3 e^{-x^2}dx$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Використовуючи формулу Сімпсона, знайти наближене значення інтеграла:

a) $\int\limits_2^{10} \frac{dx}{x+1}$; b) $\int\limits_0^3 e^{-x^2} dx$.

6. Знайти:

a) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_2^x \frac{e^t \cdot \ln t}{1+t^2}\right)dt$; b) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_1^x \frac{e^t \cdot \ln\left(t^2+1\right)}{1+t^2}\right)$.

7. *Крива Лоренца*. Розподіл прибуткового податку деякої країни здійснюється за кривою Лоренца $y = f(x)$, де x – частина населення, що сплачує податки, а y відповідна частина загального податку. Яку частину загального податку сплачують 20% найбіднішого населення? Знайти коефіцієнт нерівності Лоренца.

a) $y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$; b) $y = 0{,}94x^2 + 0{,}06x$.

8. ***Максимізація прибутку.*** Відомі закони зміни швидкості витрат $V'(t)$ та доходу $D'(t)$ підприємства, де час t вимірюється роками, а витрати $V(t)$ та доход $D(t)$ вимірюються млн. гривень. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

a) $D'(t) = 14 - \sqrt{t}$; $V'(t) = 2 + 3\sqrt{t}$;

b) $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t}$; $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t}$.

9. ***Стратегія розвитку.*** Фірма може обрати одну із двох стратегій розвитку: 1) вкласти у виробництво A_1 млн. гривень з умовою одержання щорічного прибутку B_1 млн. гривень на протязі C_1 років; 2) вкласти у виробництво A_2 млн. гривень з умовою одержання щорічного прибутку B_2 млн. гривень на протязі C_2 років. Номіналь-

на облікова щорічна ставка 10%. Який прибуток матиме фірма за кожною стратегією? Яка стратегія краща?

a) $A_1 = 25$, $B_1 = 10$, $C_1 = 20$; $A_2 = 60$, $B_2 = 20$, $C_2 = 10$;

b) $A_1 = 8$, $B_1 = 2$, $C_1 = 12$; $A_2 = 20$, $B_2 = 5$, $C_2 = 8$.

10. ***Зростання капіталу.*** В період $0 \le t \le T$ капітал неперервно вкладається в підприємство із швидкістю $V(t)$. Якщо вкладення зростає неперервно з номінальним прибутком R відсотків, тоді остаточну величину вкладеного за цей час капіталу знаходять за формулою

$$K(T) = \int_0^T V(t) e^{-\frac{R}{100}(T-t)} dt .$$

Обчислити остаточне значення капіталу, якщо $R = 10$, $T = 10$ у таких випадках:

a) $V(t) = C$ – стала;

b) $V(t) = \begin{cases} 2C, & коли\ 0 \le t \le 5 \\ 0, & коли\ 5 < t \le 10 \end{cases}$;

c) $V(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 5 \\ 2C, & 5 < t \le 10 \end{cases}$.

Яка із трьох стратегій цієї вправи дає максимальне значення остаточного капіталу?

11. Дослідити невласні інтеграли:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$; b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Частина 12

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Багато ситуацій та процесів мають математичний опис у вигляді рівняння, що містить шукану функцію та її похідні або диференціали.

Якщо невідома функція залежить лише від однієї змінної, то методи розв'язування таких рівнянь викладені в теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Випадки, коли шукана функція залежить від декількох змінних і рівняння містить її частинні похідні, розглядаються в курсі математичної фізики.

Ми розглянемо лише звичайні диференціальні рівняння.

12.1. Загальні поняття

⬢ **Означення 1.** ***Звичайними диференціальними рівняннями*** *називають такі рівняння, які містять шукану функцію однієї змінної та її похідні або диференціали.*

Це означення у загальному вигляді математично можна записати так

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0.$$

⬢ **Означення 2.** *Найвищий порядок похідної, що містить диференціальне рівняння, називають* ***порядком диференціального рівняння****.*

Наприклад, рівняння $xy' - 3y'' = 2\cos x$ – другого порядку; рівняння $y''' - x^2 y' = 0$ – третього порядку; рівняння $y' + \dfrac{2}{x} y = 3e^{-x}$ та $x^2 dx - xydx = 0$ – першого порядку.

⬢ **Означення 3.** ***Загальним розв'язком диференціального рівняння*** n ***-го порядку*** *називають функцію* y*, яка залежить від аргументу* x *та* n *довільних сталих* C_1*,* C_2*, ...,* C_n*, тобто має вигляд*

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ *яка, при її підстановці у рівняння, перетворює рівняння у тотожність.*

Загальний розв'язок диференціального рівняння може бути і не розв'язаним відносно y, тобто мати вигляд $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$. У цьому випадку його називають ***загальним інтегралом диференціального рівняння***.

⬢ **Означення 4.** *Якщо у загальному розв'язку (інтегралі) диференціального рівняння замість довільних сталих записати фіксовані постійні числа, то одержаний розв'язок називають **частинним розв'язком цього рівняння**.*

Найчастіше сталі C_1, $C_2, \dots,$ C_n обирають не довільно, а так, щоб розв'язок рівняння задовольняв деяким початковим умовам. Для знаходження n довільних сталих треба задати n початкових умов.

⬢ **Означення 5.** *Сумісне завдання диференціального рівняння та відповідної кількості початкових умов називають **задачею Коші**.*

Наприклад, для диференціального рівняння першого порядку задачу Коші можна записати у вигляді

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}.$$

Для диференціального рівняння другого порядку задачу Коші можна записати у вигляді

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}.$$

У дослідженнях різноманітних життєвих та економічних проблем найчастіше використовують диференціальні рівняння першого та другого порядків певних типів та відповідні їм задачі Коші.

В теорії звичайних диференціальних рівнянь можна виділити дві основні задачі:

1) знаходження диференціального рівняння та початкових умов, які описують ситуацію або процес, який досліджують;

2) розв'язування заданої задачі Коші або знаходження загального розв'язку заданого диференціального рівняння.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування цих основних задач.

12.2. Математичні моделі деяких ситуацій та процесів

■ **Приклад 1.** ***(Закон природного зростання).*** *Законом природного зростання* називають такий закон, за яким швидкість зростання речовини пропорційна кількості речовини.

Треба знайти формулу для визначення кількості речовини у будь-який момент часу, якщо відомо, що у початковий момент часу, тобто при $t=0$, кількість речовини дорівнювала y_0.

Розв'язання. Позначимо через $y(t)$ шукану кількість речовини в момент t. Тоді швидкість зростання речовини є швидкість зміни функції y. Згідно з механічним змістом похідної та умовою задачі закон природного зростання речовини можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt}=ay, \tag{1}$$

де $a>0$ – коефіцієнт пропорційності.

За умовою задачі повинна виконуватись рівність

$$y\big|_{t=0}=y_0 . \tag{2}$$

Отже, математична модель закону природного зростання речовини є задача Коші для диференціального рівняння першого порядку вигляду (1) з початковою умовою вигляду (2).

Рівняння (1) досить просте, тому можна знайти його загальний розв'язок.

Дійсно, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{y}=adt \quad \text{або} \quad d(\ln y)=d(at).$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то функції можуть відрізнятись лише довільною сталою, тому

$$\ln y = at + C .$$

Звідси, потенціюванням знаходимо

$$y = e^{at+C} . \qquad (3)$$

Формула (3) дає вираз для кількості речовини як функції часу. Вона містить довільну сталу C, яка може приймати довільні числові значення. Тому формула (3) дає не один, а нескінченну кількість розв'язків задачі.

Використовуючи початкові умови (2), одержимо:

$$y_0 = e^C .$$

Отже, формула (3) тепер буде мати вигляд

$$y = y_0 e^{at} . \qquad (4)$$

Це і є шукана формула.

За законом природного зростання (4) зростає кількість живих клітин, кристалів, населення.

■ **Приклад 2.** ***(Закон радіоактивного розпаду).*** Відомо, що радіоактивний розпад речовини здійснюється так: швидкість розпаду речовини у будь-який момент часу пропорційна кількості речовини, що не розпалась.

Треба знайти формулу, за якою можна визначити кількість речовини y, яка ще не розпалась, у будь-який момент часу t при початковій кількості речовини y_0.

☞ *Розв'язання.* Використовуючи механічний зміст похідної та умову задачі, закон радіоактивного розпаду речовини можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = -ay , \qquad (5)$$

де коефіцієнт $(-a)$ від'ємний тому, що функція $y(t)$ спадає і її похідна від'ємна.

Рівняння (5) аналогічне рівнянню (1) і тому можна записати шукану формулу у вигляді

$$y = y_0 e^{-at}. \tag{6}$$

■ **Приклад 3.** ***(Рівняння руху).*** Нехай матеріальна точка $M(x,y,z,)$ масою m рухається в просторі. Радіус-вектор цієї точки позначимо $\vec{r}$. Координати точки M є і координатами радіус-вектора $\vec{r}$. Для математичного опису руху матеріальної точки треба знайти вираз $\vec{r}$ або його координат x, y, z у вигляді функції часу.

Розв'язання. Згідно з механічним змістом похідних першого та другого порядків, вектор

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$$

є швидкість, а вектор

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{(dt)^2} = \left(x''(t), y''(t), z''(t)\right)$$

є прискоренням руху точки M.

За законом Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{(dt)^2} = \vec{F}, \tag{7}$$

де сила $\vec{F} = (X, Y, Z)$.

Рівняння (7) називають *основним рівнянням механіки.* Це рівняння еквівалентне трьом рівнянням у координатній формі

$$mx''(t) = X;\ \ my''(t) = Y;\ \ mz''(t) = Z. \tag{8}$$

Отже, одержали, що математична модель руху є диференціальне рівняння другого порядку (7) або система диференціальних рівнянь (8).

■ **Приклад 4. (*Зростання інвестицій*).** Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Треба знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової $(t=0)$ інвестиції K_0.

↬ *Розв'язання.* Спочатку побудуємо математичну модель цієї задачі.

Позначимо: $K(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент t (шукана функція). Тоді $\dfrac{dK(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції, $r=\dfrac{R}{100}$.

За умовою задачі маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt} = rK(t) \\ K(t)\big|_{t=0} = K_0 \end{cases}. \tag{9}$$

Одержали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку аналогічного рівнянню (1).

Тому загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$K(t) = e^{rt+C} = e^C e^{rt}. \tag{10}$$

Згідно з початковою умовою при $t=0$ маємо

$$K_0 = e^C.$$

Отже, розв'язком задачі Коші (9) буде функція

$$K(t) = K_0 e^{rt}. \tag{11}$$

Це означає, що при умовах задачі інвестиції з часом зростать за експоненціальним законо.

12.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

⬢ **Означення 6.** *Диференціальне рівняння першого порядку вигляду*

$$N(x)dx + M(y)dy = 0 \tag{12}$$

називають ***рівнянням з відокремленими змінними***.

У цьому рівнянні коефіцієнтом при dx є функція, яка залежить лише від x або стала величина, а коефіцієнт при dy – функція, яка залежить лише від y або стала величина.

Загальний розв'язок рівняння з відокремленими змінними знаходять за формулою

$$\int N(x)dx + \int M(y)dy = C, \tag{13}$$

тобто шляхом його інтегрування.

Дійсно, ліву частину формули (12) можна розуміти як повний диференціал деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$dU(x,y) = N(x)dx + M(y)dy.$$

Тоді рівняння (12) буде мати вигляд:

$$dU(x,y) = 0 \Rightarrow U(x,y) \text{ є стала.}$$

Інтегруючи що рівність та використовуючи властивість невизначеного інтеграла $\int dU = U + C$, одержимо $\int N(x)dx + \int M(y)dy = C$, що й треба було довести.

■ **Приклад 5.** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0.$$

↳ *Розв'язання.* У заданому рівнянні при dx та при dy записані функції, які залежать лише від x та y, відповідно.

Тому це рівняння з відокремленими змінними і його загальний розв'язок знайдемо шляхом інтегрування. Одержимо:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y}=C\Rightarrow\ln|x|+\ln|y|=C\Rightarrow\ln|xy|=C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|xy|=e^C\Rightarrow xy=e^C\Rightarrow y=\frac{1}{x}e^C$$ – загальний розв'язок.

⬢ **Означення 7**. *Диференціальне рівняння першого порядку вигляду*

$$P_1(x)P_2(y)dx+Q_1(y)Q_2(x)dy=0 \qquad (14)$$

називають ***рівнянням з відокремлюваними або подільними змінними***.

Загальний розв'язок такого рівняння знаходять шляхом зведення його до рівняння з відокремленими змінними, тобто до вигляду

$$\frac{P_1(x)}{Q_2(x)}dx+\frac{Q_1(y)}{P_2(y)}dy=0$$

з подальшим інтегруванням.

■ **Приклад 6.** Розв'язати рівняння $2^{x+y}+3^{x-2y}y'=0$.

↬ *Розв'язання.* Для визначення типу заданого диференціального рівняння першого порядку запишемо його у такому вигляді

$$\frac{3^x}{3^{2y}}\frac{dy}{dx}=-2^x2^y\Rightarrow\frac{3^x}{3^{2y}}dy+2^x2^y\,dx=0. \qquad (15)$$

Отже, рівняння має вигляд (14), тобто воно з відокремлюваними змінними. Приведемо рівняння (15) до рівняння з відокремленими змінними шляхом його ділення на 3^x2^y. Одержимо:

$$\frac{dy}{3^{2y}\cdot2^y}+\frac{2^x}{3^x}dx=0\Rightarrow\frac{dy}{(9\cdot2)^y}+\left(\frac{2}{3}\right)^x dx=0.$$

Шляхом інтегрування одержимо

$$\int18^{-y}\,dy+\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx=C\Rightarrow\frac{-18^{-y}}{\ln18}+\left(\frac{2}{3}\right)^x:\ln\frac{2}{3}=C.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння буде

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}-\frac{1}{18^y\cdot\ln 18}=C.$$

Якщо розв'язати цю рівність відносно y, то одержимо загальний розв'язок диференціального рівняння.

12.4. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

⬢ **Означення 8.** ***Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*** *називають рівняння, яке можна звести до вигляду*

$$y'=f(x,y), \tag{16}$$

де функція $f(x,y)$ *не змінюється при заміні* x *та* y *на* tx *та* ty, *тобто задовольняє умову*

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Відмітимо, що функцію $f(x,y)$ яка задовольняє вказану умову, називають *однорідною нульового виміру.*

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку шляхом підстановки

$$U=\frac{y}{x} \tag{17}$$

можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними.

■ **Приклад 7.** Розв'язати рівняння $y'=\dfrac{y}{x+y}$.

✎ *Розв'язання.* Це рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку тому, що воно має вигляд (16) та для правої частини рівняння виконується умова:

$$\frac{ty}{tx+ty}=\frac{ty}{t(x+y)}=\frac{y}{x+y}.$$

При підстановці $U=\frac{y}{x}$ маємо:

$$y=U\cdot x\Rightarrow y'=U'\cdot x+U.$$

Тому задане рівняння прийме вигляд

$$U'\cdot x+U=\frac{U\cdot x}{x+U\cdot x}\Rightarrow U'\cdot x=\frac{U}{1+U}-U\Rightarrow x\frac{dU}{dx}=\frac{U-U-U^2}{1+U}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{dU}{dx}=-\frac{U^2}{1+U}\Rightarrow\frac{1+U}{U^2}dU=-\frac{dx}{x}.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи його, знаходимо:

$$\int\left(\frac{1}{U^2}+\frac{1}{U}\right)dU=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{U}-\ln U=\ln x+\ln C\Rightarrow\frac{1}{U}=\ln(CUx).$$

Підставимо замість U її значення $\frac{y}{x}$. Одержимо

$$\frac{x}{y}=\ln Cy\Rightarrow x=\ln(Cy)^y.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння розв'язали відносно x.

