МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**С. А. Кривошея, Н. В. Майко,
О. В. Моторна, Т. М. Прощенко**

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
завдання для самостійної роботи студентів

Частина 1

Навчально-методичний посібник

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ 2013

УДК 517.91/.93(075.8)
ББК 22.161.61я73
М33

Автори:
С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Прощенко

Рецензенти:
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. О. А. Бойчук
(Інститут математики НАН України),
д-р фіз.-мат. наук, проф. Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М. Драгоманова)
канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. І. Демків
(Національний університет "Львівська політехніка")

Рекомендовано до друку вченою радою радіофізичного факультету
(протокол № 2 від 15 жовтня 2013 року)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
14 жовтня 2013 року

М 33 **Математичний** аналіз: завдання для самостійної роботи студентів : навч.-метод. посіб. / С. А. Кривошея, Н. В. Майко, О. В. Моторна, Т. М. Прощенко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – Ч. 1 .– 323 с.

ISBN 978-966-439-689-6

Призначено допомогти студентам у їхній самостійній роботі над вивченням нормативного курсу "Математичний аналіз". Розділи (модулі) посібника відповідають основним темам курсу в першому семестрі. Додатки містять матеріали для підготовки до підсумкових модульних контрольних робіт та іспиту, а також приклади розв'язування задач і додаткові задачі. Викладено базові теоретичні відомості до кожного розділу, методичні поради. Наведено понад 1000 задач для самостійного розв'язування.

Для студентів радіофізичного та фізичного факультетів і викладачів, які керують самостійною роботою студентів.

УДК 517.91/.93(075.8)
ББК 22.161.61я73

ISBN 978-966-439-689-6

ЗМІСТ

ВСТУП

У курсі математичного аналізу вивчають функції та їх властивості за допомогою операцій диференціювання та інтегрування, які ґрунтуються на операції граничного переходу.

Функція (*відображення*) – це закон (алгоритм, правило), згідно з яким кожному елементу $x \in X$ поставлений у відповідність один (цілком визначений для даного x) елемент $y \in Y$. Саму функцію позначають якою-небудь буквою, наприклад, f, а множини $X = D(f)$ і $Y = E(f)$ *називають областю визначення* і *областю значень* функції f відповідно. Таким чином, записи

$$X \xrightarrow{f} Y, \quad f : X \to Y, \quad y = f(x) \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

є рівносильними, причому y називають *значенням функції* f *у точці* x або "залежною змінною" на відміну від "незалежної змінної (аргументу) x".

Залежно від структури множин X і Y вживають таку термінологію. Якщо $x \in X \subset \mathbb{R}$, $y \in Y \subset \mathbb{R}$, то f називають *дійсною скалярною функцією скалярного аргументу* ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) (рис. 1).

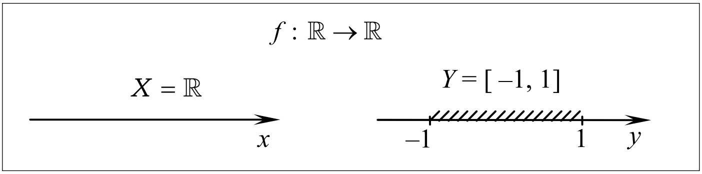


Рис. 1. Скалярна функція скалярного аргументу

Якщо $x = \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$), $y \in Y \subset \mathbb{R}$, то кажуть, що f *– дійсна скалярна функція векторного аргументу* ($f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$) (рис. 2). Якщо

$$x = \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X \subset \mathbb{R}^m,$$

$$y = \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y \subset \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2),$$

то f називають *дійсною векторною функцією векторного аргументу* ($f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$) (рис. 3).

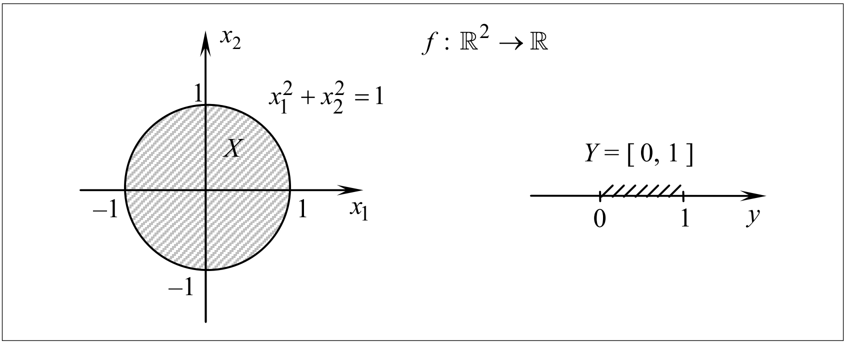


Рис. 2. Скалярна функція векторного аргументу

На рис. 1–3 відповідно зображені множини X і Y для функцій, заданих співвідношеннями:

$$1)\ y=\sin x;\quad 2)\ y=\sqrt{1-(x_1{}^2+x_2{}^2)^2};\quad 3)\ \begin{cases} y_1=\ln^2(x_1+x_2), \\ y_2=\ln^2(x_1-x_2). \end{cases}$$

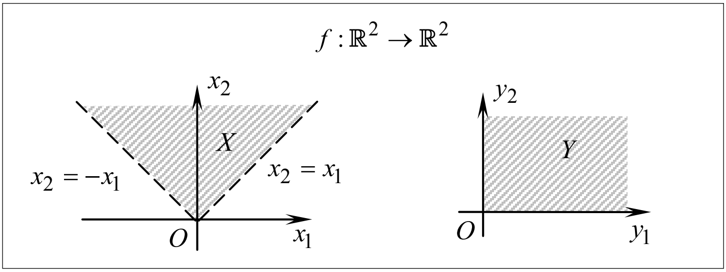


Рис. 3. Векторна функція векторного аргументу

Розглянемо основні множини дійсних чисел та їх властивості:

1) $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ – множина натуральних чисел;

2) $\mathbb{N}_-=\{\ldots,-3,-2,-1\}$ – множина чисел, протилежних натуральним;

3) $\mathbb{Z}=\mathbb{N}_-\cup\{0\}\cup\mathbb{N}$ – множина цілих чисел;

4) $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел (число r називають *раціональним*, якщо його можна подати у вигляді відношення двох цілих чисел: $r = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0)$);

5) $\mathbb{I}$ – множина всіх ірраціональних чисел (число μ називають *ірраціональним*, якщо його не можна подати у вигляді відношення двох цілих чисел);

6) $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup \mathbb{I}$ – множина дійсних чисел.

Як відомо, кожне раціональне число можна подати у вигляді періодичного десяткового дробу (скінченного або нескінченного). Наприклад, $\frac{1}{4} = 0{,}25 \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{3} = 0{,}(3) \in \mathbb{Q}$; $5{,}81(35) \in \mathbb{Q}$. Будь-яке ірраціональне число може бути представлене нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Наприклад, число $\mu = 3{,}10110111011110...$ є ірраціональним. Найвідомішими представниками множини ірраціональних чисел є число Ейлера $e = 2{,}7182818284590...$ і число Піфагора $\pi = 3{,}1415926...$. Таким чином, будь-яке дійсне число можна представити десятковим дробом і, навпаки, кожний десятковий дріб є дійсним числом.

Нехай $\mu = m_0, m_1 m_2 ... m_n ... \in \mathbb{I}$ – десятковий запис ірраціонального числа μ. Розглянемо послідовність $\{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ раціональних чисел $r_n = m_0, m_1 m_2 ... m_n$. Оскільки

$$|\mu - r_n| = 0,\underbrace{00...0}_{n} m_{n+1} m_{n+2} ... < 10^{-n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

то це означає, що кожне ірраціональне число з будь-якою точністю можна наблизити за допомогою послідовності раціональних чисел. У цьому випадку кажуть, що число μ є *границею* послідовності $\{r_n\}$ і пишуть $\mu = \lim\limits_{n \to \infty} r_n$.

Множини $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$ замкнені відносно операцій додавання, віднімання, множення і ділення: якщо $x, y \in \mathbb{Q}$ ($\in \mathbb{R}$), то $x \pm y \in \mathbb{Q}$ ($\in \mathbb{R}$), $xy \in \mathbb{Q}$ ($\in \mathbb{R}$), $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ ($\in \mathbb{R}$) ($y \neq 0$), тобто утворюють так звані *числові поля*. Зазначимо деякі важливі в л а с т и в о с т і м н о ж и н и $\mathbb{R}$.

1. Множина $\mathbb{R}$ *лінійно впорядкована*, тобто

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \le y \vee y \le x .$$

2. Множина $\mathbb{R}$ *щільна*, тобто $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ($x < y$) існує хоча б одне, а отже, і безліч чисел $z \in \mathbb{R}$ таких, що $x < z < y$.

3. В $\mathbb{R}$ виконується *аксіома Архімеда*, тобто $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ таке, що $n > x$.

4. Множина $\mathbb{R}$ *повна*, тобто якщо $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ ($X \ne \varnothing$, $Y \ne \varnothing$) і $\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; x \le y$, то знайдеться хоча б одне число $c \in \mathbb{R}$ таке, що $\forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; x \le z \le y$.

Виявляється, що множина раціональних чисел має властивості 1–3, але не є повною, тобто для неї не виконується властивість 4. Наприклад, не існує числа $c \in \mathbb{Q}$ такого, що

$$x \le c \le y ,$$

$$\forall x \in X = \{r \in \mathbb{Q} : \; r \le 0 \vee r > 0 \wedge r^2 < 2\} ,$$

$$\forall y \in Y = \{r \in \mathbb{Q} : \; r > 0 \wedge r^2 > 2\} .$$

Нагадаємо класифікацію скалярних функцій скалярного аргументу. Функції: *степеневу*, *показникову*, *логарифмічну*, *тригонометричні* і *обернені тригонометричні* – називають *основними елементарними функціями*.

Якщо $u : X \to U$, $f : U \to Y$, то можна утворити нову функцію $F = f \circ u : X \to Y$, яка діє за правилом (рис. 4)

$$y = F(x) = f\big(u(x)\big) \quad (x \in X, \; y \in Y) .$$

Функцію F називають *суперпозицією* функцій u і f , або *складною* функцією (f називають також "зовнішньою" функцією, а u – "внутрішньою"). Наприклад, із функцій $u = x^2$, $y = \sin u$ можна утворити суперпозицію

$$y = \sin x^2 \quad \big(\mathbb{R} \to [-1;1]\big) ,$$

а з функцій $u = \sin x$, $y = u^2$ – суперпозицію

$$y = \sin^2 x \quad \big(\mathbb{R} \to [0;1]\big) .$$

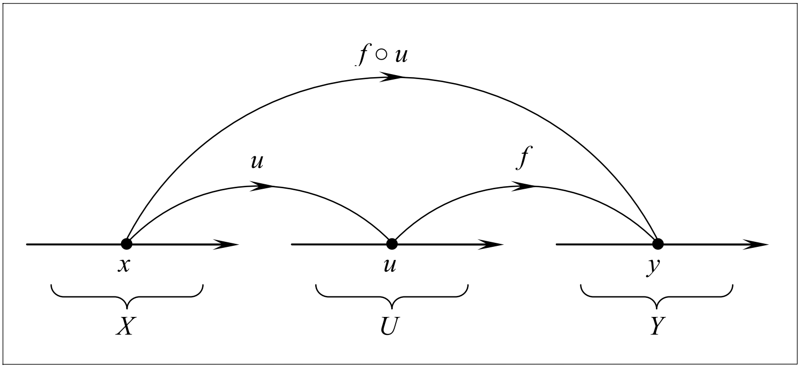


Рис. 4. Суперпозиція функцій

Функцію називають *елементарною*, якщо її можна утворити з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення, ділення та скінченного числа суперпозицій. У супротивному разі функцію називають *неелементарною*. Неелементарними є, наприклад, такі функції:

1) $n! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n \quad (n > 1), \quad 0! \overset{\text{def}}{=} 1, \quad 1! \overset{\text{def}}{=} 1$

(*факторіальна функція*: $\{0\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) (рис. 5);

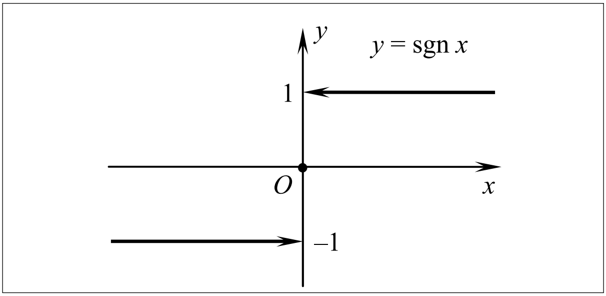


Рис. 5. Функція "сигнум"

2) $(2n)!! \overset{\text{def}}{=} 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n, \quad (2n-1)!! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

(*функції подвійного факторіалу*: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$);

3) $D(x) \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{l} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{I}, \end{array} \right.$

(*функція Діріхле*: $\mathbb{R} \to \{0,1\}$);

4) $\operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{r} 1, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \\ -1, \text{ якщо } x < 0, \end{array} \right.$

(*сигнум* (*знак*) x: $\mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$) (рис. 5);

5) $h(x) \overset{\text{def}}{=} \left[\begin{array}{l} 1, \text{ якщо } x \geq 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0, \end{array} \right.$

(*одинична функція Хевісайда*: $\mathbb{R} \to \{0,1\}$) (рис. 6);

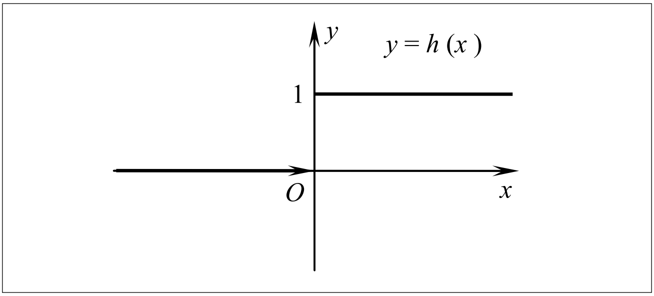


Рис. 6. Функція Хевісайда

6) $[x] \overset{\text{def}}{=} k$, якщо $k \leq x < k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$

(*антьє* (*ціла частина*) числа x: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$) (рис. 7);

7) $\{x\} \overset{\text{def}}{=} x - [x]$

(*дробова частина* x: $\mathbb{R} \to [0,1)$) (рис. 8).

Існує значна кількість важливих неелементарних, або, як їх іще називають, *спеціальних*, функцій. Вони широко використовуються в математиці, фізиці, механіці, техніці тощо. Це, наприклад, гамма- і бета-функції Ейлера, функції Бесселя, гіпергеометричні функції та багато інших.

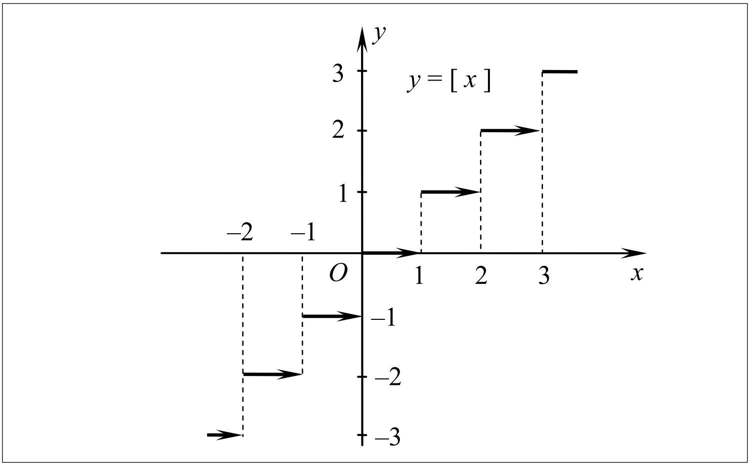


Рис. 7. Функція "антьє"

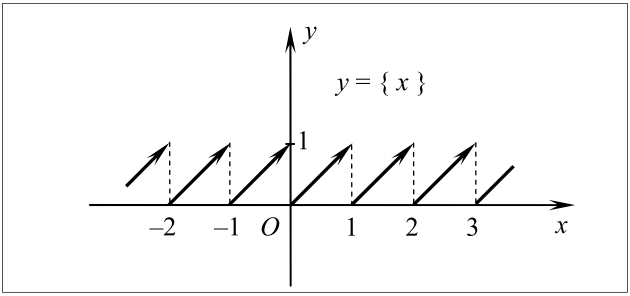


Рис. 8. Функція "дробова частина"

У курсі математичного аналізу вивчають тільки дійсні функції дійсного скалярного ($x \in \mathbb{R}$) або векторного ($\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$) аргументів. Однак з метою спрощення різноманітних математичних перетворень часто буває зручно використовувати комплексні числа і деякі комплексні функції, кажучи про "перехід у комплексну область". За влучним висловлюванням французького математика Ж. Адамара, найкоротший шлях між двома істинами в дійсній області часто пролягає через комплексну область.

Розглянемо основні положення елементарної теорії комплексних чисел. Множина $\mathbb{C}$ усіх комплексних чисел є розширенням поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Цього розширення досягають за допомогою введення нового числа $i \notin \mathbb{R}$ такого, що $i^2 = -1$ (число i називають *уявною одиницею*) і нових (*комплексних*) чисел – буквених двочленів типу $z = x + iy$ ($x \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ – *дійсна*, а $y \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ – *уявна* частини комплексного числа z). Числа $z = x + iy$ і $\overline{z} = x - iy$ ($\operatorname{Im} \overline{z} = -\operatorname{Im} z$) називають *комплексно-спряженими*. Для комплексних чисел (к. ч.) виконуються такі властивості (а к с і о м и):

1) $x + i0 \overset{\text{def}}{=} x$ (звідси випливає, що $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$);

$0 + iy \overset{\text{def}}{=} iy$ (числа типу iy називаються *суто уявними*).

2) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$ (*аксіома рівності* к. ч.);

3) арифметичні дії над к. ч. виконуються за тими самими правилами, що й над буквеними двочленами з урахуванням рівності $i^2 = -1$ (*аксіома арифметичних дій*).

З аксіоми 3 випливає, що для $x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$, $x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ маємо

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \in \mathbb{C},$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \in \mathbb{C} \quad (z_2 \neq 0).$$

Тому множина $\mathbb{C}$, як і множина $\mathbb{R}$, утворює числове поле. Легко перевірити правильність таких рівностей:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \ (z_2 \neq 0),$$
$$\overline{x} = x \ (x \in \mathbb{R}), \quad \overline{iy} = -iy \ (x \in \mathbb{R}),$$
$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Запис к. ч. у формі $z = x + iy$ називають *алгебраїчною формою* к. ч. z.

Поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел має багато цікавих і важливих властивостей, які використовуються в різноманітних галузях математики, механіки, фізики, техніки. Наприклад, квадратні рівняння $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ в $\mathbb{C}$ завжди мають корені, причому у випадку від'ємного дискримінанта $D = p^2 - 4q = -\omega^2 < 0$ ці корені комплексно-спряжені:

$$x_1 = \frac{-p + i\omega}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - i\omega}{2} = \overline{x}_1 .$$

Більше того, як стверджує *теорема Гаусса* (*основна теорема алгебри*) , кожне алгебраїчне рівняння n-го степеня

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N},\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$$

у полі $\mathbb{C}$ комплексних чисел завжди має принаймні один корінь (а з урахуванням кратностей цих коренів рівно n).

На відміну від множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, множина $\mathbb{C}$ не є лінійно впорядкованою. Поняття "більше" або "менше" у $\mathbb{C}$ не вводяться. Наприклад, запис типу $5 + 100i > 1 + i$ не має смислу.

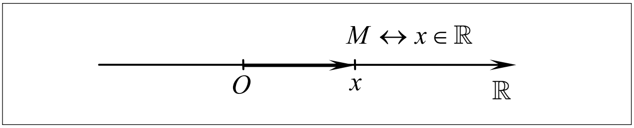


Рис. 9. Дійсні числа як точки числової осі

Подібно до того, як елементи множини $\mathbb{R}$ зображають точками на прямій (*числовій осі*) (рис. 9), елементи множини $\mathbb{C}$ зображають точками на так званій *комплексній* (*гауссовій*) *числовій площині*, яку позначають

$$z \quad \text{або} \quad \mathbb{C} \quad .$$

Взаємно-однозначна відповідність між комплексними числами і точками гауссової площини задається так:

$$z = x + iy \leftrightarrow M(x, y)$$

(рис. 10), причому точку M називають *афіксом* числа z, а саме число $z \in \mathbb{C}$ – точкою на комплексній площині. Комплексне число z зображають також радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ (вектором, який іде з початку координат у точку M).

Оскільки дійсні числа ($z = x \in \mathbb{R}$) зображаються точками осі Ox , а суто уявні ($z = iy$) – точками осі Oy , то вісь Ox називають *дійсною*, а вісь Oy – *уявною* осями комплексної числової площини.

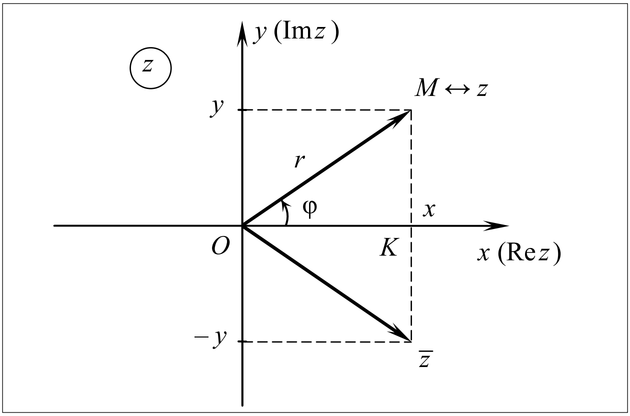


Рис. 10. Комплексна площина

Довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{OM}$ називають *модулем* к. ч. z :

$$|z| \overset{\text{def}}{=} |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Очевидно, $|z| = |\overline{z}|$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2 = x^2 + y^2$.

Як випливає з аксіоми 3, додавання і віднімання к. ч. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за правилами цих дій над векторами $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1\}$, $\overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2\}$, які їх зображають (рис. 11). Із рис. 11 видно, що величина $|z_1 - z_2|$ має геометричний зміст *відстані* між к. ч. z_1 і z_2 на комплексній числовій площині, причому

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big| .$$

Кут φ між додатним напрямом дійсної осі і вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 10) називають *аргументом* к. ч. z і позначають символом $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Очевидно, $\operatorname{Arg} z$ визначений (при $z \ne 0$) з точністю до

$2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Аргумент числа $z = 0$ невизначений. Якщо позначити $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, то, як видно з ΔOKM,

$$x = \mathrm{Re}\, z = r\cos\varphi, \quad y = \mathrm{Im}\, z = r\sin\varphi.$$

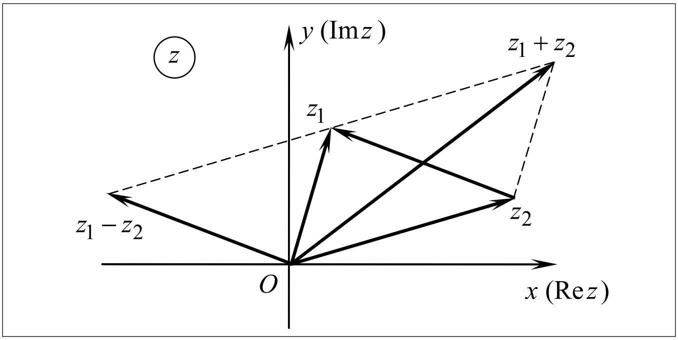


Рис. 11. Додавання і віднімання к. ч.

Тому к. ч. z можна записати у формі $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, яку називають *тригонометричною формою* к. ч. z. Щоб уникнути неоднозначності у визначенні $\mathrm{Arg}\, z$, розглядають так зване *головне значення аргументу* $\arg z$, так що

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

При цьому $\arg z$ вибирають або в межах $-\pi < \arg z \le \pi$, або в межах $0 \le \arg z < 2\pi$. Якщо $-\pi < \arg z \le \pi$, то:

1) $\arg \overline{z} = -\arg z$;

2) $\arg x = 0 \quad (x > 0)$, $\quad \arg x = \pi \quad (x < 0)$;

3) $\arg(iy) = \dfrac{\pi}{2} \quad (y > 0)$, $\quad \arg(iy) = -\dfrac{\pi}{2} \quad (y < 0)$;

4) $\arg z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} \quad (x > 0, y < 0$ або $x > 0, y > 0)$;

5) $\arg z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi \quad (x < 0, y < 0)$;

6) $\arg z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi \quad (x < 0, y > 0)$.

Наприклад (див. рис. 12),

$$3 = 3(\cos 0 + i\sin 0), \quad -3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi),$$

$$3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \quad -3i = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Тригонометрична форма к. ч. дуже зручна для виконання дій множення, ділення і піднесення до цілого степеня. Справді,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right),$$

так що $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$, $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$.

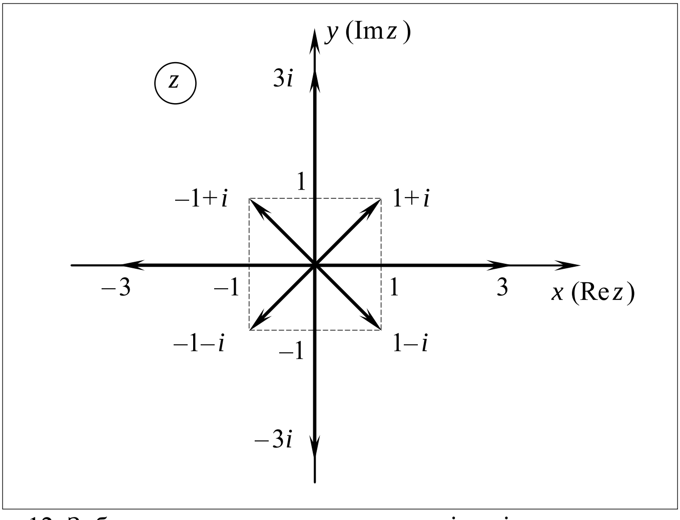


Рис. 12. Зображення деяких к. ч. точками і радіусами-векторами комплексної площини

Аналогічно

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2 \quad (z_2 \neq 0).$$

Цілі степені к. ч. $z \in \mathbb{C}$ визначені так:

$$z^0 \overset{\text{def}}{=} 1 \quad (z \neq 0), \quad z^1 \overset{\text{def}}{=} z,$$

$$z^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ \text{множників}} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad z^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{z^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Оскільки

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

і т. д., то методом математичної індукції можна показати, що виконується рівність

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

яку називають *формулою Муавра*.

Формула Муавра дає можливість добути корінь n-го степеня ($n \in \mathbb{N}$) з к. ч. z. Справді, нехай $w=\sqrt[n]{z}$ ($n \in \mathbb{N}$), де $w=\rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ – невідоме число, а $z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – відоме число. Тоді $w^n \overset{\text{def}}{=} z$, звідки за формулою Муавра (1) маємо

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тому $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Отже, $\rho = \sqrt[n]{r} \geq 0$ – арифметичне значення кореня, $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ і

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Унаслідок 2π-періодичності тригонометричних функцій $\cos$ і $\sin$, у формулі (2) для k достатньо взяти значення від 0 до $n-1$. Таким чином, із формули (2) випливає, що $\sqrt[n]{z}$ ($n \in \mathbb{N}$) має (при $z \neq 0$) рівно n різних значень. Наприклад, $\sqrt[3]{1}$ у множині комплексних чисел $\mathbb{C}$ має рівно три різних значення (рис. 13):

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

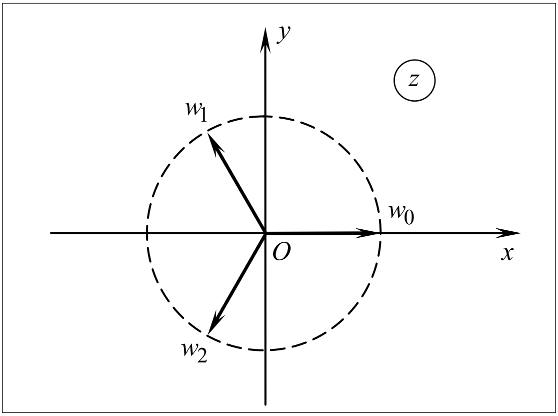


Рис. 13. Значення $\sqrt[3]{1}$

За допомогою формули Муавра (1) і формули бінома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad \left(n \in \mathbb{N},\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) \tag{3}$$

можна дістати такі формули:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi, \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

і т. п., тобто виразити тригонометричні функції кута $n\varphi$ через тригонометричні функції кута φ. Наприклад,

$$\sin 5\varphi = \operatorname{Im}(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) = \operatorname{Im}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 =$$

$$= \operatorname{Im}(\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi + 10i^2\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+10i^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5i^4\cos\varphi\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi) =$$

$$= \operatorname{Im}(\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$$

$$-10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi) =$$

$$= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

Розглянемо ще одну дуже важливу формулу теорії комплексних чисел:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \quad (\varphi\in\mathbb{R}), \tag{4}$$

а також її наслідки:

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}). \tag{5}$$

Рівності (4) і (5) називають *формулами Ейлера*. Щоб дістати формулу Ейлера (4), використаємо граничний перехід в області комплексних чисел

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z_0 \end{cases} \quad (n\in\mathbb{N})$$

та відому граничну рівність (*другу визначну границю*):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha} \quad (n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}). \tag{6}$$

За означенням покладемо

$$e^{i\varphi}=\lim_{n\to\infty}\left(1+i\frac{\varphi}{n}\right)^n \quad (n\in\mathbb{N},\ \varphi\in\mathbb{R}). \tag{7}$$

Границю в правій частині рівності (7) знайдемо, використовуючи формулу Муавра (1). Маємо

$$r_n=\left|1+i\frac{\varphi}{n}\right|=\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{1/2},$$

$$\varphi_n=\arg\left(1+i\frac{\varphi}{n}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}\sim\frac{\varphi}{n} \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

$$\left(1+i\frac{\varphi}{n}\right)^n = r_n^n\left(\cos(n\varphi_n)+i\sin(n\varphi_n)\right).$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} r_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}=(e^{\varphi^2})^0=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(n\frac{\varphi}{n}\right)=\cos\varphi,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n\varphi_n) = \sin\varphi,$$

то $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R})$.

Комплексна функція дійсного аргументу $e^{i\varphi}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ (*експоненціал* $i\varphi$) разом із такими "звичайними" властивостями показникової функції, як:

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad e^{i\varphi_1} : e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

має "незвичні" властивості, як-от:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad |e^{i\varphi}| = 1,$$

$$e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}, \quad e^{i(\varphi+k\pi)} = (-1)^k e^{i\varphi} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$(e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n \in \mathbb{Z}).$$

Прикметно, що перші дві рівності містять найважливіші сталі математики: 1, π, e, i.

За допомогою функції $e^{i\varphi}$ утворюють *показникову форму* комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Наприклад,

$$3 = 3e^{i0}, \quad -3 = 3e^{i\pi}, \quad 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad -1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Як і тригонометрична, показникова форма к. ч. особливо зручна для виконання дій множення, ділення, піднесення до цілого степеня і добування кореня n-го степеня:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

За допомогою формул Ейлера (4), (5) і формули бінома Ньютона (3) можна суто алгебраїчним способом дістати формули типу

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi), \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi),$$

$$\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi$$

і т. п., тобто "знижувати" степені тригонометричних виразів. Наприклад,

$$\sin^5\varphi = \left(\frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{2^5 i^5}(e^{5i\varphi} - 5e^{4i\varphi}e^{-i\varphi} + 10e^{3i\varphi}e^{-2i\varphi} -$$

$$-10e^{2i\varphi}e^{-3i\varphi} + 5e^{i\varphi}e^{-4i\varphi} - e^{-5i\varphi}) =$$

$$= \frac{1}{32i}\left((e^{5i\varphi} - e^{-5i\varphi}) - 5(e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}) + 10(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\right) =$$

$$= \frac{1}{32i}\left(2i\sin 5\varphi - 10i\sin 3\varphi + 20i\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 5\varphi - \frac{5}{16}\sin 3\varphi + \frac{5}{8}\sin\varphi .$$

Формула Ейлера (4) та її узагальнення

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (z = x+iy \in \mathbb{C}) \tag{8}$$

дають можливість розглядати *основні елементарні функції комплексного аргументу* $z = x+iy \in \mathbb{C}$:

1) $\cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\quad \sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$;

2) $\operatorname{tg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z}$, $\quad \operatorname{ctg} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\cos z}{\sin z}$, $\quad \sec z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\cos z}$, $\quad \operatorname{cosec} z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin z}$;

3) $\operatorname{Ln} z \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$;

4) $z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \operatorname{Ln} z} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$;

5) $\operatorname{Arcsin} z \overset{\text{def}}{=} -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$;

6) $\mathrm{Arccos}\, z \overset{\text{def}}{=} -i\,\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$;

7) $\mathrm{Arctg}\, z \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} i\,\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$.

Формули 3), 5), 6), 7) можна отримати, використовуючи означення логарифма й обернених тригонометричних функцій ($w=u+iv$):

3) $w=\mathrm{Ln}\, z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} e^w=z$;

5) $w=\mathrm{Arcsin}\, z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sin w=z$;

6) $w=\mathrm{Arccos}\, z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \cos w=z$;

7) $w=\mathrm{Arctg}\, z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{tg}\, w=z$.

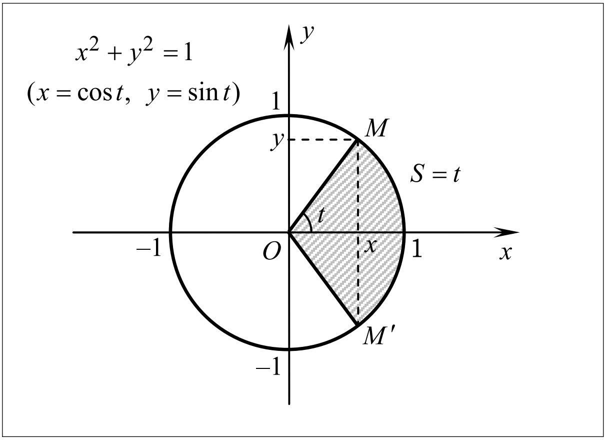


Рис. 14. Тригонометричні (кругові) функції

Якщо у формулах для функцій $\cos z$, $\sin z$ замість z покласти iz, то отримаємо

$$\cos iz=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}), \quad \sin iz=i\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}).$$

Функції

$$\mathrm{ch}\, z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^z+e^{-z}), \quad \mathrm{sh}\, z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),$$

а також

$$\operatorname{th} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z \overset{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

називаються *гіперболічними функціями*. Таким чином,

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz,$$
$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z,$$
$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z.$$

Тригонометричні функції $x = \cos t$, $y = \sin t$ називають також *круговими функціями*, оскільки система параметричних рівнянь $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(t \in [0, 2\pi])$ на площині задає коло одиничного радіуса: $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 14).

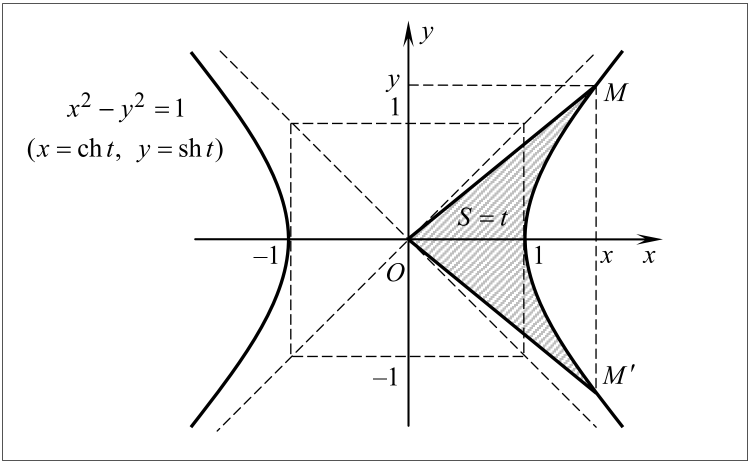


Рис. 15. Гіперболічні функції

Легко перевірити, що $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Тому система параметричних рівнянь $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ $(t \in \mathbb{R})$ задає на площині рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 15).

Використовуючи означення *обернених гіперболічних функцій*:

$$w = \operatorname{Arsh} x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \operatorname{sh} w = x,$$
$$w = \operatorname{Arch} x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \operatorname{ch} w = x,$$

$$w = \operatorname{Arth} x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \operatorname{th} w = x ,$$

можна показати, що

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} .$$

Букви Ar у позначенні обернених гіперболічних функцій походять від латинського слова "area" ("площа"). Тому, наприклад, символ $\operatorname{Arsh} x$ можна прочитати так: "площа, гіперболічний синус якої дорівнює x" на відміну від символу $\operatorname{Arcsin} x$: "дуга (арка, кут), синус якої дорівнює x".

РОЗДІЛ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ СКАЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ

- Границя числової послідовності та границя функції; основні теореми про границі; важливі границі та їх наслідки [1, § 1–5 гл. 2, § 1 гл. 3], [3, п. 2.1–2.5, 3.1–3.4, 3.7], [4, § 1–4 гл. 3, § 1, 2, 6 гл. 4, § 1, 2 гл. 8], [5, § 4, 5, п. 8.1], [7, § 4, 6 гл. 1].
- Асимптотична символіка (о-символіка) [1, § 2 гл. 3], [3, п. 3.8], [4, с. 102–105], [5, § 8], [7, с. 128–131].
- Неперервність функції в точці; рівномірна неперервність; основні теореми; класифікація точок розриву [1, § 3, 4 гл. 3], [3, п. 3.5, 3.6], [4, § 3, 8 гл. 4, § 3–6 гл. 8], [5, п. 5.5, 5.9, 5.13, § 6], [7, § 7].
- Прямолінійні асимптоти графіка функції [1, п. 4.6 § 4 гл. 4], [4, § 5 гл. 9], [5, п. 14.4], [7, § 9 гл. 4].
- Диференційовність функції в точці, похідна і диференціал функції [1, § 1, 3 гл. 4], [3, п. 4.1], [4, § 1, 2, 9 гл. 5], [5, § 9], [7, § 1, 2].
- Правила диференціювання явних функцій [1, § 1 гл. 4], [3, п. 4.2, 4.3], [4, § 3, 7, 9 гл. 5], [5, п. 9.5, 9.7], [7, п. 1.5 § 1 гл. 4].
- Правило диференціювання неявно заданих функцій [3, п. 4.8], [5, п. 9.6].
- Правило диференціювання параметрично заданих функцій [3, п. 4.8], [4, § 11 гл. 5], [5, п. 10.3], [7, п. 2.4 § 2 гл. 4].
- Теореми про середнє значення в диференціальному численні (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші) [1, § 2 гл. 4], [3, п. 4.4], [4, § 8–11 гл. 8], [5, § 11], [7, § 3 гл. 4].
- Правила Лопіталя [1, п. 4.2 § 4 гл. 4], [3, п. 4.5], [4, § 12 гл. 8], [5, § 12], [7, § 6 гл. 4].
- Формула малих приростів і наближена формула Тейлора; форми залишкового члена формули Тейлора [1, п. 4.1 § 4 гл. 4], [3, п. 4.6], [4, § 13, 14 гл. 8], [5, § 13], [7, § 7 гл. 4].
- Дослідження функцій на сталість, монотонність, внутрішні локальні екстремуми, опуклість і точки перегину; загальна схема дослідження функції та побудови її графіка [1, п. 4.3–4.5 § 4 гл. 4], [3, п. 4.7], [4, гл. 9], [5, § 14], [7, § 8, 10 гл. 4].

1.1. Границя функції

Граничних перехід – одна з найважливіших операцій математичного аналізу. На ній ґрунтуються такі центральні поняття аналізу, як збіжність, неперервність, диференційовність, диференціал, похідна, інтеграл тощо. Символ граничного переходу

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \left(f(x)\underset{x\to x_0}{\to} A\right)$$

означає, що всі значення функції f (при $x\neq x_0$) можуть стати як завгодно близькими до величини A, якщо всі значення аргументу x достатньо близькі до величини x_0. Можливі такі випадки (*означення Коші*):

1) $A=\mathrm{const}$, $x_0=\mathrm{const}$. Цей факт записують так:

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=A\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{c}\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0;f)>0:\\ |f(x)-A|<\varepsilon \quad \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta.\end{array}\right)$$

2) $A=+\infty$, $x_0=\mathrm{const}$. У цьому разі пишуть

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{l}\forall\mathrm{E}>0 \quad \exists\delta=\delta(\mathrm{E},x_0;f)>0:\\ f(x)>\mathrm{E} \quad \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta.\end{array}\right)$$

3) $A=-\infty$, $x_0=\mathrm{const}$. Це записують так:

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{l}\forall\mathrm{E}>0 \quad \exists\delta=\delta(\mathrm{E},x_0;f)>0:\\ f(x)<-\mathrm{E} \quad \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta.\end{array}\right)$$

4) $A=\mathrm{const}$, $x_0=+\infty(-\infty)$. Тоді

$$\left(\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} f(x)=A\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{c}\forall\varepsilon>0 \quad \exists\Delta=\Delta(\varepsilon;f)>0:\\ |f(x)-A|<\varepsilon \quad \forall x:\ x>\Delta\ \ (<-\Delta).\end{array}\right)$$

5) $A=+\infty(-\infty)$, $x_0=+\infty(-\infty)$. Це записують так:

$$\left(\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=+\infty\ (-\infty)\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{c}\forall\mathrm{E}>0 \quad \exists\Delta=\Delta(\mathrm{E};f)>0:\\ f(x)>\mathrm{E}\ (<-\mathrm{E}) \ \ \forall x:\ x>\Delta\ \ (<-\Delta).\end{array}\right)$$

Зрозуміло, що в цих означеннях ε за змістом є будь-яким додатним як завгодно малим числом, а E – будь-яким додатним як завгодно великим числом.

Необхідною і достатньою умовою існування границі функції в точці x_0 є умова $f(x_0-0)=f(x_0+0)$

$$\Big(f(x_0-0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x),\quad f(x_0+0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x)\Big).$$

Якщо областю визначення $D(f)$ скалярної функції f є множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел ($f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$), то таку функцію називають *числовою послідовністю*. Числову послідовність, як правило, позначають буквою з нижнім натуральним індексом, наприклад, f_n (тобто $f(n)$), a_n, y_n, x_n ($n\in\mathbb{N}$) тощо. Означення *границі числової послідовності* має вигляд (див. означення 4) і 5) границі функції):

$$\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n = a = \text{const}\Big) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \forall\,\varepsilon>0\quad \exists n_0=n_0(\varepsilon;x_n)\in\mathbb{N}: \\ |x_n-a|<\varepsilon\quad \forall n>n_0, \end{pmatrix}$$

$$\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty\Big) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} \forall\,\mathrm{E}>0\quad \exists n_0=n_0(\mathrm{E};x_n)\in\mathbb{N}: \\ x_n>\mathrm{E}\ (<-\mathrm{E})\quad \forall n>n_0. \end{pmatrix}$$

Послідовність x_n називається *збіжною*, якщо вона має скінченну границю, тобто $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a = \text{const}$. Послідовність x_n називають *розбіжною*, якщо вона має нескінченну границю ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$) або зовсім не має границі.

Критерій Коші. Послідовність x_n збіжна тоді і тільки тоді, коли вона *фундаментальна*: $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - x_{n+p}| = 0\ \ \forall p\in\mathbb{N}$.

Означення границі функції в розумінні Гейне має вигляд

$$\Big(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\Big) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \big(\forall\, x_n\to x_0\ (x_n\neq x_0)\quad f(x_n)\to A.\big)$$

Однією з основних задач теорії границь є задача *розкриття невизначеностей*, тобто відшукання границь у так званих невизначених ситуаціях. Існує всього сім типів невизначених ситуацій (невизначеностей), які виникають при відшуканні границь функцій типу $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, f^g у випадках:

I. $(\infty-\infty)$: $f\to+\infty,\ g\to+\infty$.

II. $(0\cdot\infty)$: $f\to 0,\ g\to\infty$. III. $\left(\frac{0}{0}\right)$: $f\to 0,\ g\to 0$.

IV. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: $f\to\infty,\ g\to\infty$. V. (1^{∞}): $f\to 1,\ g\to\infty$.

VI. (∞^{0}): $f\to+\infty,\ g\to 0$. VII. (0^{0}): $f\to+0,\ g\to 0$.

Для невизначених ситуацій I–VII характерним є те, що в кожній із них заздалегідь не можна сказати, чи існує границя, а якщо й існує, то чому вона дорівнює. Відповідь на ці питання можна дати тільки після індивідуального дослідження самої границі.

У так званих *визначених ситуаціях*, навпаки, висновок про існування або неіснування границі, скінченність чи нескінченність її можна зробити одразу.

Визначені ситуації виникають, наприклад, при відшуканні границь неперервних функцій. Функцію f називають *неперервною в точці* $x_0\in D(f)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$.

Таким чином, відшукання границі функції в точці неперервності x_0 зводиться до обчислення значення цієї функції в точці x_0. Відомо, що всі елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення. Наприклад,

$$\lim_{x\to x_0} x^{\alpha}=x_0^{\alpha}\quad (x_0>0),\quad \lim_{x\to x_0} e^{x}=e^{x_0}\quad (x_0\in\mathbb{R}),$$

$$\lim_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0\quad (x_0>0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0\quad (x_0\in\mathbb{R}),\quad \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0\quad (x_0\in\mathbb{R}),$$

$$\lim_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0\quad (x_0\in[-1,1])$$

і т. п. Визначеними є ситуації, які виникають при відшуканні границь функцій типу $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, f^{g} у випадках, коли $f\to A=\text{const}$, $g\to B=\text{const}$:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=A+B,\quad \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0)\,,\quad \lim_{x\to x_0}(f^g)(x)=A^B\quad (A>0)\,,$$

а також ситуації, які в символічній формі записують так ($C=\text{const}$):

$$(+\infty+\infty)=+\infty\,,\quad (-\infty-\infty)=-\infty\,,\quad (\pm\infty+C)=\pm\infty\,,$$

$$(C\cdot\infty)=\infty\quad (C\neq 0)\,,\quad \left(\frac{C}{\infty}\right)=0\,,\quad \left(\frac{C}{0}\right)=\infty\quad (C\neq 0)\,,$$

$$(\infty\cdot\infty)=\infty\,,\quad (C^{+\infty})=+\infty\quad (C>1)\,,\quad (C^{+\infty})=0\quad (0<C<1)\,,$$

$$(+\infty)^C=+\infty\quad (C>0)\,,\quad (+\infty)^C=0\quad (C<0)\,,$$

$$(+\infty)^{+\infty}=+\infty\,,\quad (+\infty)^{-\infty}=0\,.$$

1.2. Асимптотична символіка (*o*-символіка)

При дослідженні поведінки деякої функції f в околі точки x_0 (розглядають δ-окіл $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ або проколотий δ-окіл $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$) буває зручно порівнювати функцію f з поведінкою простішої (часто – степеневої) функції g ($g(x)\neq 0\ \ \forall x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$). Для цього використовують такі поняття і символи.

1. Функції f і g називають *еквівалентними при* $x\to x_0$ і пишуть

$$f\sim g \ \text{ при } \ x\to x_0\,,$$

якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. З означення, зокрема, випливає, що коли

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A=\text{const}\neq 0\,,$$

то $f\sim A$ при $x\to x_0$. Наприклад,

$$\cos x\sim 1 \ \text{ при } \ x\to 0\,,$$

$$\sin x\sim\frac{1}{2} \ \text{ при } \ x\to\frac{\pi}{6}\,,$$

$$\frac{3x}{x+1} \sim 3 \text{ при } x \to \infty,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim \pm\frac{\pi}{2} \text{ при } x \to \pm\infty.$$

2. Функції f і g називають *функціями одного порядку при* $x \to x_0$ і пишуть

$$f = O^*(g) \text{ при } x \to x_0,$$

якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = B = \text{const} \neq 0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} \frac{O^*\left(g(x)\right)}{g(x)} = B = \text{const} \neq 0 \right)$.

Запис $\varphi = O^*(1)$ при $x \to x_0$ означає, що

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = B = \text{const} \neq 0.$$

Якщо $f = O^*(1)g$ при $x \to x_0$, то $f = O^*(g)$ при $x \to x_0$ і навпаки. Наприклад,

$$\frac{3x^2}{x+1} = \frac{3}{x+1}x^2 = O^*(1)x^2 = O^*(x^2) \text{ при } x \to 0,$$

$$\frac{3x^2}{x+1} = \frac{3x}{x+1}x = O^*(1)x = O^*(x) \text{ при } x \to \infty.$$

З означення випливає також, що коли $f \sim g$ при $x \to x_0$, то $f = O^*(g)$ при $x \to x_0$ ($B = 1$). Навпаки, якщо $f = O^*(g)$ при $x \to x_0$, то $f \sim Bg$ при $x \to x_0$.

Якщо f і g – *нескінченно малі функції при* $x \to x_0$ (тобто $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$) при $x \to x_0$) і $f = O^*(g)$ при $x \to x_0$, то f і g називають *функціями одного порядку малості при* $x \to x_0$.

3. Функцію f називають *нескінченно малою порівняно із функцією* g *при* $x \to x_0$ і пишуть

$$f = o(g) \text{ при } x \to x_0,$$

якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} \frac{o\left(g(x)\right)}{g(x)} = 0 \right)$.

Запис $\varphi = o(1)$ при $x \to x_0$ означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, тобто φ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

Якщо $f = o(1)g$ при $x \to x_0$, то $f = o(g)$ при $x \to x_0$ і навпаки. Наприклад,

$$\frac{3x^2}{x+1} = \frac{3x}{x+1}x = o(1)x = o(x) \text{ при } x \to 0,$$

$$1 = \frac{1}{x}x = o(1)x = o(x) \text{ при } x \to \infty.$$

Якщо $f = o(g)$, $f = o(1)$, $g = o(1)$ при $x \to x_0$, то f називають *функцією вищого порядку малості* (ніж g) *при* $x \to x_0$.