12.5. Рівняння лінійні та Бернуллі

⬢ **Означення 9.** ***Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*** *називають рівняння, яке містить шукану функцію* y *та її похідну* y' *у першому степені. Таке рівняння можна привести до вигляду*

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{18}$$

✦ **Теорема 1.** ***Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку вигляду (18) можна знайти за формулою***

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right]. \qquad \textbf{(19)}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (18) у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x). \qquad (20)$$

Одну із цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівняння (18). Диференціюванням рівності (20) по x одержимо:

$$y' = \frac{du}{dx} v + u \cdot \frac{dv}{dx}. \qquad (21)$$

Підставимо (20) та (21) у задане рівняння (18). Тоді

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} + P \cdot u \cdot v = Q \text{ або } \frac{du}{dx} \cdot v + u \left[\frac{dv}{dx} + Pv \right] = Q. \qquad (22)$$

Визначимо v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто, виконувалась рівність

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \qquad (23)$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{v} = -Pdx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln C_1 \Rightarrow v = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Нам достатньо взяти $v(x) \neq 0$. Тому візьмемо $C_1 = 1$, тоді

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}. \qquad (24)$$

Підставимо функцію v вигляду (24) у формулу (22). Одержимо:

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)} \Rightarrow u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Підстановка одержаних функцій u та v у формулу (20) дає загальний розв'язок рівняння (18) у вигляді

$$y = v(x)\left[C + \int Q(x)\cdot v^{-1}(x)dx\right] = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right],$$

що й треба було довести.

Відмітимо, що формула (19) здається складною. Але вона значно спрощує розв'язування багатьох диференціальних рівнянь і якщо її не пам'ятати, то кожного разу цю формулу треба виводити.

⬢ **Означення 10.** *Диференціальне рівняння першого порядку вигляду*

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n \tag{25}$$

де $n \neq 0$ *та* $n \neq 1$ *називають* ***рівнянням Бернуллі***.

Рівняння Бернуллі підстановкою

$$Z = y^{-n+1} \tag{26}$$

зводиться до лінійного рівняння відносно функції Z.

Дійсно, помножимо рівняння Бернуллі (25) на y^{-n} і зробимо підстановку (26), при якій

$$Z' = (-n+1)y^{-n}\cdot y'.$$

Тоді рівняння Бернуллі прийме вигляд

$$Z' + (1-n)P(x)\cdot Z = (1-n)Q(x). \tag{27}$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (27) знайдемо за формулою (19) у вигляді

$$Z = y^{-n+1} = e^{(n-1)\int P(x)dx}\cdot\left[C + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)P(x)dx}dx\right].$$

Звідси знаходять загальний розв'язок y рівняння Бернуллі.

■ **Приклад 8.** Розв'язати рівняння $xy' - 4y = x^2\cdot\sqrt{y}$.

⇳ *Розв'язання.* Запишемо це рівняння у вигляді

$$y' - \frac{4}{x} y = x \cdot y^{1/2}.$$

Це рівняння Бернуллі з $n = \frac{1}{2}$. Поділимо його на $\sqrt{y}$, одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot y' - \frac{4}{x} \cdot \sqrt{y} = x.$$

Зробимо заміну $Z = \sqrt{y}$, тоді $Z' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$ і рівняння прийме вигляд

$$Z' - \frac{2}{x} Z = \frac{x}{2}.$$

Це лінійне рівняння відносно Z. За формулою (19) знаходимо

$$Z = e^{\int \frac{2}{x}dx} \cdot \left[C + \int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx \right] = e^{2\ln x} \cdot \left[C + \int \frac{x}{2} e^{-2\ln x} dx \right] =$$

$$= x^2 \left[C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx \right] = x^2 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right).$$

Використали основну логарифмічну тотожність $e^{\ln \varphi(x)} = \varphi(x)$.

Отже, одержали:

$$Z = \sqrt{y} = x^2 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right) \Rightarrow y = x^4 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right)^2$$

– загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

12.6. Диференціальні рівняння другого порядку

Ознайомимось з розв'язуванням декількох типів диференціальних рівнянь другого порядку.

12.6.1. Рівняння, що дозволяють знизити порядок

1. Рівняння вигляду $y'' = f(x)$, де $f(x)$ неперервна в проміжку (a,b) осі Ox. Розв'язок цього рівняння знаходять шляхом зниження порядку та інтегруванням:

$$y' = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

де x_0 – довільне фіксоване значення x із (a,b), C_1 – довільна стала. Інтегруючи ще раз, одержимо загальний розв'язок рівняння у вигляді

$$y = \int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right]dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

2. Рівняння вигляду $F(x, y', y'') = 0$, що не містить явно шукану функцію y, шляхом підстановки

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$$

зводиться до рівняння першого порядку $F\left(x, p, \dfrac{dp}{dx}\right) = 0$ відносно функції $p(x)$. Розв'язавши це рівняння, одержують

$$p = \varphi(x, C_1) \text{ або } y' = \varphi(x, C_1).$$

Знову одержали рівняння першого порядку відносно шуканої функції y. Його розв'язком буде

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

3. Рівняння вигляду $F\left(y, y', y''\right)=0$, яке не містить явно аргумент x, шляхом підстановки

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}\cdot y' \text{ або } y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p$$

зводиться до рівняння першого порядку $F\left(y, p, \frac{dp}{dy}p\right)=0$ відносно функції p, що залежить від y. Його загальний розв'язок можна одержати у вигляді

$$p=\varphi\left(y, C_1\right) \text{ або } y'=\varphi\left(y, C_1\right) \Rightarrow \frac{dy}{\varphi\left(y, C_1\right)}=dx.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\int \frac{dy}{\varphi\left(y, C_1\right)}=x+C_2.$$

Це і є загальний інтеграл заданого рівняння.

■ **Приклад 9.** Знайти загальні розв'язки рівнянь:

a) $y''=x+\sin x$; b) $y''-\frac{1}{x}\cdot y'=x$; c) $y\cdot y''+\left(y'\right)^2=0$.

Розв'язання.

a) Шляхом інтегрування заданого рівняння одержимо:

$$y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1=\frac{x^2}{2}-\cos x+1+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-\cos x+1+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\sin x+x\left(1+C_1\right)+C_2.$$

b) Рівняння не містить явно шукану функцію $y(x)$. Застосуємо підстановку $y'=p$. Тоді $y''=\frac{dp}{dx}$ і задане рівняння прийме вигляд

$$\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=x.$$

Це лінійне рівняння відносно p. За формулою (19) одержимо його загальний розв'язок

$$p=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[C_1+\int xe^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right]=e^{\ln x}\left[C_1+\int x\cdot e^{-\ln x}dx\right]=$$

$$=x\left[C_1+\int x\cdot\frac{1}{x}dx\right]=x\left[C_1+x\right].$$

Повертаючись до шуканої функції y, одержимо

$$y'=x\left(C_1+x\right)\Rightarrow y=\int\left(C_1x+x^2\right)dx=C_1\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C_2.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння випадку b) буде

$$y=\frac{C_1}{2}x^2+\frac{x^3}{3}+C_2.$$

c) У цьому випадку рівняння не містить явно аргумент x. Тому зробимо підстановку

$$y'=p(y),\ \text{тоді}\ y''=p\frac{dp}{dy}$$

і задане рівняння прийме вигляд

$$y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}+p^2=0\ \text{ або }\ y\frac{dp}{dy}+p=0.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $p(y)$.

Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln p=-\ln y+\ln C_1\Rightarrow p=\frac{C_1}{y}.$$

Але $p = \dfrac{dy}{dx}$, тому $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{y}$ або $y \cdot dy = C_1 dx$.

Звідси одержимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2\left(C_1 x + C_2\right)}.$$

12.6.2. Лінійні однорідні рівняння з постійними коефіцієнтами

⬢ **Означення 11.** *Диференціальне рівняння другого порядку називають* ***лінійним однорідним рівнянням з постійними коефіцієнтами****, якщо воно має вигляд*

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{28}$$

де a, b *та* c *– сталі числа.*

Для знаходження загального розв'язку такого рівняння доцільно діяти так:

1) Скласти характеристичне рівняння шляхом заміни y'' на k^2, y' на k, y на 1, тобто одержати алгебраїчне рівняння

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{29}$$

відносно k.

2) Розв'язати характеристичне рівняння, використовуючи формулу

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{30}$$

3) Проаналізувати корені характеристичного рівняння, які можуть бути:

a) дійсними та різними, тобто $k_1 \neq k_2$;

b) дійсними та рівними, тобто $k_1 = k_2 = k$;

c) комплексно спряженими, тобто

$$k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta, \text{ де } i = \sqrt{-1},\ \alpha = \frac{-b}{2a};\ \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

4) в залежності від значень коренів характеристичного рівняння записати загальний розв'язок заданого диференціального рівняння (28).

У випадку a): $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

У випадку b): $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

У випадку c): $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

■ **Приклад 10.** Знайти загальні розв'язки рівнянь:
a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; c) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

✎ *Розв'язання.*

Для рівняння a) характеристичним рівнянням буде

$$k^2 - 3k + 2 = 0\cdot$$

Знайдемо корені цього рівняння:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2};\quad k_1 = 2;\quad k_2 = 1.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тому загальним розв'язком диференціального рівняння a) буде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.$$

b) Для рівняння b) характеристичним рівнянням буде

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow \left(k+2\right)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -2.$$

Отже, корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тому загальний розв'язок диференціального рівняння b) буде таким

$$y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

У випадку диференціального рівняння c) характеристичним рівнянням буде

$$k^2+4x+5=0 \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i$$

Корені цього рівняння комплексно спряжені, причому $\alpha=-2$, $\beta=1$. Тому загальним розв'язком диференціального рівняння c) буде

$$y=e^{-2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right).$$

12.7. Питання для самоперевірки

1. Як визначають диференціальне рівняння, його порядок, загальний та частинний розв'язки, задачу Коші?

2. Який вигляд має рівняння з відокремленими змінними і як знаходять його загальний розв'язок?

3. Який вигляд мають рівняння з відокремлюваними змінними, рівняння однорідне, лінійне, Бернуллі і як знаходять їх розв'язки?

4. Як знаходити розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку?

5. Які рівняння другого порядку можна розв'язувати методом зниження порядку?

6. Як складається характеристичне рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами? Як впливають корені характеристичного рівняння на вигляд загального розв'язку таких диференціальних рівнянь?

12.8. Вправи

1. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

a) $xydx+(x+1)dy=0$; b) $(y^2+1)dx-xydy=0$;

c) $(x+1)dy-(y-2)dx=0$; d) $(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$;

e) $\sqrt{1-y^2dx}-\sqrt{1-x^2}dy=0$; f) $(1+y)dx+(1+x)dy=0$;

g) $\cos^2 y\cdot dx+\operatorname{ctg} x\cdot dy=0$.

2. Знайти загальний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

a) $y'+2y=4x$; b) $y'-\operatorname{ctg} x\cdot y=\sin x$;

c) $xy'-2y=2x^4$; d) $\left(x^2+1\right)y'+4x\cdot y=3$;

e) $y'-y=e^x$; f) $xy'-y=x$;

g) $xy'+3y=x^{-3}$.

3. Знайти загальний розв'язок однорідних диференціальних рівнянь першого порядку:

a) $y'=\dfrac{x+y}{x}$; b) $y'=\dfrac{2y}{x}$; c) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}$;

d) $y'=\dfrac{2yx+y^2}{x^2}$; e) $y'=\dfrac{y}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; f) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{y}{x}$;

g) $y'=\dfrac{y}{x}+\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

4. Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

a) $x^2y^2\cdot y'+xy^3=1$; b) $y'+\dfrac{1}{x}y=-xy^2$; c) $xy'-y^2\cdot\ln x+y=0$;

d) $y'-\dfrac{1}{2}y-y^2=0$; e) $y'+\dfrac{2x}{1-x^2}y=2x\sqrt{y}$.

5. Знайти розв'язок задачі Коші:

a) $y'=3y^{2/3}$, $y(2)=0$; b) $xy'+y=e^x$, $y(1)=1$;

c) $y'\cdot\operatorname{ctg} x+y=2$, $y(0)=1$; d) $y'=\dfrac{y}{x}+\sin^2\dfrac{y}{x}$, $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$;

e) $y' = 5\frac{x+y}{x}$, $y(1) = 1$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку:

a) $y'' \cdot \operatorname{tg} x = y' + 1$; b) $2y \cdot y'' - (y')^2 = 0$; c) $x(y'' + 1) + y' = 0$;

d) $xy'' - y' = x^2 e^x$; e) $y'' + 2y^{-1} \cdot (y')^2 = 0$.

7. Знайти загальний розв'язок рівняння:

a) $y'' - y = 0$; b) $y'' - 4y' + 3y = 0$; c) $y'' - y' - 2y = 0$;

d) $y'' - 4y = 0$; e) $y'' - 2y' - 3y = 0$; f) $2y'' + y' - y = 0$.

8. Розв'язати задачі економічного змісту:

a) Швидкість зростання кількості населення пропорційна кількості населення. Знайти закон зростання населення держави, в якій у 1990 р. було 50 млн. населення. Яка кількість населення буде у 2000 р.?

b) Відносно попиту кількості одиниць x певного товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що еластичність попиту, яка визначається формулою $\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$, постійна і дорівнює $\frac{-1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

c) Еластичність попиту на деякий товар постійна і дорів-нює (-2). Визначити функцію попиту вигляду $p = f(x)$, якщо $p = \frac{1}{2}$, коли $x = 4$.

d) Еластичність попиту на певні вироби змінюється разом із зміною вартості кожного виробу за законом

$$\eta = \frac{p}{p-10}.$$

Визначити функцію попиту вигляду $p = f(x)$, якщо $0 < p < 10$ і $p = 7$, коли $x = 15$.

e) Кількість населення деякого міста $y(t)$ (t вимірюється роками) задовольняє диференціальному рівнянню

$$y' = 0{,}1y\left(1-10^{-6t}y\right).$$

Через скільки років населення цього міста зросте з 100 000 до 500 000?

f) Еластичність попиту товару $\eta = \dfrac{x-200}{x}$. Визначити функцію попиту вигляду $p = f(x)$, якщо $0 < x < 200$ і $p = 5$, коли $x = 190$.

g) Інвестиція величиною 10 тисяч гривень зростає неперервно із швидкістю пропорційною 5%. Знайти:

1) значення інвестиції у довільний час t;
2) чому буде дорівнювати інвестований капітал через 8 років?
3) через скільки років інвестиція буде дорівнювати 20 тисяч гривень?

h) температура T охолодження тіла змінюється за законом

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T_C - T\right),$$

де T_C – температура навколишнього середовища.

Знайти формулу для $T(t)$ у випадку, коли T_C постійна і $T(0) = T_0$.

Частина 13
ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Методи інтегрування, викладені у частині 10, можна розглядати як обґрунтування таблиці інтегралів (наприклад, таблиці 6 додатку).

Частина 13 може розглядатись як обґрунтування таблиць значень експоненціальних функцій e^x, e^{-x}, логарифмічних функцій (наприклад, таблиць 2 і 3 додатку). Наближені значення цих функцій часто використовують при розв'язуванні задач, в тому числі і економічного змісту. Крім того, методи цієї частини застосовуються до: знаходження наближених значень інтегралів, які часто зустрічаються в теорії імовірностей та у страховій справі і не можуть бути виражені елементарними функціями; при розв'язуванні диференціальних рівнянь.

Відомо, що найкращими таблицями, якими користуються в усіх країнах біля 100 років, є чотиризначні математичні таблиці В.М.Брадіса, бо наведені у цих таблицях значення функцій знайдені з точністю до п'ятого знаку. Ці таблиці складались декілька років студентами першого та другого курсів під керівництвом професора В.М.Брадіса з використанням понять, ознак та формул, з якими ми ознайомимось у цій частині.

13.1. Числові ряди

13.1.1. Загальні поняття

Нехай задана нескінченна послідовність чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots .$$

Вираз $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ називають ***нескінченним числовим рядом***, числа $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$ — ***членами ряду***, a_n — ***загальним членом цього ряду***.

Отже, від послідовності ми перейшли до ряду.

За допомогою знака суми ряд можна записати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

де n приймає значення від 1 до ∞.

Щоб задати числовий ряд, треба задати його загальний член a_n у вигляді формули

$$a_n = f(n),$$

за якою для будь-якого n можна знайти відповідний член ряду.

Наприклад, нехай загальний член ряду $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, тоді відповідний ряд буде:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots \quad \text{або} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}.$$

Іноді задають декілька перших членів ряду і треба записати увесь ряд, тобто знайти його загальний член.

При цьому треба знаходити загальний член ряду по можливості простішого вигляду.

Наприклад, знайти загальний член ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\ldots$$

Маємо: перший член ряду $a_1 = \dfrac{1}{2}$, другий член ряду $a_2 = \dfrac{1}{2\cdot 2^2}$, $a_3 = \dfrac{1}{3\cdot 2^3}$, $a_4 = \dfrac{1}{4\cdot 2^4}$. Отже, шукана функція повинна мати вигляд дробу, чисельник якої дорівнює 1, а знаменник повинен дорівнювати $n\cdot 2^n$, тобто загальний член заданого ряду буде

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n},$$

а ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

⬢ **Означення 1.** ***Частковою сумою числового ряду*** **(1)** *називають суму* S_m *перших* m *членів цього ряду, тобто*

$$S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ ...;\ S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m .$$

⬢ **Означення 2.** ***Сумою*** S ***числового ряду*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *називають границю його часткової суми* S_n *при* $n \to \infty$, *тобто*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{2}$$

⬢ **Означення** 3. *Якщо границя часткової суми ряду є скінчене число, то ряд називають* ***збіжним*** *і позначають цей факт так:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty .$$

Якщо границя часткової суми не існує або дорівнює $\pm\infty$, *то числовий ряд називають* ***розбіжним****.*

⬢ **Означення 4.** *Числовий ряд вигляду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{3}$$

називають ***рядом геометричної прогресії із знаменником*** q ***та першим членом*** a.

■ **Приклад 1.** Дослідити збіжність ряду геометричної прогресії.

➯ *Розв'язання.* При $|q| < 1$ часткова сума S_n визначається за відомою формулою суми спадної геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Тому сумою ряду у цьому випадку буде

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q},$$

тобто ряд збігається та його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Якщо $|q| > 1$, то частковою сумою ряду буде $S_n = \dfrac{aq^n - a}{q-1}$, а сума ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{q-1}\left(q^n - 1\right) = \infty,$$

тобто ряд розбігається.

Якщо $q = 1$, то $S_n = a + a + \ldots a = na$, тому сума ряду буде

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty,$$

тобто ряд розбігається

Якщо $q = -1$, то $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, ...

Послідовність таких часткових сум границі не має (вона залежить вік способу прямування n до ∞), тому ряд розбігається.

Отже, ряд геометричної прогресії збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \ge 1$.

⬢ **Означення 5.** *Числовий ряд вигляду*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \tag{4}$$

називають ***узагальненим гармонічним рядом***.

Математиками доведено, що при $p \le 1$ узагальнений гармонічний ряд розбігається, а при $p > 1$ цей ряд збігається.

При $p = 1$ ряд (4) приймає вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \tag{5}$$

і називається ***гармонічним рядом***. Цей ряд розбігається.

13.1.2. Деякі властивості числових рядів

Нехай задано числовий ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}+\ldots \tag{1}$$

Якщо в цьому ряду відкинути перші n членів, то одержимо ряд, який називають *залишком ряду (1) після n-го члена* і позначають r_n, тобто

$$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}+\ldots \tag{6}$$

✦ **Теорема 1.** ***Якщо ряд* (1) *збігається, то збігається і його залишок, і, навпаки, якщо збігається залишок, то збігається* й *ряд* (1).**

Доведення. Нехай ряд (1) збігається. Розглянемо часткову суму $n+m$ членів ряду

$$S_{n+m}=S_n+\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}\right). \tag{7}$$

Зафіксуємо номер n і нехай $m\to\infty$. Тоді границя S_{n+m}, існує за умовою і дорівнює сумі ряду S.

При фіксованому n S_n є постійне число, тому границя $\left(a_{n+1}+\ldots+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}\right)$ при $m\to\infty$ існує і дорівнює r_n. Отже,

$$S=S_n+r_n. \tag{8}$$

Нехай тепер залишок збігається. Доведемо, що ряд також збігається. Знову в рівності (7) зафіксуємо n та перейдемо до границі при $m\to\infty$. Границя існує тому, що за умовою залишок збігається, а часткова сума S_n при фіксованому n є постійне число. Отже, границя

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+m} = S_n + r_n .$$

Із рівності (7) випливає: якщо ряд (1) розбігається, то і залишок розбігається, і, навпаки, якщо залишок розбігається, то ряд також розбігається.

Із рівності (8) випливає, що $r_n = S - S_n$, тому при $n \to \infty$ залишок збіжного ряду $r_n \to 0$.

▼ **Наслідок.** *Якщо в ряді (I) суму перших n членів відкинути, то це не вплине на збіжність чи розбіжність ряду.*

✦ **Теорема 2.** ***Якщо члени збіжного ряду*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***помножити на число*** C ***, то одержаний ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$ ***також буде збіжним, а його сума помножиться на*** C ***.***

✦ **Теорема 3.** ***Якщо ряди*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***та*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***збігаються, то ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ ***також збігається, причому сума останнього ряду дорівнює***

$$S = S_1 \pm S_2 \text{, де } S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{, } S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Доведення теореми 2 та теореми 3 випливає із означення збіжності числового ряду та властивостей границі.

13.1.3. Необхідна ознака збіжності ряду

✦ **Теорема 4.** ***Якщо ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***збігається, то його загальний член*** $a_n \to 0$ ***при*** $n \to \infty$***, тобто***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (9)$$

Доведення. Дійсно, $a_n = S_n - S_{n-1}$, звідси одержимо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

що й треба було довести.

Якщо умова (9) не виконується, то числовий ряд розбігається.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ розбігається тому, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

Відмітимо, що умова збіжності (9) є лише необхідною умовою. Так, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ задовольняє умову (9), але цей ряд розбіжний.

13.1.4. Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів

В більш повних курсах вищої математики доведені слідуючі достатні ознаки збіжності додатних числових радів, які бажано зрозуміти та використовувати.

✸ **Ознака порівняння.** *Нехай треба дослідити збіжність заданого ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0. \qquad (10)$$

Візьмемо другий додатний числовий ряд, збіжність чи розбіжність якого відома

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,,\; b_n > 0 \,. \tag{11}$$

Найчастіше для порівняння беруть ряд геометричної прогресії або узагальнений гармонічний ряд.

✸ **Ознака.** *Якщо ряд* (11) *збігається і, починаючи з деякого* $n \ge N$, *виконуються співвідношення* $a_n \le b_n$, *тоді й ряд* (10) *також збігається.*

Якщо ряд (11) *розбігається і, починаючи з деякого* $n \ge N$, *виконуються співвідношення* $a_n \ge b_n$, *тоді й ряд* (10) *розбігається.*

■ **Приклад 2.** Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$.

Розв'язання. Порівняємо заданий ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots$$

з рядом геометричної прогресії, знаменник якого $q = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Кожний член заданого ряду менший або дорівнює відповідному члену ряду геометричної прогресії, який збігається, тому що $|q| < 1$

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n} \left(n = 1, 2, 3, \ldots \right).$$

Отже, заданий рад збігається.

✸ **Ознака Даламбера.** *Позначимо* D *постійну Даламбера, яку знаходять за формулою*

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \,. \tag{12}$$

Якщо $D<1$, *тоді додатний числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *збігається. При* $D>1$ *цей ряд розбігається. При* $D=1$ *треба застосовувати іншу ознаку.*

■ **Приклад 3.** Дослідити збіжність раду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n\cdot n^5}$.

Розв'язання. Застосуємо до заданого раду ознаку Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)^5}:\frac{3^n}{2^n\cdot n^5}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5}{2(n+1)^5}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5}=\frac{3}{2}.$$

Отже, заданий ряд розбігається.

✸ **Радикальна ознака Коші.** *Позначимо* K *постійну Коші, яку знаходять за формулою*

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\,. \tag{13}$$

Якщо $K<1$, *тоді додатний числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *збігається. При* $K>1$ *ряд розбігається. Якщо* $K=1$, *то треба застосовувати іншу ознаку.*

■ **Приклад 4.** Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^n}$.

Розв'язання. Застосуємо до заданого ряду радикальну ознаку Коші. Тоді

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0\,.$$

Отже, заданий ряд збігається.

Інтегральна ознака Коші. *Треба дослідити збіжність додатного числового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_n = f(n)$. *Розглянемо невласний інтеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$. *Якщо цей інтеграл збігається, то числовий ряд також збігається. Якщо цей інтеграл розбіжний, то числовий ряд також розбіжний.*

Приклад 5. Дослідити збіжність узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Застосуємо до цього ряду інтегральну ознаку Коші. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

1) При $p = 1$ одержимо:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\ln|b| - \ln 1\right) = \infty .$$

В цьому випадку інтеграл розбіжний, отже і ряд розбіжний

2) $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(b^{-p+1} - 1\right).$$

Неважко бачити, що при $p < 1$ інтеграл є розбіжним, а при $p > 1$ інтеграл збіжний.

Отже, узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ є збіжним, якщо $p > 1$ та розбіжним, якщо $p \le 1$.

13.1.5. Знакопочережні числові ряди

⬢ **Означення 6.** *Ряд, члени якого почережно мають додатний та від'ємний знаки, називають* ***знакопочережним****. Такий ряд можна записати, наприклад, у вигляді*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot U_n + \ldots \qquad (14)$$

$$U_n > 0, \;\; n = 1,\; 2,\; 3, \ldots$$

⬢ **Означення 7.** *Знакопочережний ряд називають* ***збіжним абсолютно****, якщо збігається додатний числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, *складений з абсолютних величин знакопочережного ряду* (14).

Якщо ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (14) розбігається, а знакопочережний ряд збігається, то кажуть, що ряд (14) збігається неабсолютно або умовно.

Абсолютну збіжність знакопочережного ряду досліджують з використанням достатніх ознак збіжності додатних числових рядів. Неабсолютну збіжність знакопочережного ряду досліджують з використанням ознаки Лейбніца.

✸ **Ознака Лейбніца.** *Якщо абсолютні величини знакопочережного ряду монотонно спадають, тобто*

$$U_1 > U_2 > U > \ldots > U_n > \ldots$$

і границя його загального члена дорівнює нулю при $n \to \infty$, *тобто виконується умова*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0,$$

тоді знакопочережний ряд збігається, причому його сума S *обов'язково менша першого члена ряду.*

Якщо замінити суму цього ряду S його частковою сумою S_m, тоді абсолютна величина похибки R_m буде менше першого відкинутого члена ряду, тобто $|R_m| < U_{m+1}$.

Остання оцінка використовується у наближених обчисленнях.

■ **Приклад 6.** Дослідити збіжність знакопочережних рядів:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n}{n+1}$.

Розв'язання.

a) Складемо ряд з абсолютних величин заданого знакопочережного ряду (α — довільне число):

$$\frac{|\cos\alpha|}{1}+\frac{|\cos 2\alpha|}{2^2}+\frac{|\cos 3\alpha|}{3^2}+\ldots+\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}+\ldots \tag{15}$$

Порівняємо цей ряд із збіжним узагальненим гармонічним рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{16}$$

Кожний член ряду (15) менше або дорівнює відповідному члену ряду (16) тому, що $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$

Згідно з ознакою порівняння ряд (15) збігається, а це означає, що заданий знакопочережний ряд a) збігається абсолютно.

b) У цьому випадку ряд, складений з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний гармонічний ряд, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ абсолютно не збігається. Для дослідження його неабсолютної збіжності треба застосувати ознаку Лейбніца. У даному випадку обидві умови ознаки Лейбніца виконуються:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Тому знакопочережний ряд b) збігається неабсолютно.

c) У цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності числового ряду тому, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=2\neq 0\,.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n}{n+1}$ розбіжний.

13.1.6. Питання для самоперевірки

1. Як визначають числовий ряд, його часткову суму, суму ряду?

2. Який ряд називають збіжним, розбіжним? Які властивості мають збіжні числові ряди?

3. Як математично записати необхідну умову збіжності числового ряду?

4. Який рад називають рядом геометричної прогресії? Коли цей ряд збігається, чому дорівнює його сума?

5. Який вигляд має і коли збігається узагальнений гармонічний ряд?

6. Як формулюються достатні ознаки збіжності додатних числових рядів?

7. Які різновиди збіжності існують для знакопочережних числових рядів?

8. Коли застосовуються і як формулюється ознака Лейбніца?

13.1.7. Вправи

1. Знайти загальний член ряду:

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$; c) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$;

d) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$; e) $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$.

2. Записати перших 5 членів ряду та перевірити необхідну умову збіжності ряду:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$.

3. Дослідити збіжність ряду з використанням ознаки порівняння:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 8^n}$.

4. Дослідити збіжність ряду за ознакою Даламбера:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$; c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{2^n(3n+1)}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{e^n}$; f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^n(3n+1)}$.

5. Дослідити збіжність ряду з використанням радикальної ознаки Коші:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{3n-1}\right)^{2n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n^2+2}\right)^n$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{15n+1}\right)^n$.

6. Дослідити збіжність ряду за інтегральною ознакою Коші:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$; g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

7. Дослідити збіжність знакопочережного ряду:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^3+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{2n+1}}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{6n-5}$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$.

13.2. Степеневі ряди

13.2.1. Радіус, інтервал та область збіжності

⬢ **Означення 8.** ***Степеневим рядом*** *називають ряд вигляду*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{17}$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-x_0\right)^n + \ldots, \tag{18}$$

де $a_n\left(n=0,1,2,\ldots\right)$ *— дійсні числа, які називають* ***коефіцієнтами степеневого ряду,*** x_0 *— деяке постійне число.*

Підстановка $y = x - x_0$ дозволяє ряд (18) звести до вигляду (17). Тому нижче будемо розглядати лише ряди вигляду (17), тобто по степенях x.

✦ **Теорема Абеля.** *(Нільс Генрік Абель (1802–1829) — норвежський математик).* ***Якщо ряд (17) збігається при*** $x = x_1$, ***то він збігається абсолютно для усіх*** x, ***що задовольняють нерівність***

$$|x| < |x_1|.$$

Якщо ряд (17) розбігається при $x = x_2$, то він розбігається для усіх x, які задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$.