4. Функцію f називають *обмеженою порівняно із функцією* g *при* $x \to x_0$ і пишуть

$$f = O(g) \text{ при } x \to x_0,$$

якщо $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M \quad \left(\left|\frac{O\big(g(x)\big)}{g(x)}\right| \le M \right) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Запис $\varphi = O(1)$ при $x \to x_0$ означає, що функція f обмежена в околі точки x_0, тобто $|\varphi(x)| \le M \ \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Якщо $f = O(1)g$ при $x \to x_0$, то $f = O(g)$ при $x \to x_0$ і навпаки. Наприклад,

$$\frac{3x^2}{x+1} = \frac{3x}{x+1}x = O(1)x = O(x) \text{ при } x \to \infty,$$

$$x^2 \sin\frac{1}{x} = x^2 O(1) = O(x^2) \text{ при } x \to x_0 \in \mathbb{R}.$$

З означення також випливає, що коли $f \sim g$ або $f = O^*(g)$ або $f = o(g)$ при $x \to x_0$, то $f = O(g)$ при $x \to x_0$, оскільки в усіх цих випадках дріб $\frac{f}{g}$ обмежений в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Символи $\sim, O^*, o, O$ називають *асимптотичними.* Будь-яку формулу, записану за допомогою цих символів, називають *асимптотичною формулою*. Наприклад, граничну рівність

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ можна записати за допомогою кожної з таких асимптотичних формул ($x\to x_0$):

$$\frac{f}{g}=1+o(1),$$

$$f=g+o(g),$$

$$f=g+o(g)\sim g.$$

Асимптотичні формули $f=O^*(g)$, $f=o(g)$, $f=O(g)$, $f\sim g$ при $x\to x_0$ насправді означають тільки те, що f належить певному класу функцій. Наприклад, "рівності" $x^2=o(x)$, $x^{100}=o(x)$ при $x\to 0$ кажуть про те, що x^2 і x^{100} – функції вищого порядку малості ніж x при $x\to 0$. Очевидно, з них зовсім не випливає, що $x^2\equiv x^{100}$ $\forall x\in U_\delta(0)$, хоча праві частини цих "рівностей" однакові. З цієї точки зору стають зрозумілими асимптотичні формули типу ($x\to x_0$)

$$2o(g)=o(g),\ 2O^*(g)=O^*(g),\ 2O(g)=O(g),$$

$$o(g)\pm o(g)=o(g),\ O(g)\pm O(g)=O(g),$$

$$o(1)=o(2),\ O^*(1)=O^*(2),$$

$$O(1)=O(2),\ o(g)=o(2g).$$

Наведемо деякі важливі властивості асимптотичних символів ($x\to x_0$):

1) $f\,o(g)=o(fg)$;

2) $o(f)o(g)=o(fg)$;

3) $o(g)o(g)=o(g^2)$;

4) $o\big(O^*(g)\big)=o(g)$;

5) $o\big(g+o(g)\big)=o(g)$;

6) $f\sim f$;

7) $f\sim g\Leftrightarrow g\sim f$;

8) $f\sim g,\ g\sim h\Rightarrow f\sim h$;

9) $f\sim g\Rightarrow \dfrac{1}{f}\sim\dfrac{1}{g}$;

10) $f\sim f_1,\ g\sim g_1\Rightarrow fg\sim f_1g_1$;

11) $f\sim f_1,\ g\sim g_1\Rightarrow \dfrac{f}{g}\sim\dfrac{f_1}{g_1}$;

12) $f \sim f_1,\ g \sim g_1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} fg = \lim\limits_{x\to x_0} f_1 g_1,\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1}{g_1}$

(границі в лівих частинах існують тоді і тільки тоді, коли існують границі в правих частинах рівностей).

Правильність цих властивостей випливає з означень асимптотичних символів ($x \to x_0$):

1) $\dfrac{f\, o(g)}{fg} = \dfrac{o(g)}{g} = o(1)$;

2) $\dfrac{o(f)\, o(g)}{fg} = \dfrac{o(f)}{f} \cdot \dfrac{o(g)}{g} = o(1)\, o(1) = o(1)$;

3) $\dfrac{o(g)\, o(g)}{g^2} = \dfrac{o(g)}{g} \cdot \dfrac{o(g)}{g} = o(1)\, o(1) = o(1)$;

4) $\dfrac{o\left(O^*(g)\right)}{g} = \dfrac{o\left(O^*(g)\right)}{O^*(g)} \cdot \dfrac{O^*(g)}{g} = o(1)\, O^*(1) = o(1)$;

5) $\dfrac{o\left(g + o(g)\right)}{g} = \dfrac{o\left(g + o(g)\right)}{g + o(g)} \cdot \dfrac{g + o(g)}{g} = o(1)\, O^*(1) = o(1)$;

6) $\dfrac{f}{f} = 1$;

7) $\dfrac{g}{f} = \left(\dfrac{f}{g}\right)^{-1} = 1 + o(1)$;

8) $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \cdot \dfrac{g}{h} = \left(1 + o(1)\right)\left(1 + o(1)\right) = 1 + o(1)$;

9) $\dfrac{1/f}{1/g} = \dfrac{g}{f} = 1 + o(1)$;

10) $\dfrac{fg}{f_1 g_1} = \dfrac{f}{f_1} \cdot \dfrac{g}{g_1} = \left(1 + o(1)\right)\left(1 + o(1)\right) = 1 + o(1)$

11) $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g} \sim f_1 \cdot \dfrac{1}{g_1} = \dfrac{f_1}{g_1}$;

12) $\lim\limits_{x\to x_0} fg = \lim\limits_{x\to x_0} f_1 g_1 \dfrac{fg}{f_1 g_1}$, $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1}{g_1} \dfrac{f g_1}{f_1 g}$.

Якщо

$$f(x)=A(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\sim A(x-x_0)^n \quad \text{при } x\to x_0$$

або

$$f(x)=Ax^n+o(x^n)\sim Ax^n \quad \text{при } x\to\infty,$$

де $A=\text{const}\neq 0$, то кажуть, що $A(x-x_0)^n$ або Ax^n є головною степеневою частиною функції f при $x\to x_0=\text{const}$ і при $x\to\infty$ відповідно.

Головні степеневі частини функцій зручно знаходити (виділяти), користуючись *першою*

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

і *другою*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$$

визначними границями та їх наслідками, які в асимптотичній формі можна записати так ($u\to 0$):

$$\sin u=u+o(u)\sim u,$$
$$\ln(1+u)=u+o(u)\sim u,$$
$$\operatorname{tg}u=u+o(u)\sim u,$$
$$e^u-1=u+o(u)\sim u,$$
$$\arcsin u=u+o(u)\sim u,$$
$$(1+u)^\alpha-1=\alpha u+o(u)\sim\alpha u,$$
$$\operatorname{arctg}u=u+o(u)\sim u,$$
$$a^u-1=e^{u\ln a}-1=u\ln a+o(u)\sim u\ln a \quad (0<\alpha\neq 1).$$

Наприклад,

$$\operatorname{ctg}u=\frac{\cos u}{\sin u}\sim\frac{1}{u} \quad \text{при } u\to 0,$$

$$\operatorname{arcctg}u=\operatorname{arctg}\frac{1}{u}\sim\frac{1}{u} \quad \text{при } u\to+\infty,$$

$$u^u-1=e^{u\ln u}-1\sim u\ln u=$$
$$=u\ln(1+u-1)\sim 1\cdot(u-1)=u-1 \quad \text{при } u\to 1,$$

$$1-\cos u=2\sin^2\frac{u}{2}\sim 2\frac{u^2}{4}=\frac{1}{2}u^2 \quad \text{при } u\to 0,$$

$$1-\cos^{\alpha} u = 1-\left(1-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\right)^{\alpha} = -\left[\left(1-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\right)^{\alpha}-1\right] \sim$$

$$\sim -\alpha\left(-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\right) \sim \frac{\alpha}{2}u^2 \quad \text{при } u \to 0,$$

$$\ln\cos u = \ln(1+\cos u - 1) \sim \cos u - 1 \sim -\frac{1}{2}u^2 \quad \text{при } u \to 0,$$

$$(\cos u)^{\cos u} - 1 = e^{\cos u \cdot \ln\cos u} - 1 \sim \cos u \cdot \ln\cos u \sim$$

$$\sim \ln\cos u \sim -\frac{1}{2}u^2 \quad \text{при } u \to 0,$$

$$(\cos u)^{\sin u} - 1 = e^{\sin u \ln\cos u} - 1 \sim \sin u \ln\cos u \sim$$

$$\sim u\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \sim -\frac{1}{2}u^3 \quad \text{при } u \to 0.$$

Далі (див. розд. 1.10) буде показано, що

$$\ln^{\alpha} x = o(x^{\varepsilon}) \ \text{при } x \to +\infty, \quad \ln^{\alpha} x = o(x^{-\varepsilon}) \ \text{при } x \to +0$$
$$(\alpha > 0,\ \varepsilon > 0);$$

$$x^n = o(a^x) \ \text{при } x \to +\infty, \quad a^{-x} = o(x^{-n}) \ \text{при } x \to +\infty$$
$$(a > 1,\ n > 0).$$

Таким чином, функції $\ln^{\alpha} x$, a^x не мають головних степеневих частин при $x \to +0$ ($x \to +\infty$) і при $x \to +\infty$ відповідно.

Якщо головна степенева частина функції f при $x \to x_0$ існує, то вона єдина. Справді, нехай

$$f(x) = A(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

й одночасно

$$f(x) = B(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$$

при $x \to x_0$ ($A \neq 0,\ B \neq 0,\ m \geq n$). Тоді

$$B(x-x_0)^m - A(x-x_0)^n + o((x-x_0)^m) - o((x-x_0)^n) = 0,$$

$$(x-x_0)^n\left(B(x-x_0)^{m-n} - A\right) + o((x-x_0)^n) = 0,$$

звідки при $m > n$

$$B(x-x_0)^{m-n} - A = o(1) \quad \text{при } x \to x_0,$$

тобто $A = 0$, що неможливо. Тому $m = n$ і $A = B$.

1.3. Неперервність і класифікація точок розриву функції

Важливою характеристикою скалярної функції f скалярного аргументу $x \in \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) є її *приріст у точці* x_0:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

($\Delta x = x - x_0$ – *приріст аргументу*). Від поведінки приросту залежать основні властивості функції.

Якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \quad \Big(\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0; f) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x : |x - x_0| < \delta \;\Big),$$

то функція f *неперервна в точці* x_0.

Нехай $x, x_0 \in X$ (X – відрізок, інтервал, півінтервал). Функцію f називають *рівномірно неперервною на множині* X, якщо виконана умова

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon; f) > 0 :$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;\; \forall x, x_0 \in X : |x - x_0| < \delta.$$

Якщо f рівномірно неперервна на X, то $f \in C_X$ (неперервна в кожній точці $x \in X$). Обернене твердження неправильне. Наприклад, для функції $f(x) = \ln x \in C_{(0,1]}$ і послідовностей точок $x_n' = e^{-n}$, $x_n'' = 3e^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) маємо

$$|x_n' - x_n''| = 2e^{-n} \underset{n \to \infty}{\to} 0 < \varepsilon,$$

але $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = |\ln x_n' - \ln x_n''| = |-n - \ln 3 + n| = \ln 3 > 1,$$

тобто означення рівномірної неперервності не виконується.

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a,b]$ ($f \in C_{[a,b]}$), то за *теоремою Кантора* вона й рівномірно неперервна на $[a,b]$.

Якщо умова неперервності $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ не виконана, то x_0 називають *точкою розриву функції* f [1]. Якщо при цьому

$$f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x) = \text{const},$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x) = \text{const},$$

то x_0 називають *точкою розриву 1-го роду* (*усувного* при $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ і *неусувного* при $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$). Якщо ж хоча б одна з односторонніх границь $f(x_0 \pm 0)$ нескінченна або не існує, то x_0 називають *точкою розриву 2-го роду*.

Наприклад, функція $f(x) = \operatorname{sgn} x$ у точці $x = 0 \in D(f)$ має неусувний розрив 1-го роду, тому що $f(+0) = 1$ і $f(-0) = -1$. Для функції $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ точка $x = 0 \notin D(f)$ є точкою усувного розриву 1-го роду, оскільки $f(+0) = f(-0) = 1$, а точки $x_k = \pi k \notin D(f)$, $k \in \mathbb{Z}$, – точки розриву 2-го роду, тому що $f\left(\pi k \pm 0\right) = \infty$. Для функції $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ точка $x = 0 \notin D(f)$ є точкою розриву 2-го роду, бо $f(\pm 0)$ не існують.

1.4. Прямолінійні асимптоти графіка функції

Якщо $f(x_0+0) = \pm\infty$ або $f(x_0-0) = \pm\infty$, то пряму $x = x_0$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції f.

---

[1] При цьому припускають, що або $x_0 \in D(f)$, або $x_0 \notin D(f)$, але є межовою точкою області визначення $D(f)$ (у будь-якому околі точки x_0 є як точки з $D(f)$, так і точки, які не належать $D(f)$).

Якщо $f(x) = kx + b + o(1)$ при $x \to \pm\infty$ ($k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \text{const}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \text{const}$), то пряму $y = kx + b$ називають *похилою* (при $k = 0$ – *горизонтальною*) *асимптотою* графіка функції f при $x \to \pm\infty$.

Наприклад, для функції $f(x) = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$f(+0) = +\infty, \quad f(-0) = -\infty,$$

а значить, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою її графіка. Крім того, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$, і тому прямі $y = \pm 1$ є горизонтальними асимптотами відповідно при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$. Для функції $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$ маємо

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 3}{x - 1} = x + 1 + \frac{3}{x - 1} = x + 1 + o(1) \quad \text{при } x \to \pm\infty.$$

Тому $x = 1$ – вертикальна, а $y = x + 1$ – похила (при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$) асимптоти графіка функції f.

1.5. Диференційовність, похідна і диференціал функції

Якщо приріст $\Delta f(x_0)$ функції f можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

де $A(x_0) = \text{const}$, то функцію f називають *диференційовною в точці* x_0, а величини

$$A(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

і

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

– відповідно *похідною* і *диференціалом функції* f *у точці* x_0.

Якщо $f'(x_0) = \pm\infty$, то кажуть, що функція f має в точці x_0 *нескінченну похідну*.

Оскільки похідна $f'(x_0)$ є границею відношення приросту (зміни) функції до приросту (зміни) аргументу, то вона характеризує *швидкість зміни функції в точці* x_0. Наприклад, для сталої функції $f(x) \equiv C = \text{const}$ маємо $\Delta f(x) = C - C = 0$, а отже, $(C)' = 0$. Для функції $f(x) = x$ $\Delta f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, і тому $(x)' = 1$.

Якщо $S = S(t)$ – закон прямолінійного руху матеріальної точки (S – шлях, t – час), то $S'(t) = v(t)$ – миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t.

З геометричного погляду (скінченна) похідна $f'(x_0)$ існує тоді і тільки тоді, коли графік функції f у точці $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ має похилу дотичну

$$y - f(x_0) = k_0(x - x_0),$$

де $k_0 = \operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0)$ – кутовий коефіцієнт дотичної (α_0 – кут, який утворює ця дотична з додатним напрямом осі Ox). Якщо ж $f'(x_0) = \pm\infty$ і функція f неперервна в точці x_0, то її графік має вертикальну дотичну $x = x_0$ у точці M_0. Наприклад, графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ має вертикальну дотичну $x = 0$.

З означення диференційовності випливає, що функція f диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує (скінченна!) похідна $f'(x_0)$ і що диференціал функції є лінійною (відносно Δx) частиною приросту функції.

Оскільки $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, то формулу для диференціала функції $y = f(x)$ записують у вигляді

$$dy = y'dx \quad \text{або} \quad df(x) = f'(x)dx.$$

Звідси випливає, що похідна $y' = \dfrac{dy}{dx}$ $\left(f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}\right)$ є *часткою від ділення диференціала функції на диференціал (приріст) незалежної змінної* x.

1.6. Правила диференціювання явних функцій

Так називають правила відшукання похідних (диференціалів) суми, добутку, частки і суперпозиції диференційовних функцій. Ці правила ґрунтуються на такому твердженні.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$, $f = f(u)$ – диференційовні функції своїх аргументів, $C = \text{const}$. Тоді функції: 1) $u + v$; 2) uv; 3) Cu; 4) $\dfrac{u}{v}$; 5) $f(u)$ також диференційовні, причому справджуються такі рівності:

1) $d(u+v) = du + dv \quad \Leftrightarrow \quad (u+v)' = u' + v'$;

2) $d(uv) = vdu + udv \quad \Leftrightarrow \quad (uv)' = vu' + uv'$;

3) $d(Cu) = Cdu \quad \Leftrightarrow \quad (Cu)' = Cu'$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$;

5) $d\big(f(u)\big) = f'(u)du \quad \Leftrightarrow \quad \big(f(u)\big)' = f'(u)u'(x)$.

Рівність $d\big(f(u)\big) = f'(u)du$ виражає важливу властивість диференціала – *інваріантність його форми*: диференціал функції завжди дорівнює добутку похідної функції на диференціал її аргументу і у випадку, коли аргумент є незалежною змінною, і у випадку, коли аргумент $u = u(x)$ є диференційовною функцією змінної x.

1.7. Правило диференціювання неявно заданої функції

Нехай функція $y = y(x)$ неявно задана рівнянням $F(x, y) = 0$:

$$y = y(x):\ F(x, y) = 0 .$$

Це означає, що $y = y(x)$ є розв'язком цього рівняння, тобто на деякому проміжку X справджується тотожність

$$F\big(x, y(x)\big) \equiv 0 \quad (x \in X).$$

Щоб знайти похідну (або диференціал) такої функції, треба продиференціювати рівняння $F(x,y)=0$ по[1] змінній x, вважаючи, що $y=y(x)$, і з отриманого співвідношення виразити y' (або dy).

Наприклад, функцію $y=\sqrt{1-x^2}$ можна розглядати як неявно задану рівнянням $x^2+y^2=1$. Знайдемо диференціал від обох частин цього рівняння:

$$2xdx+2ydy=0,$$

$$dy=-\frac{x}{y}dx=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Звідси $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

У загальному випадку похідна неявно заданої функції теж задана неявно. Наприклад, для функції

$$y=y(x):\quad e^{xy}-\sin y=0$$

маємо

$$e^{xy}(ydx+xdy)-\cos ydy=0,$$

$$dy=\frac{ye^{xy}}{\cos y-xe^{xy}}dx=\frac{y\sin y}{\cos y-x\sin y}dx\quad(\operatorname{ctg} y\neq x).$$

Тож похідна $y'=\dfrac{y\sin y}{\cos y-x\sin y}$ задана неявно.

Нехай функція $y=y(x)$ має обернену $x=x(y)$, причому $y'=y'(x)\neq 0$. Тоді $dy=y'dx$, звідки похідну оберненої функції можна знайти у вигляді

$$x'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{y'(x)dx}=\frac{1}{y'(x)}\quad\left(x=x(y)\right).$$

1.8. Правило диференціювання параметрично заданої функції

Розглянемо систему двох рівнянь

---

[1] Тут і далі прийменник *по* використовується за авторською редакцією.

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

($t\in T$ – параметр). Якщо функція $x=\varphi(t)$ має обернену $t=t(x)$, то $y=\psi(t)=\psi\big(t(x)\big)=y(x)$. У цьому випадку кажуть, що функція $y=y(x)$ задана системою параметричних рівнянь:

$$y=y(x):\quad \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in T).$$

Нехай φ і ψ – диференційовні функції, причому $\varphi'(t)\neq 0$. З другого рівняння маємо

$$dy=\psi'(t)dt=\psi'(t)\,t'(x)dx=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}dx\,.$$

Звідси випливає, що похідна

$$y'=y'(x):\quad \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases} \quad (t\in T)$$

параметрично заданої функції $y=y(x)$ у загальному випадку теж задана параметрично.

Розглянемо функцію $y=\sqrt{1-x^2}$, яку можна вважати параметрично заданою системою рівнянь

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t \end{cases} \quad \big(t\in[0,\pi]\big)$$

($t=\arccos x,\ y=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$). Тоді

$$y'=y'(x):\begin{cases} x=\cos t, \\ y'=\dfrac{(\sin t)'}{(\cos t)'}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t \end{cases} \quad \big(t\in(0,\pi)\big).$$

Врахувавши, що $t=\arccos x$, дістанемо явну залежність похідної y' від змінної x:

$$y'=\frac{\cos(\arccos x)}{-\sin(\arccos)}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \big(x\in(-1,1)\big).$$

1.9. Теореми про середнє значення в диференціальному численні

У курсі математичного аналізу таку назву мають чотири "іменні" теореми, спільною рисою яких є те, що в них ідеться про властивості похідної функції в деякій внутрішній ("середній") точці ξ відрізка $[a,b]$.

Нагадаємо спочатку означення *внутрішнього локального екстремуму* (максимуму або мінімуму) функції f. Кажуть, що функція f у точці $x_0 \in (a,b)$ має *внутрішній локальний максимум* (*внутрішній локальний мінімум*), якщо існує окіл $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ точки x_0 такий, що

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \le 0 \quad (\Delta f(x_0) \ge 0) \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

Якщо знак "$=$" має місце тільки при $x = x_0$, то відповідний екстремум називають *строгим*, у супротивному випадку – *нестрогим*. Наприклад, функція (рис. 16)

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} x^2, \text{ якщо } x \in [-1,1], \\ \;1, \text{ якщо } x \in (1,+\infty), \end{array} \right. \quad x \in [-1,+\infty),$$

у точці $x_0 = 0$ має строгий внутрішній локальний мінімум, у точці $x_0 = 1$ – нестрогий внутрішній локальний максимум, а в точці $x_0 = -1$ – строгий межовий локальний максимум.

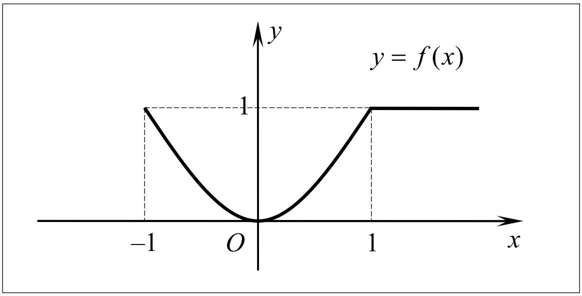


Рис. 16. Екстремуми функції $y = f(x)$

Функція $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, (рис. 17) локальних екстремумів не має, оскільки її приріст

$$\Delta f(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$$
додатний (від'ємний) при $x > x_0$ ($x < x_0$).

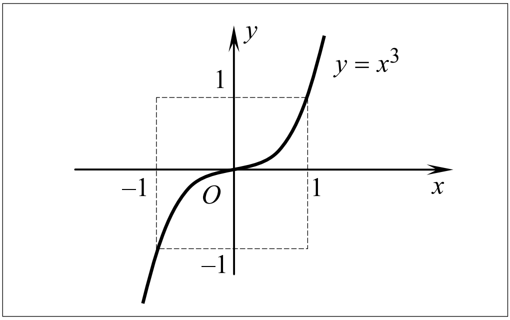


Рис. 17. Відсутність екстремумів у функції $f(x) = x^3$

Т е о р е м а Ф е р м а. Нехай: 1) $f \in C_{[a,b]}$; 2) $x_0 \in (a,b)$, $f'(x_0) = \text{const}$; 3) x_0 – точка внутрішнього локального екстремуму функції f. Тоді $f'(x_0) = 0$.

Т е о р е м а Р о л л я. Нехай: 1) $f \in C_{[a,b]}$; 2) f диференційовна при $x \in (a,b)$; 3) $f(a) = f(b)$. Тоді $\exists \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = 0$.

Т е о р е м а Л а г р а н ж а. Нехай: 1) $f \in C_{[a,b]}$; 2) f диференційовна при $x \in (a,b)$. Тоді
$$\exists \xi \in (a,b):\ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$
(*формула Лагранжа*).

Т е о р е м а К о ш і. Нехай: 1) $f, g \in C_{[a,b]}$; 2) f, g диференційовні і $g' \neq 0$ при $x \in (a,b)$. Тоді
$$\exists \xi \in (a,b):\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
(*формула Коші*).

Формули Лагранжа і Коші мають важливі застосування в математичному аналізі. Формулу Лагранжа, наприклад, використовують для дослідження функції на рівномірну неперервність.

Формули Лагранжа і Коші мають важливі застосування в математичному аналізі. Формулу Лагранжа, наприклад, використовують для дослідження функції на рівномірну неперервність. У розд. 3 було показано, що функція $f(x)=\ln x$ не є рівномірно неперервною на проміжку $(0,1]$. На будь-якому відрізку $[a,b]\subset(0,1]$ (напр., на відрізку $X=[10^{-4},1]$) вона рівномірно неперервна за теоремою Кантора. Формула Лагранжа дає можливість знайти величину δ з означення рівномірної неперервності. Справді, за формулою Лагранжа маємо

$$|\ln x-\ln x_0|=\frac{1}{\xi}|x-x_0|\le\frac{1}{10^{-4}}|x-x_0|=10^4|x-x_0|<\varepsilon$$

при $|x-x_0|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{10^4}$ ($\xi\in(10^{-4},1)$).

Отже, можна стверджувати, що коли $|f'(x)|\le L\ \ \forall x\in X$ ($L>0$), то функція f рівномірно неперервна на X і $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{L}$. Наприклад, функція $f(x)=\operatorname{arctg}x$ рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$, оскільки $|f'(x)|=\dfrac{1}{x^2+1}\le 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ і $\delta\le\varepsilon$.

За допомогою формули Коші можна застосовувати апарат диференціального числення для розв'язування важливої проблеми розкриття невизначеностей у теорії границь (див. розд. 1.1).

1.10. Правила Лопіталя розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Ці правила ґрунтуються на такому твердженні. Нехай виконані умови:

1) функції f і g диференційовні в $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$;

2) $g'(x)\ne 0\quad\forall x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$;

Тоді $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

Аналогічне твердження правильне й у випадку $x_0=+\infty$ або $x_0=-\infty$.

Правила Лопіталя застосовують і для розкриття невизначеностей інших типів, як-от: $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, (1^{∞}), (∞^0), (0^0). Для цього ці невизначеності потрібно спочатку перетворити до невизначеностей типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ і $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Це можна зробити так ($x\to x_0$):

$$f-g=(\infty-\infty)=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{f}}=\left(\frac{0}{0}\right);$$

$$f\cdot g=(0\cdot\infty)=\frac{f}{\frac{1}{g}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{g}{\frac{1}{f}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right);$$

$$f^{g}=\left[(1^{\infty}),\ (\infty^{0}),\ (0^{0})\right]=e^{g\ln f}=e^{(0\cdot\infty)}.$$

Розглянемо приклади застосування правил Лопіталя ($\alpha>0$, $\varepsilon>0$, $a>1$, $n\in\mathbb{N}$, $m>0$):

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{\alpha}x}{x^{\varepsilon}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon/\alpha}}\right)^{\alpha}=0$, оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\varepsilon}{\alpha}x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}-1}}=\frac{\alpha}{\varepsilon}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{\alpha}}}=\left(\frac{\text{const}}{+\infty}\right)=+0$$

($\Rightarrow \ln^{\alpha}x=o(x^{\varepsilon})$ при $x\to+\infty$);

2) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln^{n}x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln^{n}x}{x^{-\varepsilon}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{\ln x}{x^{-\varepsilon/n}}\right)^{n}=0$,

оскільки $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\varepsilon/n}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{\varepsilon}{n}x^{-\frac{\varepsilon}{n}-1}}=-\dfrac{n}{\varepsilon}\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon/n}=0$

$$(\Rightarrow \ln^n x = o(x^{-\varepsilon}) \text{ при } x \to +0);$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^m}{a^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{a^{x/m}}\right)^m = 0$, оскільки

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^{x/m}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Л}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^{x/m} \ln a \cdot \dfrac{1}{m}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = +0$$

$$(\Rightarrow x^m = o(a^x) \text{ при } x \to +\infty);$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^{-x}}{x^{-m}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^m}{a^x} = 0 \quad (\Rightarrow a^{-x} = o(x^{-m}) \text{ при } x \to +\infty);$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{Л}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{tg} x}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{Л}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

1.11. Формула малих приростів і наближена формула Тейлора. Формула Тейлора з залишковим членом у формах Пеано і Лагранжа

Якщо функція f диференційовна в точці x_0:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

то при малих $|\Delta x|$ отримуємо наближену формулу (*формулу малих приростів*)

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

яку можна записати також у вигляді *формули лінеаризації функції в околі точки* x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Якщо функція f в околі $U_\delta(x_0)$ має похідні до n-го порядку включно, то останню формулу можна узагальнити у вигляді *наближеної формули Тейлора* n*-го порядку*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \equiv T_n(x),$$

де $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ – *многочлен Тейлора* n*-го порядку функції* f *в точці* x_0 (це многочлен степеня $\le n$).

Залишковим членом наближеної формули Тейлора $f(x)\approx T_n(x)$ називають величину $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$.

Можна показати, що $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$ (*форма Пеано*). Якщо ж в $U_\delta(x_0)$ функція f має похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

(*форма Лагранжа*), де ξ – точка, яка лежить між точками x_0 і x:

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0),\quad 0<\theta<1.$$

Відповідно до цього формулу

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n) \text{ при } x\to x_0$$

називають *формулою Тейлора з залишковим членом у формі Пеано*, або *локальною формулою Тейлора*, а формулу

$$f(x)=T_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

– *формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа*.

Єдиність розкладу функції за локальною формулою Тейлора випливає з такого твердження.

Якщо при $x\to x_0$ $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$ і, крім того, $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня $\le n$, то $P_n(x)\equiv T_n(x)$.

З означення многочлена Тейлора випливає, що

$$T_n(x_0)=f(x_0),\quad T_n'(x_0)=f'(x_0),$$

$$T_n''(x_0)=f''(x_0),\ldots,T_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

У цьому випадку кажуть, що криві $y=f(x)$ і $y=T_n(x)$ мають при $x=x_0$ *дотик* n*-го порядку*.

При $x_0 = 0$ формулу Тейлора називають *формулою Маклорена*. Локальна формула Маклорена n*-го* порядку має вигляд

$$f(x) = f(0) + f'(0)x +$$

$$+\frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0 .$$

Розклади деяких елементарних функцій за локальною формулою Маклорена n-го порядку називають *стандартними розкладами* ($x \to 0$; $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$):

I. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n), \quad R_n(x) = \frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}$;

II. $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} \cdot x^n + o(x^n)$;

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2} + \xi\right)}{(n+1)!}x^{n+1};$$

III. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} \cdot x^n + o(x^n)$,

$$R_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \xi\right)}{(n+1)!}x^{n+1};$$

IV. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$,

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1};$$

V. $(1+x)^{\alpha} =$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!(1+\xi)^{n+1-\alpha}}x^{n+1}.$$

За допомогою стандартних розкладів, тотожних перетворень і теореми єдиності розкладу функції за локальною формулою Тейлора дістають розклади потрібного порядку для інших функцій як за формулою Маклорена ($x_0 = 0$), так і за формулою Тейлора ($x_0 \neq 0$). Наприклад:

1) $3^x = e^{x\ln 3} = 1 + x\ln 3 + \frac{1}{2!}x^2 \ln^2 3 +$

$$+\frac{1}{3!}x^3 \ln^3 3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \ln^n 3 + o(x^n) \quad \text{при } x \to 0$$

(використано розклад I);

2) $\ln x = \left[x - e = t,\ x = t + e\right] = \ln(t + e) = \ln e + \ln\left(1 + \frac{t}{e}\right) =$

$$= 1 + \frac{t}{e} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{e^2} + \frac{1}{3}\frac{t^3}{e^3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{t^n}{e^n} + o(t^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{e}(x - e) - \frac{1}{2e^2}(x - e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x - e)^3 - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{ne^n}(x - e)^n + o\left((x - e)^n\right) \quad \text{при } x \to e$$

(використано розклад IV);

3) $x^{1/3} = \left[x - 1 = t,\ x = 1 + t\right] = (1 + t)^{1/3} =$

$$= 1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{3} - n + 1\right)}{n!}t^n + o(t^n) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1 \cdot 2}{2!3^2}(x - 1)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n - 4)}{n!3^n}(x - 1)^n + o\left((x - 1)^n\right) \quad \text{при } x \to 1$$

(використано розклад V);

4) $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) =$

$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x =$$

$$= \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n + o(x^n)\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+\frac{1}{5!}(3x)^5-\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}(3x)^n+o(x^n)\right)=$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^5+\cdots+\frac{3(1-3^n)\sin\frac{n\pi}{2}}{4n!}x^n+o(x^n) \quad \text{при } x\to 0$$

(використано розклад II).

Формула Тейлора має важливі застосування в наближених обчисленнях, у теорії границь для розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$, у теорії диференціальних рівнянь тощо.

Застосування формули Тейлора для розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ ґрунтується на такому факті.

Якщо $f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0$, $f^{(m)}(x_0)\neq 0$, то з локальної формули Тейлора m-го порядку випливає, що при $x\to x_0$:

$$f(x)\sim\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m,$$

тобто $\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m$ є головною степеневою частиною функції f при $x\to x_0$.

Виділяючи головні степеневі частини функцій f і g, маємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m}{\frac{1}{k!}g^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}=\left[\begin{array}{rl} 0, & \text{якщо } m>k; \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{g^{(k)}(x_0)}, & \text{якщо } m=k; \\ \infty, & \text{якщо } m<k. \end{array}\right.$$

Для практичних обчислень використовують, як правило, стандартні розклади. Наприклад,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[7]{\cos x}}{e^{x^2}-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{14}x^2}{\frac{3}{2}x^2}=\frac{1}{21},$$

оскільки при $x \to 0$

$$1-\sqrt[7]{\cos x}=1-(\cos x)^{1/7}=1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)^{1/7}=$$

$$=1-\left(1+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)+o(x^2)\right)=\frac{1}{14}x^2+o(x^2)$$

унаслідок розкладів II і V,

$$e^{x^2}-\cos x=1+x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

унаслідок розкладів I і III.

У випадку, коли $x \to \infty$, потрібно зробити заміну змінної $1/x=t \to 0$.

1.12. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка

Досліджуючи функцію з метою побудови її графіка, зазвичай розрізняють два рівні такого дослідження.

1-й рівень (дослідження функції без застосування похідних) передбачає такі етапи:

1. Відшукання області визначення $D(f)$ і, якщо можливо, області значень $E(f)$.

2. Дослідження функції на *парність* ($f(-x)=f(x)$ $\forall x \in D(f)$) або *непарність* ($f(-x)=-f(x)$ $\forall x \in D(f)$). В обох випадках область визначення $D(f)$ має бути симетричною відносно точки $x=0$.

3. Дослідження функції на *періодичність* ($f(x+T)=f(x)$ $\forall x \in D(f)$, $T>0$).

4. Дослідження функції на неперервність і класифікація точок розриву.

5. Відшукання прямолінійних асимптот графіка функції.

6. Відшукання нулів функції, проміжків її знакосталості, а також характерних точок її графіка.

2-й рівень (дослідження функції за допомогою похідних) передбачає такі етапи:

1. Відшукання *критичних* точок функції (*стаціонарних* точок функції f, тобто коренів рівняння $f'(x)=0$, а також точок, у яких функція неперервна і недиференційовна).

2. Дослідження знаку похідної f' на проміжках X між критичними точками (якщо $f'(x)>0$ (<0) $\forall x \in X$, то функція f строго монотонно зростає $\uparrow\uparrow$ (спадає $\downarrow\downarrow$) на X).

3. Дослідження функції на внутрішній локальний екстремум. Як випливає з теореми Ферма (див. розд. 1.9), функція може мати внутрішній локальний екстремум тільки в критичній точці (це – *необхідна умова* внутрішнього локального екстремуму). Для того щоб з'ясувати, чи справді функція f має екстремум в критичній точці x_0, застосовують одну з таких трьох *ознак*, або *достатніх умов*, внутрішнього локального екстремуму.

Перша ознака (x_0 – критична точка функції f). Нехай

$$\exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0):\ f'(x)\operatorname{sgn}(x-x_0)<0\ (>0)\quad \forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0).$$

Тоді f має в точці x_0 строгий внутрішній локальний максимум (мінімум).

Друга ознака (x_0 – стаціонарна точка функції f). Нехай

$$\exists U_\delta(x_0):\ f'' \text{ неперервна в } U_\delta(x_0) \text{ і } f''(x_0)<0\ (>0).$$

Тоді f має в точці x_0 строгий внутрішній локальний максимум (мінімум).

Третя ознака (x_0 – стаціонарна точка функції f). Нехай

$$\exists U_\delta(x_0):\ f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$f^{(n)} \text{ неперервна в } U_\delta(x_0) \text{ і } f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тоді у випадку непарного n функція f не має в точці x_0 локального екстремуму, а у випадку парного n функція f має в точці x_0 строгий внутрішній локальний екстремум (максимум – при $f^{(n)}(x_0)<0$, мінімум – при $f^{(n)}(x_0)>0$).

4. Дослідження функції на *опуклість* і *точки перегину*. Для цього використовують її похідну другого порядку f''. Нагадаємо, що диференційовну на проміжку X функцію f називають

опуклою вгору (*опуклою вниз*) на X, якщо всі точки її графіка розміщені не вище (не нижче) відповідних точок на дотичній, проведеній у точці $(x_0, f(x_0))$ $\forall x_0 \in X$. Зокрема, якщо всі точки (крім точки дотику) графіка функції f лежать нижче (вище) відповідних точок на дотичній, проведеній у точці $(x_0, f(x_0))$ $\forall x_0 \in X$, то функцію f називають *строго опуклою вгору* (*строго опуклою вниз*) на X (рис. 18, 19).

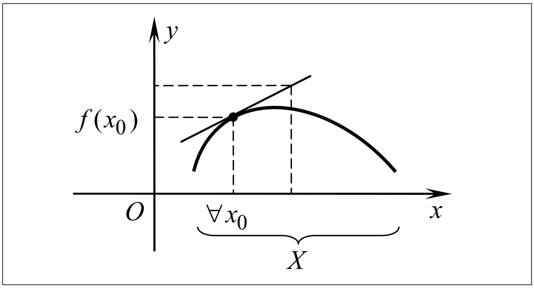


Рис. 18. Строго опукла вгору функція

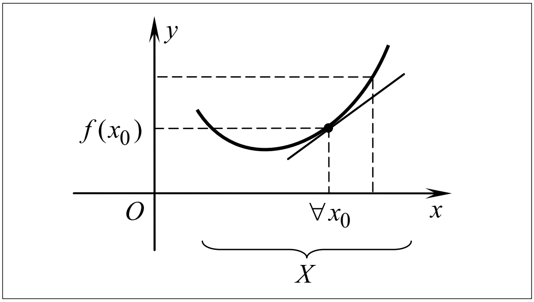


Рис. 19. Строго опукла вниз функція

Графік опуклої вгору (опуклої вниз) функції також називають опуклим вгору (опуклим униз).

Достатньою умовою опуклості функції f є знакосталість її другої похідної f'': якщо $f''(x) < 0$ (> 0) $\forall x \in X$, то f строго опукла вгору (строго опукла вниз) на X.

Нехай функція f неперервна при $x = c$. Точку $P(c, f(c))$ на графіку функції f, в якій змінюється напрям опуклості, називають *точкою перегину графіка функції* (рис. 20). Якщо $f''(c)=0$ або $f''(c)$ не існує, а f'' змінює свій знак при переході через точку $x=c$, то $x=c$ – абсциса точки перегину P.

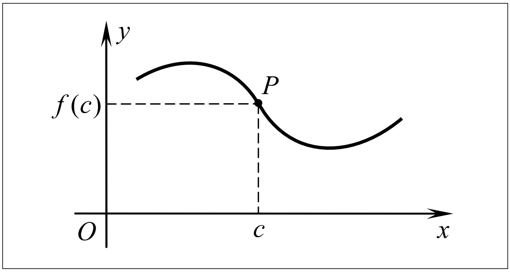


Рис. 20. Точка перегину

5. Дослідження функції на абсолютний екстремум. Якщо $D(f)=[a,b]$ і $f\in C_{[a,b]}$, то f набуває на $[a,b]$ своїх найменшого $\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ і найбільшого $\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ значень (2-а теорема Вейєрштрасса). Для їх відшукання потрібно знайти критичні точки функції: $x_k\in[a,b]$, $k=1,2,\ldots,n$. Тоді

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=\min\left\{\,f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n),f(a),f(b)\,\right\},$$

$$\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=\max\left\{\,f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n),f(a),f(b)\,\right\}.$$

Якщо ж $f\in C_X$, де $X=D(f)$ є інтервалом (a,b) або півінтервалом $[a,b)$ чи $(a,b]$, то функція f не обов'язково досягає на X своїх найбільшого і найменшого значень. Тоді ставлять задачу про відшукання $\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, $\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, досліджуючи множину $\left\{\,f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n),f(a+0),f(b-0)\,\right\}$.

1.13. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 1

Варіант 1

1. Обчислити:

а) $(0,8-0,2i)+(0,1-1,3i)-(1,5+0,7i)-(2,3-0,6i)$;

б) $\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{8}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{i}{6}\right)$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; б) $\left(\frac{i^5+2}{i^{10}-1}\right)^4$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $(1-i)^{26}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2-1=i$; б) $z^3+8=0$; в) $z^2+|z|^2=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=\frac{2}{-i}+i(1+i)$; б) $z=(1+i)(1-3i)$; в) $z=-\pi$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z=-1$; в) $z=4-i$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{2-2i}$; б) $\sqrt[4]{4i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re} z>0$; б) $\operatorname{Im} z<-3$.

10. Довести рівність $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Варіант 2

1. Обчислити: а) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}i\right)-\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{4}i\right)$; б) $\frac{(1-i)^2}{(1+i)}+i^7$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\frac{1-3i}{i}\right)^3$; б) $(1+i)^8$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

4. Розв'язати рівняння:
а) $z^2+4=0$; б) $z^3=1$; в) $z^2+(i-1)(i+1)=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=4$; б) $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i^{23}$; б) $z=4$; в) $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$; б) $z=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[4]{16(\cos\pi+i\sin\pi)}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:
а) $\operatorname{Re} z<-1$; б) $-1<\operatorname{Im} z<2$.

10. Довести рівність $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Варіант 3

1. Обчислити: а) $(4-\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$; б) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

2. Піднести до степеня: а) $(2+\sqrt{3}i)^2$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\dfrac{2i}{(1-i)^4}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3=-8$; б) $z^3+2zi=0$; в) $z^3=i$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $z=\dfrac{9+2i}{4-i}+\dfrac{1}{i}$; в) $z=-5$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=i^{25}+i$; в) $z=1-i$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $z=4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[4]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re} z>a$ і $\operatorname{Im} z\le b$, де $a,b\in\mathbb{R}$; б) $-1<\operatorname{Im} z<1$.

10. Довести рівність $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Варіант 4

1. Обчислити: а) $\frac{3+4i}{5+2i}$; б) $\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$; б) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\frac{512}{(1+i\sqrt{3})^{13}}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^4=16$; б) $z^4+i=0$; в) $z^5-32i=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=\frac{1-i}{1+i}$; б) $z=\frac{1-i^3}{(1+i)^3}$; в) $z=-2$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=1-i$; б) $z=i-\sqrt{3}$; в) $z=i^{13}+1$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re} z<-2$; б) $1\le\operatorname{Im} z\le 2$.

10. Довести рівність $e^{i2\pi k}=1$ $(k\in\mathbb{Z})$.

В а р і а н т 5

1. Обчислити: а) $\frac{5}{1+2i}$; б) $\frac{9+2i}{4-i}-\frac{2-5i}{5+2i}+\frac{1}{i}$.

2. Піднести до степеня: а) $(-\sqrt{3}-i)^4$; б) $\left(\frac{2-2i}{1-2i}\right)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\frac{2i}{(1-i)^4}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^6+64=0$; б) $|z|+2z+1=0$; в) $z^2+4=4\overline{z}$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=\frac{2}{-i}+i(1+i)$; б) $z=\frac{i}{2+i}$; в) $z=\frac{2+i}{i}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; в) $z=i^{13}-1$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $z=\frac{1}{8}(\cos 0+i\sin 0)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[4]{1}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $3<\operatorname{Re} z<4$; б) $z^2+\overline{z}^2=2$.

10. Довести рівність $e^{i\pi k}=(-1)^k \quad (k\in\mathbb{Z})$.

В а р і а н т 6

1. Обчислити: а) $\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{2-2i}{1-2i}$; б) $\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1+i}$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$; б) $(1+i)^3$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{84}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2 - 1 = i$; б) $z^3 + 8 = 0$; в) $z + |z| - 1 + i = 0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = \dfrac{5}{1+2i} + \dfrac{5}{2-i}$; б) $z = \dfrac{7}{5 + i\sqrt{2}}$; в) $z = \dfrac{7}{5\sqrt{3} + i\sqrt{2}}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$; б) $z = i - 1$; в) $z = \sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 7\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $z = \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{1-i}$; б) $\sqrt[3]{8}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $-\pi/2 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$; б) $\operatorname{Im}(z^2) = 2$.

10. Довести рівність $e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Варіант 7

1. Обчислити: а) $\dfrac{(1-2i)(2+i)}{i}$; б) $\dfrac{(1-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{(1+i\sqrt{3})^2}$.

2. Піднести до степеня: а) $(2 + \sqrt{3}i)^2$; б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3 = i$; б) $z^4 = 1$; в) $z^2 + |z|^2 = 0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = \dfrac{i}{1+2i} + \dfrac{1+2i}{i}$; б) $z = \dfrac{2}{i} + i(1-i)$; в) $z = i + \sqrt{3}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = -i$; б) $z = \sin\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3}$; в) $z = 10$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; б) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{i-1}$; б) $\sqrt[5]{-32i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Im}(1/z)<-1/2$; б) $|z+i|=5$.

10. Довести рівність $(e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $(k=0,1,\ldots,n-1;\ n\in\mathbb{Z})$.

Варіант 8

1. Обчислити:

а) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$; б) $(1+i)^2(1-i)$.

2. Піднести до степеня: а) i^{23}; б) $(i+\sqrt{3})^4$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $(\sqrt{3}+i)^{127}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $x^2-12x+45=0$; б) $3x^2+7x+5=0$; в) $|z|+2z+1=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=-1$; б) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=-\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i+1$; б) $z=-1+i$; в) $z=-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$.

7. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $z=\dfrac{\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{1-i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z+2+i|<1$; б) $|z-1|<|z-i|$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^3\varphi$.

Варіант 9

1. Обчислити:

а) $(0,8i-0,2)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}i\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}i\right)$; б) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i}+\frac{2-2i}{1-2i}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\frac{2}{1+i\sqrt{3}}+\frac{i-1}{1+i}$; б) $\left(\frac{2}{-i}+i(2-i)\right)^3$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити

$$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2+2z+5=0$; б) $z^2-2iz-5=0$; в) $z^3-1=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=\frac{7}{5+i\sqrt{2}}$; б) $z=(1+i)(1-3i)$; в) $z=-e$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-i$; б) $z=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; в) $z=9i^{10}$.

7. Довести співвідношення: а) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$; б) $\overline{(\overline{z})}=z$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{-2i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\overline{z}^2=4$; б) $|z-1|=\operatorname{Re}z$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^3\varphi$.

Варіант 10

1. Обчислити: а) $\dfrac{(1-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{(1-3i)^3}{i}+i^{21}$.

2. Виконати арифметичні дії над комплексними числами z_1 і z_2, якщо: а) $z_1=-i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=2+2i$, $z_2=i^{15}-i^{10}$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$;

б) $(z+1)^4-16=0$; в) $z^4+18z^2+81=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=1-i\sqrt{3}$; б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; в) $z=\dfrac{1+i^5}{(1-i)^5}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$; в) $z=10i^9$.

7. Довести співвідношення: а) $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$; б) $|\overline{z}|=|z|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{32}$; б) $\sqrt[3]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z-1|=|\mathrm{Re}\,z|$; б) $\mathrm{Re}\,z+1=|z|$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^4\varphi$.

Варіант 11

1. Обчислити:

а) $i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}$; б) $\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{i}{2}\right)-\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{i}{2}\right)-\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{i}{3}\right)$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=x^2-y$ і $z_2=(y^2-1)i+1$ рівні?

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $z=(\sqrt{3}-i)^{127}$.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^4-(1+i)z^2+2(1+i)=0$;

б) $z^6+4z^3+3=0$; в) $z^4+1=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $z=\dfrac{1+i}{1-i}$; в) $z=i^5-i^4$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=1-i$; б) $z=i+\sqrt{3}$; в) $z=i\cos\dfrac{\pi}{11}+\sin\dfrac{\pi}{11}$.

7. Довести співвідношення: а) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}$; б) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0$; б) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=0$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^4\varphi$.

Варіант 12

1. Обчислити:

а) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$; б) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^6}{\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=9y^2-4-10xi$ і $z_2=8y^2+20i^7$ є спряженими?

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^8+15z^4-16=0$; б) $z^4+4=0$; в) $z^3+8i=0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=\dfrac{7+24i}{5}$; б) $z=-3-4i$; в) $z=3\sin\dfrac{\pi}{10}-3i\cos\dfrac{\pi}{10}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i+\sqrt{3}$; б) $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=-i\pi+ie$.

7. Довести співвідношення:

а) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; б) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ ($n\in\mathbb{Z}$).

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$; б) $\sqrt[6]{-1}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Im}\dfrac{z-i}{z-1}=0$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z-1}=0$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^5\varphi$.

Варіант 13

1. Обчислити: а) $\dfrac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}+\dfrac{2}{-i}+i(1+i)$; б) $\dfrac{3}{1+i}+\dfrac{3}{2-i}+\dfrac{1}{1+2i}$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=x^2+i(x+y)$ і $z_2=(y+6)+i(x-2)$ є рівними?

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2+(i+1)(i-1)=0$; б) $z^4-81=0$; в) $z^3=1$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=5-12i$; б) $z=-2+i$; в) $z=\sin\dfrac{\pi}{13}+i\cos\dfrac{\pi}{13}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=-i$; б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; в) $z=-\dfrac{\pi}{4}$.

7. Довести співвідношення:

а) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$;

б) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $z^2+\overline{z}^2=2$; б) $\operatorname{Re}|z^2-\overline{z}|=2$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^5\varphi$.