Доведення. За умовою теореми ряд (17) при $x = x_i$ $\left(x_1 \neq 0\right)$ збігається. Це означає, що збігається числовий ряд

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

Але тоді загальний член цього ряду $a_n x_1^n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто загальний член ряду є величина обмежена. Отже, існує таке число $M > 0$, що при будь-яких n виконується нерівність $\left|a_n x_1^n\right| \leq M$.

Тепер запишемо абсолютну величину загального члена ряду (17) та оцінимо її:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_1^n \cdot \left(\frac{x}{x_1}\right)^n\right| = \left|a_n x_1^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \cdot q^n, \; n = 0,1,2,3,\ldots \quad (19)$$

де $q = \left|\dfrac{x}{x_1}\right| < 1$ тому, що за умовою $|x| < |x_1|$.

Запишемо два ряди: ряд, складений із абсолютних величин членів ряду (17) та ряд геометричної прогресії, загальним членом якого є $M \cdot q^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \left|a_3 x^3\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots \quad (21)$$

При $|x| < |x_1|$ знаменник q ряду (21) менше одиниці, тому ряд геометричної прогресії (21) збігається. Згідно з нерівністю (19) кожний член ряду (20) не більше відповідного члена ряду (21) тому, за ознакою порівняння, ряд (20) збігається, а це означає, що ряд (17) збігається абсолютно. Отже, перше твердження теореми доведено.

Доведемо друге твердження теореми методом від супротивного. Нехай ряд (17) збігається при x, які задовольняють нерівність $|x|>|x_2|$. Тоді, згідно доведеному першому твердженню теореми, ряд збігається і при $x=x_2$, що суперечить умові другого твердження. Отже, теорема повністю доведена.

▼ **Наслідок.** *Якщо степеневий ряд (17) збігається при* $x=x_0$, *то цей ряд збігається в інтервалі* $(-x_0,x_0)$.

⬢ **Означення 9.** *Додатне число* R, *таке, що при* $|x|<R$ *степеневий ряд збігається, а при* $|x|>R$ *ряд розбігається, називають* ***радіусом збіжності степеневого ряду****. Інтервал* $(-R,R)$ *називають* ***інтервалом збіжності цього ряду****.*

Якщо степеневий ряд збігається при $x=-R$ або при $x=R$, або при $x=-R$ та $x=R$, тоді областю збіжності цього степеневого ряду буде $[-R,R)$ або $(-R,R]$, або $[-R,R]$, відповідно.

Радіус збіжності повного степеневого ряду знаходять за формулами:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{22}$$

або

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}. \tag{23}$$

■ **Приклад 7.** Знайти області збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot x^{2n-2}=1-2x^2+2^2x^4-2^3x^6+(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot x^{2n-2}+\ldots$

Розв'язання.

а) За формулою (22) знайдемо радіус збіжності заданого степеневого ряду:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Отже, інтервалом збіжності ряду а) буде $(-1,1)$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=1$ одержимо ряд а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$. Цей знакопочережний ряд абсолютно не збігається (гармонічний ряд), але за ознакою Лейбніца він збігається неабсолютно.

При $x=-1$ маємо ряд

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots$$

який розбігається. Отже, областю збіжності ряду а) є проміжок $(-1,1]$.

У випадку b) степеневий ряд не містить усіх степенів x, тому його радіус збіжності R не можна знаходити за формулами (22), (23).

Застосуємо до ряду, складеному з абсолютних величин ряду b), ознаку Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot x^{2n}}{2^{n-1}\cdot x^{2n-2}}=x^2\lim_{n\to\infty}2=2x^2.$$

При $D<1$ ряд збігається, тобто він збігається, коли

$$2x^2<1\Rightarrow x^2<\frac{1}{2}\Rightarrow|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, ряд b) збігається в інтервалі $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, а на кінцях інтервалу розбігається.

13.2.2. Розклад функції у степеневий ряд

Якщо степеневий ряд збігається в інтервалі $(-R,R)$, то його сумою буде деяка функція x, тобто $S=f(x),\ x\in(-R,R)$.

Часто треба розв'язувати обернену задачу: знайти степеневий ряд, сума якого дорівнює заданій $f(x)$ при $x\in(-R,R)$.

Цю задачу розв'язують з використанням такої теореми.

✦ **Теорема 5.** ***Якщо в деякому інтервалі, що містить точку*** $x=a$, ***функція*** $f(x)$ ***має похідні будь-якого порядку, які задовольняють умовам*** $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\ M>0$ ***для усіх*** x ***із цього інтервалу та будь-якого*** n, ***то функція*** $f(x)$ ***для усіх*** x **із** ***цього інтервалу розкладається у степеневий ряд вигляду***

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (24)$$

Степеневий ряд (24) по степенях $(x-a)$ називають ***рядом Тейлора функції*** $f(x)$. При $a=0$ одержуємо степеневий ряд по степенях x вигляду:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (25)$$

Цей ряд називають ***рядом Маклорена функції*** $f(x)$.

У формулах (24) та (25) замість x можна записати змінну u, яка може бути функцією x або незалежною змінною.

Згідно з цією теоремою знаходять розклад у степеневий ряд заданої функції та інтервал збіжності.

Вкажемо розклад у ряд Маклорена функцій, що використовуються найчастіше:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots, \quad u \in (-\infty, \infty) \tag{26}$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots + (-1)^n u^n + \ldots, \quad |u| < 1 \tag{27}$$

$$\ln(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{u^n}{n} + \ldots, \quad u \in (-1, 1) \tag{28}$$

$$\sin u = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad u \in (-\infty, \infty) \tag{29}$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad u \in (-\infty, \infty) \tag{30}$$

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |u| < 1 \tag{31}$$

$$(1+u)^m = 1 + mu + \frac{m(m-1)}{2!} u^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} u^n + \ldots, \quad |u| < 1 \tag{32}$$

Саме ці формули використовують для одержання таблиць наближених значень відповідної функції.

■ **Приклад 8.** Розкласти у ряд Маклорена функцію $f(x) = e^{-2x^2}$

↬ *Розв'язання.* Коли $x \in (-\infty, \infty)$ змінна $u = -2x^2 \in (-\infty, 0]$.

Розклад функції e^u у ряд Маклорена має місце для $u \in (-\infty, \infty)$, отже і для $u \in (-\infty, 0]$. Тому можна підставити у формулу (26) замість u його значення $(-2x^2)$ і одержати розклад вигляду

$$e^{-2x^2}=1-\frac{2x^2}{1!}+\frac{\left(-2x^2\right)^2}{2!}+\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(2x^2\right)^n}{n!}+\ldots,\quad x\in\left(-\infty,\infty\right).$$

Після спрощення одержимо ряд Маклорена вигляду

$$e^{-2x^2}=1-2x^2+2x^4-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{2^n}{n!}x^{2n}+\ldots,\quad x\in\left(-\infty,\infty\right).\quad (33)$$

В багатьох випадках доцільно використовувати слідуючи властивості збіжних степеневих рядів.

✦ **Теорема 6.** ***Сума збіжного степеневого ряду*** $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ***неперервна функція*** x ***всередині інтервалу збіжності.***

✦ **Теорема 7.** ***При почленному інтегруванні чи диференціюванні збіжного степеневого ряду його радіус збіжності не змінюється.***

За допомогою почленного інтегрування та диференціювання іноді вдається звести заданий ряд до відомого ряду і тим самим знайти його суму.

■ **Приклад 9.** Знайти суму ряду

$$2+\frac{3}{1!}x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{5}{3!}x^3+\ldots+\frac{n+1}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots$$

Розв'язання. Радіусом збіжності цього ряду буде

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!}{(n-1)!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n+2}=\infty.$$

Отже, заданий ряд збігається в інтервалі $\left(-\infty,\infty\right)$ і в цьому інтервалі його сума $S\left(x\right)$ неперервна. Згідно з властивістю неперервних функцій $xS\left(x\right)$ також неперервна функція в інтервалі $\left(-\infty,\infty\right)$. Проінтегруємо добуток $xS\left(x\right)$ і одержимо:

$$\int_0^x xS(x)dx = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} + \ldots =$$

$$= x^2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right) = x^2 e^x.$$

Вираз у дужках дорівнює e^x згідно формули (26). Звідси, диференціюванням інтеграла по верхній межі, одержимо:

$$xS(x) = \left(x^2 e^x\right)' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x).$$

Отже, маємо:

$$S(x) = (2 + x)e^x,$$

тобто знайшли суму заданого степеневого ряду.

13.2.3. Наближені значення функції та визначеного інтеграла

Розклад функцій у ряд Тейлора або ряд Маклорена використовується для знаходження наближеного значення функції, визначеного інтеграла, розв'язування диференційних рівнянь.

Для наближеного обчислення значення функції $f(x)$ *в точці* x_0 *діють так:*

1) розкладають $f(x)$ у степеневий ряд;

2) підставляють у розклад замість x число x_0 і одержують $f(x_0)$, як суму числового ряду;

3) залишають у розкладі перші n членів, а інші відкидають, тобто одержують наближене значення

$$f(x_0) \approx S_n$$

де S_n — часткова сума n членів числового ряду;

4) оцінюють похибку знайденого наближеного числового значення $f(x)$. Якщо числовий ряд знакопостійний, тоді ряд, складений з відкинутих членів, порівнюють з рядом збіжної геометричної прогресії. У випадку знакопочережного числового ряду застосовують ознаку Лейбніца, за якою абсолютна величина похибки буде менше абсолютної величини першого відкинутого члена ряду, тобто

$$|R_n| < |u_{n+1}|.$$

■ **Приклад 10.** Обчислити $\ln(1{,}6)$ використовуючи три члена розкладу функції у степеневий ряд.

↳ *Розв'язання.* Згідно з розкладом (28) маємо:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ \ x \in (-1{,}1).$$

У нашому випадку $x = 0{,}6 \in (-1{,}1)$, тому можна підставити у розклад замість x число 0,6 і одержати знакопочережний числовий ряд

$$\ln(1{,}6) = 0{,}6 - \frac{(0{,}6)^2}{2} + \frac{(0{,}6)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{(0{,}6)^n}{n} + \ldots$$

Обмежуючись трьома членами розкладу за умовою прикладу одержимо:

$$\ln(1{,}6) \approx 0{,}6 - \frac{(0{,}6)^2}{2} + \frac{(0{,}6)^3}{3} = 0{,}6(1 - 0{,}3 + 0{,}12) = 0{,}492.$$

Абсолютна величина похибки оцінюється так:

$$|R_3| < \frac{(0{,}6)^4}{4} = \frac{0{,}1296}{4} = 0{,}0324.$$

Для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла діють так:

1) розкладають підінтегральну функцію $f(x)$ у степеневий ряд;

2) використовуючи властивість збіжного степеневого ряду в межах інтервалу інтегрування, інтегрують степеневий ряд почленно і одержують рівність заданого інтеграла збіжному числовому ряду;

3) замінюючи суму ряду частковою сумою, одержують наближене значення заданого визначеного інтеграла і оцінюють величину похибки.

■ **Приклад 11.** Знайти наближене значення інтеграла $\int\limits_0^{1/2} e^{-2x^2}dx$.

↳ *Розв'язання.* Розклад підінтегральної функції одержали у прикладі 8 (див. формулу (33)).

Інтервал інтегрування $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ належить області збіжності $(-\infty,\infty)$ степеневого ряду, тому мають місце рівності:

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-2x^2}dx = \int\limits_0^{1/2}\left[1-2x^2+2x^4-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!}x^{2n}+\ldots\right]dx =$$

$$=\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{n!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^4}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!(2n+1)2^{n+1}}+\ldots.$$

Якщо обмежитись двома членами розкладу, то одержимо:

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-2x^2}dx \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{12}=0{,}416\,.$$

Абсолютна величина похибки буде

$$\left|R_2\right| < \frac{1}{5\cdot 2^4} = \frac{1}{80} = 0{,}0125\,.$$

При необхідності більшої точності можна брати часткову суму більшої кількості членів ряду.

Якщо, наприклад, взяти три члена розкладу інтеграла, то одержимо:

$$\int_0^{1/2} e^{-2x^2}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{80} = 0{,}4209\,,$$

$$\left|R_3\right| < \frac{1}{4!\cdot 9\cdot 2^5} = \frac{1}{24\cdot 9\cdot 32} = \frac{1}{6912} \approx 0{,}00015\,.$$

13.2.4. Питання для самоперевірки

1. Як визначають радіус, інтервал та область збіжності степеневого раду?

2. Який вигляд мають розклади функцій у ряд Тейлора та ряд Маклорена?

3. Який порядок дій доцільно застосовувати при знаходженні наближеного значення функції, визначеного інтеграла?

4. Як можна оцінити похибку наближеного обчислення значення функції або визначеного інтеграла?

13.2.5. Вправи

1. Знайти область збіжності ряду:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Знайти суму степеневого ряду, використовуючи почленне диференціювання та інтегрування:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

3. Розкласти функцію у степеневий рад та знайти інтервал збіжності розкладу:

a) $f(x)=xe^{-x^2}$; b) $f(x)=e^{x^2}$; c) $f(x)=\cos 2x$;

d) $f(x)=\cos^2 x$; e) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}$; f) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$;

g) $f(x)=\ln\left[1+2x^2\right]$.

4. Обмежуючись двома першими членами розкладу функції у ряд Маклорена знайти наближені значення та оцінити похибку:

a) $\sin 18^0$; b) $\cos 9^0$; c) $\ln(1{,}5)$; d) $\ln(1{,}1)$; e) $e^{0{,}1}$; f) $\operatorname{arctg} 0{,}1$.