Варіант 14

1. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\dfrac{1+i}{1-i}+(2+3i)^3$; б) $z=\dfrac{(1-i)^2}{1+i}+i^7$.

2. При яких дійсних значеннях x і y комплексні числа $z_1=9y^2-4-10xi$ і $z_2=8y^2+20i^7$ є спряженими?

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 3\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3=-8$; б) $z^3+27i=0$; в) $z^4=25$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$; б) $z=\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$; в) $z=-3-4i$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$; б) $z=-i$; в) $z=-\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

7. Довести співвідношення:

а) $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)$; б) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[6]{1}$; б) $\sqrt[5]{-1-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z+1|+|z-1|\le 3$; б) $\pi/4<\operatorname{Arg}(z+i)<\pi/2$.

10. Довести співвідношення $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Варіант 15

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

а) $z_1 = 1 + 2i$ і $z_2 = 2 - 5i$; б) $z_1 = \sqrt{2} + i$ і $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

2. Піднести до степеня: а) $(1+i)^8$; б) $(2+\sqrt{3}i)^2$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 3\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^4 = 9$; б) $x^2 - 12x + 45 = 0$; в) $z^3 = 125i$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа: а) $z = -1 - \sqrt{3}i$; б) $z = i\sqrt{5}$; в) $z = -2$.

6. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 40\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

б) $z = 2i(\cos 0 + i\sin 0)$; в) $z = i^{15}\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4} - i^{14}$.

7. Довести співвідношення:

а) $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$; б) $|z|^2 = z\bar{z}$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{27i}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\dfrac{z-\alpha}{z+\alpha} = 0$; б) $0 < \operatorname{Arg}\dfrac{i-z}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$.

10. Довести співвідношення $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Варіант 16

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

а) $z_1 = 4 + 3i$ і $z_2 = i - 1$; б) $z_1 = (1-5i)^2$ і $z_2 = (1-5i)^2$.

2. Піднести до степеня: а) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{1-3i}{i} + i\right)^4$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 4\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^4 + i = 0$; б) $3x^2 + 7x + 5 = 0$; в) $z^3 = -27$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = 1 + \cos\dfrac{10\pi}{9} + i\sin\dfrac{10\pi}{9}$; б) $z = -1$; в) $z = 12i - 5$.

6. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$; б) $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

в) $z = i\sin(3\pi/4)\cos(\pi/4) - i^{16}$.

7. Довести нерівність $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{i}$; б) $\sqrt[4]{2+2i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z-1| < 1$; б) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right| \ge 1$.

10. Довести співвідношення $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Варіант 17

1. Виконати арифметичні дії над комплексними числами:

а) $z_1 = 2 + \sqrt{5}i$ і $z_2 = 2 - \sqrt{5}i$; б) $z_1 = (3-i)^2$ і $z_2 = 1 + 2i$.

2. Піднести до степеня: а) $(1-i)^{26}$; б) $\left(\dfrac{1+i}{-2i} + i^2\right)^3$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 4\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^5 - 32i = 0$; б) $z^2 - 2iz - 5 = 0$; в) $z^3 - 64i = 0$.

5. Визначити модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = 1 - \cos\dfrac{2\pi}{9} - i\sin\dfrac{2\pi}{9}$; б) $z = e^2 - 9$; в) $z = -12 - 5i$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$; б) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z = -5i - 5i^8$.

7. Довести нерівність $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[4]{i-1}$; б) $\sqrt[5]{-8i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z-1| = |\operatorname{Re} z|$; б) $\begin{cases} 2 < |z - 3i - 4| \le 5, \\ \operatorname{Im} z \ge 4. \end{cases}$

10. Довести співвідношення $e^{i2\pi k} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Варіант 18

1. Обчислити: а) $i^{10} + i^{11} + i^{12}$; б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{i}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{6}\right)$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z = (3 + 2\sqrt{2}i)(3 - 2\sqrt{2}i) + \frac{1}{i}$; б) $z = (1+i)(1-3i)$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 5\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^6 + 64 = 0$; б) $|z| + 2z + 1 = 0$; в) $z^3 + 8i = 0$.

5. Піднести до степеня: $\left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)^{12}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = \frac{1-i}{1+i}$; б) $z = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$; в) $z = (e - \pi)i$.

7. Довести рівності: а) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; б) $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[5]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 4$; б) $\begin{cases} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1, \\ |z-1| < 1. \end{cases}$

10. Довести співвідношення $e^{i\pi k} = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

В а р і а н т 1 9

1. Обчислити: а) $i^{37}-i^{28}+(\sqrt{3}+i)^6$; б) $(1-3i)^3/i$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 5\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2-1=i$; б) $z^2+4=4\overline{z}$; в) $z^4+16=0$.

5. Обчислити: $\dfrac{2i}{(1-i)^8}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=i-\sqrt{3}$; в) $z=i^{19}-i^{20}$.

7. Довести рівності: а) $\overline{(\overline{z})}=z$; б) $|\,\overline{z}\,|=|\,z\,|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[5]{\dfrac{2+2i}{2-2i}}$; б) $\sqrt[3]{2-2i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $-1<\operatorname{Im} z<2$; б) $\operatorname{Im} z+1=|\,z\,|$.

10. Довести співвідношення $e^{i(\varphi+2\pi k)}=e^{i\varphi}$ ($k\in\mathbb{Z}$).

В а р і а н т 2 0

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1=-i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=(-1+2i)^2$, $z_2=1-i$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\dfrac{7}{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}$; б) $z=\dfrac{1-i^3}{(1+i)^3}$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 6\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^3+8=0$; б) $z^3=i$; в) $z^4=-81$.

5. Обчислити: $\dfrac{512}{(1+i\sqrt{3})^{13}}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=4$; б) $z=i-\sqrt{3}$; в) $z=i^{19}-i^{20}$.

7. Довести рівності: а) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; б) $|z^n|=|z|^n$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt{(1-i)(1+i)}$; б) $\sqrt[4]{4i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $\operatorname{Re} z \le -1$; б) $0 \le \arg z \le \pi/3$.

10. Довести співвідношення

$$(e^{i\varphi})^{1/n}=e^{i(\varphi+2k\pi)/n} \quad (k=0,1,\ldots,n-1;\ n\in\mathbb{Z}).$$

Варіант 21

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1=2+2i$, $z_2=i^{15}-i^{10}$; б) $z_1=(-3-i)^2$, $z_2=(1-i)(2+i)$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\dfrac{3}{1+i}+\dfrac{3}{2-i}$; б) $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$.

3. Користуючись формулою Муавра, виразити $\cos 6\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

4. Розв'язати рівняння: а) $z^4=1$; б) $z^6-1=0$; в) $(z-i)^2=-i$.

5. Обчислити: $\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{84}$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=i^{23}$; б) $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=(1-i)^8$.

7. Довести рівності: а) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$; б) $\overline{az}=a\overline{z}$ $(a\in\mathbb{R})$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{-1-i}$; б) $\sqrt[4]{i^4}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $1<\operatorname{Re} z<\operatorname{Im} z+\operatorname{Re} z$; б) $-\pi/2 \le \arg z \le \pi$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^3\varphi$.

Варіант 22

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1 = (1-i)^3$, $z_2 = i^2 - i^3 + i^4$;

б) $z_1 = (\sqrt{3} - 3i)^6$, $z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$; б) $z = \dfrac{5}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}} + \dfrac{i}{2}$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^6 = -64$; б) $|z| + 2z + 1 = 0$; в) $(iz - 3)^2 = 4i$.

5. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z = 20\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$; б) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = i^{25} + i$; б) $z = \left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^2$; в) $z = 1 - \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

7. Довести рівність $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1| + |z_2|\right)$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z| \le 4$; б) $0 < |z - 2i| < 3$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^3 \varphi$.

Варіант 23

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1 = \cos\dfrac{13\pi}{12} + i\sin\dfrac{13\pi}{12}$, $z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}$;

б) $z_1 = (2 - 2i)^4 + 3i^{121}$, $z_2 = (1 + i)^3$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\frac{1+i^5}{(1-i)^5}$; б) $z=\frac{i}{2+i}+i$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{60}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z+|z|-1+i=0$; б) $z^2-\overline{z}=0$; в) $(iz+2)^4=-256$.

5. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)$; б) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z=1-i$; б) $z=\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$; в) $z=1+\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$.

7. Довести рівність $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{2-2i}$; б) $\sqrt[4]{-4}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z|>1$; б) $1<|z+i|\le 2$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\cos^4\varphi$.

Варіант 24

1. Виконати дії над комплексними числами z_1 і z_2:

а) $z_1=4+3i$, $z_2=i-1$; б) $z_1=(\sqrt{3}i-\sqrt{3})^2$, $z_2=(1-i)^{24}$.

2. Визначити дійсну й уявну частини комплексного числа:

а) $z=\frac{1}{1+2i}+\frac{i}{2-i}$; б) $z=\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}$.

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}$.

4. Розв'язати рівняння:

а) $z^2+|z|^2=0$; б) $z^2+4=4\overline{z}$; в) $(iz)^3=64i$.

5. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Подати в тригонометричній формі число:

а) $z = 1 - i\sqrt{3}$; б) $z = -i$; в) $z = -1 + \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$.

7. Довести рівність $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

8. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; б) $\sqrt[4]{-i}$.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок:

а) $|z+3| < 2$; б) $1 < |z+i| \le 2$.

10. За допомогою формул Ейлера понизити степінь тригонометричного виразу $\sin^4 \varphi$.

1.14. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 2

Варіант 1

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3 + 2x^2 + 4x - 8} = O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ при $x \to \infty$;

б) $x^2 + \sin^2 x = o(x)$ при $x \to 0$;

в) $x^m + a_1 x^{m+1} + \ldots + a_n x^{m+n} \sim x^m$ при $x \to 0$,

$$\{m, n\} \subset \mathbb{N},\ \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R};$$

г) $100x + x\sin x = O(x)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to 0$ функції

$$f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \quad (C \ne 0 \text{ – стала}).$$

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - \sin^2 x}{x^2 + \ln(1+3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[5]{\sin x}}{\cos^2 x}$.

4. При яких значеннях α та β функція $f(x) = x^{\alpha}\sin(x^{-\beta})$ є нескінченно малою при $x \to +0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = x + \cos x,\ X = \mathbb{R}$.

Варіант 2

1. Перевірити правильність твердження:

а) $(2+\sin x)x = O(x)$ при $x\to\infty$;

б) $(1+x)^n = 1+nx+o(x)$ при $x\to 0$ ($n\in\mathbb{N}$);

в) $x^m + a_1x^{m+1} + \ldots + a_nx^{m+n} \sim a_nx^{m+n}$ при $x\to+\infty$,

$\{m,n\}\subset\mathbb{N}$, $\{a_1,\ldots,a_n\}\subset\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$;

г) $x = O(100x + x\sin x)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to 0$ функції $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sin 4x + \operatorname{tg}^2 x}$.

4. При яких значеннях α та β функція $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}$ є нескінченно малою при $x\to+0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = 1/x$, $X = (0,a)$ $(a>0)$.

Варіант 3

1. Перевірити правильність твердження:

а) $(x^{-1}+\sin x)x = O(x)$ при $x\to\infty$;

б) $\ln x = o(x^{-\varepsilon})$ при $x\to+0$ ($\varepsilon>0$);

в) $e^{2x}-e^x \sim \sin 2x - \sin x$ при $x\to 0$;

г) $x + x\sin x = O(x)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to 0$ функції $f(x) = \sin x - 2\sin\big(x/2\big)$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ $\{a,b\}\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2/2)+\sin^4 x}{\ln\big(1+\operatorname{tg}(x^4/8)\big)}$.

4. При яких значеннях α та β функція $f(x) = x^{\alpha} \operatorname{arctg}(x^{-\beta})$ є нескінченно малою при $x \to +0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [0, +\infty)$.

Варіант 4

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x^2 + 7x + 5} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$;

б) $2^{-1/x} = o(x^n)$ при $x \to +0$ ($n \in \mathbb{N}$);

в) $1 - x = O^*(1 - \sqrt[3]{x})$ при $x \to 1$;

г) $x = O(x + \sin x)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

($C \neq 0$ – стала, $m \in \mathbb{N}$, $\{a_0, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x \cdot \arcsin 3x + \sin^2(x/2)}$.

4. При яких значеннях α та β функція $f(x) = (1 - x^{\alpha}) x^{\beta}$ є нескінченно малою при $x \to +0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \lg x$, $X = (0, 10)$.

Варіант 5

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^m) \cdot O(x^n) = O(x^{m+n})$ при $x \to +\infty$ ($n > 0$);

б) $1 + x + x^2 = o(x^3)$ при $x \to +\infty$;

в) $\sec x - \operatorname{tg} x = O^*(\pi - 2x)$ при $x \to \pi/2$;

г) $\sqrt{x^2 + 1} - |x| = O(x^{-1})$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_{m-1}}{x^m} \quad (C \neq 0 \text{ – стала, } m \in \mathbb{N},\ m > 1).$$

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \sin x - 2x^2 + x^3}{4 \operatorname{tg} x - 2 \sin^2 x + 5x^5}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = 3 \sin^2 x^2 - 5x^5$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = 2x - 1$, $X = \mathbb{R}$.

Варіант 6

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ при $x \to +\infty$ $(n > m > 0)$;

б) $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = o(x^{m+1})$ при $x \to +\infty$

$(m \in \mathbb{N},\ \{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R})$;

в) $(1 + x)^n - 1 \sim nx$ при $x \to 0$ $(n \in \mathbb{N})$;

г) $x^{-1} = O\left(\sqrt{x^2 + 1} - |x|\right)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = 13x^3 + x^2 \ln x + 1$ $(C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\operatorname{tg}(x^2/2)\right) + \sin^2 x}{\ln \cos 5x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^4 - 2$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = x^{-1}$, $X = [a, +\infty)$ $(a > 0)$.

Варіант 7

1. Перевірити правильність твердження:

а) $C \cdot O(x^n) = O(x^n)$ при $x \to +\infty$ ($n > 0$, C – стала);

б) $x^m = o(2^x)$ при $x \to +\infty$ ($m \in \mathbb{N}$);

в) $3^x + x2^x + \ln x + 1 \sim 3^x$ при $x \to +\infty$;

г) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^{\sin(\pi x)} - 1}{\ln(x^2 - 3x + 3)}$; б) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = 1 - x^n - \cos(x^2)$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [0, 2]$.

Варіант 8

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^n) \cdot O(x^m) = O(x^{n+m})$ при $x \to 0$ ($n > 0$);

б) $\ln x = o(x^{\varepsilon})$ при $x \to +\infty$ ($\varepsilon > 0$);

в) $\sqrt{x^2 + x + 1} - x \sim 1/2$ при $x \to +\infty$;

г) $x^2 = o(x)$ при $x \to \infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x + \ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x} - 1 + \sin^2 x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = 2\sin x - \operatorname{tg} 2x$ відносно функції $g(x) = x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \sin(x^2)$, $X = (-3, 3]$.

Варіант 9

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\dfrac{x^5+4x^4+3x^3+x^2-12}{(x^6+4x^3+12)\operatorname{arctg}2x}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$;

б) $x^{13}2^x=o(3^x)$ при $x\to+\infty$;

в) $n^2+2n\ln n+1\sim n^2$ при $n\to\infty$; г) $x=o(x^2)$ при $x\to 0$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x+a\sqrt{x}}$ ($C\neq 0$ – стала, $a\in\mathbb{R}$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg}2x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x\to 0$ функції $f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x\sin(1/x)$, $X=(0,\pi]$.

Варіант 10

1. Перевірити правильність твердження:

а) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ при $x\to 0$ ($m>n>0$);

б) $x^{13}2^{-x}=o(x^{-m})$ при $x\to+\infty$ ($m\in\mathbb{N}$);

в) $1-\dfrac{1}{1+x}\sim x$ при $x\to 0$; г) $x=o(x^2)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to 0$ функції $f(x)=\arcsin\left(\sqrt{4+x^2}-2\right)$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

4. При яких значеннях α та β функції $f(x)=\sqrt[3]{1-4x}-\sqrt{1-6x}$ і $g(x)=\alpha x^\beta$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sin\sqrt{x}$, $X=[1,+\infty)$.

Варіант 11

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\log_5\left(1+\frac{4}{x}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$;

б) $\ln(\ln x)=o(\ln x)$ при $x\to+\infty$;

в) $n^{n+\frac{1}{n}}+n!+2^n\sim n^n$ при $n\to\infty$;

г) $\sqrt{x^2+x}-x=o(1)$ при $x\to+\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^4+2x^3}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x+\operatorname{tg}^2 x)}{e^{\operatorname{tg}2x}-1}$.

4. Визначити порядок n нескінченно малої при $x\to 0$ функції $f(x)=2^{x^2}-1$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sin(1/x)$, $X=(0,1)$.

Варіант 12

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x\ln x=o(x^{3/2})$ при $x\to+\infty$;

б) $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}\sim\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ при $x\to 0$;

в) $3x+x^2+x^3+\ln(1+x)=O(x)$ при $x\to 0$;

г) $\sqrt{x^2+x}-x=o(1)$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+1-\cos x+\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x+\operatorname{arctg}^2 x+\ln(1+\sin x)}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^4+x+1}$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x^2$, $X=[0,+\infty)$.

Варіант 13

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\sqrt{x^6-3x^4+2}-x^3=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $x^{\ln x}=o(e^x)$ при $x\to+\infty$;

в) $1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\sim\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$;

г) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при $x\to+\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції

$f(x)=\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 5x-\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 4x+\sin^2 x)}{e^{\sin 5x}-1}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to+\infty$ функції

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ відносно функції $g(x)=x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\sin 2x$, $X=[-\pi,\pi]$.

Варіант 14

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}}=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $\log_a x=o(x^\alpha)$ при $x\to+\infty$ ($\alpha>0$, $0<a\neq1$);

в) $1-\cos^3 x\sim\frac{3}{2}\sin^2 x$ при $x\to0$;

г) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^3+ax^2+1}$ ($C\neq0$ – стала, $a\in\mathbb{R}$).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}{\operatorname{tg}x\cdot\arcsin x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin^3 x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to1$ функції $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$ відносно функції $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=kx+b$, $X=\mathbb{R}$ ($k\neq0$ і b – сталі).

Варіант 15

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x}+x\cdot2^{-x}=O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ при $x\to+\infty$;

б) $x^\alpha\log_a x=o(1)$ при $x\to+0$ ($\alpha>0$, $0<a\neq1$);

в) $\cos x-\cos2x=O^*(x^2)$ при $x\to0$;

г) $\sqrt{x^2-1}-x=O^*(1/x)$ при $x\to+\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ($C\neq0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch}2x}{\ln\cos3x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin3x-\cos4x+\operatorname{tg}x}{\ln(1+\sin4x)+1-\cos(x/9)+\operatorname{arctg}x}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to0$ функції $f(x)=\operatorname{ctg}^2 x^3$ відносно функції $g(x)=1/x$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X : $f(x)=x^2$, $X=(-1,1]$.

Варіант 16

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^5 2^{-x}+\dfrac{1}{x}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to+\infty$;

б) $x^3=o(x^2\sqrt{|x|})$ при $x\to 0$;

в) $\dfrac{2x+1}{x^2+2}=O^*\left(\dfrac{3}{x}\right)$ при $x\to\infty$;

г) $3x^2+2x+5=O^*(2x^3+2x+1)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{2^{-x}+\sqrt{x+1}}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[13]{x}-\sqrt[7]{x}}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$.

4. Визначити порядок n нескінченно великої при $x\to+0$ функції $f(x)=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$ відносно функції $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X : $f(x)=x^3$, $X=(-3,5)$.

Варіант 17

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^{-1}+x^{-3}+x^{-4}=O(x^{-1})$ при $x\to+\infty$;

б) $x^3\cdot\sqrt{|x|}=o(x^3)$ при $x\to 0$;

в) $x^3-x^2-x+1=O^*\big((x^3-x)^2\big)$ при $x\to 1$;

г) $\ln(1+e^x)=o(1)$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+9x}}{1-\sqrt{1-x/2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(1+\sin 3x)}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\alpha x^\beta$ і $g(x)=\sin^2 2x+\arcsin^2 x+2\operatorname{arctg} x^2$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=e^x$, $X=[0,10]$.

Варіант 18

1. Перевірити правильність твердження:

а) $2^x\ln^3 x+1=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $x^4=o(x^2\sin x)$ при $x\to 0$;

в) $\sqrt[3]{x+a}=O^*(\sqrt[3]{x})$ при $x\to\infty$ ($a\in\mathbb{R}$);

г) $x^3-x^2-x+1=O^*(x^3-x)$ при $x\to\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}(\pi/4+ax)}{\sin bx}$ ($\{a,b\}\subset\mathbb{R}$, $b\neq 0$);

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^5 x+(1-\cos 2x)^4+x^5}{7\operatorname{tg}^7 x+\sin^6 x+2\sin^5 x}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\alpha x^\beta$ і $g(x)=1-\cos\big(1-\cos(1/x)\big)$ еквівалентні при $x\to\infty$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$, $X=[-1,1]$.

Варіант 19

1. Перевірити правильність твердження:

а) $\sqrt{x^4+3x^3+1}-x^2=O(x)$ при $x\to+\infty$;

б) $(x-1)^3=o\left(\sin(x-1)^2\right)$ при $x\to1$;

в) $x^2+x\sim x^2$ при $x\to\infty$; г) $\dfrac{2x+1}{x^2+2}=O^*\left(\dfrac{3}{x}\right)$ при $x\to1$.

2. Визначити головну частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt{x^3+2\sqrt{x}}-\sqrt{x^2+1}$ ($C\neq0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt[7]{\dfrac{x^3+x}{x^3+1}}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin3x}-1+\arcsin15x}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\dfrac{1}{[x]}$ і $g(x)=\alpha x^{\beta}$ еквівалентні при $x\to\infty$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$, $X=\mathbb{R}$.

Варіант 20

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^2\ln^{10}x+x=O(x^{2+\varepsilon})$ при $x\to+\infty$ ($\varepsilon>0$);

б) $(x-1)^2=o\left(\dfrac{(x-1)^2}{\ln x}\right)$ при $x\to1$;

в) $\sin\sin\operatorname{tg}(x^2/2)\sim x^2/2$ при $x\to0$;

г) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=O^*(x^{-1})$ при $x\to-\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x\to1$ функції $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$ ($C\neq0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(1+1/x)^x}{e}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin4x)+\operatorname{tg}^2\sqrt{x/2}}{\sin5x}$.

4. Нехай $x \to +0$. Довести, що нескінченно мала функція $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ не порівнянна з нескінченно малою функцією $g(x) = x^n$ ($n > 0$), яке б не було значення n, тобто при жодному n не може справджуватися рівність $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, де $0 \neq K \in \mathbb{R}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = e^{-1/x}$, $X = (0,1]$.

Варіант 21

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x \sin x + \sqrt{x} = O(x)$ при $x \to +\infty$;

б) $\dfrac{1}{x^3} = o\left(\dfrac{1}{x^3 \sin x}\right)$ при $x \to \infty$;

в) $\ln \cos 3x \sim -\dfrac{9x^2}{2}$ при $x \to 0$;

г) $\dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1} = O^*(1)$ при $x \to +\infty$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x \to 1$ функції $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \sin \ln \sqrt{\cos \dfrac{\pi}{n}}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + 4 \sin x - \operatorname{tg}^3 x - x^2 + 3x^4}{\operatorname{arctg}^3 x - 6 \sin^2 x + 2x - 8x^3}$.

4. Нехай $x \to 0$. Довести, що нескінченно мала функція $f(x) = e^{-1/x^2}$ не порівнянна з нескінченно малою функцією $g(x) = x^n$ ($n > 0$), яке б не було значення n, тобто при жодному n не може справджуватися рівність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$, де $0\neq K\in\mathbb{R}$.

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=\operatorname{ctg}x,\ X=(0,1)$.

Варіант 22

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x2^x+x^{10}+7=O(3^x)$ при $x\to+\infty$;

б) $\dfrac{1}{x^4}=o\left(\dfrac{1}{(x-1)^4\operatorname{arctg}(1/x)}\right)$ при $x\to+\infty$;

в) $\sqrt{1+x^2}\sim 1+\dfrac{1}{2x^2}$ при $x\to 0$;

г) $x\cos(1/x)=O^*(x)$ при $x\to 0$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x\to 1$ функції $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ ($C\neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x}}{\sin(x^2/2)-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

4. При яких значеннях α та β функції $f(x)=\alpha x^\beta$ та $g(x)=\sqrt{3x+\sqrt{2x+\sqrt{5x}}}$ еквівалентні при $x\to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x)=x\sin x,\ X=[1,+\infty)$.

Варіант 23

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x+2^{x+1}=O(2^x)$ при $x\to+\infty$;

б) $\dfrac{x+1}{x^4+x^2+1}=o\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{(x-1)^2}\right)$ при $x\to+\infty$;

в) $\operatorname{ch}(\pi/n) \sim 1 + \pi^2/(2n^2)$ при $n \to \infty$;

г) $\sec x - \operatorname{tg} x \sim \pi - 2x$ при $x \to \pi/2$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x \to 1$ функції $f(x) = e^x - e$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln(e^{x^3} + 2\sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin x - \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \cos 2x)^4 + x^5}{7\operatorname{tg}^7 x + \sin^6 x + 2\arcsin^5 x}$.

4. При яких значеннях α та β функції $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ і $g(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні при $x \to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $X = \mathbb{R}$.

Варіант 24

1. Перевірити правильність твердження:

а) $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = O(x^m)$ при $x \to +\infty$

($\{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$);

б) $(1 - \sqrt{x})^2 = o\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ при $x \to 1$;

в) $e^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \dfrac{1}{n}$ при $n \to \infty$; г) $1 - x \sim (1 - \sqrt[3]{x})$ при $x \to 1$.

2. Визначити головну частину вигляду $C(1/x)^k$ при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ ($C \neq 0$ – стала).

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі: а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg} x + 2\sin^2 x + 5x^4}$.

4. При яких значеннях α і β функції $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-5x}$ і $g(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні при $x \to 0$?

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X: $f(x) = x^3$, $X = \mathbb{R}$.

1.15. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 3

Варіант 1

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 + C_2(x+1)^5 + C_3(x+1)^{-2}$ диференціальне рівняння $(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$ (C_1, C_2, C_3 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \sin 2x \cdot \cos 4x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to a}\left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; б) $\lim\limits_{x \to \pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1-x} - \ln(1 - x/2) - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \dfrac{x}{1+x^2}$;

б) заданої параметрично: $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

Варіант 2

1. Чи задовольняє параметрично задана функція

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t},\ x = \sin t \quad \left(-\pi/2 \le t \le \pi/2\right)$$

диференціальне рівняння $(1 - x^2)y'' - xy' - 2y = 0$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(20)}$, якщо $y = x^2 e^{2x}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; б) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln(1-x^3)}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$;

б) заданої параметрично: $x=1-t$, $y=1-t^2$.

Варіант 3

1. Чи задовольняє параметрично задана функція

$$y=e^t\sin t,\ x=e^t\cos t\quad(-\pi/4<t<\pi/4)$$

диференціальне рівняння $(x-y^2)\,y''=2(xy'-y)$?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sqrt[5]{3\operatorname{tg}^2x}-1}{2\sin^2x+5\sin x-3}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^3\sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y=\cos x-\ln(\cos x)$;

б) заданої параметрично: $x=t^2$, $y=t^3$.

Варіант 4

1. Чи задовольняє функція $y=e^{-2x}$ рівняння $y''+y'-2y=0$?

2. Знайти $y^{(5)}$, якщо $y=x\ln x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\sin^{-2}bx}$ (a,b – const); б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-50x+49}{x^{100}-100x+99}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}\cdot \sin x + \ln(1+x^2) - x^2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

б) заданої параметрично: $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$.

Варіант 5

1. Чи задовольняє функція $y = \cos 2x$ рівняння $y'' + 4y = 0$?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\pi/2 - \operatorname{arctg} x\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{20} - 2x + 1}{x^{30} - 2x + 1}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x^3 \sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \ln(\cos x)$;

б) заданої параметрично: $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

Варіант 6

1. Чи задовольняє функція $y = e^{2x}\sin x$ рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0\ ?$$

2. Знайти $y^{(40)}$, якщо $y = e^{5x+1}\cos x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (3-2x)^{1/\sin \pi x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

б) заданої параметрично:

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \quad y = 2a\sin t - a\sin 2t \quad (a > 0).$$

Варіант 7

1. Чи задовольняє функція $y = \dfrac{x-2}{x+3}$ рівняння $2(y')^2 = (y-1)\,y''$?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \dfrac{x+1}{x(x-1)}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} x^{1/\ln(e^x-1)}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = e^{1/x} - x$;

б) заданої параметрично: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

Варіант 8

1. Чи задовольняє функція $y = C_1\sin(\omega t + \omega_0) + C_2\cos(\omega t + \omega_0)$ диференціальне рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$ ($C_1, C_2, \omega, \omega_0$ – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(8)}$, якщо $y = x^2/(1-x)$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^4+3x^3-4x^2-9x-4}{3x^4+5x^3+3x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;

б) заданої параметрично: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Варіант 9

1. Чи задовольняє функція $y = \sqrt{8x - 2x^2}$ диференціальне рівняння $y^3 y'' + 16 = 0$?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = (2x^2 + 1)\sin 2x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to \pi/2+0} \dfrac{\ln(x - \pi/2)}{\operatorname{tg} x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x^{-1} + 4x^2$;

б) заданої параметрично: $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.

Варіант 10

1. Чи задовольняє функція $y = (C_1 + C_2 x + x^3)e^x$ диференціальне рівняння $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(6)}$, якщо $y = \dfrac{1}{\sqrt{ax + b}}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 3\cos x + 3\sqrt[3]{1 + x}}{1 + \ln(1 + x) - e^x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x^2 e^{-x^2}$;

б) заданої параметрично: $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - t)$.

Варіант 11

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$ диференціальне рівняння $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = (2x+1)\cdot \ln(1+x)$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x\sin x$;

б) заданої параметрично: $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

Варіант 12

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 x + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$ диференціальне рівняння $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ (C_1, C_2, C_3 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(50)}$, якщо $y = x^2 \sin 2x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(x - \pi/2\right)\cdot \operatorname{ctg} 2x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{1/\sin x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \sqrt{1-2x} - x}{x\sin x - e^{-x} + 1}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

б) заданої параметрично: $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Варіант 13

1. Чи задовольняє функція $y = \frac{1}{2}x(x+2)e^{4x}$ диференціальне рівняння $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \sin 2x \cdot \sin 3x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to 1-0} (\arccos x)^{1-x}$; б) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x} \right)$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+2x}}{x - \sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = e^x x^{-1}$;

г) заданої параметрично: $x = \frac{2t}{1-t^2}$, $y = \frac{t^2}{1-t^2}$.

Варіант 14

1. Чи задовольняє функція $y = 4 + (3x-5)e^x + 2(\cos x + \sin x)$ диференціальне рівняння $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$?

2. Знайти $y^{(5)}$, якщо $y = x^{n-1} \ln x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}$; б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 x - 6\sin x + 2}{2\sin^2 x + 5\sin x - 3}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\ln(1 - x^3)}$.

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x + x^{-1} \ln x$;

б) заданої параметрично: $x = a\cos 2t$, $y = a\cos 3t$ $(a > 0)$.

Варіант 15

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ диференціальне рівняння $y'' + y = 0$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \cos x \cdot \cos 3x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^{-2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x^2 e^{-x}$;

б) заданої параметрично: $x = t \ln t$, $y = t^{-1} \ln t$.

Варіант 16

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ диференціальне рівняння $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ (C_1, C_2, C_3 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(100)}$, якщо $y = (x+1)\, 2^{x+1}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \sin x - x \cos x}{e^x + \ln(1-x) - 1}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = (x^2 - 1)^3$;

б) заданої параметрично: $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

Варіант 17

1. Чи задовольняє функція $y = x^{-1}(C_1 e^x + C_2 e^{-x})$ диференціальне рівняння $xy'' + 2y' - xy = 0$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = x \cdot \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2} - 1}{x \operatorname{tg} x}$.

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$;

б) заданої параметрично: $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$.

Варіант 18

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 x^{3/2} + C_2$ диференціальне рівняння $2xy'' = y'$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \sin^4 2x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3 + \ln x}{2 - 3\ln\sin x}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(1+x)}{\sqrt{1+x} - 1 - \sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

б) заданої параметрично: $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$.

Варіант 19

1. Чи задовольняє функція $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x+C_1)^3}+C_2$ диференціальне рівняння $2y''y'=1$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти d^2y, якщо $y=x^4-3x^2+2$, $x=x(t)$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-e^x+\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y=x^3e^{-x}$;

б) заданої параметрично: $x=a\sec t$, $y=b\operatorname{tg} t$.

Варіант 20

1. Чи задовольняє функція $y=C_1x+C_2-\sin x+\frac{1}{6}x^3$ диференціальне рівняння $y''=x+\sin x$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y=\cos ax\cdot\sin bx$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$ (a,b – const).

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\operatorname{tg}(x^2)}$.

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y=x+\sin x$;

б) заданої параметрично: $x=\frac{a}{t^2+1}$, $y=\frac{a}{t(t^2+1)}$.

Варіант 21

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 x + C_2 + x\ln x + \frac{1}{6}x^3$ диференціальне рівняння $xy'' = 1 + x^2$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = x \cdot \log_2(1 - x)$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x\,\mathrm{arctg}\,x} - \frac{1}{x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3 + x^2}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{e^x + \ln(1-x) - 1}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$;

б) заданої параметрично: $x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $y = at\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.

Варіант 22

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} - (x-2)e^{-x}$ диференціальне рівняння $y'' - 2y = xe^{-x}$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $d^3 y$, якщо $y = x^5 + x^3 + x$, $x = x(t)$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \sin x^3 - x}{x + x^3 - \sin x}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = xe^{-x}$;

б) заданої параметрично: $x = t^3 + 1$, $y = \frac{a^3}{t^2 + a^2}$.

Варіант 23

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + (4x-3)e^{2x} \big/ 32$ диференціальне рівняння $y'' + 2y' = xe^{2x}$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $d^5 y$ у точці $x = 1$, якщо $y = (x^2 - 2x)\cos 3x$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin mx}{\ln \sin x}$ $(m \in \mathbb{N})$; б) $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^4 + x - 2}}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+2x} + x\cos x}{x \ln(1+x)}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = x^{-2} + x^2$;

б) заданої параметрично: $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Варіант 24

1. Чи задовольняє функція $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$ диференціальне рівняння $y'' + y' = xe^{-x}$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

2. Знайти $d^3 y$ у точці $x = 0$, якщо $y = (x+5)^5$.

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} x(a^{1/x} - 1)$ ($a > 0$); б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x^{-2}} - 1}{2\operatorname{arctg}(x^2) - \pi}$.

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln(1+x^2)}.$$

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) заданої рівнянням $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

б) заданої параметрично: $x = \dfrac{t-8}{t^2-4}$, $y = \dfrac{3}{t(t^2-4)}$.

РОЗДІЛ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ

- Збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$. Відкриті, обмежені, замкнені та зв'язні множини в $\mathbb{R}^m$ [2, § 1, 3 гл. 10], [3, п. 1.4, 2.6, додаток А], [4, § 1 гл. 14], [5, § 18], [7, § 2, 4, 5 гл. 2].
- Границя і неперервність скалярної функції векторного аргументу [2, § 2, 4 гл. 10], [4, § 2, 3 гл. 14], [5, § 19], [7, § 6, 7 гл. 2].
- Диференційовність, повний диференціал, частинні похідні і правила диференціювання скалярних функцій векторного аргументу [2, § 1, 2 гл. 11], [4, § 4 гл. 14], [5, § 20], [7, § 1, 3 гл. 4].
- Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора [2, п. 3.1–3.3 § 3 гл. 11], [4, § 5 гл. 14], [5, § 21], [6, § 39], [7, § 13 гл. 4].
- Дослідження скалярних функцій векторного аргументу на внутрішній локальний екстремум [2, п. 3.4, 3.5 § 3 гл. 11], [4, § 6 гл. 14], [6, § 40], [7, § 17 гл. 4].
- Векторні функції векторного аргументу: неперервність, диференційовність, правила диференціювання [2, п. 2.1, 2.2 § 2 гл. 12], [6, п. 41.4–41.8 § 41], [7, § 13, 14 гл. 4].
- Техніка диференціювання неявних функцій векторного аргументу. Заміна змінних у диференціальних виразах [2, п. 2.3 § 2 гл. 12], [4, § 1–4 гл. 15, додаток гл. 15], [6, п. 41.1–41.3, 41.9, 41.10 § 41], [7, § 16 гл. 4].
- Умовний локальний екстремум скалярної функції векторного аргументу. Метод Лагранжа [2, § 3 гл. 12], [4, § 5 гл. 15], [6, § 43], [7, § 18 гл. 4].

2.1. Збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$. Відкриті, обмежені, замкнені та зв'язні множини в $\mathbb{R}^m$

Нехай $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – довільні елементи (*точки*) простору $\mathbb{R}^m$. *Евклідовою метрикою* в $\mathbb{R}^m$ називають величину

$$\rho(\overline{x},\overline{y}) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - y_k)^2}\ ,$$

яка є узагальненням поняття відстані між точками в $\mathbb{R}^3$. Метрика задовольняє такі умови (а к с і о м и м е т р и к и):

1) $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^m\ \rho(\overline{x},\overline{y}) \geq 0;\ \rho(\overline{x},\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$;

2) $\forall \overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^m\ \rho(\overline{x},\overline{y}) = \rho(\overline{y},\overline{x})$ (*аксіома симетрії*);

3) $\forall \overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbb{R}^m\ \rho(\overline{x},\overline{y}) \leq \rho(\overline{x},\overline{z}) + \rho(\overline{z},\overline{y})$ (*аксіома трикутника*).

Метрику в $\mathbb{R}^m$ можна задати не єдиним способом. Наприклад, величини

$$\rho_0(\overline{x},\overline{y}) \overset{\text{def}}{=} \max_{1\leq k\leq m}\left\{|\,x_k - y_k\,|\right\},$$

$$\rho_1(\overline{x},\overline{y}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m}|\,x_k - y_k\,|$$

також задають метрику в $\mathbb{R}^m$, оскільки для них виконані аксіоми 1)–3).

Якщо в $\mathbb{R}^m$ зафіксована деяка метрика ρ, то простір $\mathbb{R}^m$ (точніше, пару $(\mathbb{R}^m,\rho)$) називають *метричним простором*. Далі вважаємо, що $\mathbb{R}^m$ – метричний простір з евклідовою метрикою ρ (m*-вимірний арифметичний евклідів простір*).

Розглянемо *послідовність* точок метричного простору $\mathbb{R}^m$:

$$\overline{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m),\quad n = 1,2,\ldots .$$

Послідовність $\{\overline{x}_n\}$ називають *збіжною* до точки $\overline{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^m) \in \mathbb{R}^m$ і пишуть $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x}_n = \overline{a}$ (або $\overline{x}_n \to \overline{a}$ при $n \to \infty$), якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\overline{x}_n,\overline{a}) = 0$, тобто для будь-якого (як завгодно малого) $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0 = n_0(\varepsilon;\overline{x}_n) \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $n > n_0$ виконано $\rho(\overline{x}_n,\overline{a}) < \varepsilon$.

Оскільки $\rho(\overline{x}_n, \overline{a}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_n^k - a^k)^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ тоді і тільки тоді, коли $x_n^k \to a^k$ при $n \to \infty$ ($k = 1, \ldots, m$), то зі збіжності в просторі $\mathbb{R}^m$ випливає покоординатна збіжність і навпаки.

З означень величин ρ, ρ_0, ρ_1 випливає, що коли відстань між двома точками в одній із метрик прямує до нуля, то вона прямує до нуля й у двох інших метриках. У цьому розумінні кажуть, що метрики ρ, ρ_0, ρ_1 *топологічно еквівалентні*.

Послідовність $\{\overline{x}_n\}$ називають *фундаментальною*, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\overline{x}_n, \overline{x}_{n+p}) = 0 \ \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Кожна збіжна послідовність фундаментальна, а простір $\mathbb{R}^m$ є *повним метричним простором* у тому розумінні, що кожна фундаментальна послідовність $\{\overline{x}_n\}$ елементів цього простору збігається до деякої точки $\overline{a} \in \mathbb{R}^m$. Це випливає з критерію Коші збіжності числової послідовності та зазначеної вище покоординатної збіжності в $\mathbb{R}^m$. Прикладом неповного метричного простору є $\mathbb{Q}^2$ з евклідовою метрикою ρ (його елементами є всі можливі пари раціональних чисел). Справді, якщо μ – ірраціональне число, а r_n – послідовність раціональних чисел така, що $r_n \underset{n\to\infty}{\to} \mu$, то послідовність точок $\overline{x}_n = \left(r_n, 1/n\right) \in \mathbb{Q}^2$ фундаментальна, але не є збіжною в $\mathbb{Q}^2$, оскільки $\overline{x}_n \underset{n\to\infty}{\to} (\mu, 0) \notin \mathbb{Q}^2$.

Множину

$$U_\delta(\overline{x}_0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : \ \rho(\overline{x}, \overline{x}_0) < \delta\}$$

називають δ*-околом точки* $\overline{x}_0$, або m-вимірною *відкритою кулею* радіуса δ з центром у точці $\overline{x}_0$. За аналогією з одновимірним випадком множину

$$\overset{\circ}{U}_\delta(\overline{x}_0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : \ 0 < \rho(\overline{x}, \overline{x}_0) < \delta\}$$

називають *проколотим* δ*-околом точки* $\overline{x}_0$.

Точку $\overline{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^m$ називають *внутрішньою* точкою множини X, якщо ця точка належить множині X разом із деяким своїм δ-околом, тобто $\exists \delta > 0 : U_\delta(\overline{x}_0) \subset X$.

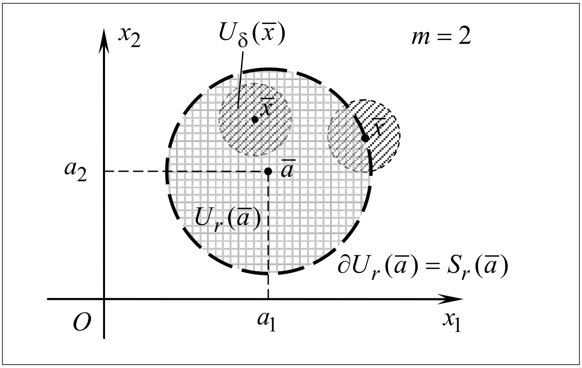


Рис. 21. Відкрита куля

Множину $X \subset \mathbb{R}^m$ називають *відкритою*, якщо всі її точки внутрішні. Наприклад, відкритими множинами в $\mathbb{R}^m$ є $\overset{\circ}{U}_r(\overline{a})$, куля $U_r(\overline{a})$ (рис. 21), а також координатний брус (рис. 22)

$$B_{r_1, r_2, \ldots, r_m}(\overline{a}) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : |\, x_k - a_k \,| < r_k,\, k = 1, 2, \ldots, m\}$$

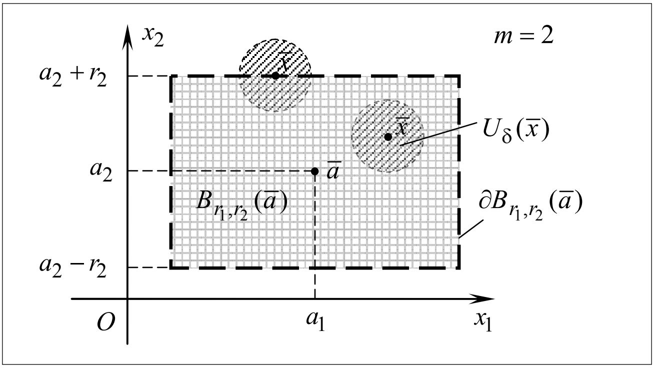


Рис. 22. Відкритий координатний брус

Множину $Y \subset \mathbb{R}^m$ називають *обмеженою*, якщо її можна помістити в кулю скінченного радіуса. На рис. 23 Y_1 – відкрита обмежена множина, на рис. 24 Y_2 – відкрита необмежена множина.

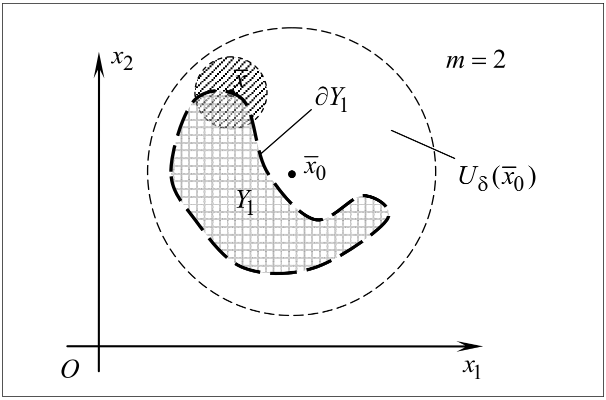


Рис. 23. Y_1 – відкрита обмежена множина

Точку $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ називають *межовою* точкою множини $X \subset \mathbb{R}^m$, якщо в будь-якому δ-околі цієї точки є як точки з X, так і точки, які не належать X. Множину всіх межових точок множини X називають *межею* множини X і позначають символом ∂X. На рис. 21–24 межі множин зображено пунктиром, оскільки множини $U_r(\bar{a})$, $B_{r_1,r_2}(\bar{a})$, Y_1, Y_2 – відкриті.

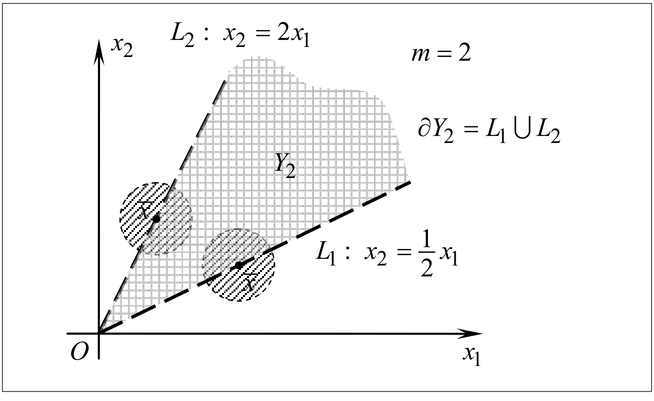


Рис. 24. Y_2 – відкрита необмежена множина

Межею m-вимірної кулі $U_\delta(\overline{x}_0)$ є m-*вимірна сфера*

$$S_\delta(\overline{x}_0) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : \rho(\overline{x}, \overline{x}_0) = \delta\},$$

тобто $\partial U_\delta(\overline{x}_0) = S_\delta(\overline{x}_0)$ $(\partial \overset{\circ}{U}_\delta(\overline{x}_0) = S_\delta(\overline{x}_0) \bigcup \{\overline{x}_0\})$.

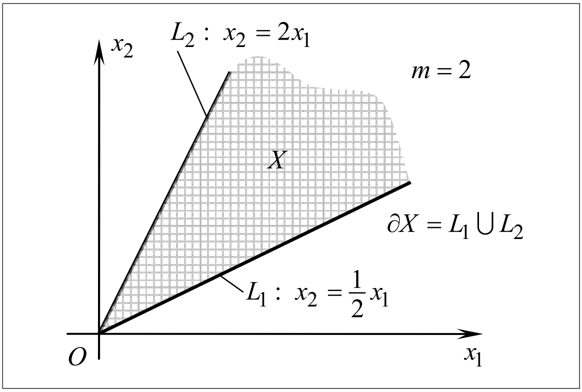


Рис. 25. Межа множини X

Межі ∂X множини X належать також ізольовані точки множини X. Точку $\overline{x}_0 \in X$ називають *ізольованою* точкою множини $X \subset \mathbb{R}^m$, якщо в деякому її δ-околі $U_\delta(\overline{x}_0)$ немає інших точок з X, окрім самої точки $\overline{x}_0$ (рис. 26).

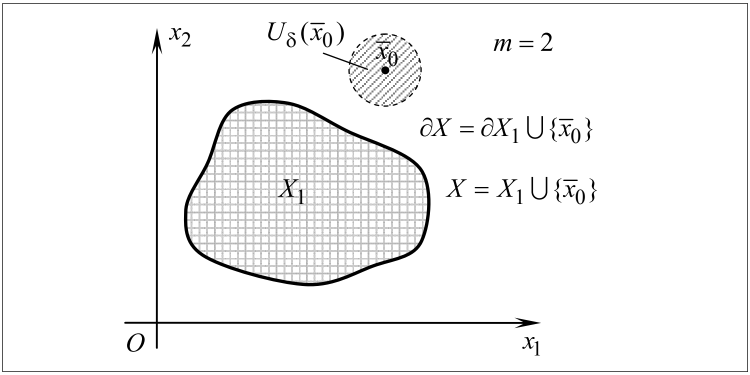


Рис. 26. Ізольована точка множини X_1

Точку $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ називають *граничною* точкою множини X, якщо в будь-якому δ-околі цієї точки є безліч точок з X, іншими словами, якщо існує послідовність різних точок $\overline{x}_n \in X$ така, що $\overline{x}_n \underset{n\to\infty}{\to} \overline{x}$. Очевидно, кожна внутрішня точка множини X є її граничною точкою. Граничною точкою множини $X \subset \mathbb{R}^m$ є також кожна її межова неізольована точка.

Множину X називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки, тобто $X = X \bigcup \partial X$ (рис. 25).

Замкнену й обмежену множину $X \subset \mathbb{R}^m$ називають *компактом* у $\mathbb{R}^m$ (рис. 26). *Характеристичною властивістю* компакту $X \subset \mathbb{R}^m$ є те, що кожна послідовність точок $\overline{x}_n \in X$ містить збіжну підпослідовність $\overline{x}_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0 \in X$.

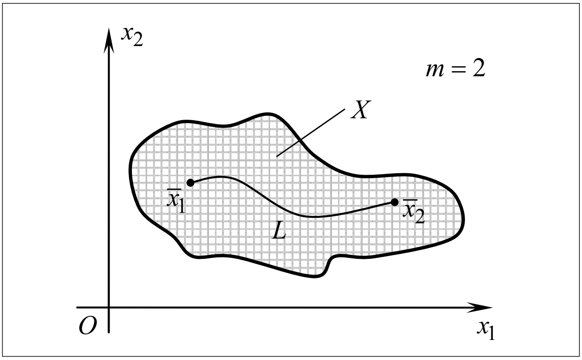


Рис. 27. Зв'язна множина

Множину $X \subset \mathbb{R}^m$ називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна сполучити неперервною кривою L, яка цілком належить X (рис. 27).

2.2. Границя і неперервність скалярної функції векторного аргументу

Нехай $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – довільні елементи (точки) простору $\mathbb{R}^m$. *Евклідовою нормою* елемента $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ називають величину

$$\| \overline{x} \| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}\,,$$

яка є узагальненням поняття довжини вектора в $\mathbb{R}^3$.

Оскільки $\mathbb{R}^m$ – лінійний простір з операціями додавання векторів

$$\overline{x} + \overline{y} \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

і множенням вектора на скаляр

$$\alpha\overline{x} \overset{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m),\ \alpha \in \mathbb{R},$$

то з означень метрики (розд. 2.1) і норми випливає, що $\rho(\overline{x}, \overline{y}) = \| x - y \|$.

Норма задовольняє такі умови (аксіоми норми):

1) $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^m \quad \| \overline{x} \| \geq 0$; $\| \overline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$;

2) $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^m\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \| \alpha\overline{x} \| = |\alpha| \| \overline{x} \|$;

3) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^m \quad \| \overline{x} + \overline{y} \| \leq \| \overline{x} \| + \| \overline{y} \|$.

Лінійний простір з фіксованою нормою називають лінійним *нормованим простором*.

Простір $\mathbb{R}^m$ є повним лінійним нормованим простором, або, як кажуть, *банаховим простором*.

За допомогою формули

$$(\overline{x}, \overline{y}) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k y_k}$$

у просторі $\mathbb{R}^m$ визначений *скалярний добуток* елементів (векторів), який задовольняє умови (аксіоми скалярного добутку):

1) $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^m \quad (\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$; $\quad (\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$;

2) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^m \quad (\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;

3) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^m \ \ (\bar{x}+\bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;

4) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^m \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$.

Формули

$$\| \bar{x} \| = \rho(\bar{x}, \bar{0}) = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})},$$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \| \bar{x} - \bar{y} \| = \sqrt{(\bar{x}-\bar{y}, \bar{x}-\bar{y})}$$

виражають зв'язок між евклідовими нормою, метрикою і скалярним добутком. Користуючись евклідовою нормою, δ-окіл, проколотий δ-окіл і сферу радіуса δ у $\mathbb{R}^m$ можна задати відповідно нерівностями і рівністю

$$\| \bar{x} - \bar{x}_0 \| < \delta, \quad 0 < \| \bar{x} - \bar{x}_0 \| < \delta, \quad \| \bar{x} - \bar{x}_0 \| = \delta.$$

Суть поняття границі функції f векторного аргументу $x \in \mathbb{R}^m$ така сама, як і в одновимірному випадку ($m = 1$). Нехай функція f визначена при $0 < \| \bar{x} - \bar{x}_0 \| < r$. Кажуть, що f має в точці $\bar{x}_0$ скінченну (m*-вимірну*) границю і пишуть

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = A = \text{const}$$

або

$$f(\bar{x}) \to A \ \text{ при } \bar{x} \to \bar{x}_0,$$

якщо для будь-якого (як завгодно малого) $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}_0; f) > 0$ таке, що $| f(\bar{x}) - A | < \varepsilon$ при всіх $0 < \| \bar{x} - \bar{x}_0 \| < \delta$.

Інші випадки означення границі функції в розумінні Коші мають вигляд:

$$\left(\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = +\infty \ (-\infty) \right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{r} \forall \mathrm{E} > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\mathrm{E}, \bar{x}_0; f) > 0: \\ f(\bar{x}) > \mathrm{E} \ (< -\mathrm{E}) \ \ \forall \bar{x}: 0 < \| \bar{x} - \bar{x}_0 \| < \delta. \end{array} \right)$$

Так само, як і в одновимірному випадку ($m = 1$), означають поняття границі функції в розумінні Гейне (мовою послідовностей):

$$\left(\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = A \right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\forall \bar{x}_n \to \bar{x}_0 \ \ (\bar{x}_n \neq \bar{x}_0) \quad f(\bar{x}_n) \to A \right).$$

Проте аналога необхідної і достатньої умови існування границі в точці x_0 для одновимірного випадку $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$

при $m \geq 2$ немає, оскільки при $m \geq 2$ існує безліч шляхів, уздовж яких точка $\overline{x}$ може прямувати до точки $\overline{x}_0$. Розглянемо, наприклад, функцію ($m = 2$)

$$f(\overline{x}) = \frac{x_1 \sqrt[3]{x_2}}{x_1^2 + x_2}, \quad \overline{x} = (x_1, x_2),$$

і точку $\overline{x}_0 = \overline{0} = (0,0)$. Якщо $\overline{x} \to \overline{0}$ уздовж прямих $x_2 = kx_1$, то

$$f(\overline{x}) = f(x_1, kx_1) = \frac{\sqrt[3]{k}\ \sqrt[3]{x_1}}{x_1 + k} \underset{x_1 \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \forall k.$$

Якщо ж $\overline{x} \to \overline{0}$ уздовж кубічної параболи $x_2 = x_1^3$, то

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_1^3) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_1^3} = \frac{1}{1 + x_1} \underset{x_1 \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Тому двовимірна (*подвійна*) границя цієї функції при $\overline{x} \to \overline{0}$ не існує.

Потрібно розрізняти m-кратні границі і так звані *повторні границі* функції по різних змінних. При $m = 2$ границі

$$A = \lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2),$$

$$B = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$$

називають повторними, на відміну від двовимірної (подвійної) границі

$$C = \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2) \qquad \left(\overline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)\right).$$

Загалом, $A \neq B \neq C$. Наприклад, для функції

$$f(\overline{x}) = \frac{2x_1 + 3x_2}{5x_1 + 7x_2}$$

і точки $\overline{x}_0 = \overline{0} = (0,0)$ маємо

$$A = \lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = \frac{2}{5} \neq B = \lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = \frac{3}{7},$$

а подвійна границя C взагалі не існує.

Нехай функція f визначена при $\|\overline{x}-\overline{x}_0\|<\delta$. Кажуть, що f *неперервна в точці* $\overline{x}_0$, якщо $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})=f(\overline{x}_0)$. Якщо функція f неперервна в кожній точці множини X, то кажуть, що f *неперервна на множині* X і пишуть $f\in C_X$.

Нехай $f\in C_X$. Функцію f називають *рівномірно неперервною на* $X\subset\mathbb{R}^m$, якщо (як і в одновимірному випадку)

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon;f)>0:$

$$|f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)|<\varepsilon\quad \forall\overline{x},\overline{x}_0\in X:\ \|\overline{x}-\overline{x}_0\|<\delta.$$

Для скалярної функції векторного аргументу ($m\geq 2$) справджуються теореми про локальні і глобальні її властивості. Ці теореми є аналогами таких самих теорем для одновимірного випадку. Зупинимося на деяких із них.

Теорема про арифметичні операції над неперервними функціями. Нехай функції f і g неперервні в точці $\overline{x}$. Тоді функції: 1) Cf ($C\in\mathbb{R}$), 2) $f+g$, 3) $f\cdot g$, 4) f/g ($g(\overline{x})\neq 0$) також неперервні в точці $\overline{x}$.

Теорема про неперервність складної функції. Нехай функції

$$x_1=x_1(t_1,t_2,\ldots,t_k),\, x_2=x_2(t_1,t_2,\ldots,t_k),\,\ldots,\, x_m=x_m(t_1,t_2,\ldots,t_k)$$

неперервні в точці $\overline{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_k)\in\mathbb{R}^k$, а функція

$$f=f(\overline{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

неперервна у відповідній точці

$$\overline{x}=\overline{x}(\overline{t})=\left(x_1(t_1,t_2,\ldots,t_k),x_2(t_1,t_2,\ldots,t_k),\ldots,x_m(t_1,t_2,\ldots,t_k)\right).$$

Тоді *складна* функція

$$F=F(\overline{t})\overset{\text{def}}{=}f(\overline{x}(\overline{t}))=f(x_1(\overline{t}),x_2(\overline{t}),\ldots,x_m(\overline{t}))$$

неперервна в точці $\overline{t}$.

Теорема Больцано. Нехай: 1) $X\subset\mathbb{R}^m$ – зв'язна множина, $f\in C_X$; 2) $f(x_1)=A<f(x_2)=B$, $\overline{x}_1,\overline{x}_2\in X$. Тоді для кожного числа $C\in(A,B)$ існує точка $\overline{\xi}\in X$ така, що $f(\overline{\xi})=C$.

Теорема Вейєрштрасса. Нехай $X\subset\mathbb{R}^m$ – компакт, $f\in C_X$. Тоді:

1) $|f(\overline{x})| \le M \quad \forall \overline{x} \in X \quad (M = \text{const} > 0)$;

2) $\exists \overline{x}^*,\ \overline{x}_* \in X:\ f(\overline{x}^*) = \sup\limits_{\overline{x} \in X} f(\overline{x}) = \max\limits_{\overline{x} \in X} f(\overline{x})$,

$$f(\overline{x}_*) = \inf_{\overline{x} \in X} f(\overline{x}) = \min_{\overline{x} \in X} f(\overline{x}).$$

Теорема Кантора. Нехай $X \subset \mathbb{R}^m$ – компакт, $f \in C_X$. Тоді функція f рівномірно неперервна на X.

2.3. Диференційовність, повний диференціал, частинні похідні і правила диференціювання скалярних функцій векторного аргументу

Розглянемо спочатку функцію двох змінних $f(M) = f(x, y)$, $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Як і в одновимірному випадку, основні властивості функції f в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ залежать від структури її *повного приросту* в цій точці:

$$\Delta f(M_0) \overset{\text{def}}{=} f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$(\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0).$$

Величини

$$\Delta_x f(M_0) \overset{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y f(M_0) \overset{\text{def}}{=} f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

називають *частинними приростами* функції f в точці M_0 по змінних x і y відповідно.

Функцію f називають *диференційовною в точці* M_0, якщо

$$\Delta f(M_0) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + o(r)$$

при $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, а величини $A_1 = A_1(M_0)$ і $A_2 = A_2(M_0)$ не залежать від Δx і Δy (рис. 28). Лінійну частину повного приросту диференційовної функції (як і в одновимірному випадку) називають *диференціалом* (точніше, *повним диференціалом*) функції в точці M_0 і позначають $df(M_0) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y$.

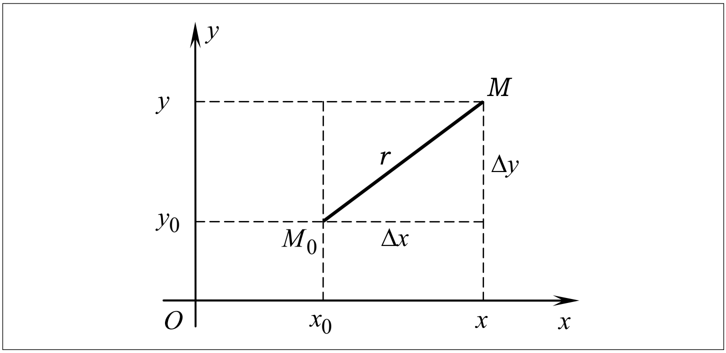


Рис. 28. Прирости аргументів

Якщо в означенні диференційовності покласти $\Delta y = 0$ або $\Delta x = 0$, то дістанемо відповідно

$$\Delta_x f(M_0) = A_1 \Delta x + o(\Delta x),$$

$$\Delta_y f(M_0) = A_2 \Delta y + o(\Delta y),$$

звідки випливає, що

$$A_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x}, \quad A_2 = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(M_0)}{\Delta y}.$$

Ці границі називають *частинними похідними функції* f *у точці* M_0 по змінних x і y відповідно і позначають символами

$$f'_x(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \quad f'_y(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0).$$

Таким чином, якщо функція f диференційовна в точці M_0, то вона має в цій точці частинні похідні.

З означення частинної похідної випливає, що вона є *швидкістю зміни функції по даному аргументу* (при фіксованих значеннях решти аргументів). Звідси випливає просте п р а в и л о в і д ш у к а н н я ч а с т и н н и х п о х і д н и х: якщо потрібно знайти частинну похідну функції по деякій змінній, то всі інші змінні вважають сталими і використовують правила диференціювання скалярних функцій скалярного аргументу. Наприклад, для функції $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$, маємо

$$f'_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)y-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)},\ \ f'_y(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}.$$

Скориставшись поняттям частинної похідної, умову диференційовності і формулу для повного диференціала можна записати відповідно так:

$$\Delta f(M_0)=df(M_0)+o(r) \ \text{ при } \ r\to 0,$$

$$df(M_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y.$$

Якщо застосувати останню формулу до функцій $f(x,y)=x$ і $f(x,y)=y$, то дістанемо

$$dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x,$$

$$dy=0\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y=\Delta y.$$

Отже, як і в одновимірному випадку, диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту. Враховуючи це, формулу для диференціала записують у вигляді

$$df(M_0)=f'_x(M_0)\,dx+f'_y(M_0)\,dy.$$

Для функції m змінних повний приріст, умова диференційовності і формула для повного диференціала мають відповідно вигляд

$$\Delta f(\overline{x}_0)\overset{\text{def}}{=}f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)=f(\overline{x}_0+\Delta\overline{x})-f(\overline{x}_0),$$

де $\Delta\overline{x}\overset{\text{def}}{=}\overline{x}-\overline{x}_0=(\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_m)$ – приріст векторного аргументу,

$$\Delta f(\overline{x}_0)=df(\overline{x}_0)+o(r)$$

$$\text{при } \ r=\|\overline{x}-\overline{x}_0\|=\|\Delta\overline{x}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\Delta x_k^2}\to 0,$$

$$df(\overline{x}_0)=\sum_{k=1}^{m}f'_{x_k}(\overline{x}_0)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{m}f'_{x_k}(\overline{x}_0)dx_k.$$

Як уже зазначено раніше, з диференційовності функції f у точці $\overline{x}_0$ випливає існування в цій точці скінченних частинних похідних функції f. Обернене твердження при $m\ge 2$ неправильне (нагадаємо, що при $m=1$ диференційовність функції f у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ еквівалентна існуванню скінченної похідної $f'(x_0)$). Наприклад, для функції

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0, \quad g(0,0) = 0,$$

маємо

$$\Delta_x g(0,0) = g(0 + \Delta x, 0) - g(0,0) = \frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} = 0,$$

$$\Delta_y g(0,0) = g(0, 0 + \Delta y) - g(0,0) = \frac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + (\Delta y)^2} = 0,$$

а отже, $g'_x(0,0) = 0$, $g'_y(0,0) = 0$. Однак

$$\Delta g(0,0) = g(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - g(0,0) =$$

$$= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \neq o(r)$$

при $r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, оскільки, наприклад,

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right) r} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)^{3/2}} = \left[\Delta x = \Delta y\right] =$$

$$= \frac{(\Delta x)^2}{2^{3/2} (\Delta x)^3} = \frac{1}{2^{3/2} \Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \infty .$$

Таким чином, існування частинних похідних $f'_{x_k}(\overline{x}_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ є тільки необхідною умовою диференційовності функції f в точці $\overline{x}_0$.

Ще однією необхідною умовою диференційовності функції f в точці $\overline{x}_0$ є неперервність f у цій точці, оскільки з означення диференційовності випливає, що $\Delta f(M_0) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$, тобто

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Достатньою умовою диференційовності функції f у точці $\overline{x}_0$ є неперервність її частинних похідних $f'_{x_k}(\overline{x}_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ у цій точці.

Символом C_X^1 позначають множину (клас) усіх дійсних функцій векторного аргументу, які мають неперервні частинні похідні $f'_{x_k}(\overline{x})$ $(k=1,2,\ldots,m)$ по всіх змінних у кожній точці $\overline{x}\in X\subset\mathbb{R}^m$. Отже, запис $f\in C_X^1$ означає, зокрема, що f диференційовна в кожній точці множини X.

Нехай $u=u(\overline{x})$, $v=v(\overline{x})$, $f(\overline{x})$ – диференційовні функції. Під правилами диференціювання скалярних функцій векторного аргументу розуміють, зокрема, правила обчислення диференціалів суми $u+v$, добутку uv, частки u/v і складної функції:

1) $d(u+v)=du+dv$; 2) $d(Cu)=Cdu\quad (C=\text{const})$;

3) $d(uv)=vdu+udv$; 4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}\quad (v\neq 0)$;

5) $df(\overline{x})=\sum\limits_{i=1}^{m} f'_{x_i}dx_i$, де $x_i=x_i(\overline{t})$ – диференційовні функції аргументу $\overline{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_k)$, а також наслідки, які випливають із цих правил.

Наслідок 1. З формули 5) випливає, що диференціал функції має властивість *інваріантності форми*, тобто диференціал обчислюють за однією формулою як у випадку незалежних, так і у випадку залежних (так званих *проміжних*) змінних x_i $(i=1,2,\ldots,m)$.

Наслідок 2. Нехай $x_i=x_i(t_1,t_2,\ldots,t_k)$, $i=1,2,\ldots,m$, – диференційовні функції. Тоді $f=f(\overline{x}(\overline{t}))\equiv F(\overline{t})$ і формула 5) набуває вигляду

$$df=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+\cdots+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k\right)+\cdots+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}dt_2+\cdots+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}dt_k\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right)dt_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\right)dt_k=$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial t_j} dt_j .$$

Оскільки $dt_j = \Delta t_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ – прирости незалежних змінних (довільні дійсні числа), то, прирівнявши коефіцієнти при dt_j у лівій і правій частинах рівності, дістанемо *формули для частинних похідних складної функції*:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k) ,$$

тобто частинна похідна складної функції по незалежній змінній (t_j) дорівнює сумі добутків частинної похідної функції по проміжній змінній (x_i) на частинну похідну проміжної змінної по незалежній змінній (суму беруть по всіх проміжних змінних). Наприклад, для функції $f = f(u, v, w)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ – проміжні змінні, а x, y – незалежні змінні, маємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} .$$

Якщо $f = f(t, x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то f насправді залежить тільки від одного аргументу t, і тому

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

Цю формулу називають *формулою повної похідної* $\frac{df}{dt}$. Доданок $\frac{\partial f}{\partial t}$ тут є частинною похідною по змінній t, яка міститься у виразі явно. Наприклад, якщо $f = \sqrt{t} + \sin x + e^y + xz$, то $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$,

а $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + (\cos x + z) \frac{dx}{dt} + e^y \frac{dy}{dt} + x \frac{dz}{dt}$.

2.4. Частинні похідні і диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Частинні похідні $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ називають також *частинними похідними 1-го порядку функції* $f = f(x, y)$. За допомогою цих похідних можна утворити чотири *частинні похідні 2-го порядку*:

$$f''_{xx} \overset{\text{def}}{=} (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} \overset{\text{def}}{=} (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f''_{xy} \overset{\text{def}}{=} (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} \overset{\text{def}}{=} (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(останні дві похідні називають *мішаними частинними похідними 2-го порядку*). Аналогічно можна утворити частинні похідні 3-го, ..., n-го порядків.

Можна довести, що коли всі мішані похідні n-го порядку неперервні, то вони (а також усі мішані похідні порядку $k \le n$) не залежать від того, у якій послідовності їх було знайдено. Далі завжди припускаємо, що ця умова виконана. Тому коректним є таке позначення частинної похідної n-го порядку для функції m змінних:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_m = n).$$

Цей запис означає, що функцію f продиференційовано n разів: k_1 разів по змінній x_1, k_2 разів по змінній x_2, ..., k_m разів по змінній x_m. Якщо всі частинні похідні n-го порядку функції f неперервні в кожній точці $\bar{x}$ множини $X \subset \mathbb{R}^m$, то пишуть $f \in C_X^n$.

Якщо $f = f(x, y)$, то її повний диференціал $df = f'_x dx + f'_y dy$ називають *диференціалом* (точніше, *повним диференціалом*) *1-го порядку*, або *першим диференціалом*, функції f. За допомогою першого диференціала можна утворити диференціали вищих порядків: $d^2 f \overset{\text{def}}{=} d(df)$, $d^3 f \overset{\text{def}}{=} d(d^2 f)$ і взагалі

$$d^n f \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1} f) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

причому $d^1 f \overset{\text{def}}{=} df$, $d^0 f \overset{\text{def}}{=} f$. Якщо вважати, що при кожному диференціюванні диференціали (тобто прирости) dx і dy незалежних змінних x і y беруть ті самі, то можна вивести прості залежності між диференціалами і частинними похідними n-го порядку. Наприклад, застосовуючи правила диференціювання, дістаємо

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x)dx + d(f'_y)dy = \\ &= (f''_{xx} dx + f''_{xy} dy)dx + (f''_{yx} dx + f''_{yy} dy)dy = \\ &= f''_{xx}(dx)^2 + 2 f''_{xy} dxdy + f''_{yy}(dy)^2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 . \end{aligned}$$

Отриману формулу записують у символічній (операторній) формі так:

$$d^2 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f .$$

У загальному випадку

$$d^n f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f ,$$

$$d^n f(\overline{x}) = d^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Наприклад, при $n = 3$ для функції двох змінних ($m = 2$) маємо

$$d^3 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3 ,$$

а при $n=2$ для функції m змінних дістаємо

$$d^2 f(\overline{x}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \ .$$

При $n \geq 2$ диференціал $d^n f$ (на відміну від df) вже не має властивості інваріантності форми. Справді, при $m=n=2$

$$d^2 f(x,y) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 ,$$

де x і y – незалежні змінні. Якщо ж $x = x(t_1,t_2)$, $y = y(t_1,t_2)$, де t_1 і t_2 – незалежні змінні, то

$$d^2 f = d\,(f'_x dx + f'_y dy) = d\,(f'_x dx) + d\,(f'_y dy) =$$

$$= dx\, d(f'_x) + f'_x d^2 x + dy\, d(f'_y) + f'_y d^2 y =$$

$$= dx\,(f''_{xx} dx + f''_{xy} dy) + dy\,(f''_{yx} dx + f''_{yy} dy) + f'_x d^2 x + f'_y d^2 y =$$

$$= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y \ .$$

Однак якщо x і y – лінійні функції змінних t_1 і t_2, тобто

$$x = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + b_1 , \quad y = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + b_2 \quad (a_{ij}, b_i - \text{const}),$$

то інваріантність форми зберігається, оскільки $d^2 x = d^2 y \equiv 0$.

Якщо $f \in C_X^{n+1}$ (тобто функція f має неперервні на множині $X \subset \mathbb{R}^m$ частинні похідні до ($n+1$)-го порядку включно по всіх змінних), то, як і в одновимірному випадку, можна записати *формулу Тейлора n-го порядку з залишковим членом у формі Лагранжа*:

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) =$$

$$= df(\overline{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\overline{x}_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(\overline{x}_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\overline{\xi}) ,$$

де $\overline{\xi}$ – деяка точка на відрізку, який сполучає точки $\overline{x}_0$ і $\overline{x}$ (рис. 29).

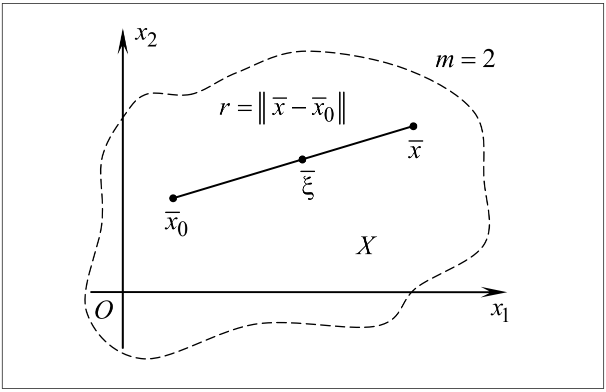


Рис. 29. Відрізок, який сполучає точки $\overline{x}_0$ і $\overline{x}$

Якщо $f \in C_X^n$, то можна записати *локальну формулу Тейлора n-го порядку*

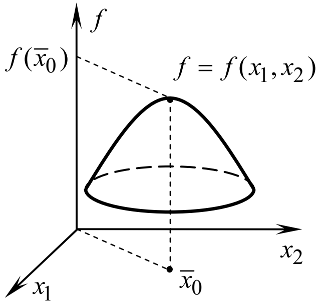
$$\Delta f(\overline{x}_0) = df(\overline{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\overline{x}_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(\overline{x}_0) + o(r^n)$$

при $r = \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| \to 0$. У випадку $n = 2$ ця формула має вигляд

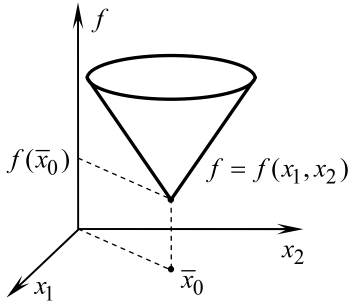
$$\Delta f(\overline{x}_0) = df(\overline{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\overline{x}_0) + o(r^2) \text{ при } r \to 0 .$$

2.5. Дослідження скалярних функцій векторного аргументу на внутрішній локальний екстремум

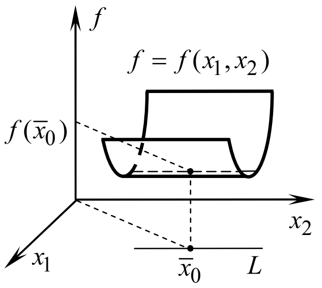
Нехай $f \in C_X$, $X \subset \mathbb{R}^m$. Якщо $\Delta f(\overline{x}_0) = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \le 0$ (≥ 0) для будь-якої точки $\overline{x}$ з деякого околу $U_\delta(\overline{x}_0) \subset X$ внутрішньої точки $\overline{x}_0$ множини X, то кажуть, що функція f має в точці $\overline{x}_0$ *внутрішній локальний максимум* (*внутрішній локальний мінімум*). Якщо в деякому околі $U_\delta(\overline{x}_0) \subset X$ рівність $\Delta f(\overline{x}_0) = 0$ можлива тільки при $\overline{x} = \overline{x}_0$, то максимум (мінімум) у цій точці називають *строгим* (інакше – *нестрогим*) (рис. 30).



а) $\overline{x}_0$ – точка строгого внутрішнього локального максимуму $f(\overline{x}_0)$;



б) $\overline{x}_0$ – точка строгого внутрішнього локального мінімуму $f(\overline{x}_0)$;



в) L – лінія точок $\overline{x}_0$ нестрогого локального мінімуму $f(\overline{x}_0)$.

Рис. 30. Локальні екстремуми

Якщо функція f має внутрішній локальний *екстремум* (максимум або мінімум) у точці $\overline{x}_0$, то вона має цей екстремум у точці $\overline{x}_0$ і по кожній змінній окремо. Тому або

$$f'_{x_1}(\overline{x}_0) = 0,\ f'_{x_2}(\overline{x}_0) = 0, \ldots,\ f'_{x_m}(\overline{x}_0) = 0$$

$$(\,df(\overline{x}_0) = 0\,),$$

або f не диференційовна в точці $\overline{x}_0$. Точку $\overline{x}_0$, для якої $df(\overline{x}_0) = 0$, називають *стаціонарною точкою функції* f. Отже, необхідною умовою того, щоб f у точці $\overline{x}_0$ мала внутрішній локальний екстремум, є або умова стаціонарності точки $\overline{x}_0$, або умова недиференційовності функції в цій точці.

Якщо $f \in C_X^2$, то достатню умову внутрішнього локального екстремуму в стаціонарній точці $\overline{x}_0$ можна виразити через $d^2 f(\overline{x}_0)$. Запишемо ($\overline{x}_0$ – стаціонарна точка) локальну формулу Тейлора 2-го порядку

$$\Delta f(\overline{x}_0) = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) = \frac{1}{2!} d^2 f(\overline{x}_0) + o(r^2)$$

при $r \to 0$. Звідси випливає, що знак повного приросту $\Delta f(\overline{x}_0)$ в достатньо малому околі точки $\overline{x}_0$ (тобто при малих $r \geq 0$) визначається знаком 2-го диференціала $d^2 f(\overline{x}_0)$, *який є квадратичною формою* приростів dx_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) незалежних змінних:

$$d^2 f(\overline{x}_0) = \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(\overline{x}_0) dx_i dx_j = \left[f''_{x_i x_j}(\overline{x}_0) = a_{ij} \right] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j .$$

Залежно від знаку розрізняють такі типи квадратичних форм:
1) *додатно визначені* (*від'ємно визначені*) квадратичні форми – це такі квадратичні форми, які набувають додатних (від'ємних) значень, перетворюючись на нуль тільки при $dx_1 = dx_1 = \cdots = dx_m = 0$;
2) *додатно сталі* (*від'ємно сталі*) квадратичні форми – це такі квадратичні форми, які набувають невід'ємних (недодатних) значень, перетворюючись на нуль не тільки при $dx_1 = dx_1 = \cdots = dx_m = 0$;
3) *знакозмінні* квадратичні форми – це такі квадратичні форми, які набувають як додатних, так і від'ємних значень.

Наприклад, при $m = 2$ квадратичні форми

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2$$

і

$$-x_1^2 - 4x_1 x_2 - 6x_2^2 = -(x_1 + 2x_2)^2 - 2x_2^2$$

є відповідно додатно визначеною і від'ємно визначеною, квадратичні форми

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

і

$$-x_1^2 - 4x_1 x_2 - 4x_2^2 = -(x_1 + 2x_2)^2$$

є відповідно додатно сталою і від'ємно сталою, а квадратичні форми

$$x_1 x_2 \text{ і } x_1(x_1 - x_2)$$

– знакозмінні.

Сформулюємо тепер достатню умову внутрішнього локального екстремуму в стаціонарній точці $\bar{x}_0$ ($df(\bar{x}_0) = 0$):

1) якщо $d^2 f(\bar{x}_0)$ – від'ємно визначена квадратична форма (пишуть $d^2 f(\bar{x}_0) < 0$), то f має в точці $\bar{x}_0$ строгий внутрішній локальний максимум;

2) якщо $d^2 f(\bar{x}_0)$ – додатно визначена квадратична форма (пишуть $d^2 f(\bar{x}_0) > 0$), то f має в точці $\bar{x}_0$ строгий внутрішній локальний мінімум;

3) якщо $d^2 f(\bar{x}_0)$ – знакозмінна квадратична форма, то f не має в точці $\bar{x}_0$ локального екстремуму.

Якщо 2-й диференціал $d^2 f(\bar{x}_0)$ є додатно сталою (пишуть $d^2 f(\bar{x}_0) \geq 0$) або від'ємно сталою (пишуть $d^2 f(\bar{x}_0) \leq 0$) квадратичною формою, то за його допомогою зробити висновок про наявність або відстутність екстремуму в стаціонарній точці $\bar{x}_0$ неможливо. У цих випадках, а також у разі недиференційовності функції f в точці $\bar{x}_0$ потрібно використовувати означення внутрішнього локального екстремуму.

Проілюструємо сказане прикладами. Для функцій $f(x,y) = x^2 + y^2$ і $g(x,y) = x^2 - y^2$ (точка $(0,0)$ – стаціонарна) маємо: $d^2 f(0,0) = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 > 0$, $d^2 g(0,0) = 2(dx)^2 - 2(dy)^2$ – знакозмінна квадратична форма. Тоді в точці $(0,0)$ функція f має строгий внутрішній локальний мінімум ($f(0,0) = 0$), а функція g не має локального екстремуму.

Для функції $\varphi(x,y) = (x-y)^2$ всі точки прямої $y = x$ є стаціонарними і в кожній із цих точок 2-й диференціал $d^2\varphi(x,x) = 2(dx - dy)^2 \geq 0$ є додатно сталою квадратичною формою, а відтак не дозволяє зробити висновок про наявність або відсутність локального екстремуму в цих точках. Знайдемо повний приріст

$$\Delta\varphi(x,x)=\varphi(x+dx,x+dy)-\varphi(x,x)=(dx-dy)^2\ge 0\,.$$

Звідси випливає, що в кожній точці прямої $y=x$ функція φ має нестрогий локальний мінімум ($\varphi(x,x)=0$).

Для функції $\psi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (стаціонарних точок немає, а $(0,0)$ – точка недиференційовності) знайдемо

$$\Delta\psi(0,0)\;=\sqrt{(0+dx)^2+(0+dy)^2}\;=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}>0\,,$$

а тому ψ має в точці $(0,0)$ строгий внутрішній локальний мінімум ($\psi(0,0)=0$).

Тип квадратичної форми $d^2f(\overline{x}_0)$ залежить від властивостей її матриці

$$A(\overline{x}_0)\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{pmatrix},\quad a_{ij}=a_{ji}=f''_{x_ix_j}(\overline{x}_0)\,.$$

Визначники

$$\Delta_1=a_{11},\;\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\;\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ldots,\;\Delta_m=\det A(\overline{x}_0)$$

називають *головними діагональними мінорами* матриці $A(\overline{x}_0)$.

В курсі алгебри доводять к р и т е р і й С и л ь в е с т р а знаковизначеності квадратичної форми $d^2f(\overline{x}_0)$:

1) $d^2f(\overline{x}_0)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta_1>0,\Delta_2>0,\ldots,\Delta_m>0$;

2) $d^2f(\overline{x}_0)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta_1<0,\Delta_2>0,\ldots,(-1)^m\Delta_m>0$;

3) $d^2f(\overline{x}_0)\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta_1\ge 0,\Delta_2\ge 0,\ldots,\Delta_m\ge 0$;

4) $d^2f(\overline{x}_0)\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta_1\le 0,\Delta_2\ge 0,\ldots,(-1)^m\Delta_m\ge 0$;

5) у решті випадків квадратична форма $d^2f(\overline{x}_0)$ знакозмінна.

Матриця A 2-го диференціала $d^2 f$ для функції f двох змінних x, y має вигляд

$$A = A(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix},$$

а для функції f трьох змінних x, y, z –

$$A = A(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}.$$

2.6. Векторні функції векторного аргументу: неперервність, диференційовність, правила диференціювання

Нехай задана система n скалярних функцій векторного аргументу $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_1(\overline{x}), \\ &y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_2(\overline{x}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(\overline{x}). \end{aligned}$$

Кажуть, що ця система визначає n*-вимірну векторну функцію векторного аргументу* $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$, тобто *відображення*, що діє з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Якщо ввести вектори[1)]

$$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}},\ \overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

то відображення з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ можна коротше записати у вигляді

$$\overline{y} = \overline{f}(\overline{x}) \qquad (\mathbb{R}^m \xrightarrow{\overline{f}} \mathbb{R}^n).$$

Функції $f_i(\overline{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при цьому називають *координатними функціями* відображення $\overline{f}$.

[1)] Тут $^{\mathrm{T}}$ – знак транспонування матриці.

Відображення $\overline{f}$ називають *неперервним у точці* $\overline{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^m$, якщо кожна координатна функція $f_i(\overline{x})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, неперервна в цій точці. Відображення $\overline{f}$ називають *диференційовним у точці* $\overline{x}_0$, якщо кожна його координатна функція диференційовна в точці $\overline{x}_0$, тобто якщо виконані умови диференційовності

$$\Delta f_1(\overline{x}_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x}_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\overline{x}_0)dx_m + o_1(r),$$

$$\Delta f_2(\overline{x}_0) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x}_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\overline{x}_0)dx_m + o_2(r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta f_n(\overline{x}_0) = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x}_0)dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x}_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\overline{x}_0)dx_m + o_n(r)$$

при $r = \| \overline{x} - \overline{x}_0 \| \to 0$. Символом $o_i(r)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) позначена функція (своя для кожної умови диференційовності), яка при $r \to 0$ має вищий порядок малості, ніж r.

Увівши вектори

$$\Delta \overline{f}(\overline{x}_0) = (\Delta f_1(\overline{x}_0), \Delta f_2(\overline{x}_0), \ldots, \Delta f_n(\overline{x}_0))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

$$d\overline{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m,$$

$$\overline{o}(r) = (o_1(r), o_2(r), \ldots, o_n(r))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

а також ($n \times m$)-матрицю (*матрицю Остроградського – Якобі відображення* $\overline{f}$ *у точці* $\overline{x}_0$)

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}}(\overline{x}_0) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}(\overline{x}_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\overline{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\overline{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\overline{x}_0) \end{pmatrix},$$

умову диференційовності відображення $\overline{f}$ у точці $\overline{x}_0$ можна записати у векторно-матричній формі

$$\Delta\overline{f}(\overline{x}_0)=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}(\overline{x}_0)d\overline{x}+\overline{o}(r)$$

при $r\to 0$. Лінійне (відносно приростів $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$) відображення

$$d\overline{f}(\overline{x}_0)=\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}(\overline{x}_0)d\overline{x} \qquad (\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n)$$

називають *диференціалом* (точніше, *повним диференціалом*) відображення $\overline{f}$ у точці $\overline{x}_0$, а матрицю Остроградського – Якобі $\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}(\overline{x}_0)=\overline{f}'_{\overline{x}}(\overline{x}_0)$ – похідною відображення $\overline{f}$ у точці $\overline{x}_0$.

Для скалярної функції скалярного аргументу

$$f(x) \quad (\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1)$$

матриця Остроградського – Якобі $\dfrac{df}{dx}(x)=f'(x)$ має формат (1×1); для скалярної функції векторного аргументу

$$f(\overline{x}) \quad (\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^1)$$

матриця Остроградського – Якобі

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{x}}(\overline{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\overline{x})\end{pmatrix}$$

має формат ($1\times m$), а для вектор-функції

$$\overline{f}(x) \quad (\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n)$$

матриця Остроградського – Якобі

$$\frac{d\overline{f}}{dx}(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{df_1}{dx}(x) & \dfrac{df_2}{dx}(x) & \cdots & \dfrac{df_n}{dx}(x)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

має формат ($n\times 1$).

З'ясуємо геометричний зміст відображень $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^3$ і $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^1$ та їх похідних. Нехай $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}}$ – радіус-вектор точки $M(x(t),y(t),z(t))$ (рис. 31), $t\in T\subset\mathbb{R}^1$ – параметр, T – інтервал, півінтервал або відрізок. Якщо $x(t)$, $y(t)$,

$z(t) \in C_T$ (коротше, $\vec{r}(t) \in C_T$), то система рівнянь (тобто відображення $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T, \\ z = z(t), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}(t), t \in T,$$

задає в просторі $\mathbb{R}^3$ неперервну криву L. Похідною векторної функції $\vec{r}(t)$ в точці M називають вектор

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (M' \to M)}} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right)^{\mathrm{T}} \overset{\mathrm{def}}{=} \vec{r}\,'(t),$$

якщо ця границя існує.

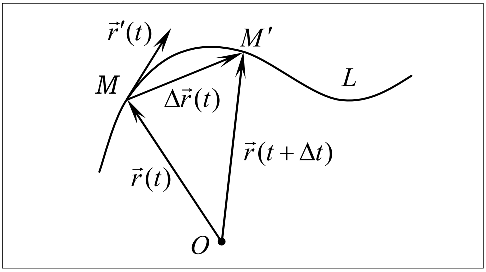


Рис. 31. Геометричний зміст похідної вектор-функції

Якщо $x(t), y(t), z(t) \in C_T^1$ (коротко $\vec{r}(t) \in C_T^1$), то матриця Остроградського – Якобі $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))^{\mathrm{T}}$ має *геометричний зміст вектора дотичної до кривої* L *у точці* M, який направлений з точки M у бік зростання параметра t. Криву L називають *гладкою,* якщо $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in T$.

Нехай тепер Φ $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1)$ – неперервна скалярна функція векторного аргументу (x, y, z). Тоді рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ задає в просторі $\mathbb{R}^3$ деяку поверхню Σ (рис. 32).

Візьмемо яку-небудь точку M_0 і проведемо через неї будь-яку гладку криву $L \subset \Sigma$: $x(t), y(t), z(t)$ $(t \in T)$. Нехай M_0 має координати $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z_0(t)$ $(t_0 \in T)$. Тоді справджується тотожність

$$\Phi\big(x(t), y(t), z(t)\big) \equiv 0 \quad (t \in T).$$

Припустивши, що функція Φ неперервно диференційовна, продиференціюємо цю тотожність по t і покладемо $t = t_0$:

$$\Phi'_x(M_0)x'(t_0) + \Phi'_y(M_0)y'(t_0) + \Phi'_z(M_0)z'(t_0) = 0,$$

тобто $\big(\vec{N}(M_0), \vec{r}\,'(t_0)\big) = 0$, де $\vec{N}(M_0) \overset{\text{def}}{=} \big(\Phi'_x(M_0), \Phi'_y(M_0), \Phi'_z(M_0)\big)$.

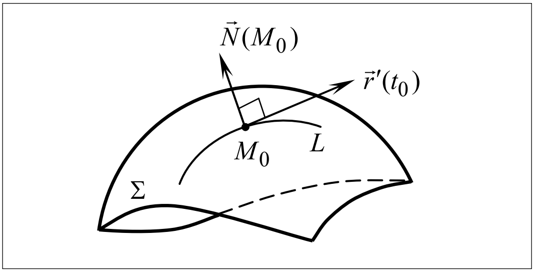


Рис. 32. Вектор нормалі до поверхні

Із рівності нулю скалярного добутку векторів $\vec{N}(M_0)$ і $\vec{r}\,'(t_0)$ випливає, що в точці M_0 вектор $\vec{N}(M_0)$ перпендикулярний вектору дотичної $\vec{r}\,'(t_0)$ до кожної гладкої кривої $L \subset \Sigma$, що проходить через точку M_0. Тому вектор $\vec{N}(M_0)$ називають *вектором нормалі* до поверхні Σ у точці M_0. Якщо $\vec{N}(M_0) \neq \vec{0}$ $\forall M_0 \in \Sigma$, то поверхню Σ називають *гладкою поверхнею в* $\mathbb{R}^3$. За допомогою вектора $\vec{N}(M_0)$ можна записати рівняння *нормальної прямої* до Σ у точці M_0

$$\frac{x - x_0}{\Phi'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{\Phi'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{\Phi'_z(M_0)},$$

а також рівняння *дотичної площини* до поверхні Σ в точці M_0

$$\Phi'_x(M_0)(x - x_0) + \Phi'_y(M_0)(y - y_0) + \Phi'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

П р а в и л а   д и ф е р е н ц і ю в а н н я   в е к т о р н и х   ф у н к - ц і й   в е к т о р н о г о   а р г у м е н т у можна сформулювати так. Нехай $\overline{u}=\overline{u}(\overline{x})$, $\overline{v}=\overline{v}(\overline{x})$, $\overline{f}=\overline{f}(\overline{x})$ – диференційовні функції функції (відображення з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$), $c=\mathrm{const}\in\mathbb{R}^1$, $C=(c_{ij})$ – ($k\times n$)-вимірна стала матриця ($c_{ij}=\mathrm{const}\in\mathbb{R}^1$). Тоді:

1) $d(\overline{u}+\overline{v})=d\overline{u}+d\overline{v} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial(\overline{u}+\overline{v})}{\partial\overline{x}}=\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}$;

2) $d(c\overline{u})=c\,d\overline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial(c\overline{u})}{\partial\overline{x}}=c\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}$;

3) $d(C\overline{u})=C\,d\overline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial(C\overline{u})}{\partial\overline{x}}=C\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}$;

4) $d\overline{f}=\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}d\overline{x}=\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{t}}d\overline{t} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{t}}=\dfrac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{t}}$

($\overline{x}=\overline{x}(\overline{t})$ – диференційовне відображення з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^m$);

5) $d(\overline{u},\overline{v})=(d\overline{u},\overline{v})+(\overline{u},d\overline{v})$, де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

2.7. Техніка диференціювання неявних функцій векторного аргументу. Заміна змінних у диференціальних виразах

Розглянемо метод відшукання диференціалів і похідних неявних функцій, який називають *методом повного диференціювання*. Він полягає у відшуканні повних диференціалів рівнянь, за допомогою яких задана неявна скалярна або векторна функція, та відшукання з отриманого співвідношення потрібних диференціалів і похідних.

Нехай скалярна функція $y=y(x)$ скалярного аргументу неявно задана рівнянням $F(x,y)=0$. Тоді

$$dF(x,y)=0,\quad F'_x dx+F'_y dy=0,\quad dy=-\frac{F'_x}{F'_y}dx \ \ (F'_y\neq 0),$$

а отже, $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ $(F'_y\neq 0)$.

Нехай скалярна функція $y = y(\overline{x})$ векторного аргументу $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ неявно задана рівнянням $F(\overline{x}, y) = 0$. Тоді

$$dF(\overline{x}, y) = 0, \quad F'_{x_1} dx_1 + F'_{x_2} dx_2 + \cdots + F'_{x_m} dx_m + F'_y dy = 0,$$

$$dy = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y} dx_1 - \frac{F'_{x_2}}{F'_y} dx_2 - \cdots - \frac{F'_{x_m}}{F'_y} dx_m \ \ (F'_y \neq 0),$$

а отже, $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_y}, i = 1, 2, \ldots, m \quad (F'_y \neq 0)$.

Нехай векторна функція $\overline{y} = \overline{y}(\overline{x})$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, векторного аргументу $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ неявно задана рівнянням $\overline{F}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{0}$, тобто системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$d\overline{F}(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{0}, \quad \overline{F}'_{\overline{x}} d\overline{x} + \overline{F}'_{\overline{y}} d\overline{y} = \overline{0}, \quad d\overline{y} = -(\overline{F}'_{\overline{y}})^{-1} \overline{F}'_{\overline{x}} d\overline{x} \quad (\det \overline{F}'_{\overline{y}} \neq 0),$$

а отже, $\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}} = -(\overline{F}'_{\overline{y}})^{-1} \overline{F}'_{\overline{x}}$. Зазначимо, що визначник $\det \overline{F}'_{\overline{y}}$ матриці Остроградського – Якобі називають *якобіаном відображення* $\overline{F}$ *по* $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Нехай

$$\overline{y} = \overline{y}(\overline{x}), \ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \ \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Знайдемо диференціал і похідну оберненого відображення $\overline{x} = \overline{x}(\overline{y})$. Маємо

$$d\overline{y} = \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}} d\overline{x}, \quad d\overline{x} = \left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\right)^{-1} d\overline{y} \quad \left(\det \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}} \neq 0\right),$$

а отже, $\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{y}} = \left(\dfrac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\right)^{-1} \quad \left(\det \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}} \neq 0\right)$.

Розглянемо приклади застосування методу повного диференціювання.

П р и к л а д 1. Нехай функція $z = z(x, y)$ неявно задана рівнянням $F(x - z, y - z) = 0$. Потрібно знайти dz, $d^2 z$, а також частинні похідні функції z першого і другого порядків.

Позначимо проміжні змінні $u = x - z$, $v = y - z$. Тоді

$$F(u, v) = 0,\ dF(u, v) = 0,\ F'_u du + F'_v dv = 0,$$

$$F'_u (dx - dz) + F'_v (dy - dz) = 0.$$

Звідси $dz = \dfrac{F'_u}{F'_u + F'_v} dx + \dfrac{F'_v}{F'_u + F'_v} dy = z'_x dx + z'_y dy \quad (F'_u + F'_v \neq 0)$, а отже,

$$z'_x = \frac{F'_u}{F'_u + F'_v},\ z'_y = \frac{F'_v}{F'_u + F'_v} \quad (F'_u + F'_v \neq 0).$$

Диференціюючи повним чином удруге, дістаємо

$$d\,(F'_u du + F'_v dv) = 0,$$

$$du dF'_u + F'_u d^2 u + dv dF'_v + F'_v d^2 v = 0,$$

$$du(F''_{uu} du + F''_{uv} dv) + dv(F''_{vu} du + F''_{vv} dv) + F'_u d^2 u + F'_v d^2 v = 0,$$

$$du(F''_{uu} du + F''_{uv} dv) + dv(F''_{vu} du + F''_{vv} dv) + F'_u(-d^2 z) + F'_v(-d^2 z) = 0.$$

Звідси

$$d^2 z = \frac{F''_{uu}(du)^2 + 2F''_{uv} du dv + F''_{vv}(dv)^2}{F'_u + F'_v} =$$

$$= z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy}(dy)^2.$$

Оскільки

$$du = dx - dz = dx - \frac{F'_u}{F'_u + F'_v} dx - \frac{F'_v}{F'_u + F'_v} dy = \frac{F'_v(dx - dy)}{F'_u + F'_v}$$

$$dv = dy - dz = dy - \frac{F'_u}{F'_u + F'_v} dx - \frac{F'_v}{F'_u + F'_v} dy = \frac{F'_u(dy - dx)}{F'_u + F'_v},$$

то

$$z''_{xx} = \frac{F''_{uu}(F'_v)^2 - 2F''_{uv} F'_u F'_v + F''_{vv}(F'_u)^2}{(F'_u + F'_v)^3} = z''_{yy} = -z''_{xy}.$$

П р и к л а д 2. Нехай система функцій $r = r(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) неявно задана рівняннями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Потрібно знайти dr, $d\varphi$, r'_x, φ'_x, r'_y, φ'_y.

Запишемо повний диференціал для кожного рівняння:

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,$$

$$dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

Цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно dr і $d\varphi$ розв'яжемо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} dx & -r\sin\varphi \\ dy & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos\varphi dx + r\sin\varphi dy,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & dx \\ \sin\varphi & dy \end{vmatrix} = -\sin\varphi dx + \cos\varphi dy,$$

$$dr = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \cos\varphi dx + \sin\varphi dy, \quad d\varphi = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\sin\varphi}{r} dx + \frac{\cos\varphi}{r} dy$$

($r \neq 0$).

Звідси $r'_x = \cos\varphi$, $r'_y = \sin\varphi$, $\varphi'_x = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$, $\varphi'_y = \dfrac{\cos\varphi}{r}$ ($r \neq 0$).