14. Додатки

Відсотки рахунків накопичення

$$S_{n/i} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{n/i} = \frac{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Таблиця 1

$i = 0{,}5\% = 0{,}005$				$i = 1\% = 0{,}01$			
n	$(1+i)^n$	$a_{n/i}$	$S_{n/i}$	***n***	$(1+i)^n$	$a_{n/i}$	$S_{n/i}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0.990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,0933685	8,566018	9,368527
10	1,04114	9,730412	10,228026	10	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	13	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	20	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23,194431	22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	23	1,257163	20,455821	25,716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	24	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця 1 (продовження)

$i = 2\% = 0{,}02$				$i = 3\% = 0{,}03$			
n	$(1+i)^n$	$a_{n/i}$	$S_{n/i}$	**n**	$(1+i)^n$	$a_{n/i}$	$S_{n/i}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	33,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,592274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	6,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	12	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	13	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	14	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	20	1,806111	14,877475	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	22	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	24	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця 1 (продовження)

$i = 5\% = 0{,}05$				$i = 8\% = 0{,}08$			
n	$(1+i)^n$	$a_{n/i}$	$S_{n/i}$	***n***	$(1+i)^n$	$a_{n/i}$	$S_{n/i}$
1	1,05	0,952381	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,664	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	6,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	5,463213	8,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	6,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	6,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,531369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,371887	37,450244
19	2,52695	12,085321	30,539004	19	4,315701	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,2251	13,798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

Значення експоненціальних функцій

Таблиця 2

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0	1	1	1,7	5,4739	0,1827
0,02	1,0202	0,9802	1,8	6,0496	0,1653
0,04	1,0408	0,9608	1,9	6,6859	0,1496
0,06	1,0618	0,9418	2,0	7,3891	0,1353
0,08	1,0833	0,9231	2,1	8,1662	0,1225
0,1	1,1052	0,9048	2,2	9,0250	0,1108
0,2	1,2214	0,8187	2,3	9,9742	0,1003
0,3	1,3499	0,7408	2,4	11,023	0,0907
0,4	1,4918	0,6703	2,5	12,182	0,0821
0,5	1,6487	0,6065	2,6	13,464	0,0743
0,6	1,8221	0,5488	2,7	14,880	0,0672
0,65	1,9155	0,5220	2,8	16,445	0,0608
0,7	2,0138	0,4966	2,9	18,174	0,055
0,75	2,1170	0,4724	3,0	20,086	0,0498
0,8	2,2255	0,4493	3,25	25,79	0,0388
0,85	2,3396	0,4274	3,5	33,115	0,0302
0,9	2,4596	0,4066	3,75	42,521	0,0235
0,95	2,5857	0,3867	4,0	54,598	0,0183
1,0	2,7183	0,3679	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,0042	0,3329	5,0	148,41	0,067
1,2	3,3201	0,3012	6,0	403,43	0,0025
1,3	3,6693	0,2725	7,0	1096,6	0,0009
1,4	4,0552	0,2466	8,0	2981,0	0,0001
1,5	4,4817	0,2231	9,0	8103,1	0,0001
1,6	4,9530	0,2019	10,0	22026	0,00005

Значення натуральних логарифмів (основа e = 2,71828)

Таблиця 3

Десятки \ Одиниці	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	–	0,0	0,693	1,095	1,386	1,609	1,791	1,945	2,079	2,197
1	2,302	2,397	2,484	2,564	2,639	2,708	2,772	2,833	2,890	2,944
2	2,995	3,044	3,091	3,135	3,178	3,218	3,258	3,295	3,332	3,367
3	3,401	3,434	3,465	3,496	3,526	3,555	3,583	3,610	3,637	3,663
4	3,688	3,713	3,737	3,761	3,784	3,806	3,828	3,850	3,871	3,891
5	3,912	3,931	3,951	3,970	3,989	4,007	4,025	4,043	4,060	4,077
6	4,094	4,110	4,127	4,143	4,158	4,174	4,189	4,204	4,219	4,234
7	4,248	4,262	4,276	4,290	4,304	4,317	4,330	4,343	4,356	4,369
8	4,382	4,394	4,406	4,418	4,430	4,442	4,454	4,465	4,477	4,488
9	4,499	4,510	4,521	4,532	4,543	4,553	4,564	4,574	4,585	4,595
10	4,605	4,615	4,625	4,634	4,644	4,654	4,663	4,672	4,682	4,691

Систематизація рівнянь прямої на площині

Таблиця 4

№	Вигляд рівняння	Його назва	Основні позначення
1.	$A\left(x-x_0\right)+$ $+B\left(y-y_0\right)=0$	Рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно $\vec{n}$.	$(x,\ y)$ — координати довільної точки M прямої; $\left(x_0,y_0\right)$ — координати заданої точки M_0, через яку проходить пряма; $(A,\ B)$ — координати вектора $\vec{n}$, що є перпендикулярним до прямої.
2.	$Ax+By+C=0$	Загальне рівняння прямої l.	$(x,\ y)$ — координати довільної точки $M\in l$; $\vec{n}\perp l$, $\vec{n}=\left(A,B\right)$. Для побудови треба знайти дві точки при $x=0$ та $y=0$.
3.	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$	Канонічне рівняння прямої L	$M_0\left(x_0,y_0\right)\in L$ $M\left(x,y\right)$ – довільна точка L, $\vec{S}=\left(l,m\right)$; $\vec{S}\parallel L$.
4.	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.	$M_1\left(x_1,y_1\right)$ та $M_2\left(x_2,y_2\right)$ фіксовані точки прямої; $M\left(x,y\right)$ – довільна точка прямої.
5.	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках.	$M(x,\ y)$ — довільна точка прямої; a та b — відрізки, які пряма відтинає на осях Ox та Oy, відповідно.

Таблиця 4 (продовження)

	Вигляд рівняння	Його назва	Основні позначення
6.	$y = kx + b$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.	$M(x, y)$ — довільна точка прямої; $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ — кутовий коефіцієнт; α — кут нахилу прямої до Ox; b — величина відрізка, який відтинає пряма на осі Oy.
7.	Умови паралельності прямих		
	a) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	a) прямі задані загальними рівняннями.	$\vec{n}_k(A_k, B_k)$, $k = 1, 2$
	b) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$	b) прямі задані канонічними рівняннями.	$\vec{s}_k(l_k, m_k)$, $k = 1, 2$
	c) $k_1 = k_2$	c) прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом.	$k_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1$; $k_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2$

Таблиця 5

Правила та формули для обчислення похідних

1. Якщо $y=C$, де C – стала, то $y'=0$, або $(C)'=0$.

2. $\left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right]'=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\ldots\pm f_n'(x)$.

3. $\left[U(x)\cdot V(x)\right]'=U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x)$.

4. $\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)'=\dfrac{U'(x)\cdot V(x)-U(x)\cdot V'(x)}{V^2(x)}$.

5. Якщо $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, то $y_x'=f_u'\cdot u_x'$.

6. $\left(U^\alpha\right)'=\alpha\cdot U^{\alpha-1}\cdot U'$. 7. $\left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$. 8. $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$.

9. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u}\log_a e\cdot u'$. 10. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$. 11. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.

12. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$. 13. $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$. 14. $(\operatorname{ctg} u)'=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}$.

15. $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. 16. $(\arccos u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17. $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$. 18. $(\operatorname{arcctg} u)'=\dfrac{-u'}{1+u^2}$.

Якщо в формулах 6-18 $u=x$, то $u'=1$.

19. Похідну показниково-степеневої функції можна знайти методом логарифмічного диференціювання або за формулою:

$$\left(U^V\right)'=U^V\cdot\ln U\cdot V'+V\cdot U^{V-1}\cdot U'.$$

Таблиця 6

Найважливіші первісні

В кожному інтегралі не записано постійної інтегрування, що треба взяти до уваги.

Деякі фундаментальні формули

1. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

2. $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. $\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f(u)du$, $u = g(x)$.

4. $\int U(x)dV(x) = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)dU(x)$.

Первісні від раціональності відносно $(ax+b)$

5. $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$, $n \neq -1$.

6. $\int (ax+b)^{-1} dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b|$.

7. $\int x(ax+b)^n dx = \dfrac{1}{a^2}(ax+b)^{n+1}\cdot\left[\dfrac{ax+b}{n+2} - \dfrac{b}{n+1}\right]$, $(n\neq -1,\ n\neq -2)$.

8. $\int x(ax+b)^{-1} dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2}\ln|ax+b|$.

9. $\int x(ax+b)^{-2} dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right]$.

10. $\int \dfrac{x^2}{ax+b}dx = \dfrac{1}{a^3}\left[\dfrac{1}{2}(ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2\ln|ax+b|\right]$.

11. $$\int \frac{x^2}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a^3}\left[ax+b-\frac{b^2}{ax+b}-2b\ln|ax+b|\right].$$

12. $$\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|,\ \ b\neq 0.$$

13. $$\int \frac{x}{x^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|,\ b\neq 0.$$

14. $$\int \frac{1}{x(ax+b)^2}dx = \frac{1}{b(ax+b)}-\frac{1}{b^2}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right|,\ \ b\neq 0.$$

15. $$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|,\ \ (bc-ad\neq 0).$$

16. $$\int \frac{x\cdot dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a}\ln|ax+b|-\frac{d}{c}\ln|cx+d|\right],$$

$(bc-ad\neq 0)$.

17. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{1}{ax+b}+\frac{c}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|\right],$$

$(bc-ad\neq 0)$.

18. $$\int \frac{x\cdot dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{bc-ad}\left[\frac{b}{a(ax+b)}+\frac{d}{bc-ad}\ln\left|\frac{cx+d}{ax+b}\right|\right],$$

$(bc-ad\neq 0)$.

Інтеграли, що містять $\sqrt{ax+b}$

19. $\int x\sqrt{ax+b}dx = \dfrac{2}{a^2}\left[\dfrac{(ax+b)^{5/2}}{5} - \dfrac{b(ax+b)^{3/2}}{3}\right].$

20. $\int x^2\sqrt{ax+b}dx = \dfrac{2}{a^3}\left[\dfrac{(ax+b)^{7/2}}{7} - \dfrac{2b(ax+b)^{5/2}}{5} + \dfrac{b^2(ax+b)^{3/2}}{3}\right].$

21. $\int \dfrac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \dfrac{2ax-4b}{3a^2}\sqrt{ax+b}\,.$

22. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|, \ (b>0).$

23. $\int \dfrac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = \dfrac{1}{b(n-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^{n-1}} - \dfrac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\dfrac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}},$

$(n\neq 1).$

Інтеграли, що містять $a^2 \pm x^2$

24. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|.$

25. $\int \dfrac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \dfrac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \dfrac{1}{4a^3}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|.$

26. $\int \dfrac{x\cdot dx}{a^2\pm x^2} = \pm\dfrac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|.$

27. $\int \dfrac{dx}{x(a^2\pm x^2)} = \dfrac{1}{2a^2}\ln\left|\dfrac{x^2}{a^2\pm x^2}\right|.$

Інтеграли, що містять $\sqrt{a^2 - x^2}$

28. $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$.

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$.

30. $\int \frac{dx}{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

31. $\int \frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{x} dx = \frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2 - x^2} - a^3 \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|$.

32. $\int x^n \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{n-1}{n+2}\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} + \frac{a^2(n-1)}{n+2} \int x^{n-2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx$,

$(n \neq -2)$.

Інтеграли, що містять $ax^2 + bx + c$

33. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|$,

$\left(b^2 - 4ac > 0\right)$.

Інтеграли, що містять показникові та логарифмічні функції

34. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$.

35. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$.

36. $\int xe^{ax}dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}$.

37. $\int \ln|x|dx = x\ln|x| - x$.

38. $\int x\ln|x|dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4}$.

39. $\int \frac{dx}{x\ln|x|} = \ln\left|\ln|x|\right|$.

40. $\int \ln^n|x|dx = x\ln^n|x| - n\int \ln^{n-1}|x|dx$.

41. $\int x^m \ln^n|x|dx = \frac{1}{m-1}\left[x^{m+1}\cdot\ln^n|x| - n\int x^m\cdot\ln^{n-1}|x|dx\right]$,

$(m \neq -1)$.

42. $\int \frac{\ln^n|x|}{x}dx = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1}|x|$.

43. $\int x^n\cdot e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$.

44. $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ab}\left[ax - \ln\left(b+ce^{ax}\right)\right]$, $(ab \neq 0)$.

Зразок контрольної роботи з частин 4–6

Номер варіанта – k .

Завдання 1. Знайти матрицю, обернену заданій матриці:

a) $A=\begin{pmatrix} k+1 & k+8 & k+4 \\ k+5 & k+2 & k+3 \\ k+7 & k+4 & k+6 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & k \\ k+1 & k+5 & k+3 \\ k+1 & k+5 & k+4 \end{pmatrix}$.

Завдання 2. Розв'язати задану систему рівнянь методом Гаусса-Жордана:

a) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-(k+3)x_2+x_3-x_4=2-k \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1-x_2-(k+1)x_3+kx_4=1 \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=k \\ kx_1-x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$.

Завдання 3. Некомпланарні вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють базис. Відомі розклади векторів $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n}$ у цьому базисі:

a) $\vec{l}=k\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{m}=2\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{n}=8\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

b) $\vec{l}=-\vec{a}-4\vec{b}$; $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+k\vec{c}$; $\vec{n}=\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$.

При яких k вектори $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n}$ утворюють базис? При яких вони компланарні?

Завдання 4. Скласти рівняння будь-якої висоти трикутника з вершинами A, B та C і знайти її довжину.

a) $A(0,-k)$; $B(1,-3k)$; $C(-5,2k)$.

b) $A(k,-1)$; $B(k+1,-3)$; $C(k-5,2)$.

Зразок контрольної роботи з частин 9–11

a) Завдання для непарних варіантів

Завдання	Варіанти			
	1	**3**	**5**	**7**
1. Знайти мішану частину похідну другого порядку в точці M_0	$z=(x-1)^2\cdot 2y^3;$ $M_0(1,-1)$	$z=x^2y+$ $+y^2x-8;$ $M_0(2,2)$	$z=6x^3y^2-$ $-y^3x^3;$ $M_0\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$	$z=1-$ $-(x^2+y^2)^{2/3}$ $M_0(2,1)$
2. Знайти інтеграл методом інтегрування частинами	$\int\dfrac{xdx}{\sin^2 x}$	$\int x\ln\dfrac{x}{2}dx$	$\int xe^{-2x}dx$	$\int\ln 3x\cdot dx$
3. Дослідити невласний інтеграл та обчислити його у випадку збіжності	$\int\limits_e^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln^3 x}$	$\int\limits_e^{\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	$\int\limits_0^{\infty}e^{-3x}dx$	$\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{3x^4}$

b) Завдання для парних варіантів

Завдання	Варіанти			
	2	**4**	**6**	**8**
1. Знайти повний диференціал функції U	$U=xy+$ $+yz+zx$	$U=x^{\frac{y}{z}}$	$U=\sin x\cdot e^y\cdot z$	$U=(2x+y)^{2z}$
2. Знайти інтеграл методом заміни змінної (підстановки)	$\int x\sqrt{x+1}dx$	$\int\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	$\int\dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$	$\int\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
3. Обчислити площу області, обмеженої заданими лініями	$y^2=4x;$ $x^2=4y$	$y=(x+2)^2;$ $y=4-x;$ $y=0$	$y=\dfrac{4}{x};\ y=0$ $x=1;\ x=5$	$y=9-x^2;$ $y=2x+1$

Зразок завдань для індивідуальної семестрової роботи з частин 9–13

Модуль 1

1. Знайти найбільше та найменше значення функції у замкненій області, обмеженої заданими лініями:

a) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, D – трикутник: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$;

b) $z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$, D – прямокутник: $0 \le y \le 1$, $x = 0$, $x = 2$;

c) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, D – трикутник: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$;

d) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D – трикутник: $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$;

e) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D – прямокутник: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$;

f) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, D – трикутник: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$;

g) $z = xy - 2x - y$, D – прямокутник: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$;

h) $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$, D – обмежена параболою $y = \dfrac{1}{3}x^2$ та прямою $y = 3$;

i) $z = 2x + y - xy$, D – квадрат: $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$;

j) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D – прямокутник: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

2. Знайти умовні екстремуми заданої функції $z = f\left(x, y\right)$ з обмеженням $\varphi\left(x, y\right) = 0$:

a) для парних N: $z = 3\left(N + 2\right)xy^2$ при $x + 2y - N = 0$;

b) для непарних N:

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 \text{ при } \frac{x}{N} + \frac{y}{N} + 3 = 0.$$

Модуль II

3. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність:

a) для парних N: $\int\limits_0^\infty x e^{-\frac{x}{N}} dx;$

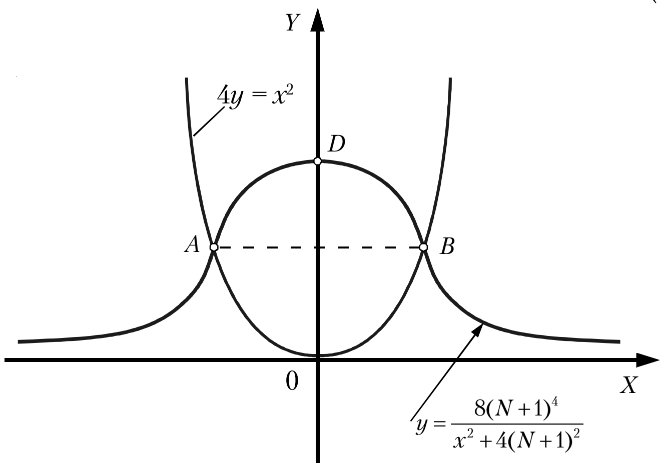
b) для непарних N: $\int\limits_0^\infty x \sin\frac{x}{N} dx.$

4. Знайти площу області, обмеженої заданими лініями:

a) для парних N: параболою $4y = x^2$ та локоном Аньєзі

$$y = \frac{8(N+1)^4}{x^2 + 4(N+1)^2} \quad \text{(див. мал. 1)};$$

b) для непарних N: параболами $y = (N+1)x^2$ та $y = \dfrac{x^2}{4(N+1)}$.