В аналізі та його застосуваннях (наприклад, у теорії диференціальних рівнянь) важливою є *задача заміни змінної (або змінних) у диференціальних виразах*, для розв'язування якої теж використовують м е т о д п о в н о г о д и ф е р е н ц і ю в а н н я. Цей метод складається з таких етапів:

1) формалізований запис задачі;

2) повне диференціювання всіх рівностей, які входять у цей запис (з використанням властивості інваріантності форми першого диференціала), й утворення системи рівнянь;

3) одержання (із цієї системи) тотожності, в яку входять диференціали тільки "нових" або тільки "старих" незалежних змінних;

4) відшукання (з отриманої тотожності) шуканих звичайних або частинних (залежно від задачі) похідних по нових "змінних".

Для відшукання похідних вищих порядків повторюють п. 2)–4) або безпосередньо шукають ці похідні з урахуванням п. 4.

П р и к л а д 3. У диференціальному рівнянні

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$$

(це – лінійне однорідне рівняння Ейлера 2-го порядку, $y = y(x)$, $a_1, a_2 = \text{const}$) потрібно виконати заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$, тобто виразити похідні функції y по змінній x через похідні цієї функції по змінній t.

Маємо

1) $y = y(x) \quad \Rightarrow \quad y = y(t),\ x = e^t$;

2) $dy = y' dx,\ dy = \dot{y} dt,\ dx = e^t dt \quad \left(\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \right)$;

3) $y' dx = \dot{y} dt,\ y' e^t dt = \dot{y} dt \quad \Rightarrow \quad$ 4) $y' = e^{-t} \dot{y}$.

Повторюючи п. 2)–4), дістанемо

2′) $dy' = y'' dx,\ dy' = e^{-t} (\ddot{y} - \dot{y}) dt,\ dx = e^t dt$;

3′) $y'' dx = e^{-t} (\ddot{y} - \dot{y}) dt,\ y'' e^t dt = e^{-t} (\ddot{y} - \dot{y}) dt \quad \Rightarrow$

4′) $y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) \quad \left(\ddot{y} = \dfrac{d^2 y}{dt^2} \right)$.

Зауважимо, що перетворення можна було б зробити і так:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y} dt}{e^t dt} = e^{-t} \dot{y},$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(e^{-t} \dot{y})}{e^t dt} = \frac{e^{-t} (\ddot{y} - \dot{y}) dt}{e^t dt} = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}).$$

Підставляючи це в рівняння, маємо

$$e^{2t} e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) + a_1 e^t e^{-t} \dot{y} + a_2 y = 0,$$

звідси остаточно дістаємо рівняння

$$\ddot{y} + (a_1 - 1) \dot{y} + a_2 y = 0.$$

П р и к л а д 4. У диференціальному рівнянні

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (u = u(x, y))$$

(це – рівняння з частинними похідними 2-го порядку називають *двовимірним рівнянням Лапласа*) потрібно перейти до нових незалежних змінних r і φ за формулами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Щоб виразити частинні похідні 1-го порядку функції u по змінних x і y, застосуємо метод повного диференціювання:

1) $u = u(x, y) \quad \Rightarrow \quad u = u(r, \varphi),\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$;

2) $du = u'_x dx + u'_y dy,\ du = u'_r dr + u'_\varphi d\varphi$,

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,\ dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi;$$

3) $u'_x dx + u'_y dy = u'_r dr + u'_\varphi d\varphi$, у прикладі 2 знайдено

$$dr = \cos\varphi dx + \sin\varphi dy,\quad d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}dx + \frac{\cos\varphi}{r}dy,$$

$$r'_x = \cos\varphi,\quad r'_y = \sin\varphi,\quad \varphi'_x = -\frac{\sin\varphi}{r},\quad \varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{r}\quad (r \neq 0),$$

тоді

$$u'_x dx + u'_y dy = u'_r(\cos\varphi dx + \sin\varphi dy) + u'_\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{r}dx + \frac{\cos\varphi}{r}dy\right) \quad \Rightarrow$$

4) $u'_x = u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\dfrac{\sin\varphi}{r},\quad u'_y = u'_r\sin\varphi + u'_\varphi\dfrac{\cos\varphi}{r}$.

Частинні похідні знайдемо, враховуючи п. 4):

$$u''_{xx} = \cos\varphi\frac{\partial(u'_r)}{\partial x} - u'_r\sin\varphi\varphi'_x - u'_\varphi\frac{r\cos\varphi\varphi'_x - \sin\varphi r'_x}{r^2} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial(u'_\varphi)}{\partial x} =$$

$$= \cos\varphi(u''_{rr}r'_x + u''_{r\varphi}\varphi'_x) - u'_r\sin\varphi\varphi'_x -$$

$$-u'_\varphi\frac{r\cos\varphi\varphi'_x - \sin\varphi r'_x}{r^2} - \frac{\sin\varphi}{r}(u''_{\varphi r}r'_x + u''_{\varphi\varphi}\varphi'_x) =$$

$$= \cos\varphi\left(u''_{rr}\cos\varphi - u''_{r\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) - u'_r\frac{\sin^2\varphi}{r} -$$

$$-u'_\varphi\frac{-\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{r^2} - \frac{\sin\varphi}{r}\left(u''_{\varphi r}\cos\varphi - u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$$

$$= u''_{rr}\cos^2\varphi + u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - u''_{r\varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} +$$

$$+u'_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u'_\varphi\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Аналогічно

$$u''_{yy}=\sin\varphi\frac{\partial(u'_r)}{\partial y}+u'_r\cos\varphi\varphi'_y+$$

$$+u'_\varphi\frac{-r\sin\varphi\varphi'_y-\cos\varphi r'_y}{r^2}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial(u'_\varphi)}{\partial y}=$$

$$=\sin\varphi(u''_{rr}r'_y+u''_{r\varphi}\varphi'_y)+u'_r\cos\varphi\varphi'_y-$$

$$-u'_\varphi\frac{r\sin\varphi\varphi'_y+\cos\varphi r'_y}{r^2}+\frac{\cos\varphi}{r}(u''_{\varphi r}r'_y+u''_{\varphi\varphi}\varphi'_y)=$$

$$=\sin\varphi\left(u''_{rr}\sin\varphi+u''_{r\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)+u'_r\frac{1}{r}\cos^2\varphi-$$

$$-u'_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}+\frac{\cos\varphi}{r}\left(u''_{\varphi r}\sin\varphi+u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)=$$

$$=u''_{rr}\sin^2\varphi+u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}+u''_{r\varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}+$$

$$+u'_r\frac{\cos^2\varphi}{r}-u'_\varphi\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Тому

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=u''_{rr}+\frac{1}{r}u'_r+\frac{1}{r^2}u''_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}u''_{\varphi\varphi}.$$

Отже, двовимірне рівняння Лапласа в полярних змінних має вигляд

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}u''_{\varphi\varphi}=0.$$

Приклад 5. У лінійному диференціальному рівнянні

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz\quad(z=z(x,y))$$

з частинними похідними 1-го порядку потрібно перейти до нових незалежних змінних u і v та нової функції $w=w(u,v)$ за формулами $u=yz-x$, $v=xz-y$, $w=xy-z$, тобто похідні функції z по змінних x і y потрібно виразити через похідні функції w по змінних u і v.

Маємо

1) $z=z(x,y)\quad\Rightarrow\quad w=w(u,v),\ u=yz-x,\ v=xz-y,\ w=xy-z$;

2) $dz=z'_xdx+z'_ydy,\ dw=w'_udu+w'_vdv$,

$$du = ydz + zdy - dx = y(z'_x dx + z'_y dy) + zdy - dx\,,$$
$$dv = xdz + zdx - dy = x(z'_x dx + z'_y dy) + zdx - dy\,,$$
$$dw = xdy + ydx - dz = xdy + ydx - z'_x dx - z'_y dy\,;$$

3) $w'_u \left[y(z'_x dx + z'_y dy) + zdy - dx \right] +$

$$+w'_v \left[x(z'_x dx + z'_y dy) + zdx - dy \right] = xdy + ydx - z'_x dx - z'_y dy\,;$$

4) прирівнюючи коефіцієнти при довільних приростах dx і dy у лівій і правій частинах тотожності 3), отримаємо

$$z'_x y w'_u - w'_u + z'_x x w'_v + w'_v z = y - z'_x\,,$$
$$z'_y y w'_u + w'_u z + z'_y x w'_v - w'_v = x - z'_y\,.$$

Звідси $z'_x = \dfrac{y + w'_u - z w'_v}{y w'_u + x w'_v + 1}$, $z'_y = \dfrac{x + w'_v - z w'_u}{y w'_u + x w'_v + 1}$. Підставимо z'_x і z'_y у дане рівняння:

$$\frac{(xy+z)(y + w'_u - z w'_v) + (1 - y^2)(x + w'_v - z w'_u)}{y w'_u + x w'_v + 1} = x + yz\,,$$

$$w'_u(xy + y^2 z) + w'_v(-xyz - z^2 + 1 - y^2) + yz + x =$$
$$= w'_u(xy + y^2 z) + w'_v(x^2 + xyz) + yz + x\,,$$
$$w'_v(x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1) = 0\,,$$
$$w'_v = 0$$

при $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 \neq 0$, звідки випливає, що функція w не залежить від v і є довільною диференційовною функцією φ змінної u: $w = \varphi(u)$, або $xy - z = \varphi(yz - x)$.

Приклад 6. У диференціальному рівнянні

$$y'y''' - 3y''^2 - x = 0 \quad (y = y(x))$$

потрібно перейти до нової функції $x = x(y)$, тобто похідні функції y по x потрібно виразити через похідні функції x по y.

Маємо

1) $y = y(x) \quad \Rightarrow \quad x = x(y)$;

2) $dy = y'dx,\ dx = x'dy \quad \Rightarrow \quad$ 3) $dy = y'x'dy,\ y' = \dfrac{1}{x'}$.

Похідні вищих порядків знайдемо безпосередньо:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'}\right)}{x'dy} = -\frac{x''}{x'^3},$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d\left(-\frac{x''}{x'^3}\right)}{x'dy} = \frac{3x'^2 x''^2 - x'^3 x'''}{x'^7} = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}.$$

Підставимо знайдені похідні в дане рівняння:

$$\frac{1}{x'}\frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5} - 3\frac{x''^2}{x'^6} - x = 0,$$

тобто $x''' + xx'^5 = 0$.

2.8. Умовний локальний екстремум скалярних функцій векторного аргументу. Метод множників Лагранжа

Якщо на змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функції f $(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1)$ не накладено ніяких додаткових умов у вигляді рівнянь, то кажуть про задачу на *безумовний* локальний екстремум, методи розв'язування якої викладені в розд. 2.5. Якщо ж на змінні $x_1, x_2, \ldots, x_m$ накладені деякі додаткові умови типу рівностей (їх називають *рівняннями зв'язку*), то кажуть про задачу на *умовний* локальний екстремум.

З'ясуємо геометричний смисл задачі на умовний локальний екстремум для функції двох і трьох змінних. Розглянемо такі випадки.

Задача 1. $f = f(x, y) \to \text{extr}$, $F(x, y) = 0$.

Тут рівняння зв'язку $F(x, y) = 0$ задає на площині деяку криву K, а тому екстремум функції f шукають у точках цієї кривої.

Задача 2. $f = f(x, y, z) \to \text{extr}$, $F(x, y, z) = 0$.

Тут рівняння зв'язку $F(x, y, z) = 0$ задає в просторі деяку поверхню Σ, тож екстремум функції f шукають у точках цієї поверхні.

Задача 3. $f = f(x, y, z) \to \text{extr}$,

$$F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0.$$

Тут рівняння зв'язку $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$ задають у просторі поверхні Σ_1 і Σ_2 відповідно; ці поверхні перетинаються уздовж деякої кривої K. Таким чином, екстремум функції f шукають у точках кривої K.

Іноді задачу на умовний локальний екстремум можна звести до задачі на безумовний екстремум функції меншої кількості змінних. Наприклад, якщо в задачі 2 рівняння зв'язку $F(x,y,z)=0$ можна явно розв'язати відносно z: $z=z(x,y)$, то дістанемо задачу на безумовний екстремум функції двох змінних: $\varphi(x,y)=f(x,y,z(x,y))$. Такий метод розв'язування задачі називають *методом виключення залежних змінних*.

На практиці, однак, частіше використовують так званий метод невизначених множників (мультиплікаторів) Лагранжа. Коротко викладемо алгоритм цього методу для задач 1–3. Він передбачає такі етапи:

а) побудова (за умовою задачі) *функції Лагранжа* L;

б) запис необхідних умов для відшукання *умовно-стаціонарних точок* M_0 (тобто точок можливого умовного екстремуму);

в) застосування достатніх умов, які ґрунтуються на дослідженні знаку другого диференціала функції Лагранжа.

Далі припускаємо, що функції f, F, F_1, F_2 неперервно диференційовні.

Для задачі 1 маємо

а) $L=L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)$ (λ – множник Лагранжа);

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0, \\ F(x,y)=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_0(x_0,y_0)\in K,\ \lambda=\lambda_0$;

в) записуємо $d^2L(M_0;\lambda_0)$ з урахуванням залежності $dy=-\dfrac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}dx$ (при $F'_y(M_0)\neq 0$). Якщо для квадратичної форми $d^2L(M_0;\lambda_0)$ (однієї!) змінної dx виконано

$$d^2L(M_0;\lambda_0)>0\ (<0),$$

то функція f має в точці $M_0(x_0,y_0)$ строгий умовний мінімум (строгий умовний максимум).

Для задачі 2 маємо

а) $L=L(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)+\lambda F(x,y,z)$ (λ – множник Лагранжа);

б) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0, \\ F(x,y,z)=0, \end{cases} \Rightarrow \quad M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma,\ \lambda=\lambda_0;$$

в) записуємо $d^2L(M_0;\lambda_0)$ з урахуванням залежності $dz=-\dfrac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}dx-\dfrac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}dy$ (при $F'_z(M_0)\neq 0$). Якщо для квадратичної форми $d^2L(M_0;\lambda_0)$ двох змінних dx і dy виконано

$$d^2L(M_0;\lambda_0)>0\ \ (<0),$$

то функція f має в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ строгий умовний мінімум (строгий умовний максимум).

Для задачі 3 маємо

а) $L=L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1F_1(x,y,z)+\lambda_2F_2(x,y,z)$ (λ_1 і λ_2 – множники Лагранжа);

б) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0, \\ F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} M_0(x_0,y_0,z_0)\in K, \\ \lambda_1=\lambda_{10},\ \lambda_2=\lambda_{20}; \end{matrix}$$

в) записуємо $d^2L(M_0;\lambda_{10},\lambda_{20})$ з урахуванням залежностей

$$dy=\frac{\begin{vmatrix} -F'_{1x}(M_0) & F'_{1z}(M_0) \\ -F'_{2x}(M_0) & F'_{2z}(M_0) \end{vmatrix}}{I}dx,\quad dz=\frac{\begin{vmatrix} F'_{1y}(M_0) & -F'_{1x}(M_0) \\ F'_{2y}(M_0) & -F'_{2x}(M_0) \end{vmatrix}}{I}dx$$

(при $I=\begin{vmatrix} F'_{1y}(M_0) & F'_{1z}(M_0) \\ F'_{2y}(M_0) & F'_{2z}(M_0) \end{vmatrix}\neq 0$). Якщо для квадратичної форми $d^2L(M_0;\lambda_{10},\lambda_{20})$ (однієї!) змінної dx виконано

$$d^2L(M_0;\lambda_{10},\lambda_{20}) > 0 \ \ (< 0),$$

то функція f має в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ строгий умовний мінімум (строгий умовний максимум).

Зауважимо, що записуючи d^2L для умовно-стаціонарної точки M_0, можна вважати змінні задачі рівноправними (тобто незалежними). Для отримання залежностей між змінними dx і dy (задача 1) або між змінними dx, dy і dz (задачі 2, 3) у точці M_0 на практиці застосовують метод повного диференціювання рівнянь зв'язку в цій точці.

Приклад. У сферу радіуса R потрібно вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

Сформулюємо задачу у вигляді задачі на умовний екстремум. Якщо сфера задана рівнянням $x^2+y^2+z^2=R^2$, а $M(x,y,z)$ – одна з вершин шуканого паралелепіпеда ($x>0$, $y>0$, $z>0$) (рис. 33), то його об'єм дорівнює $2x\cdot 2y\cdot 2z = 8xyz$. Одержуємо задачу типу 2:

$$V = 8xyz \to \max, \ x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Розв'яжемо її методом Лагранжа. Маємо

а) $L = 8xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$;

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 8yz + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 8xz + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 8xy + 2\lambda z = 0, \\ x^2+y^2+z^2 = R^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4xyz + \lambda x^2 = 0, \\ 4xyz + \lambda y^2 = 0, \\ 4xyz + \lambda z^2 = 0, \\ x^2+y^2+z^2 = R^2, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12xyz + \lambda R^2 = 0, \\ x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{R^2}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z = \dfrac{R}{\sqrt{3}}, \\ \lambda = -\dfrac{12}{R^2}xyz = -\dfrac{4R}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

отже, $M_0\left(R/\sqrt{3}, R/\sqrt{3}, R/\sqrt{3}\right)$, $\lambda_0 = -4R/\sqrt{3}$;

в) запишемо

$$dL(x,y,z;\lambda) = 8yzdx + 8xzdy + 8xydz + 2\lambda(xdx + ydy + zdz),$$
$$d^2L(x,y,z;\lambda) = 8(ydz + zdy)dx + 8(xdz + zdx)dy +$$
$$+8(xdy + ydx)dz + 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

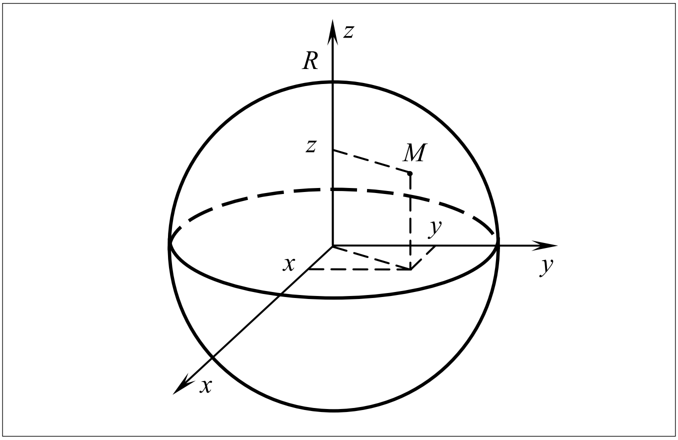


Рис. 33. Вписаний у сферу прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму

візьмемо повний диференціал рівняння зв'язку $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і покладемо $x = y = z = R\big/\sqrt{3}$:

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0, \quad \frac{2R}{\sqrt{3}}dx + \frac{2R}{\sqrt{3}}dy + \frac{2R}{\sqrt{3}}dz = 0,$$

звідси $dz = -dx - dy$; тому

$$d^2L(M_0;\lambda_0) = \frac{8R}{\sqrt{3}}\big[(-dx - dy + dy)dx + (-dx - dy + dx)dy +$$
$$+(dx + dy)(-dx - dy) - (dx^2 + dy^2 + (dx + dy)^2)\big] =$$
$$= -\frac{8R}{\sqrt{3}}\big[(dx + dy)^2 + 2dx^2 + 2dy^2\big] < 0.$$

Таким чином, з усіх прямокутних паралелепіпедів, вписаних у сферу радіуса R, найбільший об'єм $V = 8R^3\big/(3\sqrt{3})$ має куб з довжиною ребра $2R\big/\sqrt{3}$.

2.9. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 4

Варіант 1

1. Зобразити графічно область визначення функції $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{2x^2+xy+y^2}{x^2-xy+3y^2}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\ln\left(1+x\sin(3-y)\right)}{x}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{3x-y+6x^2+6y^2}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+25}-5}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=x^2+y^2-2xy-x+2y$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(1,1,1)$.

Варіант 2

1. Зобразити графічно область визначення функції $z=\arcsin\frac{y-2}{x}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+y)}{x^2+y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y+3y)}{e^{2y}-e^y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{2x+4y+3x^2+3y^2}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4-3x^4}{5x^4+6y^4}, \text{ якщо } x^2+y^2\neq 0,\\ 1/6, \text{ якщо } x^2+y^2=0,\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $x^2+2y^2+3z^2=39$ скласти рівняння дотичної площини, яка паралельна площині $x+y+z=1$.

Варіант 3

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=xy+\sqrt{\ln\frac{x^2}{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2-4}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2y}\cdot\arcsin\frac{x^2y}{1+xy}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{11x+9y}{x^2+\dfrac{xy}{5}+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^8+y^8}}{x^4+y^4}, \text{ якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, \text{ якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $x^2+2y^2+3z^2=39$ записати рівняння дотичної площини і нормалі в точці $M(2,2,3)$.

Варіант 4

1. Зобразити графічно область визначення функції $z=\arcsin\dfrac{x-2y}{x+y}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{2x^y}{4-3x^y}\ .$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=1+x^2+y^2$ записати рівняння дотичної площини і нормалі в точці $M(1,0,2)$.

Варіант 5

1. Зобразити графічно область визначення функції $z=y\sqrt{\cos x}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\sin(x+y}{2x+3y}\ .$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^4+y^4}{|x|^5+|y|^5}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{4x^2+xy+3y^2}{4x^2-xy+3y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3-3y^3}{x^2+y^2}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 4, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=\ln(x^2+y^2)$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(1,0,0)$.

Варіант 6

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}\ .$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\arcsin xy}{xy^3}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\frac{7x-y}{x^2+5xy+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^6y^2}{x^8+y^8}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=\sin x\cdot\cos y$ записати рівняння дотичної площини і нормалі в точці $M(\pi/4,\pi/4,1/2)$.

Варіант 7

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\ln(x^2+y^2-1).$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1-xy^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{4-\sqrt{x^2+y^2+16}}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{3x^4+y^4}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $x^2+2y^2+3z^2=21$ записати рівняння дотичних площин, паралельних площині $x+4y+6z=0$.

Варіант 8

1. Зобразити графічно область визначення функції $z = \arccos\dfrac{x-2}{y}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{(x^2 - y^2)\ln(2+xy)}{(x+y)\sin(1+xy)}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{(x+y)^4}{(x^2+y^2)^3}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{7x^6 + 2y^6}, & \text{якщо } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{якщо } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Показати, що дотичні площини до поверхні $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ відсікають на осях координат відрізки, сума довжин яких є сталою величиною.

Варіант 9

1. Зобразити графічно область визначення функції $z = \sqrt{x \sin y}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x)}{x + y^2}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{2^{(x-1)y} - 1}{(x^2-1)\sin xy}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{9y - 2x}{x^2 + xy + y^2}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{x^4 + y^4}\right)}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{якщо } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. У яких точках еліпсоїда $x^2+2y^2+3z^2=21$ нормаль до нього утворює однакові кути з осями координат?

Варіант 10

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\ln(4-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-2}\,.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\sin 3x-\operatorname{tg} 2y}{6x+3y}\,.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^6+y^6}}{x^4+y^4}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+3y^2}}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y}-1}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ -2, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $x^2+y^2+4z^2=4$ скласти рівняння дотичних площин, які паралельні площині $x+4y+6z=0$.

Варіант 11

1. Зобразити графічно область визначення функції $z=\arccos\dfrac{y}{x+y}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to +\infty}\lim\limits_{y\to +0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to +0}\lim\limits_{x\to +\infty} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{5x^y-7}{2-3x^y}\,.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{e^{-3xy}-e^{xy}}{\sin xy}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{5-\sqrt{xy^2+25}}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{10}-y^{10}}{x^{10}+y^{10}}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $x(y+z)(xy-z)+8=0$ записати рівняння нормалі у точці $M(2,1,3)$.

Варіант 12

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\arcsin\frac{x^2}{y^2}+\ln(1-x^2-y^2).$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\sin\frac{\pi(x+y)}{2x+3y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin(x+y)}{x^2-y^2+x+y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=4x-xy+y^2$ записати рівняння дотичної площини, паралельної площині $4x+y+2z+9=0$.

Варіант 13

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\arcsin(1-x)+\ln(y-x).$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to1}f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\ln(x+y)}{y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^2}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{x^2y^2+(x-y)^4}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=e^{x\sin y}$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(1,\pi,1)$.

Варіант 14

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\ln(1-x^2-y^2)-\frac{1}{2x-x^2-y^2}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2+xy}{x^2+y^2-xy}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4y^2}{2x^6+3y^6}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $x^2-z^2-2x+6y=4$ записати рівняння нормалі, паралельної прямій $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$.

В а р і а н т 15

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z = \arcsin\frac{y}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y) = \frac{y\sin(1/y) - x}{x+y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}$;   б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{x^2+y^2+1}}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0), \\ 2, & \text{якщо } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z = x^2 + y^2$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(1,1,2)$.

В а р і а н т 16

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z = \ln(2y - x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y) = \frac{\sin(x-y)}{4x+5y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} (1+xy^2)^{\frac{y}{yx^5+xy^2}}$;   б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{3x^2+2y^2}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0), \\ 2, & \text{якщо } (x,y)=(0,0), \end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=2x^2-4y^2$ записати рівняння нормалі в точці $M(2,1,4)$.

Варіант 17

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\ln(-x-y)+\sqrt{9-x^2-y^2}\ .$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\sin|x|+\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$ $(a>0)$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0), \\ 1, & \text{якщо } (x,y)=(0,0), \end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(3,4,-7)$.

Варіант 18

1. Зобразити графічно область визначення функції $z=\sqrt{y-\sqrt{x}}$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg}4x-\arcsin 2y}{8x+7y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{x+y-1}{1-\sqrt{x+y}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos xy}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-xy+y^2}{2x^2+xy+y^2}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=\operatorname{arctg}(y/x)$ записати рівняння нормалі в точці $M(1,1,\pi/4)$.

Варіант 19

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\sqrt{\frac{x^2-2x+y^2}{4x-x^2-y^2}}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 1}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{\ln(y+2x)}{x}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3-\sqrt{xy^2+9}}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+4y^2}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=x^2+y^2-2xy-x+2y$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(1,1,1)$.

Варіант 20

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\ln(x^2+y^2-4)+\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\cos\frac{\pi(x-y)}{3x+2y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}}\frac{y(x-1)}{3-\sqrt{xy-y+9}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6-y^6}{x^6+y^6}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $(z^2-x^2)xyz-y^5=5$ записати рівняння нормалі в точці $M(1,1,2)$.

Варіант 21

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\ln(x-y)+\arccos(1-y).$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\frac{2x^2+3y^2}{6x^4-5y^2}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(y-1)x\cdot\sin\frac{1}{x^2+(y-1)^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2y^2)^{\frac{4}{x^2+y^2}}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^4}{x^6+3y^6}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z = e^{y\cos x}$ записати рівняння нормалі в точці $M(\pi, 1, e^{-1})$.

Варіант 22

1. Зобразити графічно область визначення функції
$$z = \ln(4 - x^2 - y^2) + \frac{1}{4x - x^2 - y^2}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$, якщо
$$f(x, y) = \frac{\arcsin 3x - \sin 7y}{9x + 5y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \frac{\ln\left(1 + y\sin(x-1)\right)}{y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$.

4. Дослідити функцію
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{якщо } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$
на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ записати рівняння нормалі в точці $M(4, 3, -7)$.

Варіант 23

1. Зобразити графічно область визначення функції
$$z = \ln(-x + y) + \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$, якщо
$$f(x, y) = \frac{\mathrm{tg}(2x + 3y)}{6y - x}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2 + y^2}{|x|^3 - |y|^3}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+y^3}{x^2+y^2}, \text{ якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 1, \text{ якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ записати рівняння дотичної площини в точці $M(1,1,\pi/4)$.

Варіант 24

1. Зобразити графічно область визначення функції

$$z=\arcsin\frac{y^2}{x^2}+\ln(4-x^2-y^2).$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}f(x,y)$, якщо

$$f(x,y)=\operatorname{tg}\frac{\pi(x-y)}{4x+3y}.$$

3. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to3}}(1+xy)^{\frac{y}{yx^7+xy^2}}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$.

4. Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{ якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \text{ якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

5. Для поверхні $2x^2+y^2+z^2=1$ записати рівняння дотичної площини, паралельної площині $y-x+2z=0$.

2.10. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 5

Варіант 1

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\sin\dfrac{x}{y}, \operatorname{tg} xy\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням

$$F(z + x^2 + y^2,\ yx^{-1}) = 0 .$$

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = xy$, якщо $2x + 3y = 5$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $x^3 y'' + xyy' - y^2 = 0$, виконавши заміну змінних $x = e^t$, $y = ue^t$ ($u = u(t)$).

Варіант 2

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\dfrac{\ln x}{y},\ x + y\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням

$$F(z + x^2 + y^2,\ xy^{-1}) = 0 .$$

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 + y^2$, якщо $3x + 4y = 12$.

5. Перетворити диференціальний вираз $W = (z'_x)^2 + (z'_y)^2$, виконавши заміну змінних $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

Варіант 3

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\,(ye^x,\ x - \ln y)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z\,(x, y)$, неявно заданої рівнянням

$$F\left(z - x^2 - y^2,\ \frac{x}{y} \right) = 0.$$

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x + 2y$, якщо $x^2 + y^2 = 5$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$, виконавши заміну змінних $t = y$, $u = \ln\dfrac{y}{x}$ ($u = u(t)$).

Варіант 4

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\dfrac{x^2}{y},\ y^2 - x^2\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z\,(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z + xy^{-2}, yz) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $(x^2 + y^2 - z^2)^2 = 16\,(x^2 + y^2 + z^2)$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, якщо $y - x = \pi/4$.

5. У диференціальному виразі $W = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + z^2$ виконати заміну змінних $u = x$, $v = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ ($z = z(u, v)$).

Варіант 5

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\dfrac{x}{\cos y},\ y\sin x\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z - xy^2, zx^{-1}) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $3x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + z = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 + y^2$, якщо $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$(xy' - y)^2 = 2xy(1 + (y')^2),$$

виконавши заміну змінних $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(r = r(\varphi))$.

Варіант 6

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(xy + z, xyz)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z + y^2x^{-1}, xy) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $x^3 + 6y^2 - 3xz^2 + 3z^2 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = \sin x + \cos(x + y)$, якщо $x + y = 2\pi$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $xz'_x + yz'_y = z$, виконавши заміну змінних $u = x$, $v = y/x$ $(z = z(u,v))$.

Варіант 7

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(xy + z, y + z)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z + \cos xy,\ yx^{-2}) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $5x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = xy$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $yz'_x - xz'_y = y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, виконавши заміну змінних $u = x^2 + y^2$, $v = y$ ($z = z(u, v)$).

Варіант 8

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(xy^{-1} + z, zx^{-1})$.

2. Знайти z''_{yy}. від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(xy + \cos z,\ yx^{-2}) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = 3x^2 + 4xy + y^2$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $(xz'_x)^2 + ayzz'_y = bz^2$, виконавши заміну змінних $u = \ln x$, $v = \ln y$ ($z = z(u, v)$).

Варіант 9

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\dfrac{\ln(x + y)}{x - y},\ e^{-xy}\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z - \cos xy,\ x^2 y^{-1}) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $3x^2 + 2y^2 - 8y + 2z^2 - 6z - 12 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, якщо $4x^2 + y^2 = 25$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$(x + y)z'_x - (x - y)z'_y = 0,$$

виконавши заміну змінних

$$u = \ln\sqrt{u^2 + v^2},\ v = \operatorname{arctg}(y/x) \quad (z = z(u, v)).$$

Варіант 10

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(xe^y, y\ln x)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(\ln xy, z^2 - y) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $x^2 + y^2 + 3z^2 - x + 6y - 3z + 3 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = xy$, якщо $x + y = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $xz'_x + (y + 1)z'_y = 0$, виконавши заміну змінних

$$x = u + v,\ y = v/u,\ z = w/u \quad (w = w(u, v)).$$

Варіант 11

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\operatorname{tg}(z - x), xy\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(x + y + \operatorname{arctg} z, xy + z) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $2x^2 + 3y^2 + 6y - 8x + z^2 - 5z + 9 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, якщо $x + y = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $yz'_x - xz'_y = (y - x)z$, виконавши заміну змінних

$$u = x^2 + y^2,\ v = x^{-1} + y^{-1},\ w = \ln z - x - y \quad (w = w(u,v)).$$

Варіант 12

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\ln(z - x), xy\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F\left(\ln(z - x), xy\right) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 - y^2$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$\frac{x^2 + y^2}{y} z'_x + x(1 + y^2) z'_y = \frac{y^3}{x} - xy,$$

виконавши заміну змінних

$$u^2 + v^2 + x^2 - y^2 = 0,\ x = vy \quad (z = z(u,v)).$$

Варіант 13

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\,(\cos(x - y), x + y^2)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z + x^2 + y^2, yx^{-1}) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $x^3 + 4y - y^2 - 3x + z^2 + z - 8 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$xz'_x(1+y) + (1-y^2)z'_y = x + yz,$$

виконавши заміну змінних $u = yz - x,\ v = xz - y\ \ (z = z(u,v))$.

Варіант 14

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(\cos x^2 y, x^2 - y^2)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x,y)$, неявно заданої рівнянням $F(z - x^2 - y^2, zx) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = xy^2$, якщо $x + 2y = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$(xz'_x)^2 + (yz'_y)^2 = z^2 z'_x z'_y,$$

виконавши заміну змінних

$$x = ue^w,\ y = ve^w,\ z = we^w\ \ (w = w(u,v)).$$

Варіант 15

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(\sin xy, \sqrt{x+y})$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x,y)$, неявно заданої рівнянням $F(z - x^2 + y^2, y + z) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням $x^3 - y^3 - 3x + 4y + z^2 + z - 6 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 + y^2 + 2a^2$, якщо $x + y = a$.

5. Перетворити диференціальний вираз
$$W = x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy},$$
виконавши заміну змінних $u = \ln x,\ \ v = \ln y\ \ (z = z(u,v))$.

Варіант 16

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\cos\dfrac{x}{y},\ \sqrt[3]{x - y^2}\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z^2 - x + y^2,\ y^2 \ln x) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $x^2 + 6y^2 - 3z^2 x + 3z = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$, якщо $x + y = 3$.

5. Перетворити диференціальний вираз
$$W = x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy},$$
виконавши заміну змінних $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi\ \ (r = r(\varphi))$.

Варіант 17

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\,(\cos xy, \sqrt{x^2 + y^2}\,)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z - x^2 - y^2,\ y\ln^2 x) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $5x^2 + 3y^2 + 2z^2 + z - 6x = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = xy(2 - x)(2 - y)$, якщо $y - 2x = 4$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, виконавши заміну змінних $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ $(z = z(u,v))$.

Варіант 18

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\ln\dfrac{x}{y}, x + y^2\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x,y)$, неявно задана рівнянням $F(x + z^2 + y^2,\ x\ln^2 y) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = (x^2 + y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$x^2 z''_{xx} - 2x\sin y \cdot z''_{xy} + \sin^2 y \cdot z''_{yy} = 0,$$

виконавши заміну змінних $u = x\,\mathrm{tg}(y/x)$, $v = x$ $(z = z(u,v))$.

Варіант 19

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}, \sqrt[3]{x^2 + y}\right)$.

2. Функція $z = z(x,y)$ неявно задана рівнянням $F(\ln z + \ln x - y, x\sin y) = 0$. Знайти z''_{yy}.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням $z^2 + x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4z = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^2 y(x + y) - 1$, якщо $x + y = 2$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, виконавши заміну змінних $u = x + z,\ v = y + z\ \ (z = z(u,v))$.

Варіант 20

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\sqrt{x+y+z},\, xy\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x,y)$, неявно заданої рівнянням $F(x - y + \ln z,\, xz) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням $2(x^2 + z^2) + 3(2y^2 + 1) + 8(xz - y) - 4x = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = x^3 + 6y(y - x)$, якщо $y - x = 2$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $yz''_{yy} + 2z'_y = 2x^{-1}$, виконавши заміну змінних

$$yu = x,\ v = x,\ w = zx - y\ \ (w = w(u,v)).$$

Варіант 21

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(2x^2 + y^3,\, \cos\dfrac{x}{y}\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x,y)$, неявно заданої рівнянням $F(e^{z+x},\, yx^{-2}) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2,$$

якщо $y - x = 2$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$z''_{xx} - 2z''_{xy} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) z''_{yy} = 0,$$

виконавши заміну змінних

$$u = x,\ v = x + y,\ w = x + y + z \quad (w = w(u, v)).$$

Варіант 22

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f\left(\ln(x + y),\ x^2 + y^2\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z + \ln y, xy + \ln z) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $e^z - xyz + x^2 y = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, якщо $x - y + z = 1$.

5. Перетворити диференціальне рівняння $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, виконавши заміну змінних

$$u = x + y,\ v = x - y,\ w = xy - z \quad (w = w(u, v)).$$

Варіант 23

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u = f(x + y + \cos z, x\cos y)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z = z(x, y)$, неявно заданої рівнянням $F(z^{-1} + x - y, xyz) = 0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x, y)$, неявно задану рівнянням $y^2 + xy + z^2 + yz - xz + 2y - 1 = 0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z = xy$, якщо $x^2 + y^2 = 9$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$(1 - x^2) z''_{xx} + (1 - y^2) z''_{yy} = xz'_x + yz'_y,$$

виконавши заміну змінних

$$x=\sin u,\ \ y=\sin v,\ \ z=e^{w}\quad (\,w=w(u,v)\,).$$

Варіант 24

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $u=f\left(\dfrac{x}{y},x+y+z\right)$.

2. Знайти z''_{yy} від функції $z=z(x,y)$, неявно заданої рівнянням $F\left(\dfrac{z}{x+y},x\ln y\right)=0$.

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z=z(x,y)$, неявно задану рівнянням $x^2+y^2+z^2+2yz-8x+z-4y+5=0$.

4. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z=2x+y$, якщо $x^2+y^2=36$.

5. Перетворити диференціальне рівняння

$$z''_{xx}+z''_{xy}+z''_{yy}=1+z-xy\,,$$

виконавши заміну змінних ($w=w(u,v)$)

$$v+x+y+u=1,\ \ v-x+y-u=0,\ \ xy-z=w\,.$$

Р О З Д І Л 3

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ СКАЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ

- Первісна, невизначений інтеграл та його основні властивості [1, § 1 гл. 5], [3, п. 5.1], [4, § 1 гл. 6], [5, § 22], [7, § 1 гл. 5].
- Основні методи невизначеного інтегрування [1, § 1 гл. 5], [3, п. 5.1], [4, § 2 гл. 6], [5, § 22], [7, § 2 гл. 5].
- Інтегрування раціональних дробів [1, § 2 гл. 5], [3, п. 5.2], [4, § 1–9 гл. 7], [5, § 23, § 24], [7, § 3 гл. 5].
- Інтегрування ірраціональних функцій [1, § 2 гл. 5], [3, п. 5.2], [4, § 10 гл. 7], [5, § 25], [7, § 4 гл. 5].
- Інтегрування трансцендентних функцій [1, § 2 гл. 5], [3, п. 5.2], [4, § 10 гл. 7], [5, § 26], [7, § 4 гл. 5].
- Означення і умови існування інтеграла Рімана [1, § 1, § 2 гл. 6], [3, п. 6.1, п. 6.2], [4, § 1–4 гл. 10], [5, § 27], [7, § 1 гл. 6].
- Основні властивості інтеграла Рімана [1, § 3 гл. 6], [3, п. 6.3], [4, § 5, § 6 гл. 10], [5, § 28, § 29], [7, § 2, § 3 гл. 6].
- Методи обчислення інтеграла Рімана [1, § 3 гл. 6], [3, п. 6.4], [4, § 7 гл. 10], [5, § 29, § 30], [7, § 3 гл. 6].
- Геометричні застосування інтеграла Рімана [1, § 5 гл. 6], [3, п. 6.5], [4, гл. 11], [5, § 32], [7, § 2, § 7 гл. 6].

3.1. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

Нехай функція f визначена на проміжку X (інтервалі $X=(a,b)$, відрізку $X=[a,b]$, півінтервалі $X=[a,b)$ або $X=(a,b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$). У математиці та багатьох її застосуваннях важливою є задача відшукання функції F такої, що

$$dF(x)=f(x)dx \quad (F'(x)=f(x)) \quad \forall x\in X .$$

Якщо така функція F існує, то її називають *первісною функції* f *на проміжку* X, а сукупність усіх первісних $F(x)+C$, де

$C = \underset{\forall}{C}$ – довільна дійсна стала, – *невизначеним інтегралом функції* f *на* X. За теоремою Коші кожна функція $f \in C_X$ має первісну F на X. Операцію відшукання первісних (невизначеного інтеграла) називають *операцією невизначеного інтегрування*. Невизначений інтеграл позначають символом

$$\int f(x)dx = \int dF(x) \overset{\text{def}}{=} F(x) + C \quad (x \in X).$$

Загальноприйнятою є така термінологія: $\int$ – *символ невизначеного інтеграла* (невизначеного інтегрування), $f(x)$ – *підінтегральна функція*, $f(x)dx$ – *підінтегральний вираз*.

З означення випливає, що операції невизначеного інтегрування ($\int$) і диференціювання (d) взаємно обернені. Тому справджуються такі о с н о в н і в л а с т и в о с т і н е в и з н а ч е н о г о і н т е г р а л а:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad (k = \text{const};\ f, g \in C_X;\ x \in X).$$

Останні дві рівності виражають властивість лінійності невизначеного інтеграла і виконуються з точністю до адитивної сталої.

Як уже зазначено вище, для функції $f \in C_X$ первісна F (невизначений інтеграл $\int f(x)dx$) на X завжди існує. Однак далеко не завжди ця первісна є елементарною функцією[1)]. Наприклад, інтеграли

$$\int e^{kx^2} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int \sin(kx^2)dx, \quad \int \cos(kx^2)dx \quad (k = \text{const} \neq 0),$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

[1)] Таким чином, операція інтегрування, на відміну від операції диференціювання, може виводити з класу елементарних функцій.

та багато-багато інших не можна (у скінченному вигляді[1]) виразити через елементарні функції. Про такі інтеграли кажуть, що вони "не беруться", а відповідні первісні називають *неелементарними* (або *спеціальними*) *функціями*. Деякі з таких спеціальних функцій є важливими для застосувань і тому вивчені не гірше, ніж, наприклад, тригонометричні функції. Використовують такі позначення:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Si}(x) + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\mathrm{Si}(x)$ – первісна функції $\dfrac{\sin x}{x}$ така, що $\mathrm{Si}(0) = 0$;

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = \mathrm{Ci}(x) + C, \quad x \in (0, +\infty),$$

де $\mathrm{Ci}(x)$ – первісна функції $\dfrac{\cos x}{x}$ така, що $\mathrm{Ci}(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}(x) + C, \quad x \in [0,1),$$

де $\mathrm{li}(x)$ – первісна функції $\dfrac{1}{\ln x}$ така, що $\mathrm{li}(0) = 0$.

Функції $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{li}(x)$ називають *відповідно інтегральним синусом*, *інтегральним косинусом* та *інтегральним логарифмом*.

Наведемо таблицю невизначених інтегралів, які є елементарними функціями.

1. $\int 0 dx = \int dC = C$, $\int dx = x + C$,

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\int d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int d(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + C,$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}\int d(x^{\alpha+1}) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \int d(\ln|x|) = \ln|x| + C.$$

---

[1] Кажуть, що інтеграл виражається *в скінченному вигляді через елементарні функції*, якщо його можна виразити через основні елементарні функції за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій.

2. $\int e^x dx = \int de^x = e^x + C$,

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}\int de^{kx} = \frac{1}{k}e^{kx} + C \quad (k \neq 0),$$

$$\int a^x dx = \int e^{x\ln a} dx = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$$

3. $\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k}\int d\cos kx = -\frac{1}{k}\cos kx + C \quad (k \neq 0)$,

$$\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\int d\sin kx = \frac{1}{k}\sin kx + C \quad (k \neq 0),$$

$$\int \operatorname{tg} kx\, dx = -\frac{1}{k}\int \frac{d\cos kx}{\cos kx} = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + C \quad (k \neq 0),$$

$$\int \operatorname{ctg} kx dx = \frac{1}{k}\int \frac{d\sin kx}{\sin kx} = \frac{1}{k}\ln|\sin kx| + C \quad (k \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k}\int d\operatorname{tg} kx = \frac{1}{k}\operatorname{tg} kx + C \quad (k \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k}\int d\operatorname{ctg} kx = -\frac{1}{k}\operatorname{ctg} kx + C \quad (k \neq 0).$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C'$,

5. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C'$

$(k \neq 0,\ \ a \neq 0)$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int d\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a \neq 0)$.

7. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int d\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a \neq 0)$.

9. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$.

10. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

11. $\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$.

Зауважимо, що символ диференціала dx незалежної змінної у виразі $\int f(x)\,dx$ вказує, зокрема, на те, по якій змінній проводять інтегрування. Наприклад,

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C \quad (k \neq 0),$$

але

$$\int \cos kx dk = \frac{1}{x}\sin kx + C \quad (x \neq 0).$$

У першому випадку стала C не залежить від x, а в другому – від k. Формули 1–11 справджуються на проміжках X неперервності підінтегральної функції. Формули 8–11 отримані за допомогою основних методів невизначеного інтегрування.

Розрізняють такі основні методи невизначеного інтегрування: розкладу, інтегрування частинами, заміни змінної (підстановки).

Метод розкладу полягає в тому, що підінтегральну функцію f подають, якщо це можливо, у вигляді скінченної суми простіших функцій f_k: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, кожну з яких легко зінтегрувати. Після цього використовують властивість лінійності невизначеного інтеграла:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int f_k(x)\,dx.$$

Метод інтегрування частинами ґрунтується на використанні *формули інтегрування частинами*

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (u = u(x),\ v = v(x) \in C_X^1),$$

яка випливає із формули $d(uv) = vdu + udv$. Функції u і v зазвичай обирають так, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим, ніж інтеграл у лівій частині.

Наведемо кілька типових випадків застосування формули інтегрування частинами.

1. $\int x^n e^x dx = \left[u = x^n,\ dv = e^x dx\right] \quad (n \in \mathbb{N})$.

2. $\int x^n \cos x dx = \left[u = x^n ,\ dv = \cos x dx \right] \quad (n \in \mathbb{N})$.

3. $\int x^n \sin x dx = \left[u = x^n ,\ dv = \sin x dx \right] \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. $\int x^\alpha \ln x dx = \left[u = \ln x,\ dv = x^\alpha dx \right] \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

5. $\int x^n \arcsin x dx = \left[u = \arcsin x,\ dv = x^n dx \right] \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

6. $\int x^n \operatorname{arctg} x dx = \left[u = \operatorname{arctg} x,\ dv = x^n dx \right] \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Зауважимо, що, знаходячи функцію v за її диференціалом dv: $v = \int dv$, можна обмежитись якою-небудь її первісною, оскільки

$$u(v + C_1) - \int (v + C_1) du = uv + C_1 u - \int v du - C_1 u = uv - \int v du .$$

Метод заміни змінної ґрунтується на використанні *формули заміни змінної*

$$\int f(x) dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t) dt \end{bmatrix} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (x \in X,\, t \in T),$$

яка справджується, якщо $f \in C_X$, $\varphi \in C_T^1$, $X = E(\varphi)$, і випливає з властивості інваріантності форми диференціала. Якщо формулу заміни змінної застосовують у вигляді

$$\int f(x) dx = \int g(u(x)) u'(x) dx = \left[u = u(x) \right] = \int g(u) du ,$$

то кажуть про застосування *методу підведення під знак диференціала*. В обох випадках заміну змінної намагаються виконати зазвичай так, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим, ніж інтеграл у лівій частині.

Наведемо приклади застосування методів невизначеного інтегрування.

1. $\int \cos^2 x dx = \int \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 dx = \dfrac{1}{4} \int (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) dx =$

$$= \frac{1}{4} \int (2\cos 2x + 2) dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C .$$

2. $\int \sin^3 x dx = \int \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 dx =$

$$=-\frac{1}{8i}\int(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix})dx=-\frac{1}{8i}\int(2i\sin 3x-6i\sin x)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\sin 3x dx+\frac{3}{4}\int\sin x dx=\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+C .$$

Інакше:

$$\int\sin^3 x dx=\int\sin^2 x\sin x dx=$$

$$=-\int(1-\cos^2 x)d\cos x=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C' .$$

3. $\int\operatorname{tg}^2 x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\operatorname{tg}x-x+C .$

4. $\int\sin\alpha x\cos\beta x dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)\right]dx=$

$$=-\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)}-\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)}+C \quad (\alpha\neq\pm\beta) .$$

5. $\int\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x, & \Rightarrow & du=\frac{dx}{x}, \\ dv=dx, & & v=x \end{bmatrix}=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C .$

6. $\int\arcsin x dx=\begin{bmatrix} u=\arcsin x, & \Rightarrow & du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv=dx, & & v=x \end{bmatrix}=$

$$=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C .$$

7. $\int\operatorname{arctg} x dx=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg} x, & \Rightarrow & du=\frac{dx}{1+x^2}, \\ dv=dx, & & v=x \end{bmatrix}=$

$$=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C .$$

8. $$I=\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\left[\begin{array}{lcc} u=\sqrt{x^2\pm a^2}, & \Rightarrow & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}, \\ dv=dx, & & v=x \end{array}\right]=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{(x^2\pm a^2)\mp a^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx\pm a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}},$$

$$2I=x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C',$$

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$$

3.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дійсною *дробово-раціональною функцією* (*раціональним дробом*) називають частку двох многочленів з дійсними коефіцієнтами:

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{P_n(x)},$$

де $P_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлени степенів m і n відповідно. Якщо $m<n$ ($m\geq n$), то $R(x)$ називають *правильним* (*неправильним*) раціональним дробом. Припустимо, що $R(x)$ – нескоротний дріб. Оскільки при $m\geq n$ $R(x)=P_{m-n}(x)+R_1(x)$, де $P_{m-n}(x)$ – многочлен степеня $m-n$ (ціла частина дробу $R(x)$), а $R_1(x)$ – правильний раціональний дріб, то інтегрування неправильних дробів зводиться до інтегрування правильних дробів.

Правильні раціональні дроби типу

$$1)\ \frac{A}{x-x_0};\quad 2)\ \frac{A}{(x-x_0)^k}\quad (k=2,3,\ldots);$$

$$3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\quad (p^2-4q<0);$$

$$4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \quad (k=2,3,\ldots;\ p^2-4q<0)$$

(A, M, N – дійсні сталі) називають *елементарними* (*найпростішими*) раціональними дробами 1)–4) типів.