Мал. 1.

Модуль III

5) Розв'язати задачу.

а) Для парних N:

За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища. Температура витягнутого з печі хліба за 20 хвилин спадає з 100° до $\left(60+N\right)^\circ$. Температура в хлібопекарні дорівнює $\left(25-N\right)^\circ$. За який час хліб охолоне до температури $\left(30-N\right)^\circ$?

b) Для непарних N.

Швидкість розпаду радія пропорційна кількість радія, що не розпався. У момент аварії на Чорнобильській АЕС випало q_0 тонн радія. Відомо, що за 1600 років розпадається половина первинної кількості радія.

Визначити: 1) через скільки років кількість радія, що не розпався, буде складати 80% первинної кількості? 2) який відсоток радія не розпадеться через 300 років?

6. Знайти наближене значення інтеграла з точністю 0,001.

а) для парних N: $J=\int\limits_0^b \frac{\sin kx}{x}dx$, $b=0{,}2+0{,}N$, $k=\frac{1}{b}$;

b) для непарних N: $J=\int\limits_0^b e^{-kx^2}dx$, $b=0{,}3+0{,}N$, $k=\frac{1}{10b}$.

15. Відповіді до вправ

Частина 1

1. Висловлення $\{2+4\leq 10\}$, $\{5^2=25\}$ істинні, а висловлення $\{5<2\}$, $\{11+3=18\}$, $\{6^3\neq 216\}$ – хибні.

2. $\rceil M\equiv$\{257 – непарне число\}; $\rceil Q\equiv$\{число $\sqrt{2}$ не є раціональним\}; $\rceil R\equiv$\{число 7 не додатне\}; $\rceil S\equiv$\{число 5 невід'ємне\}.

3. $\rceil C\equiv$\{27 ділиться на 2\}; $\rceil D\equiv$\{існує (хоча б одне парне просте число\}; $\rceil E\equiv\{5\cdot 7=35\}$.

4. $\rceil A\equiv$\{15 не ділиться на 3\}; $\rceil B\equiv$\{5 – число 7 не додатне\}; $\rceil C\equiv\{3\geq 7\}$.

5. (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3) (5, 1), (5, 2), (6, 1).

6. Якщо на множині усіх простих дробів задано невизначене висловлення $B_1\equiv$\{число x виражається скінченним десятковим дробом\}, тоді висловлення $\rceil(\forall x)B_1(x)\equiv(\exists x)(\rceil B_1(x))$ означає: не усякий простий дріб виражається скінченним десятковим дробом, тобто існує простий дріб, який не виражається скінченним десятковим дробом.

7. $(A\to B)\equiv$\{якщо натуральне число ділиться на 9, тоді сума цифр числа a ділиться на 3\}; $(B\to A)\equiv$\{якщо сума цифр натурального числа a ділиться на 3, тоді число a ділиться на 9\}. Обернена теорема хибна.

9. Обидві теореми вірні, тобто вірна теорема: *Для того, щоб піраміда P була правильною, необхідно і достатньо, щоб усі сторони основи цієї піраміди були рівні між собою та усі бокові ребра цієї піраміди були рівні між собою.*

10. $(\rceil A(x))\vee(\rceil B(x))\equiv(\rceil A(x))\wedge(\rceil B(x))\equiv\{x$ не ділиться на 6\}.

Частина 2

Розділ 2.1

1. 77; 61; 24; 0; 11.

2. $-6 \le a \le 6$; $-9 \le b \le 9$; $-\frac{1}{2} \le c \le \frac{1}{2}$.

3. 24; 36; 40. 4. 630; 600; 280. 5. 24,12 км. 6. 831,6. 7. 8350. 8. 366 км. 9. 15 підвод.

10. a) зросте у 7 разів; b) зменшиться у 5 разів; c) зменшиться у 5 разів; d) зросте у 8 разів.

Розділ 2.2

1. a) $3a+10b+6$; b) $5\sqrt{a}+3\sqrt{b}$; c) t^3+7t^2+3t-5; d) $\sqrt{x}+3\sqrt{2y}$; e) $9x+3y$.

2. a) $(x+2)(x-1)$; b) $(x-6)(x-9)$; c) $2(x-2)(x+3)$; d) $(2x+3)(x+1)$; e) $(2t-3u)(t+2u)$.

3. a) $\frac{2-x}{(2x-1)(x+1)}$; b) $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; c) $\frac{(x-1)(2x-1)}{(x+1)^2}$; d) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x-5)}$.

Розділ 2.3

1. a) 1; b) –2; c) 4; d) –1; e) –10.

2. a) 3; b) $\frac{4}{3}$; c) 2; d) 1; e) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{2}$.

3. a) 1, інші корені не дійсні; b) $x_1=\frac{4a-b}{3}$, $x_2=a$; c) 0; d) $\pm 2\sqrt{2}$.

4. a) 2 та –1; b) 0; c) 2; d) 0, –1; e) 1,5; f) 13; g) 0,5.

Розділ 2.4

1. a) $x > 2$; b) $y < -\frac{7}{5}$; c) $t \le 13$; d) $2 < x < 5$; e) 3; f) не має розв'язків; g) (0,1); h) $[1,4]$.

2. a) 5000; b) 60 одиниць; c) $x \le 240$, найбільша кількість – 240.

Розділ 2.5

1. $P_5 = 5!$; 2. A_7^3; 3. 12; 4. 21; 5. 210.

Частина 3

Розділи 3.2 та 3.3

1. a) 108; b) 8, 10, 12 або 17, 10,3. 2. a) 25; b) 4, 10, 16 або 16, 10, 4. 3. a) 4; b) -6, 6, 18 або 10, 6, 2. 4. a) 25, b) 2, 7, 12, 17. 5. a) 30; b) 62. 6. a) 22 місяці; b) 201 гривня. 7. a) 30; b) 241 гривня.

8. a) $10000 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$; b) 6 років.

9. a) $1000 \cdot \frac{(1{,}08)^{11} - 1}{1{,}08 - 1}$; b) 16 645 гривень.

Розділ 3.4

1. Розв'язки треба знаходити за формулою $S = P \cdot s_{n/i}$ з використанням даних таблиці 1.

2. Розв'язки треба знаходити за формулою $A = P \cdot a_{n/i}$ з використанням даних таблиці 1.

3. Розв'язки треба знаходити за формулою $P = \frac{A}{a_{n/i}}$ з використанням даних таблиці 1.

Розділ 3.5

1. a) 1; b) 3; c) 4; d) 2.

2. $2^{n+2} - 5\cdot 2^{n+1} + 6\cdot 2n = 0$;

3. $y_0 = 2$; $y_1 = -4$; $y_2 = \dfrac{31}{4}$; $y_3 = \dfrac{-945}{62}$.

4. $y_n = -3\left(-5\right)^{n-2}$;

5. a) $y_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\left(-1\right)^n$; b) $y_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}\left(-3\right)^n$;

6. $y_n = y_{n-1} + 160$; $y_n = 2000 + 160_n$, $y_{10} = 3600$ гривень.

Частина 4

Розділ 4.1 та 4.2

1. Розмір матриць A та B – 3×3; матриць X, Y, C – 3×1; матриць D та H: 2×2.

2. $F = \begin{pmatrix} 5N+8 & 2N+1 & 6N+8 \\ 0 & -4 & -\left(4N+3\right) \\ -\left(3N+4\right) & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_3 = -6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + 4x_3 = y_1 \\ 3x_2 - 5x_3 = y_2 \\ -2x_1 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -3y_1 + y_2 - 2y_3 = z_1 \\ 4y_2 - y_3 = z_2 \\ y_1 + 3y_3 = z_3 \end{cases}$.

4. $Z = BY \Rightarrow Z = BAX \Rightarrow Z = QX$, де $Q = BA$.

5. $D^2 - H^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

$$(D-H)(D+H) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

7. Позначити:

K – матриця витрат сировини на одиницю продукції;

M – матриця вартості сировини на одиницю виміру сировини;

C – матриця загальної вартості сировини, витраченої на одиницю продукції;

Відповідь:

$$C = K \cdot M = \begin{pmatrix} 4(N+1) & 3(N+1) & 2(N+1) & 5(N+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. Якщо позначити $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20(N+2) & 30(N+2) \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$, тоді: a) BA; b) AC; c) BAC.

9. a) –15; b) AB не існує, BA = –25; c) $\begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 23 & -7 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 16 & -15 \\ 20 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

Розділ 4.3

1) 6. 2) 7. 3) (–2). 4) 23. 5) 11. 6) 5. 7) (–7). 8) (–5). 9) 31. 10) (–252). 11) 12. 12) 48. 13) (–473). 14) (–1264). 15) (–62). 16) (–31). 17) 30. 18) (–12). 19) (–28). 20) 0. 21) 14. 22) (–6). 23) (100). 24) 4950.

Розділ 4.4

1. a) 2; b) 2; c) 2; d) 3; e) 2; f) 1;

2. a) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ -11 & 5 & -3 \end{pmatrix}$;

d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; f) $-\frac{1}{37}\begin{pmatrix} -30 & -4 & 5 \\ 23 & 8 & -10 \\ 18 & -5 & -3 \end{pmatrix}$;

g) A^{-1} не існує.

3. a) $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 623 \\ 1007 \\ 1466 \end{pmatrix} - \dfrac{N}{0,159}\begin{pmatrix} 0,72 & 0,61 & 0,87 \\ 0,42 & 0,1 & 0,51 \\ 0,69 & 0,52 & 0,66 \end{pmatrix}$.

Частина 5

Розділ 5.2

1. a) $(N+1,\ 1,\ -1)$; b) $(2,\ 2,\ 4)$; c) $(3,\ 2,\ 1)$; d) $(2,\ 1,\ 3)$.

2. a) $(-1,\ -1,\ N-2)$; b) $\left(N-\dfrac{1}{N+1};\ 1+\dfrac{1}{N+1};\ 1\right)$;

c) $(-1,\ N,\ 2)$; d) $(1,\ -2,\ N)$; e) $(1,\ N+1,\ -1)$.

Розділ 5.3

1. Базисні невідомі x_1, x_2. Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{3}{4}x_4 - \dfrac{1}{4} \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

2. Базисні невідомі x_1, x_2, x_3. Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 8x_4 \\ x_2 = -1 - 5x_4 \\ x_3 = 1 + x_4 \end{cases}.$$

3. Базисні невідомі x_2, x_3. Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{1}{2} \\ x_3 = x_4 + \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

4. Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 2C_1 + \dfrac{2}{7}C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = -\dfrac{5}{7}C_2 \\ x_4 = C_2 \end{cases}.$$

5. Система несумісна.

6. $x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 1.$

7. $x_1 = -1,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1.$

8. $x_1 = 0,\ \ x_2 = -3,\ \ x_3 = -\dfrac{16}{3},\ \ x_4 = 6.$

Відповіді до завдання для індивідуальної роботи з частини 5.

1. Базисні невідомі $x_1,\ x_2,\ x_3$; вільне – x_4. Загальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{3N+6}{N+6}x_4 \\ 1 + \dfrac{6}{N+6}x_4 \\ 3 + \dfrac{4N+18}{N+6}x_4 \end{pmatrix}.$$

2. Базисні невідомі x_1, x_2, x_3; вільне – x_4. Загальний розв'язок:

$$X=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{N-1}{N^2+1}x_4 \\ N+1-\dfrac{N^2-N-2}{N^2+1}x_4 \\ -1+\dfrac{N^2-1}{N^2+1}x_4 \end{pmatrix}.$$

3. Базисні невідомі x_1, x_2, x_3; вільне – x_4. Загальний розв'язок:

$$X=\begin{pmatrix} N-1+\dfrac{2}{N+2}x_4 \\ 2-x_4 \\ 1-\dfrac{2}{N+2}x_4 \end{pmatrix}.$$

4. Базисні невідомі x_1, x_2, x_3; вільне – x_4. Загальний розв'язок:

$$X=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{N+1}{2}x_4 \\ 2+\dfrac{(N-3)(N+2)}{4}x_4 \\ 3+\dfrac{(N+1)(N+4)}{4}x_4 \end{pmatrix}.$$

Частина 6

Розділ 6.1

3. $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$; $\overrightarrow{MB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$;

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right);\ \ \overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right).$$

4. a) $\vec{a}$ та $\vec{l}$ спрямовані у одну сторону; b) спрямовані у протилежні сторони; c) $\vec{a}\perp\vec{l}$.

5. $2\vec{a}+5\vec{b}=\left(-11,2-1\right);\ \ 2\vec{b}-\vec{a}=\left(-8,8,0\right)$.

7. a) $\vec{a}=\left(2,-6,3\right),\ \ \vec{b}=\left(-2,6,-3\right)$;

b) $\left|M_1M_2\right|=7,\ \cos\alpha=\dfrac{2}{7},\ \cos\beta=\dfrac{-6}{7},\ \cos\gamma=\dfrac{3}{7}$;

c) $\vec{a}_0=\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{-6}{7},\dfrac{3}{7}\right)$.

8. a) $\vec{r}=\left(-2,3,-6\right)$; b) $\left|\vec{r}\right|=7,\ \cos\alpha=\dfrac{-2}{7},\cos\beta=\dfrac{3}{7},\ \cos\gamma=\dfrac{-6}{7}$.

9. a) $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$; b) $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$; c) $\vec{a}\vec{b}=0$; d) $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2$.

10. a) –6; b) –13; c) $\sqrt{13}$; d) $6\sqrt{7}$.

11. $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{186},\ \cos\alpha=\dfrac{-7}{\sqrt{186}},\ \cos\beta=\dfrac{-4}{\sqrt{186}},\ \cos\gamma=\dfrac{11}{\sqrt{186}}$.

12. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-134$.

13. Колінеарні тому, що координати пропорційні.

14. Ні; 15. a) $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$; $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_4$; $\vec{a}_1\vec{a}_3\vec{a}_4$; $\vec{a}_2\vec{a}_3\vec{a}_4$; b) $\left(\dfrac{5}{2},0,\dfrac{-3}{2}\right)$.

Розділ 6.2

1. M_1 та M_3 належать прямій, інші точки не належать прямій.

2. a) $x-5y+16=0$ або $\left(x+1\right)-5\left(y-3\right)=0$; b) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-1}$.

3. $M_1(0,-4)$, $M_2(6,0)$; $\frac{x}{6}-\frac{y}{4}=1$.

4. a) $y=-3$; b) $x=2$; c) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-3}$.

6. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt{117}}$; c) $\frac{2}{\sqrt{9}}$.