Нехай знаменник $P_n(x)$ правильного раціонального дробу $R(x)$ має дійсні корені $x_1, x_2, \ldots, x_m$ кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_m$ та l пар комплексно-спряжених коренів

$$z_1=\alpha_1+i\beta_1,\ \ \overline{z}_1=\alpha_1-i\beta_1,\ \ldots,\ \ z_l=\alpha_l+i\beta_l,\ \ \overline{z}_l=\alpha_l+i\beta_l$$

кратностей

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l \quad (k_1+k_2+\cdots+k_m+2(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_l)=n)$$

відповідно:

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{\nu_l}$$

$$\Big(x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\overline{z}_j)=x^2-(z_j+\overline{z}_j)x+z_j\overline{z}_j\,,$$

$$p_j^2-4q_j<0,\ j=1,2,\ldots,l\Big).$$

У цьому випадку виконується таке твердження (о с н о в н а т е о р е м а п р о р о з к л а д): правильний раціональний дріб $R(x)$ можна єдиним чином (з точністю до перестановки доданків) розкласти на суму елементарних раціональних дробів, причому в цьому розкладі кожному множнику $(x-x_p)^{k_p}$ відповідає рівно k_p доданків типу

$$\frac{A_{p1}}{x-x_p}+\frac{A_{p2}}{(x-x_p)^2}+\cdots+\frac{A_{pk_p}}{(x-x_p)^{k_p}} \quad (p=1,2,\ldots,m),$$

а кожному множнику $(x^2+p_jx+q_j)^{\nu_j}$ – рівно ν_j доданків типу

$$\frac{M_{j1}x+N_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_{j2}x+N_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\cdots+\frac{M_{j\nu_j}x+N_{j\nu_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\nu_j}}$$

$$(j=1,2,\ldots,l).$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти, одержаний розклад потрібно звести до спільного знаменника, відкинути його та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності.

Такий метод розкладу правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів називають *методом невизначених коефіцієнтів*. Застосовують також *метод підстановки зручних значень змінної* x або комбінують обидва методи.

З основної теореми про розклад випливає, що інтегрування раціональних дробів зводиться до інтегрування многочленів та елементарних раціональних дробів.

Інтеграли від елементарних раціональних дробів:

1) $\int \frac{A}{x-x_0}dx = A\int \frac{d(x-x_0)}{x-x_0} = A\ln|x-x_0| + C$;

2) $\int \frac{A}{(x-x_0)^k}dx = A\int (x-x_0)^{-k}d(x-x_0) = A\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} + C =$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}} + C \quad (k = 2,3,\ldots);$$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \begin{bmatrix} x+\frac{p}{2} = t, \\ x = t-\frac{p}{2}, \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}dt =$

$$= \int \frac{Mt+N_1}{t^2+a^2}dt = \begin{bmatrix} N_1 = N - \frac{Mp}{2}, \\ a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0 \end{bmatrix} = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + N_1\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{N_1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N_1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C;$$

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \left[\begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t, \\ x=t-\frac{p}{2},\ dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{Mt+N_1}{(t^2+a^2)^k}dt =$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} + N_1\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + N_1\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}\ .$$

Для знаходження інтеграла $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ використовують рекурентну[1)] формулу, яку можна отримати так:

$$I_k = \int (t^2+a^2)^{-k}dt = \left[\begin{array}{ccc} u=(t^2+a^2)^{-k}, & \Rightarrow & du=-k(t^2+a^2)^{-k-1}2tdt, \\ dv=dt, & & v=t \end{array}\right] =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}\,.$$

Звідси $I_{k+1} = \frac{t}{2ka^2(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k \quad (k=1,2,\ldots)$.

П р и к л а д и   і н т е г р у в а н н я   р а ц і о н а л ь н и х   д р о б і в

1. $I = \int \frac{2x^2+3x+1}{(x-1)x(x+2)}dx$. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{2x^2+3x+1}{(x-1)x(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2}\,,$$

$$2x^2+3x+1 = Ax(x+2) + B(x-1)(x+2) + Cx(x-1)\,,$$

$$\begin{array}{c|lclcl} x^2 & 2\ = A+B+C, & & A+C=5/2, & & A=2, \\ x^1 & 3\ = 2A+B-C, & \Rightarrow & 2A-C=7/2, & \Rightarrow & B=-1/2, \\ x^0 & 1\ = -2B, & & B=-1/2, & & C=1/2. \end{array}$$

---

1) Формулу називають *рекурентною*, якщо вона дозволяє знаходити кожний наступний член послідовності через один або декілька попередніх членів.

Зауважимо, що для відшукання коефіцієнтів можна підставити в тотожність корені знаменника або інші "зручні" значення змінної x. У даному прикладі, підставляючи в тотожність корені знаменника $x=1$, $x=0$, $x=-2$, дістанемо

$$\begin{array}{l|lcl} x=1 & 6=3A, & & A=2, \\ x=0 & 1=-2B, & \Rightarrow & B=-1/2, \\ x=-2 & 3=6C, & & C=1/2. \end{array}$$

Отже,

$$I=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+2)}\right)dx=$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+C\,.$$

2. $I=\int\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)}dx$. Маємо

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$x^2+x+1=A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2\,.$$

Застосуємо метод підстановки:

$$\begin{array}{l|lcl} x=1 & 3=2B, & & B=\frac{3}{2}, \\ x=-1 & 1=4C, & \Rightarrow & C=\frac{1}{4}, \\ x=0 & 1=-A+\frac{3}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}, & & A=\frac{3}{4}. \end{array}$$

Отже, $I=\int\left(\frac{3}{4(x-1)}+\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)}\right)dx=$

$$=\frac{3}{4}\ln|x-1|-\frac{3}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C\,.$$

3. $I=\int\frac{3x^2+2x-1}{(x^2+x+1)(x-1)^2}dx$. Маємо

$$\frac{3x^2+2x-1}{(x^2+x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\,,$$

$$3x^2+2x-1=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Застосуємо комбінований метод:

$$\begin{array}{c|l} x=1 & 4=3B, \\ x^0 & -1=-A+\frac{4}{3}+D, \\ x^1 & 2=\frac{4}{3}+C-2D, \\ x^2 & 3=\frac{4}{3}+D-2C, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B=\frac{4}{3}, \\ A=D+\frac{7}{3}, \\ C-2D=\frac{2}{3}, \\ D-2C=\frac{5}{3}, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B=\frac{4}{3}, \\ A=\frac{4}{3}, \\ D=-1, \\ C=-\frac{4}{3}. \end{array}$$

Отже, $I=\int\left(\frac{4}{3(x-1)}+\frac{4}{3(x-1)^2}-\frac{\frac{4}{3}x+1}{x^2+x+1}\right)dx=$

$$=\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{4}{3(x-1)}-\frac{2}{3}\ln(x^2+x+1)-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

4. $I=\int\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)^2(x-1)}dx$. Маємо

$$\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+F}{(x^2+x+1)^2},$$

$$x^3+1=A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x^3-1)+(Dx+F)(x-1).$$

Застосуємо комбінований метод:

$$\begin{array}{c|l} x=1 & 2=9A, \\ x^0 & 1=A-C-F, \\ x^1 & 0=2A-B-D+F, \\ x^2 & 0=3A+D, \\ x^3 & 1=2A+C, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{2}{9}, \\ F=-\frac{4}{3}, \\ B=-\frac{2}{9}, \\ D=-\frac{2}{3}, \\ C=\frac{5}{9}. \end{array}$$

Отже,

$$I=\int\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)^2(x-1)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{2}{9(x-1)}-\frac{\frac{2}{9}x-\frac{5}{9}}{x^2+x+1}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}{(x^2+x+1)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}K-\frac{2}{3}L,$$

де $K=\int\frac{2x-5}{x^2+x+1}dx=\left[\begin{array}{l} p=q=1, \\ M=2, N=-5, \\ N_1=-6, a^2=\frac{3}{4} \end{array}\right]=$

$$=\ln(x^2+x+1)-\frac{12}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,$$

$$L=\int\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx=\left[\begin{array}{c} p=q=1,\ M=1,\ N=2, \\ N_1=\frac{3}{2},\ a^2=\frac{3}{4},\ t=x+\frac{1}{2} \end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

(застосована рекурентна формула).

З вищевикладеного випливає, що інтеграл від раціонального дробу є елементарною функцією, яка може виражатися через степеневу функцію, раціональний дріб, логарифм або арктангенс.

Позначимо символом $R(x,y,\ldots,z)$ раціональну функцію своїх аргументів, тобто функцію, над аргументами $x, y, \ldots, z$ якої виконуються тільки арифметичні операції додавання, віднімання, множення, ділення та операція піднесення до цілого степеня. Розглянемо інтеграл вигляду

$$I(x)=\int R(x,y,\ldots,z)dx.$$

Якщо $y = y(x)$, ..., $z = z(x)$ – елементарні функції аргументу x, а $\varphi(t)$ – елементарна функція аргументу t така, що

$$I(x) = \int R(x, y, \ldots, z)dx = \left[x = \varphi(t)\right] = \int R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональний дріб, то $I(x)$ є елементарною функцією, яку можна знайти за допомогою інтегрування раціонального дробу $R_1(t)$ методом невизначених коефіцієнтів. У цьому випадку заміну змінної $x = \varphi(t)$ називають *раціоналізуючою заміною* (*підстановкою*).

3.3. Методи інтегрування окремих типів ірраціональних функцій

1. $I_1(x) = \int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

$(m, \ldots, n \in \mathbb{N};\ a, b, c \in \mathbb{R})$.

Раціоналізуюча підстановка $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$ ($s = \text{НСК}(m, \ldots, n)$ – найменше спільне кратне чисел $m, \ldots, n$).

2. $I_2(x) = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \quad (a \neq 0, b, c \in \mathbb{R})$.

Раціоналізуючі підстановки (*підстановки Ейлера*):

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} \pm t \quad (a > 0)$;

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \quad (c > 0)$;

3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_0)t$ ($D = b^2 - 4ac > 0$, x_0 – корінь тричлена $ax^2 + bx + c$).

3. $I_3(x) = \int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (a \neq 0, b, c \in \mathbb{R})$.

Інтеграл можна звести до позицій 4 і 6 таблиці невизначених інтегралів (п. 3.1), виділяючи повний квадрат у квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{D}{4a}$ і виконуючи заміну $x + \dfrac{b}{2a} = t$.

4. $I_4(x) = \int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($P_n(x)$ – многочлен степеня n; $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$).

Інтеграл можна знайти методом невизначених коефіцієнтів у вигляді розкладу

$$I_4(x) = \int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степеня $n-1$ з невідомими коефіцієнтами, λ – невідомий коефіцієнт. Щоб знайти невідомі (невизначені) коефіцієнти, потрібно продиференціювати розклад, звести його до спільного знаменника, відкинути знаменник та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої тотожності.

5. $I_5(x) = \int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ ($m, n, p \in \mathbb{Q}$).

Інтеграли такого типу називають інтегралами від *диференціальних біномів*.

Справджується т е о р е м а П. Л. Ч е б и ш о в а. Інтеграл $I_5(x)$ є елементарною функцією тоді і тільки тоді, коли виконується будь-яка з умов:

1) $p \in \mathbb{Z}$ (раціоналізуюча підстановка $x = t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n);

2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ (раціоналізуюча підстановка $a + bx^n = t^r$, де r – знаменник дробу p);

3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ (раціоналізуюча підстановка $\frac{a}{x^n} + b = t^r$, де r – знаменник дробу p).

Підстановки $x = t^s$, $a + bx^n = t^r$, $\frac{a}{x^n} + b = t^r$ називають *1-ою, 2-ою і 3-ою підстановками Чебишова* відповідно.

Згідно з теоремою Чебишова, наприклад, інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \int x^0 (1+x^3)^{-1/2}\,dx\,,$$

не є елементарною функцією ("не береться"), оскільки $m=0$, $n=3$, $p=-\frac{1}{2}$ і $p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

6. $I_6(x) = \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + d}\,)\,dx$ ($R(x,y)$ – раціональна функція аргументів x і y).

Інтеграл такого вигляду називають *еліптичним*, якщо він не виражається у скінченному вигляді через елементарні функції.

За допомогою тотожних перетворень і підстановок усі еліптичні інтеграли можна виразити через такі три інтеграли ($0<k<1$, h – параметри):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

які називають *еліптичними інтегралами 1-го, 2-го і 3-го роду* відповідно. Якщо виконати підстановку

$$z = \sin\varphi \quad \left(\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\right),$$

то еліптичні інтеграли можна виразити через інтеграли типу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,dz\,,$$

$$\int \frac{dz}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Ці інтеграли також називають *еліптичними інтегралами 1-го, 2-го і 3-го роду у формі Лежандра*. Перші два з них особливо часто використовуються і мають спеціальні позначення:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) + C\,,$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,dz = E(k,\varphi) + C\,,$$

де $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$ – ті первісні, для яких $F(k,0) = E(k,0) = 0$.

До інтегралів типу I_6 зводяться (за допомогою тотожних перетворень і підстановок) інтеграли типу

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})\, dx .$$

Еліптичні інтеграли F і E, функції $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{li}(x)$ та багато інших (див. також с. 29) є прикладами функцій, властивості яких добре вивчені за їх інтегральними представленнями і які знаходять широке застосування.

3.4. Методи інтегрування окремих типів трансцендентних функцій

1. $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx,\ \int \sin\alpha x \sin\beta x dx,\ \int \cos\alpha x \cos\beta x dx$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \pm\beta)$.

Застосовують метод розкладу з використанням тригонометричних формул:

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x\right].$$

2. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$.

Раціоналізуючою є так звана *універсальна тригонометрична підстановка* $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ $(x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

3. $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\sin x\, dx,\ \int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\cos x\, dx$,

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx.$$

Раціоналізуючими є відповідно такі підстановки:

$$\sin x = t, \quad \cos x = t, \quad \mathrm{tg}\, x = t.$$

4. $\int \sin^m x \cos^{2n+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2n} x\, d\sin x =$

$$=\left[\sin x = t\right] = \int t^m (1-t^2)^n\, dt\,,$$

$$\int \sin^{2m+1} x \cos^n x\, dx = -\int \sin^{2m} x \cos^n x\, d\cos x =$$

$$=\left[\cos x = t\right] = -\int (1-t^2)^m t^n dt \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

5. $\int \sin^{2n} x dx,\ \int \cos^{2n} x\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

За допомогою формул Ейлера

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

інтегрування парних степенів $\sin x$ і $\cos x$ можна звести до інтегрування функцій $\cos kx$ ($k = 0, 1, \ldots, 2n$). Наприклад,

$$\int \sin^6 x dx = \left[\begin{array}{l} \sin^6 x = \dfrac{1}{(2i)^6}(e^{ix} - e^{-ix})^6 = \\ = -\dfrac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + \\ \qquad\qquad + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) = \\ = -\dfrac{1}{64}(2\cos 6x - 12\cos 4x + 30\cos 2x - 20) = \\ = \dfrac{5}{16} - \dfrac{1}{32}\cos 6x + \dfrac{3}{16}\cos 4x - \dfrac{15}{32}\cos 2x \end{array}\right] =$$

$$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + C\,.$$

3.5. Інтеграл Рімана (визначений інтеграл)

Якщо функція f визначена на відрізку $[a,b]$, то величину

$$\sigma = \sigma(f; \tau; \{\xi_k\}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

називають *інтегральною сумою Рімана* функції f по відрізку $[a,b]$.

Інтегральна сума залежить від способу *розбиття* τ відрізка $[a,b]$ на n *часткових відрізків* $[x_{k-1}, x_k]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,,\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,\quad [a,b] = \bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1}, x_k]\,,$$

і вибору системи точок $\{\xi_k\}:\quad x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Величину $d = d(\tau) = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$ називають *діаметром розбиття* τ.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум

$$\lim_{d\to 0}\sigma = I = \text{const}\,,$$

яка не залежить від способу розбиття τ відрізка $[a,b]$ і від вибору системи точок $\{\xi_k\}$, то її називають *інтегралом Рімана (визначеним інтегралом) від функції* f *по відрізку* $[a,b]$ і позначають символом $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ (a, b – відповідно *нижня* і *верхня межі інтегрування*, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз).

З означення випливає, що інтеграл Рімана не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування. Тому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\cdot)\,d\,\cdot = \cdots.$$

Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує, то кажуть, що функція f *інтегровна за Ріманом на відрізку* $[a,b]$ і пишуть $f \in R_{[a,b]}$.

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a,b]$, то обов'язково $f \in R_{[a,b]}$, тобто $C_{[a,b]} \subset R_{[a,b]}$. Виявляється, що інтегровними за Ріманом на відрізку $[a,b]$ є ті і тільки ті функції, які (в певному розумінні) мало відрізняються від неперервних функцій.

Кажуть, що множина $X \subset \mathbb{R}$ має *лебегову міру нуль*, якщо її можна покрити скінченною або нескінченною послідовністю інтервалів (α_i, β_i) ($i = 1, 2, \ldots$), сумарна довжина яких як завгодно мала (тобто $\le \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число):

$$X \subset \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)\,, \quad \sum_i (\beta_i - \alpha_i) \le \varepsilon\,.$$

Лебегову міру нуль мають, наприклад, такі множини: $X = \{x_0\}$ – одноточкова множина, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – скінченна множина, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ – нескінченна множина точок числової послідовності (зліченна множина).

Критерій інтегровності Лебега стверджує, що функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли вона на $[a,b]$ обмежена і *неперервна майже скрізь* (тобто неперервна на $[a,b]$ скрізь, за можливим винятком множини X точок розриву, яка має лебегову міру нуль). Наприклад, функція

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \in (0,1]\,, \quad f(0) = \mathrm{const}\,,$$

інтегровна за Ріманом на відрізку $[0,1]$, оскільки вона обмежена $[0,1]$ і множина $X = \left\{0, \frac{1}{k\pi}\,(k \in \mathbb{N})\right\}$ її точок розриву має лебегову міру нуль.

Якщо $f \in R_{[a,b]}$, а функція g обмежена на $[a,b]$ і відрізняється від функції f на скінченній множині точок відрізка $[a,b]$, то $g \in R_{[a,b]}$ і $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$. Цю властивість називають *властивістю грубості інтеграла Рімана*. З властивості грубості випливає, зокрема, що інтеграл Рімана може існувати і тоді, коли підінтегральна функція не визначена на скінченній множині точок розриву першого роду з відрізка $[a,b]$. Наприклад, інтеграли

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx\,, \quad \int\limits_{-2}^1 \frac{e^{|x|}-1}{x}dx\,, \quad \int\limits_0^{10} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

і т. п. існують і не залежать від того, яке значення має підінтегральна функція при $x = 0$ (підінтегральні функції не визначені при $x = 0$ і мають у точці $x = 0$ розрив першого роду).

Щоб надати визначеному інтегралу *фізичну інтерпретацію*, приймемо, що $f(x)$ – густина маси (електричного заряду) тонкого (поперечними розмірами можна знехтувати) стержня, розміщеного уздовж відрізка $[a,b]$ осі Ox. Тоді інтегральна сума є наближеним значенням маси (сумарного електричного заряду) такого стержня, тим точнішим, чим менший діаметр розбиття τ. За означенням

$$m([a,b]) = \int_a^b f(x)dx \ \left(= Q([a,b])\right) \quad (f \in R_{[a,b]}),$$

де $m([a,b])$ $\left(Q([a,b])\right)$ – маса (сумарний електричний заряд) стержня.

Геометрична інтерпретація визначеного інтеграла випливає з рис. 34, на якому зображена *криволінійна трапеція* D – плоска фігура, обмежена графіком $y = f(x) \geq 0$ функції $f \in R_{[a,b]}$, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$ та відрізком $[a,b]$ осі Ox. У цьому випадку інтегральна сума є площею заштрихованої ступінчастої фігури – наближеним значенням площі $S(D)$ криволінійної трапеції. За означенням $S(D) = \int_a^b f(x)dx$.

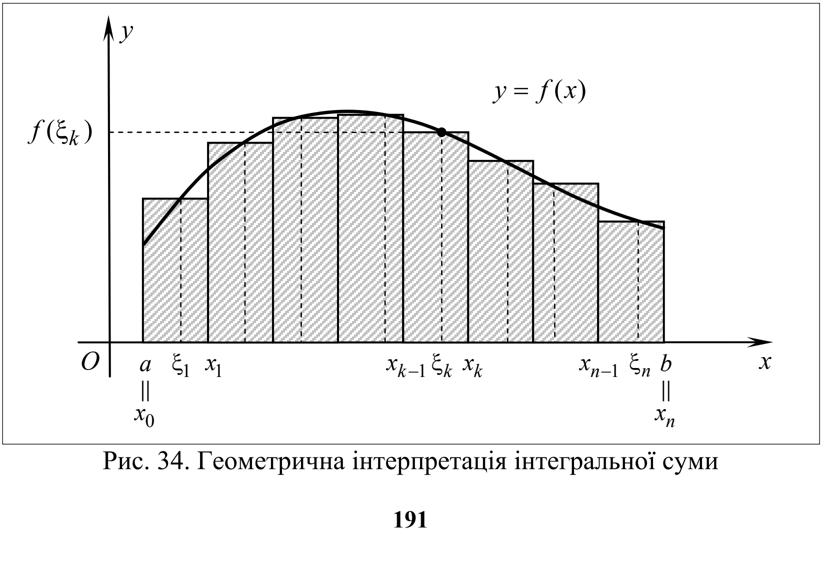


Рис. 34. Геометрична інтерпретація інтегральної суми

Властивості визначеного інтеграла від неперервних функцій

1. Властивості, виражені рівностями

1.1. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b dF(x) = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F(x)\Big|_a^b$

(*формула Ньютона – Лейбніца*).

1.2. $\int\limits_a^b dx = b - a, \quad \int\limits_a^b 0dx = 0$.

1.3. $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$, $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$

(*лінійність визначеного інтеграла*, $k = \text{const}$).

1.4. $\int\limits_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0, \quad \int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f(x)dx$.

1.5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

(*адитивність визначеного інтеграла*; функція f неперервна на більшому з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$; властивість виконується при будь-якому взаємному розміщенні точок a , b і c).

1.6. $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (\exists \xi \in [a,b])$

(*теорема про середнє значення визначеного інтеграла*).

2. Властивості, виражені нерівностями ($a \le b$)

2.1. $f(x) \ge g(x) \ \ \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$

(*монотонність визначеного інтеграла*).

2.2. $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

2.3. $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [a,b], \ f(x_0) > 0 \ \ (\exists x_0 \in [a,b]) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

2.4. $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [a,b], \ \int\limits_a^b f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \equiv 0 \ \ (x \in [a,b])$.

2.5. $m \le f(x) \le M \ \ \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

(*груба оцінка визначеного інтеграла*).

2.6. $\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \le \left| \int\limits_a^b | f(x) | \, dx \right|$

(*оцінка інтеграла по модулю*; нерівність виконується як при $a \le b$, так і при $a > b$).

2.7. $\left| \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \right| \le \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b g^2(x)dx \right)^{1/2}$

(*нерівність Коші – Буняковського*).

Зауважимо, що властивості 1.2–1.5 справджуються і для функцій класу $R_{[a,b]}$, а властивість 1.1 – для функції $f \in R_{[a,b]}$, яка має первісну $F(x)$ на $[a,b]$; властивість 1.6 для функції $f \in R_{[a,b]}$ записують у вигляді $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, де $\mu \in [m, M]$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ (μ – *інтегральне середнє функції* f *на* $[a,b]$). Властивості 2.1–2.3, 2.5–2.7 виконуються також для функцій класу $R_{[a,b]}$, причому властивість 2.3 формулюють так: $f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [a,b], \ f(x_0) > 0$ ($x_0 \in [a,b]$ – точка неперервності функції f) $\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

3. Властивості інтеграла Рімана зі змінною верхньою межею

Якщо $f \in R_{[a,b]}$, то функцію

$$\Phi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$$

називають *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

3.1. Якщо $f \in R_{[a,b]}$, то $\Phi \in C_{[a,b]}$.

3.2. Якщо $f \in C_{[a,b]}$, то $\Phi \in C^1_{[a,b]}$ і

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

(*формула Барроу*).

Наслідки формули Барроу:

а) Φ – первісна функції $f \in R_{[a,b]}$ така, що $\Phi(a) = 0$;

б) $\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$

($f \in C_{[a,b]}$; $a \le \varphi(x) \le b,\ a \le \psi(x) \le b\ \ \forall x \in [a,b]$; $\varphi, \psi \in C^1_{[a,b]}$).

За допомогою інтеграла зі змінною верхньою (нижньою) межею записують важливі спеціальні інтегральні функції. Наприклад, *інтеграли Френеля*, *інтеграл імовірностей*, *інтегральні синус*, *косинус*, *логарифм*, *експоненту* та *функції Лежандра* (*еліптичні інтеграли 1-го і 2-го роду*) записують відповідно у вигляді[1)]:

$$\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}dt, \quad \mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}dt, \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,$$

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt \ \ (x > 0), \quad \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \ \ (x \ge 0),$$

[1)] За означенням $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx$.

$$\operatorname{li}(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}\ \ (x>0), \quad \operatorname{Ei}(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt\ \ (x<0),$$

$$F(k,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}, \quad E(k,\varphi)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\tau}\,d\tau$$

$$(0<k<1).$$

Аналітичне обчислення[2)] інтеграла Рімана ґрунтується на використанні формули Ньютона – Лейбніца, а також методів розкладу, інтегрування частинами і заміни змінної.

Формули інтегрування частинами і заміни змінної для інтеграла Рімана мають відповідно вигляд

$$\int_a^b u\,dv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b v\,du,$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$, $u,v\in C^1_{[a,b]}$;

$$\int_a^b f(x)dx=\left[\begin{array}{c} x=\varphi(t),\\ dx=\varphi'(t)dt\end{array}\right]=\int_{\alpha=\varphi^{-1}(a)}^{\beta=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $\varphi\in\left[\begin{array}{ll} C^1_{[\alpha,\beta]} & \text{при } \varphi\uparrow\uparrow \text{ на } [\alpha,\beta] \ \ (\text{рис. } 35),\\ C^1_{[\beta,\alpha]} & \text{при } \varphi\downarrow\downarrow \text{ на } [\beta,\alpha] \ \ (\text{рис. } 36),\end{array}\right.$ $\quad f\in C_{[a,b]}$.

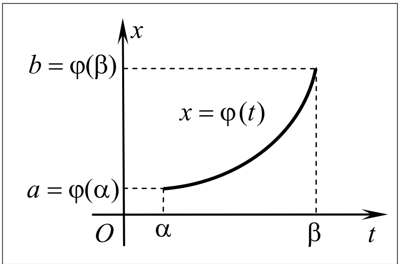


Рис. 35. Функція $\varphi\uparrow\uparrow$

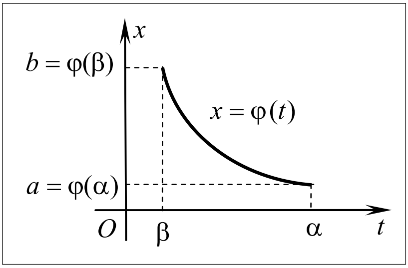


Рис. 36. Функція $\varphi\downarrow\downarrow$

[2)] З наближеними методами обчислення інтеграла Рімана можна ознайомитися в [9, 10, 13].

Зазначимо, що формули інтегрування частинами і заміни змінної правильні також у випадках:

$$u'(x), v'(x) \in R_{[a,b]}$$

і

$$\varphi' \in \left[\begin{array}{ll} R_{[\alpha,\beta]} & \text{при } \varphi\uparrow\uparrow \text{ на } [\alpha,\beta], \\ R_{[\beta,\alpha]} & \text{при } \varphi\downarrow\downarrow \text{ на } [\alpha,\beta], \end{array}\right. \quad f \in R_{[a,b]}$$

відповідно.

Обчислюючи інтеграли від парних, непарних та періодичних (з періодом T) функцій, корисно пам'ятати такі формули:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \quad \left(f(-x) = f(x)\ \ \forall x \in [-a,a]\right),$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \quad \left(f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in [-a,a]\right),$$

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx \quad \left(f(x+T) = f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}\right),$$

які випливають із формули заміни змінної. Наприклад,

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin x dx = \int_{a}^{a+2\pi} \sin x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \int_{a}^{a+2\pi} \cos x dx = \int_{0}^{2\pi} \cos x dx = 0,$$

$$\int_{\pi/2}^{5\pi/2} |\sin x|\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx = 2\int_{0}^{\pi} |\sin x|\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin x dx = 4,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{|\sin x| + 1} dx = 0 .$$

Розглянемо п р и к л а д застосування формули заміни змінної для обчислення інтеграла

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} .$$

Спочатку знайдемо первісну $F(x)$ неперервної функції $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$ на відрізку $[0,2\pi]$. Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ при $x\neq\pi$, маємо

$$\int f(x)dx=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C\quad(x\neq\pi).$$

Тому

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C_1 & \text{при } x\in[0,\pi],\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C_2 & \text{при } x\in[\pi,2\pi].\end{cases}$$

Оскільки $F\in C^1_{[0,2\pi]}$, то, зокрема, $F(\pi-0)=F(\pi+0)\overset{\text{def}}{=}F(\pi)$. Звідси

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_2,\quad C_2=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+C_1,$$

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C_1 & \text{при } x\in[0,\pi],\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}+C_1 & \text{при } x\in[\pi,2\pi].\end{cases}$$

Отже, за формулою Ньютона – Лейбніца маємо

$$I=F(x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+C_1-C_1=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Тепер обчислимо цей інтеграл, використовуючи формулу заміни змінної для інтеграла Рімана. Зважаючи на 2π-

періодичність і парність функції f, а також користуючись адитивністю інтеграла, маємо

$$I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=2\left(\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}x=\pi-u,\\ dx=-du\end{bmatrix}=2\left(\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}+\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{du}{2-\cos x}\right)=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2+\cos x}+\frac{1}{2-\cos x}\right)dx=\begin{bmatrix}t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x=2\operatorname{arctg}t,\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \alpha=0,\beta=1\end{bmatrix}=$$

$$=2\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}+\frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=4\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{t^2+3}+\frac{1}{3t^2+1}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}t\right)\Bigg|_0^1=4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

3.6. Геометричні застосування інтеграла Рімана

1. Обчислення довжини $l(K)$ кривої K:

$$l(K)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

($K\subset\mathbb{R}^3$ – просторова крива, задана рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$; $x(t), y(t), z(t)\in C^1_{[\alpha,\beta]}$);

$$l(K)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$$

($K\subset\mathbb{R}^2$ – плоска крива, задана рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$; $x(t), y(t)\in C^1_{[\alpha,\beta]}$);

$$l(K)=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

($K\subset\mathbb{R}^2$ – плоска крива, яка є графіком функції $y=y(x)\in C^1_{[a,b]}$);

$$l(K)=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+\dot{r}^2(\varphi)}\,d\varphi$$

($K\subset\mathbb{R}^2$ – плоска крива, задана в полярних координатах r і φ рівнянням $r=r(\varphi)\in C^1_{[\alpha,\beta]}$).

2. Обчислення площі $S(D)$ плоскої фігури D:

$$S(D)=\int_a^b f(x)dx$$

(D – криволінійна трапеція – плоска фігура, обмежена відрізком $[a,b]$ осі Ox, відрізками прямих $x=a$ і $x=b$ та графіком функції $y=f(x)\geq 0$, $f\in C_{[a,b]}$);

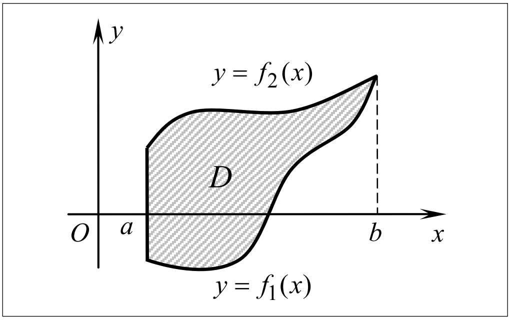


Рис. 37. Площа фігури D

$$S(D)=\int_a^b \left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

(D – плоска фігура, обмежена відрізками прямих $x=a$ і $x=b$ та графіками функцій $f_1(x), f_2(x)\in C_{[a,b]}$, $f_1(x)\leq f_2(x)$) (рис. 37);

$$S(D)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

(D – криволінійний сектор – плоска фігура, обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$, та кривою $r=r(\varphi)\in C_{[\alpha,\beta]}$) (рис. 38).

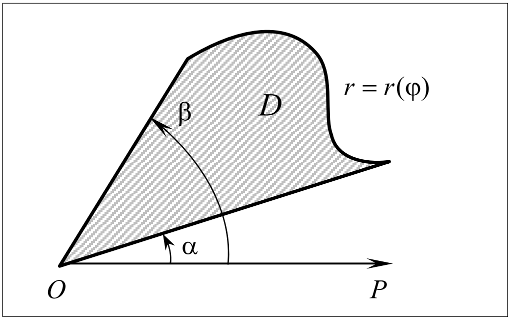


Рис. 38. Площа криволінійного сектора

3. Обчислення об'ємів $V(T)$ і площ поверхонь $S(\Sigma)$ тіл обертання:

$$V(T_x)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

(T_x – тіло, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $D=\{a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$, $f\in C_{[a,b]}$) (рис. 39);

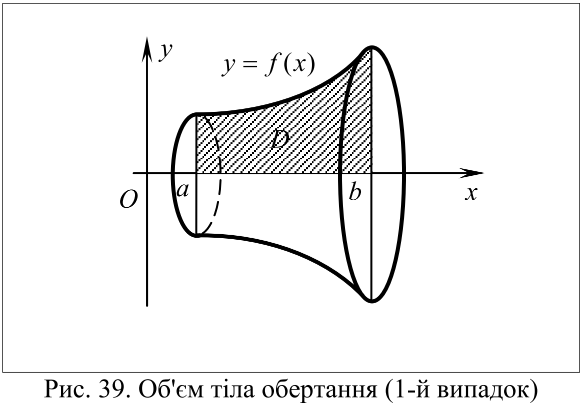


Рис. 39. Об'єм тіла обертання (1-й випадок)

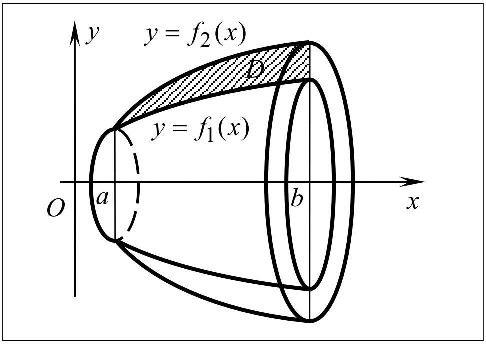


Рис. 40. Об'єм тіла обертання (2-й випадок)

$$V(T_x) = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x) \right) dx$$

(T_x – тіло, утворене обертанням навколо осі Ox фігури $D = \{a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, $f_1, f_2 \in C_{[a,b]}$) (рис. 40);

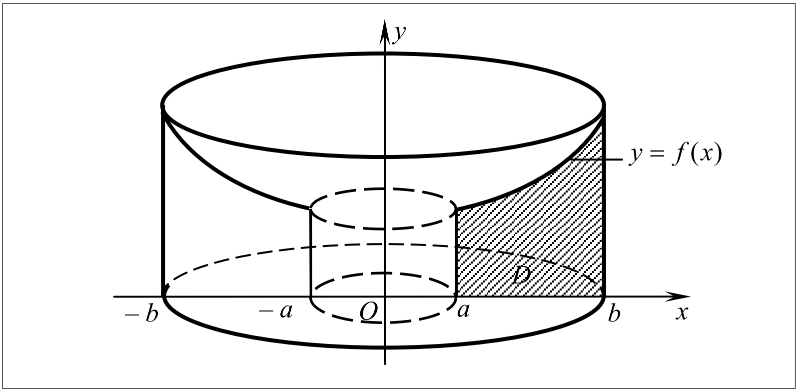


Рис. 41. Об'єм тіла обертання (3-й випадок)

$$V(T_y) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(T_y – тіло, утворене обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції $D = \{a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$, $f \in C_{[a,b]}$) (рис. 41);

$$V(T_p) = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$$

(T_p – тіло, утворене обертанням навколо полярної осі криволінійного сектора $D = \{\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le r(\varphi)\}$, $r(\varphi) \in C_{[\alpha,\beta]}$) (рис. 42);

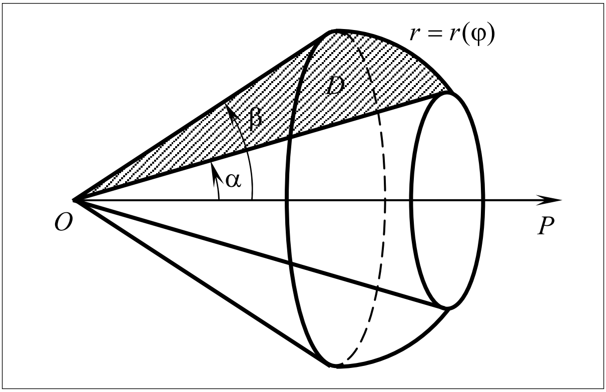


Рис. 42. Об'єм тіла обертання (4-й випадок)

$$S(\Sigma) = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(Σ – поверхня, утворена обертанням навколо осі Ox графіка функції $y = f(x) \in C^1_{[a,b]}$).

3.7. Деякі фізичні застосування інтеграла Рімана

1. Визначення статичних моментів і координат центра мас плоскої однорідної матеріальної кривої $y = f(x)$ ($a \le x \le b$, густина кривої $\rho = \rho_0 = \text{const}$):

$$M_0 = \rho_0 \int_a^b \sqrt{x^2 + f^2(x)}\,\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(статичний момент відносно початку координат);

$$M_x = \rho_0 \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(статичний момент відносно осі Ox);

$$M_y = \rho_0 \int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(статичний момент відносно осі Oy);

$$M = \rho_0 \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(маса кривої);

$$x_c = \frac{1}{M} M_y = \frac{1}{l}\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

$$y_c = \frac{1}{M} M_x = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(координати центра мас);

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(довжина кривої).

2. Визначення статичних моментів і координат центра мас однорідної пластинки, яка має форму криволінійної трапеції ($a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$; густина пластинки $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$):

$$M_x = \frac{1}{2}\rho_0 \int_a^b f^2(x)\,dx$$

(статичний момент відносно осі Ox);

$$M_y = \rho_0 \int_a^b x f(x)\,dx$$

(статичний момент відносно осі Oy);

$$M = \rho_0 \int_a^b f(x)\,dx$$

(маса пластинки);

$$x_c = \frac{1}{M} M_y = \frac{1}{S} \int_a^b x f(x)\,dx, \quad y_c = \frac{1}{M} M_x = \frac{1}{2S} \int_a^b f^2(x)\,dx$$

(координати центра мас);

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(площа пластинки).

3.8. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 6

Варіант 1

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$. **2.** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$. **3.** $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$.

4. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. **5.** $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{x(x+3)(x-1)}dx$. **6.** $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$. **9.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **11.** $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$. **12.** $\int \mathrm{sh}^2\, 3x dx$.

Варіант 2

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. **2.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$. **3.** $\int (x^2-x+1)\,\mathrm{ch}\, x dx$.

4. $\int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$. **5.** $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x+5)(x-4)}dx$. **6.** $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

7. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx$. **9.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$. **11.** $\int \frac{3\,\mathrm{tg}^2 x-50}{2\,\mathrm{tg}\, x+7}dx$. **12.** $\int (1+\mathrm{sh}\, 2x)^2 dx$.

Варіант 3

Знайти інтеграли:

1. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$. **2.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x}}$. **3.** $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}dx$.

4. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$. **5.** $\int \frac{2x^3-1}{(x+2)^2(x^2+x+2)}dx$. **6.** $\int \frac{xdx}{(x^3-1)^2}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **8.** $\int x^{-11}(1+x)^{-1/2}dx$. **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

10. $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$. **11.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$. **12.** $\int \operatorname{ch}^3 x dx$.

Варіант 4

Знайти інтеграли:

1. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$. **2.** $\int \frac{e^x+2e^x}{e^{2x}+1}dx$. **3.** $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

4. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+1}}dx.$ **5.** $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$ **6.** $\int \frac{(x^2+3x-2)dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}.$

7. $\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}dx$. **9.** $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

10. $\int \sqrt{2ax-x^2}dx$. **11.** $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$. **12.** $\int \operatorname{th} x dx$.

Варіант 5

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$. **2.** $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}}dx$. **3.** $\int (x^2-1)^2\ln x dx$.

4. $\int \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}dx$. **5.** $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-2)(x-1)}dx$. **6.** $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

7. $\int (4+x^2)^{3/2}dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\sqrt[12]{x^5}}dx$. **9.** $\int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}$.

10. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **11.** $\int \cos^7 x dx$. **12.** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x+1}$.

В а р і а н т 6

Знайти інтеграли:

1. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$. **2.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$. **3.** $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$.

4. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x}$. **5.** $\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)} dx$. **6.** $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2} dx$.

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$. **8.** $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[3]{x^5}} dx$. **9.** $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

10. $\int \sqrt{4x+x^2} dx$. **11.** $\int \frac{\sin 3x}{\cos x} dx$. **12.** $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}$.

В а р і а н т 7

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. **2.** $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$. **3.** $\int e^{-3x}(2-9x) dx$.

4. $\int \frac{(x^3+2x^2+3)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. **5.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. **6.** $\int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt{1+x^{2/3}}}{x^2} dx$. **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

10. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$. **11.** $\int \operatorname{sh}^3 3x\, dx$. **12.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 1}$.

В а р і а н т 8

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$. **2.** $\int x\sqrt{1-x} dx$. **3.** $\int (4x+7)\cos 3x dx$.

4. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}} dx$. **5.** $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx$.

6. $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$. 7. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$. 8. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x\,dx$.

9. $\int \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$. 10. $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. 12. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

Варіант 9

Знайти інтеграли:

1. $\int \left(\frac{2}{4+x^2}-\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$. 2. $\int \frac{x^5 dx}{x^{12}-1}$. 3. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

4. $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. 5. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx$. 6. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$. 8. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^3}dx$. 9. $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

10. $\int \frac{xdx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}$. 11. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x\,dx}{(\cos^3 x+\sin^3 x)^2}$. 12. $\int \mathrm{sh}^4 x\,\mathrm{ch}\,x\,dx$.

Варіант 10

Знайти інтеграли:

1. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$. 2. $\int x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$. 3. $\int x(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(6-x)}}$. 5. $\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx$. 6. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

7. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,x^2dx$. 8. $\int \frac{(2x-3)^{1/2}dx}{(2x-3)^{1/3}+1}$. 9. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

10. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}$. **11.** $\int \frac{2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}{(1+\cos 2x)\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}dx$. **12.** $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

Варіант 11

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}$. **2.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$. **3.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

4. $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}\,dx$. **5.** $\int \frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}dx$.

6. $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$. **7.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}}$.

8. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **9.** $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

10. $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$. **11.** $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}dx$. **12.** $\int \sqrt{\operatorname{cth} x+1}\,dx$.

Варіант 12

Знайти інтеграли:

1. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$. **2.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$. **3.** $\int \ln(x^2+4)\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x}}$. **5.** $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$. **6.** $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^4+x^2+1)^2}$.

7. $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[8]{x^7}}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}$. **10.** $\int \frac{(x^3-x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

11. $\int \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x+5)\sin 2x}$. **12.** $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x\,dx$.

В а р і а н т 15

Знайти інтеграли:

1. $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. **2.** $\int\frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$. **3.** $\int\sqrt[3]{1+3\sin x}\cos x\,dx$.

4. $\int\sqrt{\frac{3-x}{4+x}}\,dx$. **5.** $\int\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$. **6.** $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

7. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **8.** $\int\frac{(25-x^2)^{3/2}}{x^4}dx$. **9.** $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

10. $\int\sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$. **11.** $\int\frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$. **12.** $\int\sqrt{\operatorname{th}x}\,dx$.

В а р і а н т 16

Знайти інтеграли:

1. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$. **2.** $\int x\cos x^2dx$. **3.** $\int(3x-x^2)\sin 2x\,dx$.

4. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+x\sqrt[4]{x}}}$. **5.** $\int\frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$. **6.** $\int\frac{(4x^5-1)\,dx}{(x^5+x+1)^2}$.

7. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$. **8.** $\int\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. **9.** $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x-1}}$.

10. $\int\frac{9x^3-3x^2+2}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$. **11.** $\int\frac{(8+\operatorname{tg}x)\,dx}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}$. **12.** $\int\operatorname{ch}^4 x\,dx$.

В а р і а н т 17

Знайти інтеграли:

1. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^5}\right)dx$. **2.** $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$. **3.** $\int x\sin x\cos 2x\,dx$.

4. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **5.** $\int\frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx$.

6. $\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$. **7.** $\int x^{19}\sqrt{x^{10}+1}\,dx$.

8. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}}$. **9.** $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$. **10.** $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

11. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin x)(1+\cos x)}$. **12.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}$.

Варіант 18

Знайти інтеграли:

1. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$. **2.** $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$. **3.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2(1+x^2)}$.

4. $\int \sqrt{2x+x^2}\,dx$. **5.** $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$.

6. $\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}dx$. **7.** $\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^5}dx$. **9.** $\int \frac{x^3\,dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

10. $\int \frac{(x+4)\,dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}$. **11.** $\int \frac{\cos x\,dx}{5+4\cos x}$. **12.** $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

Варіант 19

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$. **2.** $\int \frac{6^x\,dx}{9^x-4^x}$. **3.** $\int (x^2+x)\ln(x+1)\,dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. **5.** $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

6. $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$. **7.** $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$.

9. $\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}$. **10.** $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

11. $\int \sin^6 x dx$. **12.** $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\, dx$.

Варіант 20

Знайти інтеграли:

1. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. **2.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **3.** $\int (9x^2+9x+11)\cos 3x dx$.

4. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. **5.** $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$.

6. $\int \sin^2 x \cos^6 x dx$. **7.** $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}dx$.

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. **9.** $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\sqrt[10]{x^9}}dx$. **10.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

11. $\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx$. **12.** $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx$.

Варіант 21

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$. **2.** $\int x\sqrt{1-x}\, dx$. **3.** $\int (4x+7)\cos 3x\, dx$.

4. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}dx$. **5.** $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$.

6. $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$. **7.** $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. **10.** $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

11. $\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$. **12.** $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$.

Варіант 22

Знайти інтеграли:

1. $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx$. **2.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}}$. **3.** $\int \frac{\cos^2 x}{e^x} dx$.

4. $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$. **5.** $\int \frac{2x^3 dx}{(x+2)^2 (x^2 + x + 2)}$. **6.** $\int \frac{x\, dx}{(x^3 - 1)^2}$.

7. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}}$. **8.** $\int x^{-11} (1 + x^4)^{-1/2}\, dx$. **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}$.

10. $\int (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$. **11.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$. **12.** $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx$.

Варіант 23

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$. **2.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$. **3.** $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$.

4. $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt{\frac{2-x}{2+1}} dx$. **5.** $\int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-2)(x-1)} dx$.

6. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$. **7.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\, dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

9. $\int \frac{\left(x + \sqrt{1+x^2}\,\right)^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$. **10.** $\int \frac{(x^2 - 1)\, dx}{x\sqrt{1 + 3x^2 + x^4}}$.

11. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx$. **12.** $\int \frac{1 + 2 \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx$.

В а р і а н т 24

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. **2.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x}}$. **3.** $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$.

4. $\int \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}dx$. **5.** $\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}dx$.

6. $\int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2+2x+2)^3}$. **7.** $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$. **8.** $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^3}dx$.

9. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$. **10.** $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

11. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x-\sin x}$. **12.** $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x\,dx$.

3.9. Індивідуальні завдання самостійної роботи № 7

В а р і а н т 1

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{e-1} \ln(1+x)\,dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{x\,dx}{x^3-1}$; в) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y=6x-x^2-7,\ y=x-3$;

б) $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ \ (0\le t\le 2\pi,\ a>0,\ b>0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $2y=x^2,\ 2x+2y-3=0$, навколо осі Ox;

б) $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=a\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\ \ (a>0)$.

5. Знайти статичний момент M_x відносно осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 2\sin x,\ y = 1\ \ (0 \le x \le \pi)$.

Варіант 2

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{x}dx$; б) $\int\limits_2^{10} \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a},\ y = 0,\ x = 0,\ x = a\ln b$;

б) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ \ (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = 2x - x^2,\ y = 2 - x,\ x = 0$, навколо осі Ox ;

б) $y = \ln x,\ x = 2,\ y = 0$, навколо осі Oy .

4. Обчислити довжину дуги кривої

$$\rho = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ \ (a > 0) .$$

5. Знайти момент інерції півкруга радіуса R ($y > 0$) відносно його центра.

Варіант 3

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin\pi x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\mathrm{tg}\,x}dx$; в) $\int\limits_{1/2}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \sqrt{x},\ y = x - 2,\ x = 0$;

б) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ \ (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \sin\frac{\pi x}{2},\ y = x^2$, навколо осі Ox ;

б) $y^2 = x-2,\ y=0,\ y=x^3,\ y=1$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = \dfrac{1}{\varphi},\ \dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$.

5. Знайти статичний момент K_x відносно осі Ox фігури, обмеженої лініями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$.

Варіант 4

1. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}$; б) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x^2 \mathrm{e}^{-x} dx$; в) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5)\sin 2x}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \dfrac{x^2}{2},\ y^2 + x^2 = 8 \quad (y \ge 0)$; б) $x = \dfrac{1}{3}t(6-t),\quad y = \dfrac{1}{8}t^2(6-t)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $x^2 + (y-2)^2 = 1$, навколо осі Ox;

б) $y = \sqrt{x} - 1,\ y=0,\ y=1,\ x = 1/2$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої

$$\rho = ae^{m\varphi},\ \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1 \quad (a > 0).$$

5. Знайти момент інерції трикутника з основою a і висотою h відносно його основи.