7. a) 45°; b) 45°; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 0°; e) 135°.

8. a) $a\neq 3$, b – будь яке; b) $a=3$, b – довільне; c) $a=3$, $b=2$.

9. $\frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{1}$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{5}$; $\frac{x}{5}=\frac{y+1}{6}$.

11. a) 500; b) 500; c) 40 або 20; d) 400.

12. $-42x+9y+24z+90=0$.

13. $1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0$.

16. a) $F(-3,0)$, $x=3$; b) $F(0,1)$, $y=-1$; c) $F\left(0,-\frac{5}{4}\right)$, $y=\frac{5}{4}$;

d) $F\left(\frac{3}{2},0\right)$, $x=-\frac{3}{2}$.

17. a) $(0,3)$ та $(0,-3)$; $F_1(0,-5)$ та $F_2(0,5)$;

b) $(4,0)$ та $(-4,0)$; $F_1\left(2\sqrt{5},0\right)$ та $F_2\left(-2\sqrt{5},0\right)$

c) $\left(\frac{5}{2},0\right)$ та $\left(-\frac{5}{2},0\right)$; $F_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{6},0\right)$ та $F_2\left(-\frac{5\sqrt{13}}{6},0\right)$.

18. a) $y^2=6x$; b) $y^2=-x$; c) $x^2=\frac{1}{2}y$.

19. a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{91}=1$; c) $\frac{32x^2}{203}+\frac{8y^2}{203}=1$.

Відповіді до завдань індивідуальної роботи з розділу 6.2

Завдання 1.

1) a) 5; b) $4x-3y+N+3=0$; c) $\frac{9}{5}$; d) $\frac{x-N}{5}=\frac{y-N-1}{9}$;

e) $\arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$; f) $4x-3y-N+10=0$;

2) a) $3\sqrt{3}$; b) $x-y-1=0$; c) $z\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

d) $\frac{x-N-1}{1}=\frac{y-N}{5/2}$; $\begin{cases} x=t+N+1 \\ y=\frac{5}{2}t+N \end{cases}$;

e) $\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$; f) $x-y+2=0$;

3) a) $\sqrt{5}$; b) $x+2y-3N-4=0$; c) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;

d) $\frac{x-N-2}{3/2}=\frac{y-N-1}{0}$; $\begin{cases} x=\frac{3}{2}t+N+2 \\ y=k+1 \end{cases}$;

e) $\arccos 4/5$; f) $x+2y-3N-7=0$;

4) a) $\sqrt{5}$; b) $3x+y-4N+3=0$; c) $\frac{7}{\sqrt{10}}$;

d) $\dfrac{x-N-2}{1}=\dfrac{y-N-4}{4}$; $\begin{cases} x=t+N+2 \\ y=4t+N+4 \end{cases}$; e) $\arccos\dfrac{11}{\sqrt{170}}$;

f) $3x+y-4N-10=0$.

Завдання 2. a) $(1,1)$; b) $(1,2)$; c) $(1,3)$; d) $(1,4)$.

Частина 7

Розділ 7.6

1. a) $F(4,3)=31$; b) $f(0)=3$; e) $f(1)=0$; d) $\varphi(1)=-\dfrac{1}{3}$;

e) $y(1)=6$; $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$.

2. a) $y=\arcsin u$, $u=3^{-x}$; b) $y=\lg\ u$, $u=\sin\ v$, $v=3x$;

c) $y=3^5u^5+v\cdot\ln 2$, $u=\cos x$, $v=6x^2$.

3. a) $x>-1$; b) $x\geq -2$; c) $x<1$; d) $x\geq 0$; e) $x\neq \pm 2$.

4. В прикладах a)–c) α_n – нескінченно мала; в прикладах d)–e) α_n – нескінченно велика.

5. a) 1) 25; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) 0; 4) e^{-2}; b) 1) 2; 2) 8; 3) ∞; 4) $\dfrac{1}{2}$;

c) 1) $\dfrac{1}{3}$; 2) 7; 3) $\dfrac{1}{16}$; 4) 4; d) 1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $\dfrac{9}{2}$; 4) $\dfrac{1}{3}$;

e) 1) -3; 2) 6; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) e^{10}.

6. a) при $x_1=2$ функція неперервна, при $x_2=4$ має розрив,

$$\lim_{x\to 4-0}5^{\frac{1}{x-4}}=4;\quad \lim_{x\to 4+0}5^{\frac{1}{x-4}}=\infty;$$

b) при $x_1 = 4$ функція неперервна, при $x_2 = 3$ має розрив,

$$\lim_{x\to 3-0} 6^{\frac{1}{x-3}} = 0;\ \lim_{x\to 3+0} 6^{\frac{1}{x-3}} = \infty;$$

c) при $x_1 = 7$ функція неперервна, при $x_2 = 5$ має розрив,

$$\lim_{x\to 5-0} 7^{\frac{1}{x-5}} = 0;\ \lim_{x\to 5+0} 7^{\frac{1}{x-5}} = \infty;$$

d) при $x_1 = 8$ функція неперервна, при $x_2 = 9$ має розрив,

$$\lim_{x\to 9-0} 10^{\frac{1}{x-9}} = 0;\ \lim_{x\to 9+0} 10^{\frac{1}{x-9}} = \infty;$$

e) при $x_1 = 3$ функція неперервна, при $x_2 = 1$ має розрив,

$$\lim_{x\to 1-0} 4^{\frac{1}{x-1}} = 0;\ \lim_{x\to 1+0} 4^{\frac{1}{x-1}} = \infty;$$

f) при $x_1 = 4$ функція неперервна, при $x_2 = 2$ має розрив,

$$\lim_{x\to 2-0} 8^{\frac{1}{x-2}} = 0;\ \lim_{x\to 2+0} 8^{\frac{1}{x-2}} = \infty.$$

7. a) $\Delta V = 745$; середнє значення 28,1; b) середнє значення доходу на одиницю приросту виробів – 940 гривень.

Розділ 7.7

1. a) $x \in (-\infty, -N) \cup [1, \infty)$; b) $x \in (-\infty, -1) \cup (N, \infty]$.

2. a) $\frac{3}{2}$; b) ∞.

Частина 8

Розділ 8.2

1. a) $4x^3 + 3x^2 + 3$; b) $3y^2 - 2 + \frac{15}{y^2}$; c) $-3(x-1)^{-2}$;

d) $\dfrac{t^2-10t+35}{(t-5)^2}$; e) $6x\left(2x^2+1\right)^{1/2}$; f) $-\left(x^2-1\right)^{-3/2}$;

g) $\left(2x-x^2\right)e^{-x}$; h) $\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x+1}$.

2. a) $\dfrac{2dx}{\cos^2 x\left(1-\operatorname{tg} x\right)^2}$; b) $6\sin^2 2x\cdot\cos 2x dx$;

c) $-\ln 3\cdot\sin x\cdot 3^{\cos x}dx$; d) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{dx}{x^{2/3}\cdot\sin 2\sqrt[3]{x}}$;

e) $2\left(e^{\sin x}-1\right)\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x\cdot dx$; f) $\dfrac{6x}{1+x^4}dx$;

g) $\left[\arcsin\ 2x+\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right]dx$.

3. a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{2}{3}$; c) -1; d) $\dfrac{e^2-1}{2}$.

4. a) $\dfrac{y\sin x+\sin y}{\cos x-x\cos y}$; b) $\dfrac{2x-ye^{xy}}{e^{xy}\cdot x+2y}$; c) $\dfrac{y(2-xy)}{x(xy+1)}$;

d) $\dfrac{y(x+x\ln y-y)}{x(y\ln x-x-y)}$; e) $\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t-1}$; f) $\dfrac{\sin 2t}{2(1-\cos\ t)}$;

g) $\dfrac{3t^2+8}{5t^4+2}$; h) $-2\operatorname{tg}^3 t$.

5. a) $2000-x$; b) $160000-160x+0{,}06x^2$;

c) $V'(50)=35,\ V'(100)=90,\ V'(120)=120{,}4$.

Розділ 8.3

a) $y' = 15x^4 + 21x^2 - 8x$; $y'' = 60x^3 + 42x - 8$; $y''' = 180x^2 + 42$;

$y^{(4)} = 360x$; $y^{(5)} = 360$; $y^{(n)} = 0$, $n \geq 6$;

b) $2\left(3x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)^{-3}$; c) $\left(x - 1\right)e^{-x}$;

d) $V'\left(x\right) = 30 - 0{,}2x + 0{,}006x^2$; $V''\left(x\right) = -0{,}2 + 0{,}012x$.

Розділ 8.5

1. a) $\left(-\infty, -1\right)$ – інтервал спадання, $\left(-1, \infty\right)$ – інтервал зростання. $y_{\min} = f\left(-1\right) = -4$; b) інтервали спадання: $\left(-\infty, -2\right)$, $\left(-2, \infty\right)$, екстремума немає; c) інтервали спадання: $\left(-\infty, -2\right)$ та $\left(0, 3\right)$, інтервали зростання: $\left(-2,\ 0\right)$ та $\left(3,\ \infty\right)$, $y_{\min} = f\left(-2\right) = -9$; $y_{\min} = f\left(3\right) = -15\frac{1}{4}$; $y_{\max} = f\left(0\right) = 7$; d) інтервал спадання $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, інтервал зростання $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $y_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$; e) інтервали спадання $\left(-\infty,\ 0\right)$ та $\left(6,\ 12\right)$, інтервали зростання (0,6) та $\left(12, \infty\right)$, $y_{\min} = f\left(0\right) = 0$; $y_{\min} = f\left(12\right) = 0$; $y_{\max} = f\left(6\right) = 1296$; f) інтервали зростання $\left(-\infty, -1\right)$ та $\left(1, \infty\right)$, інтервал спадання $\left(-1, 1\right)$, $y_{\min} = f\left(1\right) = 2$; $y_{\max} = f\left(-1\right) = 6$.

2. a) вертикальна асимптота $x = 3$; похила; $y = x - 3$;

b) горизонтальна асимптота $y = 0$;

c) вертикальна асимптота $x = 1$, похила асимптота $y = \frac{1}{2}x$.

3. a) інтервал опуклості $(-\infty,\ -3)$, угнутості $(-3,\ \infty)$, точка перегину $x=-3$.

b) інтервал опуклості $\left(-\infty, 5/3\right)$, угнутості $\left(5/3, \infty\right)$,

$$y_{пер.} = f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{-250}{27}\right);$$

c) інтервал опуклості $(-\infty,1)$, угнутості $(1,\infty)$, $y_{пер.} = f(1) = 2$.

4. a) $\min\limits_{[-4,4]} y = -148$, $\max\limits_{[-4,4]} y = 52$; b) $\min\limits_{[-1,5]} y = -6$, $\max\limits_{[-1,5]} y = 266$;

c) $\min\limits_{[-5,5]} f(x) = \frac{1}{38}$, $\max\limits_{[-5,5]} f(x) = \frac{1}{2}$; d) $\min\limits_{[-3,7]} f(x) = 0$,

$\max\limits_{[-3,7]} f(x) = \frac{1}{2}$;

e) $\min\limits_{[-3,7]} y = -0,4$, $\max\limits_{[-3,7]} y = \frac{1}{30}$; f) $\min\limits_{[-4,6]} y = -\frac{1}{2}$, $\max\limits_{[-4,6]} y = \frac{1}{22}$.

5. a) $\frac{r}{h} = \frac{P_2}{P_1}$; b) $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$; c) 0,3; d) $V(x)$ зростає для усіх x, доход зростає при $x<50$ та спадає при $x>50$; прибуток зростає при $x<40$ і спадає при $x>40$.

Розділ 8.6

a) $\eta = \frac{-36}{17}$, $-18\,\%$; b) $\eta = 1 - \frac{500}{x}$, похідна доходу $D'_p = 2x - 500$.

Розділ 8.7

5. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) ∞; d) ∞; e) 0; f) $\frac{1}{3}$.

Частина 9

Розділ 9.1

1. a) $f\left(M_0\right)=36,\ f\left(M_1\right)=54;$

b) $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)=-1,\ f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)=0;$

c) $f\left(2,1\right)=2,\ f\left(-2,-e\right)=-1,\ f\left(0,e^3\right)=3;$

d) $f\left(1,-2\right)=0,\ f\left(M_1\right)=-6,\ f\left(M_2\right)=-\infty.$

2. a) $x^2+y^2\le 16;$ b) $x\ne 0,\ y\ne 0;$ c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1;$

d) $y\ge 0,\ x\ge\sqrt{y};$ e) $\left(x,y,z\right)\in E_3;$ f) $x>y,\ x\ne -y.$

4. a) 2; b) $\frac{1}{2};$ c) 1; d) $\infty;$ e) $e;$ f) $\infty.$

5. a) $x=y;$ b) $y^2=2x;$ c) $M_0\left(1,\ -1\right).$

Розділи 9.2 – 9.5

1. a) $z''_{xx}=0,\ z''_{xy}=-2\left(y+1\right)^{-2},\ z''_{yy}=4x\left(y+1\right)^{-3};$

b) $z''_{xx}=\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}-x^2\left(x^2+y^2\right)^{-3/2},\ z''_{xy}=-xy\left(x^2+y^2\right)^{-3/2},$

$z''_{yy}=\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}-y^2\left(x^2+y^2\right)^{-3/2};$

c) $z''_{xx}=4y,\ z''_{xy}=4x,\ z''_{yy}=-6;$

d) $z''_{xx}=30x,\ z''_{xy}=0,\ z''_{yy}=36y^2;$

e) $z''_{xx}=-y^2\cdot x^{-2},\ z''_{xy}=\frac{1}{y}+\frac{2y}{x},\ z''_{yy}=-xy^{-2}+2\ln x;$

f) $z''_{xx} = 4e^{2x+3y}$, $z''_{xy} = 6e^{2x+3y}$, $z''_{yy} = 9e^{2x+3y}$;

g) $z''_{xx} = 180(3x+2y)^3$, $z''_{xy} = 120(3x+2y)^3$, $z''_{yy} = 80(3x+2y)^3$.

2. a) $z'''_{yxx} = 180x^2 \cdot y^4$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x(\partial y)^3} = 720x^3y^2$;

b) $z'''_{xyy} = 2(1+2x)(1+2y^2)e^{2x+y^2}$, $z'''_{xxy} = 4y(2+x^2)e^{2x+y^2}$.

3. a) $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$, $\operatorname{grad} u(M_0) = \dfrac{1}{2}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$;

b) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}(M_0) = 6$, $\operatorname{grad} z(M_0) = 12\vec{j}$;

c) $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \dfrac{3}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$, $\operatorname{grad} u(M_0) = 9\vec{i} - 3\vec{j}$;

d) $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = 6 + 12\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\operatorname{grad} u(M_0) = 12\vec{i} + 24\vec{i} + \vec{k}$.