Варіант 5

1. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int_{2a}^{3a} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^6+1}$; в) $\displaystyle\int_1^3 \operatorname{arctg}\sqrt{2x+1}\, dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \dfrac{x^2}{2},\ \ y = \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi,\ \ \rho = 3a\sin\varphi$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$, навколо осі Ox;

б) $y = (x-1)^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої

$$x = a\cos^3 t, \; y = a\sin^3 t \quad (a > 0).$$

5. Знайти статичний момент K_x відносно осі Ox дуги кривої $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}), \; -a \le x \le a$.

Варіант 6

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$; б) $\int\limits_1^2 x \operatorname{arctg}^2 x dx$; в) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = -x^2, \quad y = x^2 - 2x - 4$; б) $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi, \quad \rho = 1 + \cos\varphi$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \sin^2 x, \; y = 0, \; x = \pi/2$, навколо осі Ox;

б) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x = t^2, \quad y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ між точками перетину з віссю Ox.

5. Знайти момент інерції півкруга радіуса R відносно його діаметра.

Варіант 7

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^\pi x^2 \sin 6x dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$; в) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \frac{1}{x}, \quad y = |x|, \quad x = e^3$; б) $\rho = a(1 - \cos\varphi), \quad \rho = a \quad (a > 0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \operatorname{ch} x, \quad y = 0, \quad x = \ln 2, \quad x = 0$, навколо осі Ox;

б) $y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad y = 0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi, \ a > 0).$$

5. Знайти статичний момент K_y відносно осі Oy дуги кривої

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}), \quad -a \le x \le a.$$

Варіант 8

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{1}^{\pi^3} \sin \sqrt[3]{x}\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^4 + 1}$; в) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} (x^3 + x) e^{-x^2} dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}$; б) $\rho = a \cos 2\varphi \quad (a > 0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = 2x - x^2, \quad y = 4x - 2x^2$, навколо осі Ox;

б) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2, \quad y = 2$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x = \sqrt{3} t^2, \quad y = t - t^3$ між точками перетину з віссю Ox.

5. Знайти момент інерції круга радіуса R відносно його центра.

Варіант 9

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 - 1}{(x + 2)^4} dx$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{3 - \ln^2 x}}$; в) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y^2+x=4,\ \ y^2-3x=12$; б) $\rho=2a(2+\cos\varphi)\ \ (a>0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y=e^{-2x}-1,\ \ y=e^{-x}+1,\ \ x=0$, навколо осі Ox;

б) $y=x^2+4,\ \ y=2x,\ \ x=0,\ \ x=2$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x=t^2-1,\ \ y=t^3-t$.

5. Знайти статичний момент K_y відносно осі Oy фігури, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Варіант 10

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\limits_1^2 x\log_2 x\,dx$; в) $\int\limits_3^4\dfrac{dx}{(x+1)^2(x-2)^3}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $y=2^x,\ \ y=-x^2+2x,\ \ x=0,\ \ x=2$;

б) $\rho=a\sin t,\ \ y=b\sin 2t\ \ (a>0,\ b>0)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y^2=2px,\ \ y=h\ \ (p>0,\ h>0)$, навколо осі Ox;

б) $y=2^{-|x-1|}+1,\ \ x=1,\ \ y=x+\dfrac{3}{2}$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=6\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\pi/2$.

5. Знайти момент інерції I_x відносно осі Ox однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$.

Варіант 11

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1\dfrac{(x^2+x-5)dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$; б) $\int\limits_0^1 2^x(x+1)dx$; в) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\dfrac{xdx}{\sin^2 x}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$; б) $x=2t-t^2$, $y=4t-t^3$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$, навколо осі Ox;

б) $y^2=(x+4)^2$, $x=0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=6(1+\cos\varphi)$, $\dfrac{3\pi}{2}\le\varphi\le 2\pi$.

5. Знайти статичний момент K_y відносно осі Oy фігури, обмеженої кривими $y=\cos x$, $y=1/2$ $(-\pi/2\le x\le \pi/2)$.

Варіант 12

1. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^5dx}{x^{12}-1}$; б) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$; в) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x-x^3}{1+x^4}dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$; б) $x=t^2-1$, $y=t^3-t$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $(y-2)^2=2x$, $x=0$, $x=4$, навколо осі Ox;

б) $y^2=4-x$, $x=0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=x^3$, яка відрізана прямою $x=4/3$.

5. Знайти момент інерції I_y відносно осі Oy однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Варіант 13

1. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\ln(1+e^{-x})dx$; б) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$; в) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{tg}^2 x dx}{4+3\cos 2x}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = 2(1-\cos\varphi)$;

б) $x = \cos t + t\sin t, \quad y = \sin t - t\cos t \quad (0 \le t \le 2\pi), \quad y = 0, \quad x = 1$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \sin x, \quad x = 0, \quad y = 1$, навколо осі Ox;

б) $y = x\sqrt{x}, \quad x = 4, \quad y = 0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = (x+1)^3$, яка відрізана прямою $x = 4$.

5. Знайти статичний момент K_x відносно осі Ox фігури, обмеженої кривими $y = \cos x, \ y = 1/2 \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2)$.

Варіант 14

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1}$; б) $\int\limits_{1}^{e} \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = \cos 2\varphi$; б) $x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x = \pm 1, \quad y = 0$, навколо осі Ox;

б) $y = 1 - x^2, \quad x + y = 1$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x \quad (3/4 \le x \le 12/5)$.

5. Знайти момент інерції дуги кривої $y = e^x \quad (0 \le x \le 1/2)$ відносно осі абсцис.

Варіант 15

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{1/2} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{(8 + \operatorname{tg} x)dx}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x}$; в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $x^2+y^2=2,\ \ y^2=2x-1$; б) $x=t^2+1,\ \ y=t^3-3t$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y=0{,}25x^2+2,\ \ 5x-8y+14=0$, навколо осі Ox;

б) $y=\sin x,\ \ y=1,\ \ x=0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=\dfrac{\rho}{1+\cos\varphi}$ $(-\pi/2\le\varphi\le\pi/2)$.

5. Знайти статичний момент K_x відносно осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ \ y=4x^2$.

Варіант 16

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 x^7\operatorname{arctg}x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/6}\dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$; в) $\int\limits_0^1\dfrac{x^2+x-5}{(4+x^2)(9+x^2)}dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho=5\sin 3\varphi$; б) $x=\dfrac{t^6}{6},\ \ y=2-\dfrac{t^4}{4},\ \ x=0,\ \ y=0$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, навколо осі Ox;

б) $x^2-y^2=4,\ \ y=\pm 2$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

5. Знайти момент інерції прямокутника зі сторонами a і b відносно його діагоналі.

Варіант 17

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1\dfrac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$; б) $\int\limits_{-2}^0 x\operatorname{arctg}(x+1)\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{dx}{\cos^4 x}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = 7\sin 2\varphi$; б) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, навколо осі Ox;

б) $y^2 + x^2 = 4$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x = \dfrac{t^6}{6}$, $y = 2 - \dfrac{t^4}{4}$ між точками перетину з осями Ox і Oy.

5. Знайти статичний момент K_y відносно осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = 4x^2$.

Варіант 18

1. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{-2x}\sin 3x\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = 3\cos 3\varphi$; б) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $(y-3)^2 + 3x = 0$, $x = -3$, навколо осі Ox;

б) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $x = t^2$, $y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3)$ між точками перетину з віссю Ox.

5. Знайти момент інерції півкруга радіуса R відносно його діаметра.

В а р і а н т 19

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x \sin\sqrt{x}\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x}$; в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{(2x^2 + x + 4)\, dx}{x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 3}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$; б) $y = \operatorname{sh} x,\ \ x = \pm 1,\ \ y = 0$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y^2 + x^2 = 1,\ \ 2y^2 = 3x$, навколо осі Ox;

б) $xy = 16,\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 4\ \ (x > 0,\ y > 0)$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = 9\cos 3\varphi$.

5. Знайти статичний момент K_x відносно осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2px,\ \ y = 0$ і вертикальною прямою, яка відповідає абсцисі x ($x > 0$).

В а р і а н т 20

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-1/2}^{0} (x^2 + 2x)e^{-2x} dx$; б) $\int\limits_{1}^{16} \frac{xdx}{\sqrt{x} + x\sqrt[4]{x}}$; в) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{(x^3 + 2x^2 + 3)\, dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi,\ \ \rho = 1 + \cos\varphi$;

б) $x = \cos t\,(1 + \cos t),\ \ \ y = \sin t\,(1 + \cos t)$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = x\sqrt{-x},\ \ x = -4,\ \ y = 0$, навколо осі Ox;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \ y = 0,\ \ x = 0\ \ (x \ge 0,\ y \ge 0)$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = 2x^3 \quad (x^2 + y^2 \le 20)$.

5. Знайти момент інерції прямокутника зі сторонами a і b відносно сторони b.

Варіант 21

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^3 x dx$; б) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; в) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = \frac{4}{\cos(\varphi - \pi/6)} \quad (\pi/6 \le \varphi \le \pi/3)$;

б) $y = \sqrt{x-2}, \ \ y = \sqrt{4-x}, \ \ y = 0$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y = \mathrm{tg}\, x, \ \ y = \mathrm{ctg}\, x, \ \ x = \pi/6$, навколо осі Ox;

б) $y = x^2 + 1, \ \ x = 0$ та дотичною до кривої у точці $(1, 2)$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \arcsin e^{-x}, \ \ x \in [0, 1]$.

5. Знайти статичний момент K_y відносно осі Oy фігури, обмеженої кривими $y = 2px, \ \ y = 0$ і вертикальною прямою, яка відповідає абсцисі x ($x > 0$).

Варіант 22

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = 3 + 2\cos\varphi$; б) $x = 2\cos t, \ \ y = 3\sin^3 t$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $(y-3)^2+3x=0,\ \ x=-3$, навколо осі Ox;

б) $x^2-y^2=1,\ \ y=\pm 1$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln\sin x,\ x\in[\pi/3,\pi/2]$.

5. Яку роботу треба виконати, щоб тіло з масою m підняти з поверхні Землі, радіус якої R, на висоту H?

Варіант 23

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{a/2}\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^6 x dx$; в) $\int\limits_2^4\frac{(11x+16)\,dx}{(x-1)(x+2)^2}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho=2+\sin 2\varphi$ між суміжними найбільшим і найменшим радіусами-векторами;

б) $x=\frac{t}{3}(6-t),\ \ y=t^2$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3},\ \ y=0,\ \ x=a$, навколо осі Ox;

б) $y=1-x^2,\ \ y=0,\ \ x=0$, навколо осі Oy.

4. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln(2\cos x)$ між точками перетину з осями координат.

5. Знайти момент інерції еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ відносно осі Ox.

Варіант 24

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^4\frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$; в) $\int\limits_1^3\frac{\ln(x^2+1)\,dx}{x^2}$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:

а) $\rho = 3 - \cos 2\varphi$ між суміжними найбільшим і найменшим радіусами-векторами;

б) $x = 2\cos t,\ \ y = 3\sin t \cos^2 t$.

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими:

а) $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (b \ge a > 0)$, навколо осі Ox ;

б) $x^2 + y^2 = 16,\ \ x = 1,\ \ x = 3,\ \ y = 0$, навколо осі Oy .

4. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(1 - x^2),\ \ x \in [-1/2, 1/2]$.

5. Знайти статичні моменти прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторони a .

ЛІТЕРАТУРА

Основні джерела

1. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. Ч. 1 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1993.
2. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. Ч. 2 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1994.
3. *Радченко О. М.* Математичний аналіз. Ч. 1 / О. М. Радченко. – К. : ТВіМС, 2003.
4. *Ильин В. А.* Основы математического анализа. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1982.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988.
7. *Математический* анализ. Ч. 1 / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1985.
8. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : АСТ Астрель, 2002.

Додаткові джерела

9. *Бахвалов Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М. : Высш. шк., 2000. – 190 с.
10. *Волков Е. А.* Численные методы : учеб. пособие для вузов / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1987.
11. *Методичні* вказівки до проведення практичних занять з математичного аналізу. Ч. І / В. О. Грязнова, С. А. Кривошея, Ю. В. Придатченко, А. Т. Янішевський. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2003.
12. *Комплексні* числа / С. В. Єфіменко, С. А. Кривошея, Ю. В. Придатченко, А. Т. Янішевський. – К. : РВЦ "Київський університет", 1997.
13. *Калиткин Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978.
14. *Справочное* пособие по математическому анализу. Введение в анализ, производная, интеграл / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1984.
15. *Справочное* пособие по математическому анализу. Ряды, функции векторного аргумента, кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1986.

ДОДАТОК 1

МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ПІДСУМКОВИХ МОДУЛЬНИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

1.1. Зразки індивідуальних завдань контрольної роботи № 1

Варіант 1

1. Еквівалентні означення $\sup X$ і $\inf X$. Теорема Больцано про існування точних меж числових множин $X \subset \mathbb{R}$.

   Знайти $\sup X$ і $\inf X$, якщо $X = \{x_n\}$, де
   $$x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}, \ n \in \mathbb{N}.$$

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{2/x^3}$.
3. Знайти і класифікувати точки розриву функції
   $$f(x) = \frac{1}{1-e^{(x-1)/x}}.$$
4. Знайти похідну функції
   $$f(x) = x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x + 2x.$$
5. Записати асимптотичну формулу вигляду
   $$f(x) = Ax^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0 \quad (A \neq 0)$$
   для функції $f(x) = \ln^2(1-x) - x^2 - x^3$.

Варіант 2

1. Означення рівномірної неперервності. Теорема Кантора.

Знайти δ з означення рівномірної неперервності для функції $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на відрізку $[1,64]$.

2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt[3]{1+\sin x}}{x^3}$.

3. Знайти і класифікувати точки розриву функції

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}.$$

4. Знайти похідну функції

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+\ln\frac{\sqrt{3x^2+2x+2}}{x}.$$

5. Записати асимптотичну формулу вигляду

$$f(x)=Ax^n+o(x^n) \text{ при } x\to 0 \quad (A\neq 0)$$

для функції $f(x)=2\sin^2 x+\ln\cos x$.

1.2. Зразки індивідуальних завдань контрольної роботи № 2

Варіант 1

1. Означення метрики і метричного простору.

Чи є метриками в $X=\mathbb{R}^1$ функції:

а) $\rho(x,y)=\big||x|-|y|\big|$; б) $\rho(x,y)=\sqrt[3]{|x-y|}$?

2. Теорема про достатню умову диференційовності скалярної функції векторного аргументу.

Довести, що функція $u=\dfrac{x+y}{\sqrt{x-y}}$ диференційовна в області $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>y\}$, зобразити цю область та знайти $du(5,1)$.

3. Знайти повний диференціал та записати формулу малих приростів для функції $f(x) = (1+\beta x)^{\alpha}(1+\alpha y)^{\beta}$ у точці $(x_0, y_0) = (0,0)$ ($\alpha, \beta = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$).

4. Для функції $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ знайти $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

5. Для функції $u = \varphi(xy + y^2)$ знайти $Lu = (x+2y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 6$

(φ – довільна диференційовна функція).

Варіант 2

1. Збіжність послідовності в метричному просторі. Теорема про збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$.

Чи є збіжними послідовності:

а) $\overline{x}_n = \left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right), (1 - e^{-n})\dfrac{1}{n} \right)$ в $\mathbb{R}^2$;

б) $\overline{y}_n = \left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n, \dfrac{2n^2+1}{3-n^2}, n^2 \sin\dfrac{1}{n} \right)$ в $\mathbb{R}^3$?

У разі збіжності вказати границю.

2. Означення частинних похідних, диференційовності та повного диференціала скалярної функції векторного аргументу. Формула малих приростів.

Для функції $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+y^2}}$ знайти f'_x, f'_y, df та наближено обчислити $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(2{,}95)^3 + (0{,}01)^2}}$.

3. Для функції $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ знайти

$$Au = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2.$$

4. Для функції $u = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ знайти du, d^2u.

5. Для функції $u = y - x + \varphi(x^2 - y^2)$ знайти

$$Lu = y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + y - x + 5$$

(φ – довільна диференційовна функція).

1.3. Зразки індивідуальних завдань контрольної роботи № 3

Варіант 1

1. Означення інтеграла $\int f(x)dx$ $(x \in X,\ f \in C_X)$.

   Знайти $y = y(x)$, якщо $y'' = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}$, $y(1) = y'(1) = 0$.

2. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.

   Знайти $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ $[x - 1 = \operatorname{tg} t]$.

3. Знайти $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}$.

4. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ за допомогою заміни $x = \operatorname{tg} t$.

5. Обчислити $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin nx dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Варіант 2

1. Властивість лінійності невизначеного інтеграла.

   Знайти $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

2. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.

Знайти $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{dx}{\sqrt{3e^x - 2}}$ $\left[e^x = t\right]$.

3. Знайти $\int \frac{2x^3 + x - 1}{x^4 - 1} dx$.

4. Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ $(m, n \in \mathbb{N})$ залежно від m і n .

5. Обчислити $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

ДОДАТОК 2

МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ

2.1. Теоретичні питання

1. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
2. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
3. Показникова форма комплексного числа. Формули Ейлера.
4. Числові множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{-}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ та їх основні властивості. Повнота $\mathbb{R}$. Основні леми аналізу.
5. Означення границі числової послідовності та основні властивості збіжних послідовностей. Типи невизначеностей.
6. Ознаки існування границі послідовності. Число e.
7. Означення границі функції в точці та основні властивості границь.
8. Ознаки існування границі функції в точці.
9. Визначні границі.
10. Означення неперервності функції в точці та локальні властивості неперервних функцій. Точки розриву.
11. Асимптотична символіка. Властивості асимптотичних символів. Шкала еквівалентних нескінченно малих функцій.
12. Властивості функцій класу $C_{[a,b]}$.
13. Означення похідної, диференційовності і диференціала функції. Формула малих приростів.
14. Основні властивості диференційовних функцій (правила диференціювання).
15. Теореми про середнє значення в диференціальному численні.
16. Правило Лопіталя.
17. Похідні й диференціали вищих порядків.
18. Формула Тейлора із залишковим членом у формах Лагранжа і Пеано. Локальна формула Тейлора.
19. Необхідні й достатні умови внутрішнього локального екстремуму.

20. Достатні умови монотонності й опуклості функції.
21. Прямолінійні асимптоти графіка функції.
22. Метричні простори. Збіжність послідовностей у метричному просторі. Збіжність в $\mathbb{R}^m$ і повнота $\mathbb{R}^m$.
23. Типи точок (внутрішні, граничні, межові, ізольовані точки) і множин (обмежені, відкриті, замкнуті, компактні множини) в метричному просторі. Компакт у $\mathbb{R}^m$.
24. Принцип нерухомої точки (теорема Банаха).
25. Границя і неперервність ФВА в точці. Властивості границь і локальні властивості неперервних функцій.
26. Властивості ФВА, неперервних на компакті.
27. Частинні похідні, диференційовність і повний диференціал. Формула малих приростів.
28. Диференційовність складної ФВА і правила диференціювання.
29. Диференційовність відображення $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Матриця Остроградського – Якобі.
30. Теорема про існування і диференційовність неявного відображення та її наслідок – теорема про існування і диференційовність обереного відображення.
31. Формула Тейлора для ФВА.
32. Внутрішні локальні екстремуми ФВА. Необхідні й достатні умови.
33. Умовні внутрішні локальні екстремуми ФВА. Метод Лагранжа. Абсолютний екстремум.
34. Первісна, невизначений інтеграл та його основні властивості.
35. Таблиця основних інтегралів.
36. Методи невизначеного інтегрування: розкладу, заміни змінної (підстановки), частинами.
37. Теорема про розклад правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів.
38. Методика інтегрування раціональних функцій.
39. Означення визначеного інтеграла. Суми Дарбу. Критерії Дарбу і Лебега. Класи інтегровних функцій.
40. Властивості інтеграла Рімана.
41. Властивості інтеграла зі змінною верхньою межею. Формула Барроу.
42. Формули: Ньютона – Лейбніца, заміни змінної, інтегрування частинами.

2.2. Зразки індивідуальних завдань

Варіант 1

1. Теорема про формулу Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа.

   Функцію $f(x)=1/\sqrt[3]{x}$ записати за формулою Тейлора 4-го порядку, якщо $x_0=1$. Знайти $R_4(x)$.

2. Визначений інтеграл. Суми Дарбу. Критерій Дарбу.

   Знайти нижню та верхню суми Дарбу для інтеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, що відповідають розбиттю відрізка $[1,2]$ на 5 рівних частин. Порівняти з точним значенням інтеграла.

3. а) Дослідити на умовний екстремум функцію $z=x^{-1}+y^{-1}$, якщо $x+y=2$.

   б) Число $z=\sin\alpha - i\cos\alpha$ $(\pi/2<\alpha<\pi)$ записати в показниковій формі. Знайти $z\cdot i\cdot e^{-i\alpha}$.

Варіант 2

1. Частинні похідні, диференційовність і повний диференціал скалярної функції векторного аргументу.

   Дослідити функцію $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}, & \text{якщо } x-y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x-y=0,\end{cases}$

   на диференційовність у точці $A(\pi,\pi)$.

2. Інтегрування раціональних дробів.

   Знайти $\int \frac{(3x^4+4)dx}{x^2(x^2+1)^3}$.

3. а) При яких значеннях α і β функції $g(x)=\alpha x^{\beta}$ і $f(x)=2e^{x^4}+(\cos x-1)^2+x^5-2$ еквівалентні при $x\to 0$?

   б) Дослідити на умовний екстремум функцію $z=x/3+y/2$, якщо $x^2/9+y^2/4=1$.

ДОДАТОК 3

ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

4.1. Самостійна робота № 1

1. Обчислити:

а) $A=(0{,}8-2i)(0{,}5+3i)-\dfrac{1+i}{1-i}(2+i)$;

б) $B=(1+2i)^3(1-i)+i^{2013}-i^{2009}+i^{2014}$.

Розв'язання. а) Враховуючи аксіому арифметичних дій над комплексними числами, маємо

$$A=0{,}8\cdot 0{,}5+0{,}8\cdot 3i-2\cdot 0{,}5\cdot i-2\cdot 3\cdot i^2-\frac{(1+i)(1+i)}{1-i^2}(2+i)=$$

$$=0{,}4+2{,}4i-i+6-\frac{1}{2}(1+2i+i^2)(2+i)=6{,}4+1{,}4i-\frac{1}{2}2i(2+i)=$$

$$=6{,}4+1{,}4i-i(2+i)=6{,}4+1{,}4i-2i-i^2=$$

$$=6{,}4+1{,}4i-2i+1=7{,}4-0{,}6i.$$

б) $$B=\left(1+3\cdot 1^2\cdot 3i+3\cdot 1\cdot(3i)^2+(3i)^3\right)(1-i)+$$

$$+(i^4)^{503}\cdot i-(i^4)^{502}\cdot i+(i^4)^{503}\cdot i^2=$$

$$=(1+6i-12-8i)(1-i)+i-i+i^2=(-11-2i)(1-i)-1=$$

$$=-11+11i-2i+2i^2-1=-14+9i. \ \square$$

2. При яких $x,y\in\mathbb{R}$ комплексні числа $z_1=10x^2-6-10yi$ та $z_2=6x^2+12i^{11}$ є комплексно-спряженими?

Розв'язання. Числа z_1 і z_2 є спряженими, якщо $\overline{z}_1=z_2$ ($\overline{z}_2=z_1$). Маємо $\overline{10x^2-6-10yi}=6x^2+12i^{11}$,

$$10x^2-6+10yi=6x^2-12i \quad (i^{11}=(i^4)^2\cdot i^3=i^3=-i).$$

Звідси за аксіомою рівності комплексних чисел

$$\begin{cases} 10x^2-6=6x^2, \\ 10y=12; \end{cases}$$

звідки $x=\pm\sqrt{3/2}$, $y=6/5$. □

3. Користуючись формулою Муавра, обчислити

$$A=(-1+i)^{40}(2+2i)^4(-1+i\sqrt{3})^{30}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Комплексні числа $z_1=-1+i$, $z_2=2+2i$, $z_3=-1+i\sqrt{3}$ запишемо в тригонометричній формі:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Використовуючи формулу Муавра, маємо

$$A=(\sqrt{2})^{40}\left(\cos 30\pi+i\sin 30\pi\right)\cdot(2\sqrt{2})^4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\cdot$$

$$\cdot 2^{30}\left(\cos 20\pi+i\sin 20\pi\right)=2^{20}\cdot 1\cdot 2^6\cdot(-1)\cdot 2^{30}\cdot 1=-2^{56}.$$ □

3′. Користуючись формулою Муавра, виразити $\sin 5\varphi$ через тригонометричні функції аргументу φ.

Р о з в ' я з а н н я. З формули Муавра

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi$$

маємо

$$\sin 5\varphi=\operatorname{Im}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=$$

$$=\operatorname{Im}\Big(\cos^5\varphi+5\cos^4\varphi\cdot i\sin\varphi+10\cos^3\varphi\cdot(i\sin\varphi)^2+$$

$$+10\cos^2\varphi\cdot(i\sin\varphi)^3+5\cos\varphi\cdot(i\sin\varphi)^4+(i\sin\varphi)^5\Big)=$$

$$=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.$$ □

4. Розв’язати рівняння:

а) $z^3+8=0$; б) $z^2-\overline{z}+4=0$; в) $|z|+3z+7=0$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Запишемо рівняння у вигляді

$$(z+2)(z^2-2z+4)=0,$$

звідки маємо $z_1=-2$, $z_{2,3}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\dfrac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$.

Зауважимо, що для розв'язання рівняння а) можна було б використати формулу добування кореня третього степеня з комплексного числа:

$$z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2\,.$$

Маємо

$$z_1=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2\quad(k=1)\,,$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}\quad(k=0)\,,$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}\quad(k=2)\,.$$

б) Нехай $z=x+iy$. Тоді рівняння $z^2-\overline{z}+4=0$ матиме вигляд

$$(x+iy)^2-(x-iy)+4=0\,,$$

$$x^2+2ixy-y^2-x+iy+4=0\,,$$

$$x^2-y^2-x+4+i(2xy+y)=0\,.$$

Використовуючи аксіому рівності комплексних чисел, дістанемо

$$\begin{cases}x^2-y^2-x+4=0,\\ \quad\quad 2xy+y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2-y^2-x+4=0,\\ \left[\begin{array}{l}y=0,\\ x=-1/2.\end{array}\right.\end{cases}$$

Якщо $y=0$, то $x^2-x+4=0$ і, оскільки $x\in\mathbb{R}$, то $x\in\varnothing$. Якщо $x=-1/2$, то $\frac{1}{4}-y^2+\frac{1}{2}+4=0$, $y^2=\frac{19}{4}$, $y=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Отже, рівняння б) має два розв'язки

$$z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2},\quad z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}\,.$$

в) Враховуючи, що $z=x+iy$, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, рівняння $|z|+3z+7=0$ запишемо у вигляді

$$\sqrt{x^2+y^2}+3(x+iy)+7=0\,,\quad \sqrt{x^2+y^2}+3x+7+3iy=0\,.$$

Звідси маємо $\sqrt{x^2+y^2}+3x+7=0$, $3y=0$. Тому $y=0$, $|x|+3x+7=0$, звідки $x=-7/2$. Отже, $z=-7/2$. □

5. Знайти модуль і головне значення аргументу $-\pi<\arg z\le\pi$ комплексного числа: а) $z_1=1+\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$; б) $z_2=-2+2i$; в) $z_3=2-2i$; г) $z_4=5$; д) $z_5=-5$; е) $z_6=5i$; є) $z_7=-5i$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Число $z_1=1+\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$ запишемо у вигляді

$$z_1=1+\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}=2\cos^2\frac{2\pi}{9}+2i\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}=$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{9}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right).$$

Оскільки $\frac{2\pi}{9}$ – гострий кут, то $\cos\frac{2\pi}{9}>0$ і $|z_1|=2\cos\frac{2\pi}{9}$, а $\varphi=\arg z_1=\frac{2\pi}{9}$.

б) Маємо $|z_2|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$$\sin\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тому $\varphi=\arg z_2=\frac{3\pi}{4}$.

в) Маємо $|z_3|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$,

$$\sin\varphi=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тому $\varphi=\arg z_3=-\frac{\pi}{4}$.

г) Маємо $|z_4|=\sqrt{5^2+0^2}=5$, $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=1$; $\varphi=\arg z_4=0$.

д) Маємо $|z_5|=\sqrt{(-5)^2+0^2}$, $\sin\varphi=0$, $\cos\varphi=-1$; $\varphi=\arg z_5=\pi$.

е) Маємо $|z_6|=\sqrt{0^2+5^2}=5$, $\sin\varphi=1$, $\cos\varphi=0$; $\varphi=\arg z_6=\frac{\pi}{2}$.

є) Маємо

$$|z_7| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5, \quad \sin\varphi = -1, \quad \cos\varphi = 0; \quad \varphi = \arg z_7 = -\frac{\pi}{2}. \ \square$$

6. Подати в алгебраїчній формі число:

а) $z_1 = 3(\cos 5\pi + i\sin 5\pi)$; б) $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)i + \frac{1}{i}$;

в) $z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{i}$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо:

а) $z_1 = 3(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 3(-1 + i\cdot 0) = -3$.

б) $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)i + \frac{1}{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot i + \frac{i}{i^2} =$

$$= (-1 + i)\cdot i - i = -i + i^2 - i = -1 - 2i.$$

в) $z_3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{i} = 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{i}{i^2} =$

$$= (-3 + i\sqrt{3})\cdot(-i) = 3i + \sqrt{3}. \ \square$$

7. Довести рівність $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. З геометричного погляду дана рівність виражає відоме метричне співвідношення у паралелограмі: сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин усіх його сторін (рис. 1).

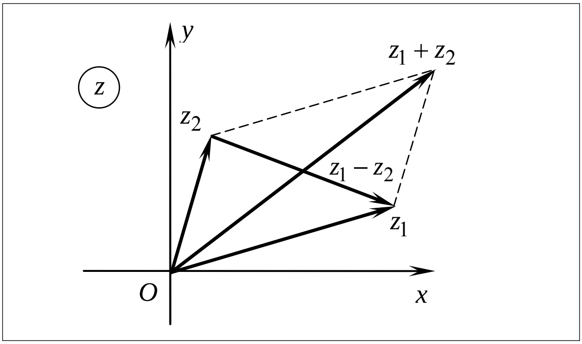


Рис. 1. Завдання 7

Наведемо також алгебраїчне доведення рівності. Нехай

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Маємо $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=$

$$=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=$$

$$=2(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right). \ \square$$

8. Знайти всі значення кореня:

а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{i^4}$; в) $\sqrt[3]{-1-i}$; г) $\sqrt{i}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою добування кореня n-го степеня з комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\varphi\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad (k=0,1,\ldots,n-1;\ n\in\mathbb{N}).$$

Маємо: а) $w=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{16(\cos 0+i\sin 0)}=$

$$=2\left(\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}\right) \quad (k=0,1,2,3),$$

звідки $w_1=2(\cos 0+i\sin 0)=2 \quad (k=0)$

$$w_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i \quad (k=1),$$

$$w_3=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2 \quad (k=2),$$

$$w_4=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i \quad (k=3);$$

б) $w=\sqrt[4]{i^4}=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}=$

$$=\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4} \quad (k=0,1,2,3),$$

звідки $w_1=1$, $w_2=i$, $w_3=-1$, $w_4=-i$;

в) $w=\sqrt[3]{-1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}=$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) \quad (k=0,1,2),$$

звідки $w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \quad (k=0)$,

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right) \quad (k=1),$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12}\right) \quad (k=2);$$

г) $w = \sqrt{i} = \sqrt{1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} =$

$$= 1\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) \quad (k = 0, 1),$$

звідки $w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (k=0)$,

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (k=1). \ \square$$

9. Зобразити на комплексній числовій площині множину точок:
а) $|z-i|<2$;   б) $2<\operatorname{Im}z<\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z$;
в) $-3\le\operatorname{Im}z+\operatorname{Re}z\le 2$;   г) $\operatorname{Im}\overline{z}+2=|z|$.

Р о з в ’ я з а н н я. а) Оскільки $|z-i|$ – відстань на комплексній числовій площині між довільним числом (точкою) z і фіксованим числом (точкою) $z=i$, то дана нерівність описує внутрішність круга радіуса 2 з центром у точці $z=i$ (рис. 2).

б) Ураховуючи, що $z=x+iy$, дістанемо нерівність $2<y<x+y$, яка еквівалентна системі нерівностей $\begin{cases}2<y,\\ y<x+y.\end{cases}$

Звідси $y>2$, $x>0$ (рис. 3.)

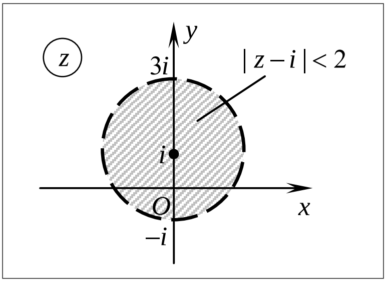


Рис. 2. Завдання 9 а)

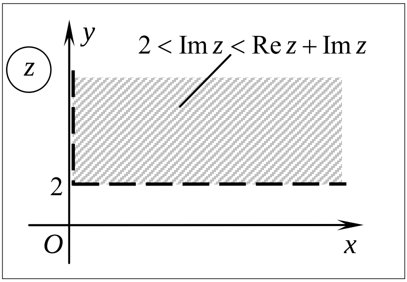


Рис. 3. Завдання 9 б)

в) Маємо нерівність $-3 \le y + x \le 2$, яка еквівалентна системі нерівностей $\begin{cases} x + y \le 2, \\ x + y \ge -3, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} y \le 2 - x, \\ y \ge -3 - x \end{cases}$ (рис. 4).

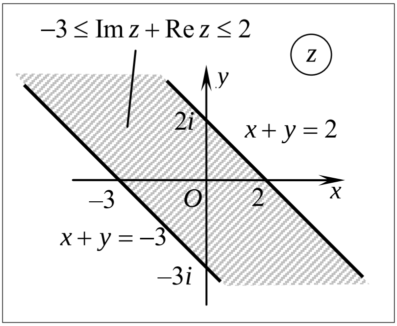


Рис. 4. Завдання 9 в)

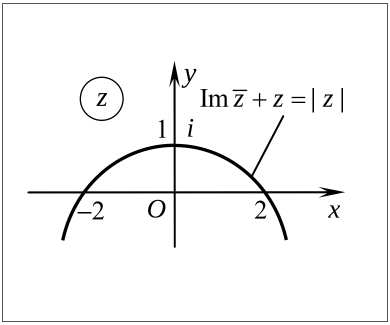


Рис. 5. Завдання 9 г)

г) Маємо рівняння $-y + 2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Звідси $x^2 + y^2 = (2 - y)^2$ ($y \le 2$), $x^2 + y^2 = 4 - 2y + y^2$, $y = \frac{1}{4}(4 - x^2)$ (рис. 5). □

10. За допомогою формул Ейлера знизити степінь тригонометричного виразу $\sin^5 \varphi$.

Р о з в ’ я з а н н я. Маємо

$$\sin^5 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i}(e^{i\varphi} - e^{i\varphi})^5 =$$

$$= \frac{1}{32i}(e^{5i\varphi} - 5e^{4i\varphi}e^{-i\varphi} + 10e^{3i\varphi}e^{-2i\varphi} - 10e^{2i\varphi}e^{-3i\varphi} + 5e^{i\varphi}e^{-4i\varphi} - e^{-5i\varphi}) =$$

$$= \frac{1}{32i}\big((e^{5i\varphi} - e^{-5i\varphi}) - 5(e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}) + 10(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\big) =$$

$$= \frac{1}{32i}\big(2i \sin 5\varphi - 10i \sin 3\varphi + 20i \sin \varphi\big) =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 5\varphi - \frac{5}{16}\sin 3\varphi + \frac{5}{8}\sin \varphi. \ \square$$

4.2. Самостійна робота № 2

1. Перевірити правильність твердження:

а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x+1}}{x^3+2x^2+6x+11}=O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ при $x\to+\infty$;

б) $f(x)=3+2x+10x^2+x^2\sqrt{x}=o(x^3)$ при $x\to+\infty$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-x\sim\dfrac{3}{2}$ при $x\to+\infty$;

г) $f(x)=\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)=o(1)$ при $x\to-\infty$;

д) $f(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\sim\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Скористаємося означенням символа O^*:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1/x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x+1}}{x^3+2x^2+6x+11}:\frac{1}{x^3}\right)=\left[\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x+1}=\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x+1}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{11}{x^3}}=\frac{\pi}{2}.\ \text{Звідси}\ \ f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^3}\right)\ \text{при}\ x\to+\infty,$$

а отже, $f(x)=O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ при $x\to+\infty$.

Цей приклад можна було б розв'язати й інакше, використовуючи властивості еквівалентних функцій: при $x\to+\infty$

$$\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x+1}\sim\frac{\pi}{2},\ \ x^3+2x^2+6x+11\sim x^3\ ,$$

тому $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x+1}}{x^3+2x^2+6x+11}\sim\dfrac{\pi/2}{x^3}=\dfrac{\pi}{2x^3}$ при $x\to+\infty$,

$$f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^3}\right)\ \text{при}\ x\to+\infty\Rightarrow f(x)=O\left(\frac{1}{x^3}\right)\ \text{при}\ x\to+\infty.$$

б) За означенням маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+2x+10x^2+x^2\sqrt{x}}{x^3}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$, тому $f(x)=o(x^3)$ при $x\to+\infty$.

в) Функцію $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-x$ помножимо і поділимо на спряжений вираз $\sqrt{x^2+3x+1}+x$, тоді

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}=\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\sim\frac{3}{2}\ \text{при}\ x\to+\infty.$$

г) Оскільки $\sin(1/x)\to 0$ при $x\to-\infty$, то

$$f(x)=\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\to\ln 1=0\ \text{при}\ x\to-\infty,$$

а отже, $f(x)=o(1)$ при $x\to-\infty$.

д) Перетворимо функцію $f(x)$:

$$f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}\sim\frac{x}{1\cdot 2}=\frac{x}{2}\ \text{при}\ x\to 0.\ \square$$

2. Визначити головну степеневу частину вигляду Cx^k при $x\to+\infty$ функції $f(x)=\sqrt[3]{9x^7+3x^5+8x^4-3x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо границю

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{Cx^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{7/3}\sqrt[3]{9+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^6}}}{Cx^k}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{7}{3}-k}}{C}\sqrt[3]{9+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^6}}=1\ \text{при}\ k=\frac{7}{3},\ C=\sqrt[3]{9}.$$

Отже, $f(x)=\sqrt[3]{9}x^{7/3}+o(x^{7/3})\sim\sqrt[3]{9}x^{7/3}$ при $x\to+\infty$.

Зауважимо, що цей приклад можна розв'язати і так:

$$f(x)=\sqrt[3]{9x^7+3x^5+8x^4-3x}=\sqrt[3]{x^7\left(9+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^6}\right)}=$$

$$=x^{7/3}\sqrt[3]{9+\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{3}{x^6}}\sim\sqrt[3]{9}x^{7/3} \text{ при } x\to+\infty . \ \square$$

2′. Визначити головну степеневу частину вигляду $C(x-2)^k$ при $x\to 2$ функції $f(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{(x^2-3x+2)^3}$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{C(x-2)^k}=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{(x^2-3x+2)^3C(x-2)^k}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3-x)}{(x-1)^3(x-2)^{3+k}C}=\begin{bmatrix}x-2=t\to 0,\\ x=t+2\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{(t+1)^3t^{3+k}C}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{(t+1)^3t^{3+k}C}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{(t+1)^3t^{2+k}C}=1 \text{ при } k=-2,\ C=-1 .$$

Отже, $f(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}+o\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)\sim\dfrac{-1}{(x-2)^2}$ при $x\to 2$.

Цей приклада можна розв’язати інакше, використавши властивості еквівалентних функцій: при $x\to 2$

$$\ln(3-x)=\ln(1+(2-x))\sim 2-x ,$$

$$(x^2-3x+2)^3=(x-1)^3(x-2)^3\sim(x-2)^3 ,$$

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{(x^2-3x+2)^3}\sim\frac{2-x}{(x-2)^3}=-\frac{1}{(x-2)^2} . \ \square$$

2″. Визначити головну степеневу частину вигляду $C(x-1)^k$ при $x\to 1$ функції $f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. За означенням маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{C(x-1)^k}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}}}{C(x-1)^k}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{C}\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{(x-1)^{3k}}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{C}\sqrt[3]{\frac{-(x-1)}{(x-1)^{3k}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{C}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^{1-3k}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}=1$$

при $k=1/3$, $C=-1\big/\sqrt[3]{3}$.

Цей самий приклад розв'яжемо, використовуючи властивості еквівалентних функцій:

$$f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x}}=\begin{bmatrix} x-1=t\to 0, \\ x=1+t \end{bmatrix}=\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1+t}}=$$

$$=-\sqrt[3]{(1+t)^{1/3}-1}\sim-\sqrt[3]{t/3}=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}t^{1/3}=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(x-1)^{1/3} \text{ при } x\to 1. \ \square$$

3. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[7]{1-5x}}{1-\sqrt[3]{1-x/2}}$; б) $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 3x)}{\operatorname{tg}^2(x/2)+\ln(1+\sin 4x)}$;

в) $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x+4\operatorname{tg}x-x^2-\sin 2x}{\operatorname{arctg}^3 x-6\sin^2 x+\arcsin 2x+\operatorname{tg}x}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Використаємо асимптотичну формулу

$$(1+u)^{\alpha}=1+\alpha u+o(u) \text{ при } u\to 0,$$

дістанемо

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{1/5}-(1-5x)^{1/7}}{-\left((1-x/2)^{1/3}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{3}{5}x+o(x)\right)-\left(1-\frac{5}{7}x+o(x)\right)}{-\left(1-\frac{x}{6}+o(x)-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{46}{35}x+o(x)}{\frac{1}{6}x+o(x)}=\frac{276}{35}.$$

б) Використаємо асимптотичні формули при $u\to 0$:

$$\ln(1+u)=u+o(u),\quad 1-\cos u=\frac{1}{2}u^2+o(u^2),\quad \sin u=u+o(u),$$

$$\operatorname{tg}u=u+o(u),\quad o(1-\cos u)=o(u^2),$$

тоді $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+(1-\cos 3x)\right)}{\frac{x^2}{4}+o(x^2)+\sin 4x+o(\sin 4x)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x+o(1-\cos 3x)}{\frac{x^2}{4}+o(x^2)+4x+o(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{4x+o(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{4x}=0.$$

в) Скористаємося асимптотичними формулами при $u \to 0$:

$$1-\cos u = \frac{1}{2}u^2 + o(u^2), \quad \operatorname{tg} u = u + o(u), \quad \sin u = u + o(u),$$

$$\operatorname{arctg} u = u + o(u), \quad \arcsin u = u + o(u),$$

тоді

$$C = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2) + 4x + o(x) - x^2 - 2x + o(x)}{x^3 + o(x^3) - 6x^2 + o(x^2) + 2x + o(x) + x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2) + 4x + o(x) - x^2 - 2x + o(x)}{x^3 + o(x^3) - 6x^2 + o(x^2) + 2x + o(x) + x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{3x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}. \ \square$$

4. При яких значеннях $\alpha \neq 0$ і β функції $f(x) = \alpha x^{\beta}$ і $g(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ еквівалентні при $x \to 0$?

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо для $g(x)$ еквівалентну функцію вказаного вигляду:

$$g(x) = (1+3x)^{1/2} - (1+2x)^{1/3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot 3x + o(x) - \left(1 + \frac{1}{3}\cdot 2x + o(x)\right) = \frac{5}{6}x + o(x) \sim \frac{5}{6}x \text{ при } x \to 0.$$

Отже, $\alpha = 5/6$, $\beta = 1$. $\square$

5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x) = x^3$ на множині $X = (-1, 1]$.

Р о з в ' я з а н н я. Функція $f(x) = x^3$ неперервна на відрізку $[-1, 1]$. За теоремою Кантора вона рівномірно неперервна на цьому відрізку, а отже, і на проміжку $X = (-1, 1] \subset [-1, 1]$.

Знайдемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ з означення рівномірної неперервності. Маємо ($x', x'' \in X$)

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^3 - x''^3| = |x' - x''|\,|x'^2 + x'x'' + x''^2| \leq$$

$$\leq |x' - x''| \cdot (|x'^2| + |x'|\,|x''| + |x''^2|) \leq 3|x' - x''| < \varepsilon,$$

звідки $|x' - x''| < \delta = \varepsilon/3$. $\square$

5′. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)=3x-\operatorname{arctg}5x$ на множині $X=\mathbb{R}$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $f\in C_{\mathbb{R}}$, то теорема Кантора не гарантує рівномірної неперервності функції на $\mathbb{R}$. Розглянемо спочатку проміжок $X_1=[0,+\infty)$ та встановимо допоміжну нерівність. Нехай $a,b\in X_1$. Тоді $0\le\operatorname{arctg}a<\pi/2$, $-\pi/2<-\operatorname{arctg}b\le 0$. Додаючи почленно ці нерівності, дістанемо

$$-\frac{\pi}{2}<\gamma=\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{a-b}{1+ab},\ \gamma=\operatorname{arctg}\frac{a-b}{1+ab}.$$

Тепер застосуємо означення рівномірної неперервності на X_1 ($x',x''\in X_1$): $|f(x')-f(x'')|=|3(x'-x'')-(\operatorname{arctg}5x'-\operatorname{arctg}5x'')|=$

$$=\left|3(x'-x'')-\operatorname{arctg}\frac{5(x'-x'')}{1+25x'x''}\right|\le|3(x'-x'')|+\left|\operatorname{arctg}\frac{5(x'-x'')}{1+25x'x''}\right|\le$$

$$\le|3(x'-x'')|+\frac{5|x'-x''|}{1+25x'x''}\le 8|x'-x''|<\varepsilon$$

(використана нерівність $|\operatorname{arctg}a|<|a|$), звідки $|x'-x''|<\delta=\varepsilon/8$. Отже, функція f рівномірно неперервна на $X_1=[0,+\infty)$, а внаслідок непарності, й на $X=\mathbb{R}$. ☐

5″. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)=\sqrt{x}\sin x$ на множині $X=[1,+\infty)$.

Р о з в ' я з а н н я. Як і в задачі 5′, з неперервності функції f на (необмеженому) проміжку X не випливає її рівномірна неперервність на цьому проміжку. Виберемо послідовності

$$x_n'=2\pi n\in X\ ,\ x_n''=\frac{1}{\sqrt{n}}+2\pi n\in X\quad n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, $x_n'\to+\infty$, $x_n''\to+\infty$ і $|x_n'-x_n''|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$.

Оскільки

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left|\sqrt{2\pi n}\sin 2\pi n-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}+2\pi n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+2\pi n\right)\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}+2\pi n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}>0\ \text{при}\ n\to\infty,$$

то функція f не є рівномірно неперервною на $X=[1,+\infty)$. $\square$

Зауваження. Для дослідження функцій на рівномірну неперервність можна використовувати методи диференціального числення (див. розд. 1.9). Як випливає з формули Лагранжа, якщо $|f'(x)|\le L \quad \forall x\in X$, то функція f рівномірно неперервна на X і величина δ з означення рівномірної неперервності оцінюється нерівністю $\delta\le\varepsilon/L$. Так, у прикладі 5 маємо $f(x)=x^3$, $X=(-1,1]$, $|f'(x)|=3x^2\le 3 \quad \forall x\in X$. Отже, $\delta\le\varepsilon/3$. У прикладі 5′ $f(x)=3x-\operatorname{arctg}5x$, $X=\mathbb{R}$,

$$|f'(x)|=\left|3-\frac{5}{1+25x^2}\right|\le 3 \quad \forall x\in X .$$

Отже, $\delta\le\varepsilon/3$. $\square$

4.3. Самостійна робота № 3

1. Чи задовольняє функція $y=\dfrac{\cos(2\ln x)}{x}$ диференціальне рівняння $x^2y''+3xy'+5y=0$?

Розв'язання. Маємо $y=x^{-1}\cos(2\ln x)$,

$$y'=-x^{-2}\cos(2\ln x)-x^{-1}\sin(2\ln x)\cdot 2x^{-1}=$$
$$=-x^{-2}\big(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x)\big),$$
$$y''=2x^{-3}\big(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x)\big)-$$
$$-x^{-2}\big(-\sin(2\ln x)+2\cos(2\ln x)\big)\cdot 2x^{-1}=$$
$$=2x^{-3}\big(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x)+\sin(2\ln x)-2\cos(2\ln x)\big)=$$
$$=2x^{-3}\big(3\sin(2\ln x)-\cos(2\ln x)\big).$$

Підставляючи в рівняння, дістанемо

$$x^2y''+3xy'+5y=2x^{-1}\big(3\sin(2\ln x)-\cos(2\ln x)\big)-$$
$$-3x^{-1}\big(\cos(2\ln x)+2\sin(2\ln x)\big)+5x^{-1}\cos(2\ln x)=$$
$$=x^{-1}\big(6\sin(2\ln x)-2\cos(2\ln x)-3\cos(2\ln x)-$$

$$-6\sin(2\ln x)+5\cos(2\ln x)\big)\equiv 0\,.$$

Отже, функція задовольняє дане рівняння. □

1′. Чи задовольняє параметрично задана функція

$$x=\sin t,\;\; y=e^{2t}+e^{-2t}\quad(-\pi/2<t<\pi/2)$$

диференціальне рівняння $(1-x^2)y''-xy'-4y=0$?