4. a) $dz = \dfrac{1}{y}e^{x/y}dx - \dfrac{x}{y^2}e^{x/y}dy$;

b) $dz = (y - z^2)dx + (x+2z)dy + (2y - 2xz)dz$;

c) $du = 6xdx + 8ydy + 2zdz$;

d) $dw = (1+10x)dx + (2+10y)dy$;

e) $dz = \dfrac{-x}{\sqrt[9]{1-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}}}dx + \dfrac{y}{\sqrt[4]{1-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}}}dy$;

f) $dw = \dfrac{-2}{\sqrt{y^2-4x}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{y^2-4x}}dy$;

g) $du = \dfrac{-2}{4-x^2-y^2}\left(xdy + ydy\right).$

5. a) $z_{\min} = z\left(-4,1\right) = -1;$ b) $z_{\max} = z\left(-4,-2\right) = 8e^2;$

c) $z_{\min} = z\left(-2,0\right) = -2e^{-1};$ d) $z_{\min} = z\left(4,2\right) = 6;$

e) $z_{\min} = z\left(1,1\right) = -1;$ f) $z_{\min} = z\left(\pm1,\pm1\right) = -2;$

g) $z_{\min} = z\left(0,\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{-4}{3},$ в точці $M_1\left(2,-\dfrac{2}{3}\right)$ екстремум не існує;

h) $z_{\min} = z\left(2,1\right) = -28,$ $z_{\max} = z\left(-2,-1\right) = 28,$ в точках $M_3\left(1,2\right)$ та $M_4\left(-1,-2\right)$ функція не має екстремумів.

6. a) $z_{\min} = z\left(2,2\right) = 4,$ $z_{\max} = z\left(-2,-2\right) = -4;$

b) $z_{\min} = z\left(1,1\right) = 2;$ c) $z_{\min} = z\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{19}{4};$

d) $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{4},0\right) = 0,$ $z_{\max} = z\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27};$

e) $u_{\min} = u\left(-4,-2,4\right) = -18,$ $u_{\max} = u\left(4,2,-4\right) = 18.$

7. a) $\max\limits_D z = z\left(0,1\right) = 3,$ $\min\limits_D z = z\left(0,0\right) = 1;$

b) $\max\limits_D z = z\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9},$ $\min\limits_D z = z\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}.$

8. a) $y = \dfrac{3}{5}x + 9;$ b) $y = 0,8x - 1,27;$ c) $y = 0,7x + 1;$ d) $y = 0,8x + 1.$

9. a) $V'_r = 40\pi\left(r + h\right),$ $V'_h = 40\pi r;$

b) $y'_T = CV^{1/3},$ $y'_{T_0} = -CV^{1/3},$ $y'_V = \dfrac{C}{3}\cdot\left(T - T_0\right)\cdot V^{-2/3};$

c) $\eta_{P_A}=\dfrac{\partial X_A}{\partial P_A}:\dfrac{X_A}{P_A},\ \ \eta_{P_B}=\dfrac{\partial X_A}{\partial P_B}:\dfrac{X_A}{P_B};$

d) A та B конкурентні тому, що $\dfrac{\partial X_A}{\partial P_B}>0,\ \ \dfrac{\partial X_B}{\partial P_A}>0;$

e) $P'_x=C\left(1-a\right)\cdot K^a\cdot x^{-a},\ \ P'_K=Cx^{1-a}\cdot a\cdot K^{a-1}.$

10. a) $x=50,\ \ y=75;$ b) $x=0,\ \ y=35;$

c) $x=\dfrac{109}{2},\ \ y=53,\ \ V_{опт.}=3\ 896\ 250$ гривень;

d) $p_1=20,\ \ p_2=50,\ \ P_{опт.}=700\ 000$ гривень;

e) $x=4,\ \ y=4,\ \ P_{опт.}=44\ 000$ гривень.

11. a) $y=12x+4800;$ b) $y=2{,}5x+22;$ c) $y=0{,}001x^2-0{,}1x+2{,}5.$

Частина 10

Розділ 10.4

1. a) $5x-3\cos x-2\sin x+C,$ b) $3\ln|x|+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^{-2}+\dfrac{2}{3}x^{2/3}+C;$

c) $\dfrac{4}{5}x^{5/4}-\dfrac{24}{17}x^{17/12}-\dfrac{4}{3}x^{3/4}+C;$ d) $\dfrac{2^x}{\ln 2}+\dfrac{3^x}{\ln 3}-8e^x+C;$

e) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}-e^x;$ f) $\ln 3\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\ln|x|+C;$

g) $x^3-x+3x^2-2\ln|x|+C.$

2. a) $\dfrac{1}{3}e^{3x-1};$ b) $-\dfrac{\cos 2x}{2};$ c) $\dfrac{1}{4}\dfrac{2^{4x+6}}{\ln 2}+C;$ d) $-3\left(x+5\right)^{-1/3}+C;$

e) $\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{3x+1}{2}+C;$ f) $\dfrac{1}{7}\ln|7x-1|+C.$

3. a) $\frac{\sin^3 x}{3}+C;$ b) $\ln\left|x^2+x-6\right|+C;$ c) $\frac{-1}{\ln|x|}+C;$

d) $-\frac{\left(x^2+7x+3\right)^{-3}}{3}+C;$ e) $\frac{-1}{2\left(x^2+3x+1\right)^2}+C;$

f) $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}+C;$ g) $\frac{1}{2}\ln^2|2x|+C.$

4. a) $\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x+C;$ b) $\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+C;$

c) $\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{\ln^2 3}+C;$ d) $-e^{-x}\left(x+1\right)+C;$

e) $-3x\cos\frac{x}{3}+9\sin\frac{x}{3}+C;$ f) $e^x\left(x^2-2x+2\right);$

g) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.$

5. a) $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C;$ b) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^{2-1}}}{x}\right|+C;$

c) $\ln\left|\frac{(x-3)^{17/3}}{x^{1/6}(x-2)^{7/2}}\right|+C;$ d) $\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right|+C;$

g) $\ln\left|\frac{(x-1)^{5/3}(x-2)^8}{(2x+1)^{1/6}}\right|+\frac{x^3}{3}+x^2+4x+C.$

6. a) $D(x)=80x-0{,}02x^2,\ \ p=80-0{,}02x;\ \ \frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4};$

b) $V(x)=100x-0{,}02x^2,\ \ V(1000)=12\cdot 10^4;$

c) $D(x)=6x-0{,}015x^2-420;\ \ D(125)=95625$ гривень;

d) $V(x)=\dfrac{\left(x^2+360\right)^{3/2}}{3000}+143141;$

e) $V(t)=3t+\dfrac{t^2}{4}+60;\ \ S(t)=\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{t^3}{12}+60t.$

Частина 11

Розділ 11.6

1. a) $0;$ b) $12;$ c) $\dfrac{13}{2};$ d) $-2\ln 2;$ e) $\dfrac{3}{2};$

f) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right);$ g) $1-2e^{-1};$ h) $\dfrac{3}{4}e^4\ \ \dfrac{1}{4}.$

2. a) 9; b) 3; c) $\dfrac{7}{8};$ d) 2.

3. a) $\dfrac{13}{6};$ b) $\dfrac{1}{3};$ c) $e-\dfrac{4}{3};$ d) $\dfrac{8}{3};$ e) $\dfrac{1}{12};$ f) $\dfrac{614}{3}.$

4. a) 0,8862; b) 0,88.

5. a) $\ln\dfrac{11}{3}\approx 1{,}299;$ b) $0{,}89.$

6. a) $\dfrac{e^x\ln x}{1+x^2};$ b) $0.$

7. a) $4{,}8\%,\ \ L=\dfrac{19}{60};$ b) $4{,}96\%;\ 0{,}313.$

8. a) 9 років, 36 млн. гривень; b) 8 років; 16 млн. гривень.

9. a) $P_1=61{,}47,\ \ P_2=66{,}42.$ Друга стратегія краще.

b) $P_1=5{,}976,\ \ P_2=7{,}535.$ Друга стратегія краще.

10. a) $6{,}321c$; b) $7{,}871c$; c) $7{,}87c$.

11. a) розбіжний; b) $\dfrac{\pi}{2}$.

Частина 12

Розділ 12.8

1. a) $y = C(x+1)e^{-x}$; b) $y = \pm\sqrt{\left(\dfrac{x}{c}\right)^2 - 1}$; c) $y = 2 + C(x+1)$;

d) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = C$; e) $\arcsin x - \arcsin y = C$;

f) $y = \dfrac{C}{x+1} - 1$; g) $\operatorname{arctg}\left(\ln\left|\cos x\right|\right)$.

2. a) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$; b) $y = \sin x \cdot (C + x)$;

c) $y = x^2\left(C + x^2\right)$; d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}\left(C + x^3 + 3x\right)$;

e) $y = e^x(C + x)$; f) $y = x(C + \ln x)$; g) $y = \dfrac{1}{x^3}\cdot(C + \ln x)$.

3. a) $y = x\ln Cx$; b) $y = Cx^2$; c) $y = \dfrac{2x}{1-(Cx)^2}$; d) $y = \dfrac{Cx^2}{1-Cx}$;

e) $y = x\arcsin Cx$; f) $y = \dfrac{-x}{\ln Cx}$; g) $y = x\cdot\operatorname{arctg}\left(\ln\dfrac{1}{Cx}\right)$.

4. a) $y = \dfrac{1}{x\left(C + \dfrac{2}{3}x^2\right)^{\frac{1}{3}}}$; b) $y = \dfrac{1}{x(C+x)}$; c) $y = \dfrac{2}{x\left(2C - \ln^2 x\right)}$;

d) $y = \dfrac{2x}{2C - x^2}$; e) $y = \left[C\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1\right]^2$.

5. a) $y=(x-2)^3$; b) $y=\frac{1}{x}\left(1-e+e^x\right)$; c) $y=2+C\cdot\cos x$;

d) $y=x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(\ln x)\right)$; e) $y=\frac{1}{4}\left(9x^5-5x\right)$.

6. a) $y=-\left(C_1\cos x+C_2-x\right)$; b) $y=\frac{1}{4}\left(\sqrt{C_1}x+C_2\right)$;

c) $y=C_1\ln x-\frac{x^3}{6}+C_2$; d) $y=C_1\frac{x^2}{2}+e^x(x-1)+C_2$;

e) $y=\frac{-1}{C_1^2\left(x+C_2\right)}$.

7. a) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$; b) $y=C_1e^x$; c) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$;

d) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$; e) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$;

f) $y=C_1e^{x/2}+C_2e^{-x}$.

8. a) $y=5\cdot10^7e^{-K(t+1990)}$, $y(2000)=5\cdot10^7e^{-K3990}$; b) $x=\frac{c}{\sqrt{p}}$;

c) $p=\frac{1}{\sqrt{x}}$; d) $p=10-\frac{x}{5}$; e) $t=20\ln 3$; f) $p=100-0{,}5x$;

g) 1) $10^4e^{0{,}05t}$; 2) $14{,}918{,}25$; 3) $13{,}86$ років;

h) $T=T_C-\left(T_C-T_0\right)e^{-kt}$.

Частина 13

Розділ 13.1

1. a) $a_n=\frac{1}{2n-1}$; b) $a_n=\frac{1}{2n}$; c) $a_n=\frac{1}{n^2}$;

d) $a_n = \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$; e) $a_n = \dfrac{2n}{3n+2}$.

2. Ряд розбіжностей у випадках: a), c), d). Необхідна умова виконується у випадках: b), e), f).

3. Розбіжні ряди a) та c); збіжні ряди b) та d).

4. Збіжні ряди: a), b), e). Розбіжні ряди:c), d), f).

5. Ряди a), c), d), e) – збіжні. Ряд b) розбіжний.

6. Збіжні ряди: a), b) та d). Розбіжні ряди: c), e), f) та g).

7. Абсолютно збіжні ряди: b), c), d), та g). Збігаються неабсолютно ряди a), e) та f).

Розділ 13.2

1. a) $(-1,1)$; b) $[-3,3)$; c) $(-\infty,\infty)$; d) $[-1,1)$; e) $[-1,1]$; f) $(-\infty,\infty)$;

2. a) $-\ln|-1x|$; b) $\operatorname{arctg} x$; c) $\ln\sqrt[4]{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

d) $\ln\sqrt{1-x^2}$; e) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

3. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$, $(-\infty,\infty)$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $(-\infty,\infty)$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$, $(-\infty,\infty)$; d) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $(-\infty,\infty)$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $(-\infty,\infty)$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$, $(-3,3)$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{2^{n+1}}{n}x^n$, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

16. Словник ключових слів

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
Алгебра	Алгебра	Algebra
а. лінійна	а. линейная	a. linear
а. векторна	а. векторная	vector a.
Аналітична геометрія	Аналитическая геометрия	Analitic geometry
Асимптоти	Асимптоты	Asymptotes
Базис	Базис	Basis
Величина	Величина	Value
в. змінна	в. переменная	variable v.
Відокремлені	Разделенные	Divided
Відокремлювання	Разделять	Disintegrate
Відсоток	Процент	Per cent
Властивість	Свойство	Property
Визначник	Определитель	Determinant
Визначення	Определение	Determination
Використання	Использование	Usage, utilization
Витрати	Расходы	Consumption
Границя	Предел	Limit
Добуток	Произведение	Product
Додавання	Сложение	Addition
Доповнення	Дополнение	Adjunct, complement
Дослідження	Исследование	Research
Достатні	Достаточные	Enough
Дріб	Дробь	Fraction
Диференціальне числення	Дифференциальное исчисление	Differential calculus
Д. Рівняння	Д. Уравнения	D. Equation
Диференціювання	Дифференцирование	Differentiate
Екстремум	Экстремум	Extremum
Економічні задачі	Экономические задачи	Economical problem's
Залишковий член ряду	Остаточный член ряда	Remainder term
Замкнений	Замкнутый	Closed
Застосування	Применение	Application
Знакопочережний	Знакочередующийся	Alernating

Інтеграл	Интеграл	Integral
і. невизначений	и. неопределенный	i. antiderivative
і. визначений	и. определенный	i. definite
і. невласний	и. несобственный	improper i.
Інтервал	Интервал	Interval
Колінеарність	Коллинеарность	Collinearity
Компланарність	Компланарность	Complanarity
Комбінаторика	Комбинаторика	Theory of combination
Кут	Угол	Angle
Лінія	Линия	Line
л. пряма, крива	л. прямая, кривая	l. axis, curve
Математичний аналіз	Математический анализ	Mathematical analysis
Матриця	Матрица	Matrix
Межа	Граница	Boundary, border
Множення	Умножение	Multiplying
Множник	Множитель	Multiplier
Невизначеність	Неопределенность	Uncertainty
Неперервність	Непрерывность	Continuity
Обернена матриця	Обратная матрица	Reciprocal matrix
Область	Область	Domain, region
Обчислити	Вычислить	Determine, calculate
Опуклість	Выпуклость	Convex
Поверхня	Поверхность	Surface
Площина	Плоскость	Plane
Послідовність	Последовательность	Sequence
Похідна	Производная	Derivative
Правило	Правило	Rule
Прогресія	Прогрессия	Progression
Прибуток	Прибыль	Profit
Радіус збіжності	Радиус сходимости	Radius of convergence
Ранг матриці	Ранг матрицы	Rank of matrix
Рівняння	Уравнение	Equation
Розв'язок	Решение	Solution
Розклад	Разложение	Resolve
Розрив	Разрыв	Rupture, discontinuity
Ряди	Ряды	Rows, series
Угнутість	Вогнутость	Concavity
Функція	Функция	Function
Частинні похідні	Частные производные	Partial derivates

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

В.В. БАРКОВСЬКИЙ, Н.В. БАРКОВСЬКА

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

5-те видання

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Керівник видавничих проектів — *Б. А. Сладкевич*
Комп'ютерна верстка — *Є. А. Ткаченко*
Дизайн обкладинки — *Б. В. Борисов*

Підп. до друку 02.09.2009. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «PetersburgC». Друк офсетний.
Ум. друк.арк. 25,2. Наклад 600 прим.

Видавництво «Центр учбової літератури»
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA

Свідоцтво ДК № 2458 від 30.03.2006