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо похідні параметрично заданої функції:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2(e^{2t}-e^{-2t})}{\cos t}\,,$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_t/x'_t\right)'_t}{x'_t}=\frac{2\big(2\cos t(e^{2t}+e^{-2t})+(e^{2t}-e^{-2t})\sin t\big)}{\cos^3 t}\,.$$

Підставляючи в ліву частину рівняння, дістанемо

$$(1-x^2)y''-xy'-4y=$$

$$=(1-\sin^2 t)\frac{2\big(2\cos t(e^{2t}+e^{-2t})+(e^{2t}-e^{-2t})\sin t\big)}{\cos^3 t}-$$

$$-\sin t\frac{2(e^{2t}-e^{-2t})}{\cos t}-4(e^{2t}+e^{-2t})=$$

$$=4(e^{2t}+e^{-2t})+2\,\mathrm{tg}\,t(e^{2t}-e^{-2t})-2\,\mathrm{tg}\,t(e^{2t}-e^{-2t})-4(e^{2t}+e^{-2t})\equiv 0\,.$$

Отже, параметрично задана функція $y=y(x)$ задовольняє дане диференціальне рівняння (є його розв'язком). □

2. Знайти $y^{(10)}$, якщо $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо функцію у вигляді $y=uv$, де $u=x^2$, $v=(1+x)^{-1}$, та застосуємо формулу Лейбніца

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,u^{(k)}v^{(n-k)}\,.$$

Маємо $y^{(10)}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k\,(x^2)^{(k)}((x+1)^{-1})^{(10-k)}=$

$$=C_{10}^0\,x^2((x+1)^{-1})^{(10)}+C_{10}^1\,2x((x+1)^{-1})^{(9)}+C_{10}^2\,2((x+1)^{-1})^{(8)}\,,$$

оскільки $(x^2)^{(k)}=0$ при $k\ge 3$. Знайдемо похідні функції v:

$$v' = -(1+x)^{-2}, \ v'' = 2!(1+x)^{-3}, \ldots, \ v^{(k)} = (-1)^k k!(1+x)^{-(k+1)}.$$

Ураховуючи, що $C_{10}^0 = 1$, $C_{10}^1 = 10$, $C_{10}^1 = \dfrac{10(10-1)}{2} = 45$, дістанемо

$$y^{(10)} = x^2 10!(x+1)^{-11} - 10 \cdot 2x \cdot 9!(x+1)^{-10} + 45 \cdot 2 \cdot 8!(x+1)^{-9} =$$
$$= 10!(x+1)^{-11}.$$

Зауважимо, що цей приклад можна розв'язати, не застосовуючи формулу Лейбніца:

$$y = \frac{x^2}{1+x} = x - 1 + (x+1)^{-1}, \ y^{(10)} = ((x+1)^{-1})^{(10)} = 10!(x+1)^{-11}. \ \square$$

2′. Знайти $y^{(6)}$ і $d^6 y$, якщо $y = \sqrt[3]{1+2x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо функцію у вигляді $y = (1+2x)^{1/3}$.

Тоді $y' = \dfrac{1}{3}(1+2x)^{-2/3} \cdot 2$, $y'' = -\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}(1+2x)^{-5/3} \cdot 2^2$,

$$y''' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}(1+2x)^{-8/3} \cdot 2^3, \ldots,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - n + 1\right)(1+2x)^{\frac{1}{3} - n} \cdot 2^n.$$

Поклавши $n = 6$, дістанемо

$$y^{(6)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{14}{3}(1+2x)^{-\frac{17}{3}} \cdot 2^6 = -\frac{2^{11} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{3^6}(1+2x)^{-\frac{17}{3}}.$$

$$d^6 y = -\frac{2^{11} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{3^6}(1+2x)^{-\frac{17}{3}} dx^6. \ \square$$

2″. Знайти $d^2 y$, якщо $y = x^3 - 2x^2 + x$, $x = \operatorname{sh} t$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

$$dy = 3x^2 dx - 4x dx + dx = (3x^2 - 4x + 1)dx,$$

$$d^2 y = d(dy) = d((3x^2 - 4x + 1)dx) = d(3x^2 - 4x + 1)dx +$$
$$+ (3x^2 - 4x + 1)d(dx) = (6x - 4)dx^2 + (3x^2 - 4x + 1)d^2 x.$$

Ураховуючи, що $dx = \operatorname{ch} t\, dt$, $d^2 x = \operatorname{sh} t\, dt^2$, дістанемо

$$dy = (3\operatorname{sh}^2 t - 4\operatorname{sh} t + 1)\operatorname{ch} t dt,$$

$$d^2 y = (6\operatorname{sh} t - 4)\operatorname{ch}^2 t\, dt^2 + (3\operatorname{sh}^2 t - 4\operatorname{sh} t + 1)\operatorname{sh} t\, dt^2 =$$
$$= (6\operatorname{sh} t \operatorname{ch}^2 t - 4\operatorname{ch}^2 t + 3\operatorname{sh}^3 t - 4\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{sh} t)dt^2. \ \square$$

3. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $A=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; б) $B=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$;

в) $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{x-\sin x}$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо

а) $A=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}=(1^\infty)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\operatorname{ctg}^2 x\ln(1+3x^2)}$. Задача звелася до обчислення границі

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\ln(1+3x^2)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x^2)}{\operatorname{tg}^2 x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+3x^2}\cdot 6x}{2\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cos^2 x}{(1+3x^2)2\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2\operatorname{tg}x}=$$

$=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6}{2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}=3$. Отже, $A=e^3$ (використані співвідношення $\cos^2 x\sim 1$, $1+3x^2\sim 1$ при $x\to 0$).

б) $B=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x^2}=$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Л}}{=}$$

$\overset{\text{Л}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sqrt{1-x^2}}=0$ (використані співвідношення $\arcsin x\sim x$, $\sqrt{1-x^2}\sim 1$ при $x\to 0$).

в) $C=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x^2}{1-x^2}}{\dfrac{x^2}{2}}=4$ (використані співвідношення $1-x^2\sim 1$, $1-\cos x\sim x^2/2$ при $x\to 0$). □

4. Користуючись формулою Тейлора, обчислити

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-e^{x}+\dfrac{3}{2}x^{2}}{\sin x-\operatorname{tg}x}.$$

Р о з в ' я з а н н я. За допомогою локальної формули Маклорена виділимо головні степеневі частини вигляду Cx^n у функцій $f(x)=\sqrt[3]{1+3x}-e^{x}+\dfrac{3}{2}x^{2}$ і $g(x)=\sin x-\operatorname{tg}x$. Для функції g це можна зробити, користуючись відомими асимптотичними співвідношеннями:

$$g(x)=\operatorname{tg}x(\cos x-1)\sim x\cdot(-x^{2}/2)=-x^{3}/2 \text{ при } x\to 0.$$

Отже, $g(x)=-x^{3}/2+o(x^{3})$ при $x\to 0$. Для функції f використаємо відомі (стандартні) розклади:

$$f(x)=(1+3x)^{1/3}-e^{x}+\frac{3}{2}x^{2}=1+\frac{1}{3}\cdot 3x+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(3x)^{2}+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}(3x)^{3}+o(x^{3})-\left(1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})\right)+\frac{3}{2}x^{2}=$$

$$=1+x-x^{2}+\frac{5}{3}x^{3}-1-x-\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{3}{2}x^{2}+o(x^{3})=$$

$$=\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\right)x^{3}+o(x^{3})=\frac{3}{2}x^{3}+o(x^{3}) \text{ при } x\to 0.$$

Отже, $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^{3}+o(x^{3})}{-\frac{1}{2}x^{3}+o(x^{3})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^{3}}{-\frac{1}{2}x^{3}}=-3$. □

5. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) $y=x^{2}e^{-x}$; б) $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$; в) $y=\dfrac{2x^{2}-2x+2}{x-1}$;

г) $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$; д) $y=y(x)$: $x=t^{2}-t$, $y=t^{2}+t$ ($t\in\mathbb{R}$).

Р о з в ' я з а н н я. а) 1. Функція $y=x^{2}e^{-x}$ неперервна на своїй області визначення $D(y)=\mathbb{R}$ як елементарна; ні парна, ні непарна; неперіодична; $y\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(0)=0$,

$$y(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=((+\infty)\cdot(+\infty))=+\infty\,,$$

$$y(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{Л}}{=}0\,;$$

$y=0$ – горизонтальна асимптота при $x\to+\infty$. Оскільки

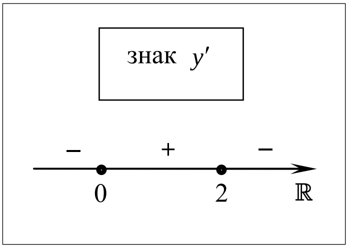
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=+\infty\,,$$

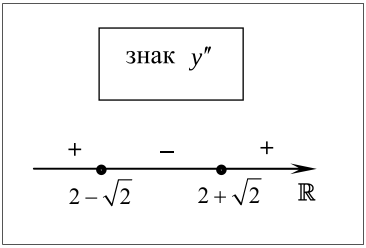
то похилої (а отже, і горизонтальної) асимптоти при $x\to-\infty$ немає.

2. Знайдемо y' і y'': $y'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2)$,

$$y''(x)=-e^{-x}(2x-x^2)+e^{-x}(2-2x)=e^{-x}(x^2-4x+2)\,.$$

З рівняння $y'=0$ знайдемо стаціонарні точки (точки можливого локального екстремуму) $x_1'=0$, $x_2'=2$, а з рівняння $y''=0$ – абсциси $x_1''=2-\sqrt{2}$ і $x_2''=2+\sqrt{2}$ точок можливого перегину графіка функції та складемо діаграми:





З діаграм випливає, що $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=4e^{-2}$;

$y\downarrow\downarrow$ при $x\in(-\infty,0)$ і при $x\in(2,+\infty)$, $y\uparrow\uparrow$ при $x\in(0,2)$;

$P_1(2-\sqrt{2},(2-\sqrt{2})^2e^{\sqrt{2}-2})$, $P_2(2+\sqrt{2},(2+\sqrt{2})^2e^{-\sqrt{2}-2})$ – точки перегину графіка функції;

$$y\cap \text{ при } x\in(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$$

$$y\cup \text{ при } x\in(-\infty,2-\sqrt{2}) \text{ і при } x\in(2+\sqrt{2},+\infty)\,.$$

Зауважимо, що визначити тип стаціонарної точки можна також за знаком y'' (друга достатня умова внутрішнього локального екстремуму): $y''(0)=2>0$ ($x=0$ – точка строгого локального мінімуму), $y''(2) = -2e^{-2} < 0$ ($x = 2$ – точка строгого локального максимуму). Графік даної функції зображений на рис. 6.

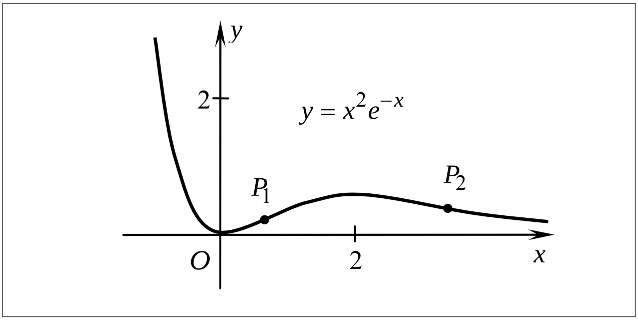


Рис. 6. Графік функції $y = x^2 e^{-x}$

б) 1. Функція $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ неперервна на своїй області визначення $D(y) = \mathbb{R}$ як елементарна; непарна:

$$y(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{3}\sin(-3x) = -y(x);$$

періодична з періодом 2π. Враховуючи неперервність і періодичність функції, можна зробити висновок про те, що її графік не має асимптот, а враховуючи ще й непарність, – що графік достатньо побудувати тільки на відрізку $[0, \pi]$. Знайдемо нулі функції: $\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x = 0$, $\sin x + \frac{1}{3}(3\sin x - 4\sin^3 x) = 0$,

$$\sin x\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right) = 0.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ – корені, які належать відрізку $[0, \pi]$.

2. Знайдемо y' і y'': $y'(x) = \cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$,

$y''(x) = -\sin x - 3\sin 3x =$

$$= -\sin x - 3(3\sin x - 4\sin^3 x) = \sin x(12\sin^2 x - 10).$$

З рівняння $y' = 0$ знайдемо стаціонарні точки, які належать відрізку $[0, \pi]$: $x_1' = \pi/4$, $x_2' = \pi/2$, $x_3' = 3\pi/4$. З рівняння $y'' = 0$ знайдемо абсциси точок можливого перегину графіка функції:

$$x_1'' = 0, \quad x_2'' = \arcsin\sqrt{5/6} = \arccos\sqrt{1/6},$$
$$x_3'' = \pi - \arcsin\sqrt{5/6} = \pi - \arccos\sqrt{1/6}, \quad x_4'' = \pi.$$

Оскільки $y''(x_1') = y''(\pi/4) = -2\sqrt{2} < 0$, $y''(x_2') = y''(\pi/2) = 2 > 0$, $y''(x_3') = y''(3\pi/4) = -2\sqrt{2} < 0$, то

$$y_{\max} = y(\pi/4) = 2\sqrt{2}/3, \; y_{\min} = y(\pi/2) = 2/3,$$
$$y_{\max} = y(3\pi/4) = 2\sqrt{2}/3.$$

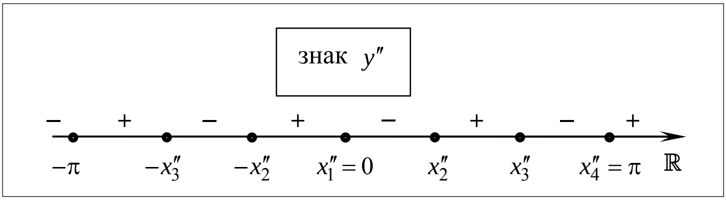
Дослідимо точки x_i'', $i = 1, 2, 3, 4$. Для цього знайдемо

$$y'''(x) = -\cos x - 9\cos 3x =$$
$$= -\cos x - 9(4\cos^3 x - 3\cos x) = 26\cos x - 36\cos^3 x.$$

Оскільки $y'''(x_1'') = y'''(0) = -10 < 0$,

$$y'''(x_2'') = y'''(\arccos\sqrt{1/6}) = 20/\sqrt{6} > 0,$$
$$y'''(x_3'') = y'''(\pi - \arccos\sqrt{1/6}) = -20/\sqrt{6} < 0,$$
$$y'''(x_4'') = y'''(\pi) = 10 > 0,$$

то в околах точок x_1'' і x_3'' похідна y'' монотонно спадає, а в околах точок x_2'' і x_4'' – монотонно зростає. Це можна відобразити в такій діаграмі



Отже, точками перегину графіка функції, абсциси яких належать відрізку $[0, \pi]$, є точки

$$P_1(x_1'', y(x_1'')) = P_1(0,0), \; P_4(x_4'', y(x_4'')) = P_4(\pi, 0),$$
$$P_2(x_2'', y(x_2'')) = P_2(\arcsin\sqrt{5/6}, 4\sqrt{30}/27),$$
$$P_3(x_3'', y(x_3'')) = P_3(\pi - \arcsin\sqrt{5/6}, 4\sqrt{30}/27).$$

Графік функції зображений на рис. 7.

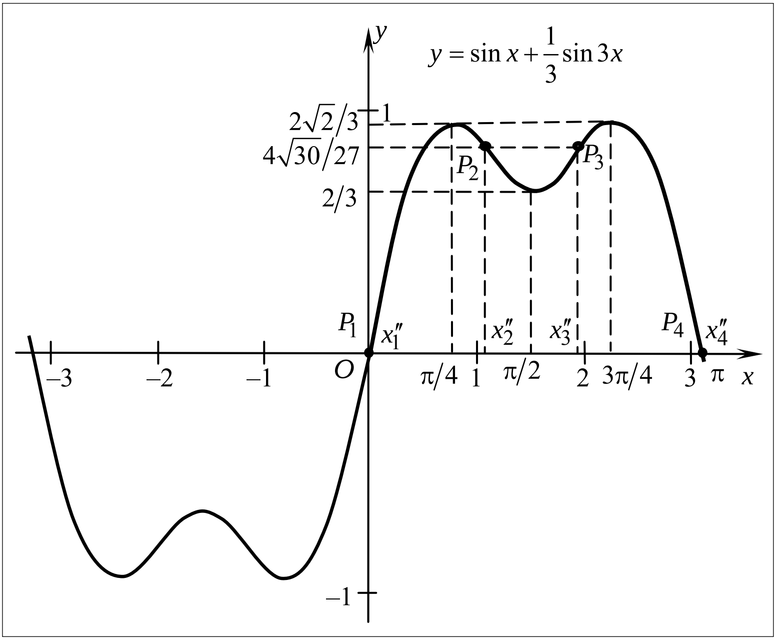


Рис. 7. Графік функції $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$

в) 1. Областю визначення функції $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ є множина $D(y) = (-\infty, 1) \bigcup (1, +\infty)$. Оскільки $y(1 \pm 0) = \lim\limits_{x \to 1 \pm 0} y = \pm\infty$, то $x = 1$ – точка розриву 2-го роду, а пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота. В усіх інших точках функція неперервна як елементарна. Знайдемо похилі асимптоти вигляду $y = kx + b$. Маємо

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 2}{x - 1} - 2 \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x - 1} = 0.$$

Отже, пряма $y = 2x$ – похила асимптота графіка функції як при $x \to +\infty$, так і при $x \to -\infty$.

Оскільки $2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1) > 0 \quad \forall x \in D(y)$, то $y < 0$ при $x < 1$, $y > 0$ при $x > 1$. Функція ні парна, ні непарна, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки $x = 0$. Функція неперіодична, оскільки $x = 1 \notin D(y)$.

2. Знайдемо $y'(x) = \left(2x + \dfrac{2}{x-1}\right)' = 2 - \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$,

$y''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$. З рівняння $y' = 0$ дістанемо стаціонарні точки $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Оскільки $y''(0) = -4 < 0$, $y''(2) = 4 > 0$, то

$$y_{\max} = y(0) = -2, \; y_{\min} = y(2) = 6.$$

Функція опукла вгору при $x < 1$ ($y'' < 0$) і опукла вниз при $x > 1$ ($y'' > 0$). Точок перегину графік функції не має (рис. 8).

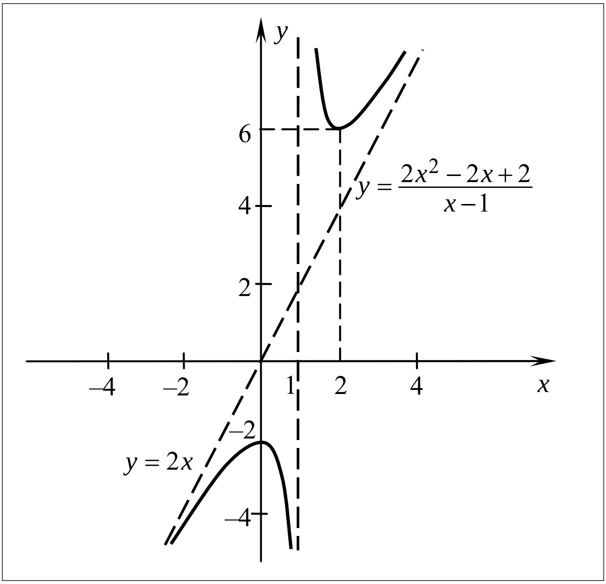


Рис. 8. Графік функції $y = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x-1}$

г) 1. Функція $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$ неперервна на своїй області визначення $D(y)=\mathbb{R}$; непарна:

$$y(-x)=(-x+2)^{2/3}-(-x-2)^{2/3}=-\left((x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}\right)=-y(x);$$

неперіодична; $y>0$ при $x>0$, $y<0$ при $x<0$; оскільки

$$y(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\left((x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}\right)=\begin{bmatrix} x=1/t, \\ t\to+0 \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{(1+2t)^{2/3}-(1-2t)^{2/3}}{t^{2/3}}=\lim_{t\to+0}\frac{1+\frac{4}{3}t-1+\frac{4}{3}t+o(t)}{t^{2/3}}=$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{t\to+0}\frac{t}{t^{2/3}}=0=y(-\infty),$$

то горизонтальною асимптотою графіка функції є пряма $y=0$ (як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$).

2. Знайдемо

$$y'=\frac{2}{3}(x+2)^{-1/3}-\frac{2}{3}(x-2)^{-1/3}=\frac{2}{3}\frac{(x-2)^{1/3}-(x+2)^{1/3}}{(x^2-4)^{1/3}},$$

$$y''=-\frac{2}{9}(x+2)^{-4/3}+\frac{2}{9}(x-2)^{-4/3}=\frac{2}{9}\frac{(x+2)^{4/3}-(x-2)^{4/3}}{(x^2-4)^{4/3}}.$$

Оскільки $y'\neq 0$, то стаціонарних точок у функції немає, а є тільки точки недиференційовності $x_1=-2$ і $x_2=2$ (критичні точки функції), причому $y'(-2\pm 0)=\pm\infty$, $y'(2\pm 0)=\mp\infty$. Тому

$$y_{\min}=y(-2)=-2\sqrt[3]{2}, \quad y_{\max}=y(2)=2\sqrt[3]{2}.$$

Зауважимо, що, на відміну від прикладів а), б), в) (де своїх екстремумів функції набували в стаціонарних точках), при $x_1=-2$ і $x_2=2$ функція має так звані «гострі» локальні екстремуми.

Для y'' маємо $y''(0)=0$, $y''(\pm 2)=\pm\infty$, $y''>0$ при $x>0$, $y''<0$ при $x<0$. Тому на проміжках $(-\infty,-2)$ і $(-2,0)$ функція опукла вгору, а на проміжках $(0,2)$ і $(2,+\infty)$ – опукла вниз; $P(0,0)$ – точка перегину графіка функції (рис. 9).

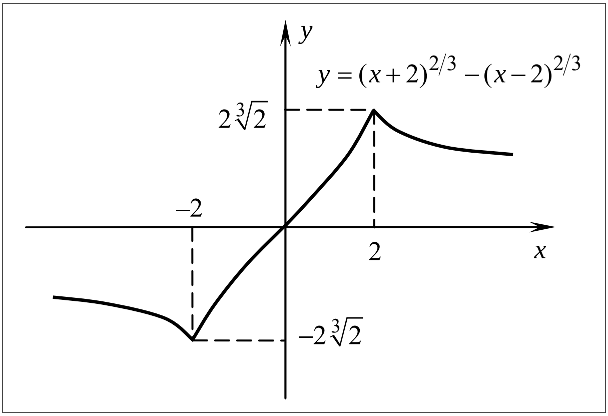


Рис. 9. Графік функції $y=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$

д) У цьому прикладі функція задана параметрично. Оскільки з першого рівняння маємо

$$t=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4x})=t_1(x), \quad t=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4x})=t_2(x) \ (x\ge -1/4)$$

то насправді даною системою параметричних рівнянь визначені дві (неперервні) функції $y=y(t_1(x))=f_1(x)$ і $y=y(t_2(x))=f_2(x)$. Сама ж система параметричних рівнянь задає на площині деяку криву, гілками якої є графіки функцій $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$. Для побудови таких кривих, як правило, складають таблицю типу

t	x	y
t_k	x_k	y_k

при $t_k=kh$ (h – крок таблиці, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n$) з малим, якщо можливо, кроком h та будують криву по точках, а потім за допомогою методів диференціального числення роблять необхідні уточнення. Складемо таблицю з кроком $h=1/2$ для точок $t_k=k/2$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$:

t	–2	–3/2	–1	–1/2	0	1/2	1	3/2	2
x	6	15/4	2	3/4	0	–1/4	0	3/4	2
y	2	3/4	0	–1/4	0	3/4	2	15/4	6

і побудуємо допоміжні графіки залежностей x і y від t (рис. 10).

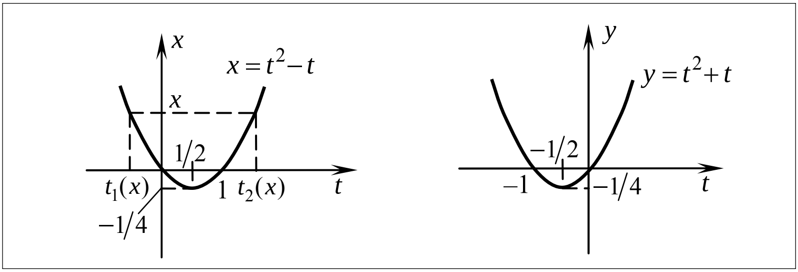


Рис. 10. Допоміжні графіки залежностей $x = x(t)$ і $y = y(t)$

Знайдемо

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^2+t)'}{(t^2-t)'} = \frac{2t+1}{2t-1}, \quad y''_{xx} = \frac{\left(\dfrac{2t+1}{2t-1}\right)'}{(t^2-t)'} = \frac{-4}{(2t-1)^3}.$$

З рівняння $y'_x = 0$ дістанемо стаціонарну точку $x = 3/4$ ($t = -1/2$) функції f_1. Далі маємо

$y'_x > 0$ при $x \in (-1/4, +\infty)$ $(t > 1/2)$ $\Rightarrow$ $f_2 \uparrow\uparrow$,

$y'_x > 0$ при $x \in (3/4, +\infty)$ $(t < -1/2)$ $\Rightarrow$ $f_1 \uparrow\uparrow$,

$y'_x < 0$ при $x \in (-1/4, 3/4)$ $(-1/2 < t < 1/2)$ $\Rightarrow$ $f_1 \downarrow\downarrow$.

Оскільки $y''_{xx}\big|_{t=-1/2} = f_1''(3/4) = \dfrac{-4}{(-1-1)^3} = \dfrac{1}{2} > 0$, то функція f_1 у точці $x = 3/4$ має строгий локальний мінімум

$$y_{\min} = f_1(3/4) = y\big|_{t=-1/2} = -1/4.$$

З виразу для y''_{xx} випливає, що

$y''_{xx} > 0$ при $x \in (-1/4, +\infty)$ $(t < 1/2)$ $\Rightarrow$ $f_1 \cup$,

$y''_{xx} < 0$ при $x \in (-1/4, +\infty)$ $(t > 1/2)$ $\Rightarrow$ $f_2 \cap$.

З рис. 10 бачимо, що

$y = 0$ при $x = 0$ ($t = 0$) і $x = 2$ ($t = -1$),

$y > 0$ при $x > -1/4$ ($t > 0$) і при $x > 2$ ($t < -1$),

$y < 0$ при $0 < x < 2$ ($-1 < t < 0$).

З виразу для y'_x випливає, що

$$f_1'(-1/4)=\frac{2t+1}{2t-1}\bigg|_{t=\frac{1}{2}-0}=-\infty\,,\quad f_2'(-1/4)=\frac{2t+1}{2t-1}\bigg|_{t=\frac{1}{2}+0}=+\infty\,.$$

Тому крива, яка описується заданою системою рівнянь, у точці $P(-1/4,3/4)$ має вертикальну дотичну. Графіки функцій $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ зображені на рис. 11. □

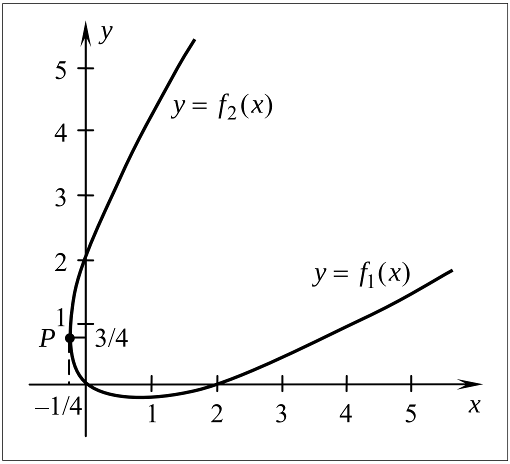


Рис. 11. Графік функції $y=y(x)$: $x=t^2-t$, $y=t^2+t$

4.4. Самостійна робота № 4

1. Знайти і зобразити графічно область визначення $D(z)$ функції $z=\arcsin(x^2/y)+\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

Р о з в ' я з а н н я. Враховуючи області визначення елементарних функцій $\arcsin u$ і $\sqrt{v}$, маємо

$$\begin{cases} u\ge -1,\\ u\le 1,\\ v\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2/y\ge -1,\\ x^2/y\le 1,\\ \sin\pi(x^2+y^2)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y\le -x^2\\ y\ge x^2\end{array}\right.\ (y\ne 0),\\ 2k\le x^2+y^2\le 1+2k\quad (k=0,1,\ldots).\end{cases}$$

Область визначення $D(z)$ функції зображена на рис. 12. □

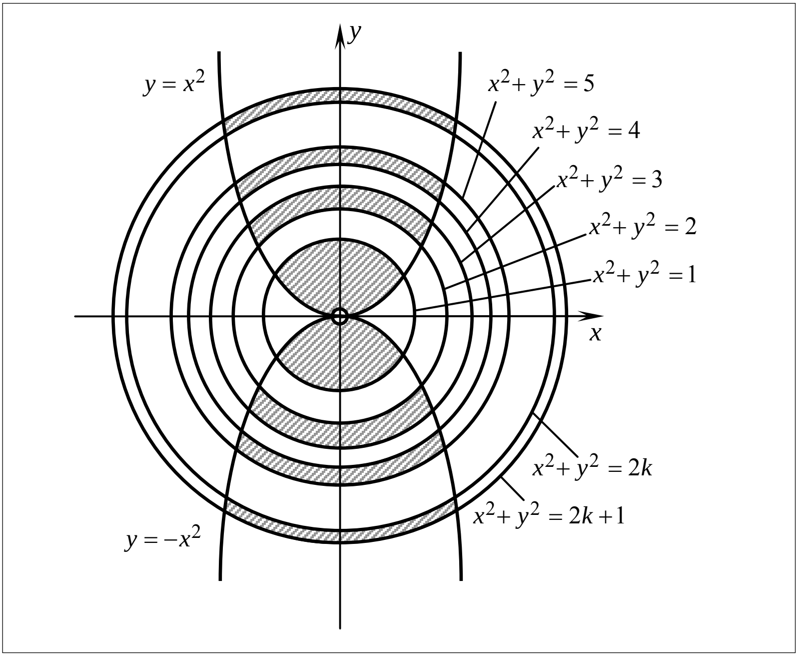


Рис. 12. Область визначення функції z

2. Знайти повторні границі

$$A = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \quad B = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y),$$

якщо: а) $f(x,y) = \dfrac{5\operatorname{arctg}7x - 3\sin 2y}{7x+3y}$; б) $f(x,y) = \dfrac{\sin|x| + \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

в) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+3x+\sin 3y)}{x+y}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Маємо

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{5\operatorname{arctg}7x}{7x}, \quad \lim_{x\to 0} f(x,y) = \frac{-3\sin 2y}{3y}.$$

Тому

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{5\operatorname{arctg}7x}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 7x}{7x} = 5,$$

$$B=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin 2y}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{2y}{2}=-2\ .$$

б) Маємо $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\dfrac{\sin|x|}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\dfrac{\sin y}{|y|}$. Тому

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{|x|}=1\,,\quad B=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{|y|}=\operatorname{sgn} y\ \ (\,y\neq 0\,).$$

в) Маємо $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\dfrac{\ln(1+\sin 3y)}{y}$.

Тому

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=3\,,\ B=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{y}=3\ .\ \square$$

2′. Знайти повторні границі

$$A=\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty} f(x,y)\,,\quad B=\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} f(x,y)\,,$$

якщо: а) $f(x,y)=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi(2x-y)}{3x+4y}$; б) $f(x,y)=\dfrac{3x^2-4y^2}{2x^2+4y}$;

в) $f(x,y)=\dfrac{5\operatorname{arctg} x-3\operatorname{arctg} y}{3\operatorname{arctg} x-5\operatorname{arctg} y}$.

Р о з в ’ я з а н н я. а) Маємо

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\operatorname{ctg}(-\pi/4)=-1\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x,y)=\operatorname{ctg}(2\pi/3)=-1\big/\sqrt{3}\ .$$

Отже, $A=-1$, $B=-1\big/\sqrt{3}$.

б) Маємо

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=-\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x,y)=3/2\ .$$

Отже, $A=-\infty$, $B=2/3$.

в) Маємо

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=\frac{5\operatorname{arctg} x-\frac{3\pi}{2}}{3\operatorname{arctg} x-\frac{5\pi}{2}}\,,\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x,y)=\frac{\frac{5\pi}{2}-3\operatorname{arctg} y}{\frac{3\pi}{2}-5\operatorname{arctg} y}\ .$$

Тому

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\operatorname{arctg}x-\frac{3\pi}{2}}{3\operatorname{arctg}x-\frac{5\pi}{2}}=\frac{\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}}=-1,$$

$$B=\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{5\pi}{2}-3\operatorname{arctg}y}{\frac{3\pi}{2}-5\operatorname{arctg}y}=\frac{\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{2}}=-1. \ \square$$

3. Знайти подвійні границі:

а) $A=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{(2x+y)^3-1}{1-\sqrt[3]{2x+y}}$; б) $B=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{2x+y-1}{2-\sqrt{4y+x}}$;

в) $C=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$; г) $D=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}}(1+xy)^{\frac{y^2}{x^6+xy^2}}$;

д) $E=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; е) $G=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\dfrac{x^6+y^6}{x^6-y^6}$.

Р о з в ’ я з а н н я.

а) $A=\left[\begin{matrix}2x+y=u,\\ u\to1\end{matrix}\right]=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^3-1}{1-\sqrt[3]{u}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{Л}}{=}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{3u^2}{-\frac{1}{3}u^{-2/3}}=-9$.

б) $B=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{(2+\sqrt{4y+x})(2x+y-1)}{4-4y-x}=$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{4(2x+y-1)}{-(x+4(y-1))}=\left[\begin{matrix}y-1=z,\\ z\to0\end{matrix}\right]=\lim_{\substack{x\to0\\z\to0}}\frac{4(2x+z)}{-(x+4z)}$$

(використано асимптотичне співвідношення $2+\sqrt{4y+x}\sim4$ при $x\to0$, $y\to1$). З цього робимо висновок, що подвійна границя B не існує, оскільки, наприклад,

$$\lim_{\substack{x\to0\\z\to0\\(z=x)}}\frac{4(2x+z)}{-(x+4z)}=-\frac{12}{5},\quad \lim_{\substack{x\to0\\z\to0\\(z=-x)}}\frac{4(2x+z)}{-(x+4z)}=\frac{4}{3}.$$

в) $C=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left[\begin{matrix}x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\\ r\to 0\end{matrix}\right]=$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\varphi\sin\varphi=0\,.$$

г) $D=(1^{\infty})=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\left((1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right)^{\frac{xy^3}{x^6+xy^2}}=e^3$, оскільки

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=e\,,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{xy^3}{x^6+xy^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{y^3}{x^5+y^2}=\frac{3^3}{3^2}=3\,.$$

д) $D=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\left[\begin{matrix}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ r\to 0\end{matrix}\right]=\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{r^3}=$

$$=\lim_{r\to+\infty}\frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{r}=\left(\frac{\text{const}}{+\infty}\right)=0\,.$$

е) Подвійна границя G не існує, оскільки, наприклад,

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ (y=2x)}}\frac{x^6+y^6}{x^6-y^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+2^6)x^6}{(1-2^6)x^6}=-\frac{65}{63}\neq$$

$$\neq\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ (y=3x)}}\frac{x^6+y^6}{x^6-y^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+3^6)x^6}{(1-3^6)x^6}=-\frac{1459}{1457}\,.\ \square$$

4. Дослідити функцію на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних (як функцію двох змінних):

а) $f(x,y)=\dfrac{3x^2-2xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ при $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=2$;

б) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}-1}$ при $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=3$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Нехай y – фіксована величина і $y\neq 0$. Оскільки $x^2+xy+y^2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ($D=y^2-4y^2=-3y^2<0$), то при $y \neq 0$ функція неперервна по змінній $x \in \mathbb{R}$ як частка двох неперервних функцій – многочленів 2-го степеня відносно x. При $y = 0$ маємо $f(x,0) = \dfrac{3x^2}{x^2}$, тому функція має усувний розрив у точці $x = 0$ і $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 3$. Аналогічно попередньому, функція неперервна по змінній $y \in \mathbb{R}$ (при фіксованому $x \neq 0$). Якщо $x = 0$, то при $y = 0$ функція має усувний розрив, причому $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 1$.

При $(x,y) \neq (0,0)$ функція $f(x,y)$ двох змінних неперервна як частка двох неперервних функцій – многочленів 2-го степеня відносно x і y, оскільки знаменник $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4}$ перетворюється на нуль тільки при $x = y = 0$. Знайдемо подвійну границю $A = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$. Якщо $A = 2$, то $f(x,y)$ неперервна в точці $(0,0)$. Якщо $A \neq 2$ (або взагалі не існує), то $(0,0)$ – точка розриву. Маємо

$$A = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ r \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{r \to 0} \frac{r^2(3\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$$= \frac{3\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi} = k(\varphi).$$

Оскільки $k(\varphi)$ залежить від напряму, з яким точка $(0,0)$ входить у початок координат (наприклад, $k(0) = 3$, $k(\pi/2) = 1$), то подвійна границя A не існує. Отже, функція $f(x,y)$ має розрив при $(x,y) = (0,0)$.

б) Нехай y – фіксована величина і $y \neq 0$. Тоді

$$\sqrt[3]{1 + x^2 + y^2} - 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

і тому $f(x,y)$ неперервна по змінній $x\in\mathbb{R}$ як частка двох неперервних функцій. При $y=0$ функція $f(x,0)$ також неперервна при всіх $x\in\mathbb{R}$, оскільки

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+x^2)^{1/3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{3}x^2}=3=f(0,0).$$

Оскільки змінні x і y входять у функцію симетрично, то $f(x,y)$ неперервна по $y\in\mathbb{R}$ при всіх фіксованих значеннях x.

Знаменник $\sqrt[3]{1+x^2+y^2}-1$ дорівнює нулю тільки при $x=y=0$, тому функція $f(x,y)$ двох змінних неперервна при всіх $(x,y)\neq(0,0)$ як частка неперервних функцій. При $(x,y)\to(0,0)$ маємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix} x^2+y^2=u, \\ u\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{(1+u)^{1/3}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{1}{3}u}=3=f(0,0).$$

Тому функція $f(x,y)$ двох змінних неперервна при всіх $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. □

5. Для поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$ записати рівняння:

а) дотичної площини в точці $M(3,4,5)$;

б) нормалі в точці $M(3,4,5)$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Запишемо рівняння поверхні у вигляді $\Phi(x,y,z)=0$, де $\Phi(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$. Тоді рівняння дотичної площини має вигляд

$$\Phi'_x(M)(x-3)+\Phi'_y(M)(y-4)+\Phi'_z(M)(z-5)=0.$$

Знайдемо

$$\Phi'_x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \Phi'_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \Phi'_z=1,$$

$$\Phi'_x(M) = -\frac{3}{5}, \quad \Phi'_y(M) = -\frac{4}{5}, \quad \Phi'_z(M) = 1.$$

Отже, $-\frac{3}{5}(x-3) - \frac{4}{5}(y-4) + z - 5 = 0$ – рівняння дотичної площини до даної поверхні в точці $M(3,4,5)$.

б) Рівняння нормалі до даної поверхні в точці M має вигляд

$$\frac{x-3}{\Phi'_x(M)} = \frac{y-4}{\Phi'_y(M)} = \frac{z-5}{\Phi'_z(M)},$$

або $\frac{x-3}{-3/5} = \frac{y-4}{-4/5} = \frac{z-5}{1}$. □

4.5. Самостійна робота № 5

1. Знайти повні диференціали першого і другого порядків функції $w = f(x^2 + y^2, xy)$.

Р о з в ' я з а н н я. Уведемо проміжні змінні

$$u = x^2 + y^2, \quad v = xy.$$

Тоді $w = f(u,v)$. Використовуючи інваріантність форми диференціала і правила диференціювання, маємо $dw = f'_u\,du + f'_v\,dv$,

$$d^2w = d(dw) = d(f'_u\,du + f'_v\,dv) =$$

$$= d(f'_u)du + f'_u d(du) + d(f'_v)dv + f'_v d(dv) =$$

$$= (f''_{uu}\,du + f''_{uv}\,dv)du + (f''_{vu}\,du + f''_{vv}\,dv)dv + f'_u d^2u + f'_v d^2v =$$

$$= f''_{uu}\,du^2 + 2f''_{uv}\,dudv + f''_{vv}\,dv^2 + f'_u d^2u + f'_v d^2v.$$

Знайдемо диференціали функцій u і v:

$du = 2xdx + 2ydy$, $d^2u = 2dx^2 + 2dy^2$, $dv = xdy + ydx$, $d^2v = 2dxdy$.

Тому

$$dw = f'_u(2xdx + 2ydy) + f'_v(xdy + ydx) =$$

$$= (2x f'_u + y f'_v)dx + (2y f'_u + x f'_v)dy,$$

$$d^2w = f''_{uu}(2xdx + 2ydy)^2 + 2f''_{uv}(2xdx + 2ydy)(xdy + ydx) +$$

$$+ f''_{vv}(xdy + ydx)^2 + f'_u(2dx^2 + 2dy^2) + f'_v 2dxdy =$$

$$= (4x^2 f''_{uu} + 4xyf''_{uv} + y^2 f''_{vv} + 2f'_u)dx^2 +$$

$$+(8xyf''_{uu}+(4x^2+4y^2)\,f''_{uv}+2xyf''_{vv}+2\,f'_v)dxdy+$$
$$+(4y^2\,f''_{uu}+4xyf''_{uv}+x^2\,f''_{vv}+2\,f'_u)dy^2\,.\ \square$$

2. Функція $z=z(x,y)$ неявно задана рівнянням $F(x-z,y-2z)=0$. Знайти z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

Розв'язання. Введемо проміжні змінні $u=x-z$, $v=y-2z$: $F(u,v)=0$. Застосуємо метод повного диференціювання. Маємо

$$dF(u,v)=0\,,\quad F'_u du+F'_v dv=0\,,$$
$$F'_u(dx-dz)+F'_v(dy-2dz)=0\,,\quad (F'_u+2F'_v)dz=F'_u dx+F'_v dy\,.$$

Звідси

$$dz=\frac{F'_u}{F'_u+2F'_v}dx+\frac{F'_v}{F'_u+2F'_v}dy\,,\quad z'_x=\frac{F'_u}{F'_u+2F'_v}\,,\quad z'_y=\frac{F'_v}{F'_u+2F'_v}\,.$$

Продиференціюємо рівність $F'_u du+F'_v dv=0$ повним чином ще один раз: $d(F'_u du+F'_v dv)=0$,

$$d(F'_u)du+F'_u d^2u+d(F'_v)dv+F'_v d^2v=0\,,$$
$$(F''_{uu}du+F''_{uv}dv)du+F'_u(-d^2z)+(F''_{vu}du+F''_{vv}dv)dv+F'_v(-2d^2z)=0\,,$$
$$d^2z(F'_u+2F'_v)=F''_{uu}du^2+2F''_{uv}dudv+F''_{vv}dv^2\,.$$

Звідси $d^2z=\dfrac{F''_{uu}du^2+2F''_{uv}dudv+F''_{vv}dv^2}{F'_u+2F'_v}$ ($F'_u+2F'_v\neq 0$). Враховуючи, що

$$du^2=(dx-dz)^2=\left(dx-\frac{F'_u dx+F'_v dy}{F'_u+2F'_v}\right)^2=\frac{F'^2_v(2dx-dy)}{(F'_u+2F'_v)^2}\,,$$
$$dv^2=(dy-2dz)^2=\left(dy-\frac{2F'_u dx+2F'_v dy}{F'_u+2F'_v}\right)^2=\frac{F'^2_u(dy-2dx)}{(F'_u+2F'_v)^2}\,,$$
$$dudv=(dx-dz)(dy-2dz)=\frac{-F'_uF'_v(2dx-dy)}{(F'_u+2F'_v)^2}\,,$$

дістанемо

$$d^2z=\frac{(F''_{uu}F'^2_v-2F''_{uv}F'_uF'_v+F''_{vv}F'^2_u)(2dx-dy)^2}{(F'_u+2F'_v)^3}\quad (F'_u+2F'_v\neq 0).$$

Оскільки $d^2z = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{yy}\,dy^2$, то, позначивши

$$\varphi(u,v) = \frac{F''_{uu}F'^2_v - 2F''_{uv}F'_uF'_v + F''_{vv}F'^2_u}{(F'_u + 2F'_v)^3},$$

дістанемо $z''_{xx} = 4\varphi(u,v)$, $z''_{xy} = -2\varphi(u,v)$, $z''_{yy} = \varphi(u,v)$.

Зауважимо, що обчислення похідних z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} можна було б виконати й так:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(\frac{F'_u}{F'_u + 2F'_v}\right)'_x = \frac{(F'_u + 2F'_v)(F'_u)'_x - F'_u(F'_u + 2F'_v)'_x}{(F'_u + 2F'_v)^2} =$$

$$= \frac{(F'_u + 2F'_v)(F''_{uu}u'_x + F''_{uv}v'_x) - F'_u(F''_{uu}u'_x + F''_{uv}v'_x + 2F''_{vu}u'_x + 2F''_{vv}v'_x)}{(F'_u + 2F'_v)^2}.$$

Беручи до уваги, що

$$u'_x = (x - z)'_x = 1 - z'_x = \frac{F'_u}{F'_u + 2F'_v},\quad v'_x = (y - 2z)'_x = -\frac{2F'_u}{F'_u + 2F'_v},$$

дістанемо

$$z''_{xx} = \frac{1}{(F'_u + 2F'_v)^3}\big(2(F'_u + 2F'_v)(F''_{uu}F'_v + F''_{uv}F'_u) -$$

$$- F'_u(2F''_{uu}F'_v - 2F''_{uv}F'_u + 4F''_{vu}F'_v - 4F''_{vv}F'_u)\big) =$$

$$= \frac{4F''_{uu}F'^2_v - 8F''_{uv}F'_uF'_v + 4F''_{vv}F'^2_u}{(F'_u + 2F'_v)^3} = 4\varphi(u,v).$$

Аналогічно можна знайти частинні похідні z''_{xy} і z''_{yy}. □

3. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням

$$F(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 5z + 9 = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки дане рівняння квадратне відносно z, то воно задає дві (неперервні) функції $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$. Частинні похідні неявно заданої функції знайдемо за формулами

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{4x-8}{2z-5},\quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y+6}{2z-5}\quad (z \ne 5/2).$$

З рівнянь $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ знайдемо стаціонарну точку $M_0(2,-1)$, а з рівняння $F(2,-1,z) = z^2 - 5z - 2 = 0$ – відповідні значення $z_{10} = z_1(M_0) = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$, $z_{20} = z_2(M_0) = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$. Щоб застосувати достатні умови локального екстремуму, знайдемо частинні похідні другого порядку

$$z''_{xx} = -\left(\frac{4x-8}{2z-5}\right)'_x = -\frac{(2z-5)\cdot 4 - (4x-8)2z'_x}{(2z-5)^2},$$

$$z''_{xy} = -\left(\frac{4x-8}{2z-5}\right)'_y = -\frac{(2z-5)\cdot 0 - (4x-8)2z'_y}{(2z-5)^2},$$

$$z''_{yy} = -\left(\frac{6y+6}{2z-5}\right)'_y = -\frac{(2z-5)\cdot 6 - (6y+6)2z'_y}{(2z-5)^2}.$$

При $x = 2$, $y = -1$, $z = z_{10} = (5-\sqrt{33})/2$ маємо

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(M_0) = \frac{4}{\sqrt{33}}, \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}(M_0) = \frac{6}{\sqrt{33}}.$$

Матриця коефіцієнтів другого диференціала $d^2 z_1(M_0)$ у цьому випадку має вигляд

$$A_1(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{33}} & 0 \\ 0 & \dfrac{6}{\sqrt{33}} \end{pmatrix}.$$

Оскільки головні діагональні мінори цієї матриці

$$\Delta_1 = \frac{4}{\sqrt{33}}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{33}} & 0 \\ 0 & \dfrac{6}{\sqrt{33}} \end{vmatrix} = \frac{24}{33} = \frac{8}{11}$$

додатні, то $z_{1\min} = z_1(M_0) = (5-\sqrt{33})/2$.

При $x = 2$, $y = -1$, $z = z_{20} = (5+\sqrt{33})/2$ маємо

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(M_0) = -\frac{4}{\sqrt{33}}, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}(M_0) = -\frac{6}{\sqrt{33}},$$

$$A_2(M_0)=\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{\sqrt{33}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{6}{\sqrt{33}} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1=-\frac{4}{\sqrt{33}}<0\,, \quad \Delta_2=\frac{8}{11}>0\,.$$

Тому $z_{2\min}=z_2(M_0)=(5+\sqrt{33})/2$. □

4. Дослідити на умовні локальні екстремуми функцію $z=x^2+y^2+8$, якщо $x+y=4$.

Р о з в ' я з а н н я. За методом невизначених множників Лагранжа складемо функцію Лагранжа

$$L=x^2+y^2+8+\lambda(x+y-4)$$

та знайдемо умовно-стаціонарні точки з системи рівнянь

$$\begin{cases} L'_x=2x+\lambda=0, \\ L'_y=2y+\lambda=0, \\ x+y=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\lambda/2, \\ y=-\lambda/2, \\ -\lambda/2-\lambda/2=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2, \\ \lambda=-4. \end{cases}$$

Отже, $M_0(2,2)$ ($\lambda=-4$) – умовно-стаціонарна точка функції.

Щоб застосувати достатню умову умовного екстремуму, знайдемо

$$dL=2xdx+2ydy+\lambda(dx+dy)\,,$$

$$d^2L=2dx^2+2dy^2=\begin{bmatrix} x+y=4 \Rightarrow dx+dy=0, \\ dy=-dx \end{bmatrix}=4dx^2=d^2L(M_0)$$

– додатно визначена квадратична форма однієї змінної. Тому $z_{\text{ум. мін}}=z(M_0)=16$. □

4′. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z=2x^2+12xy+y^2$, якщо $x^2+4y^2=25$.

Р о з в ' я з а н н я. Складемо функцію Лагранжа

$$L=2x^2+12xy+y^2+\lambda(x^2+4y^2-25)$$

та знайдемо умовно-стаціонарні точки з системи рівнянь

$$\begin{cases} L'_x=4x+12y+2\lambda x=0, \\ L'_y=12x+2y+8\lambda y=0, \\ x^2+4y^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+\lambda)x+6y=0, \\ 6x+(1+4\lambda)y=0, \\ x^2+4y^2=25. \end{cases}$$

Виразивши з першого рівняння $y = -\frac{1}{6}(2+\lambda)x$ та підставивши в друге рівняння, дістанемо $\frac{1}{6}x(34 - 9\lambda - 4\lambda^2) = 0$. Оскільки з третього рівняння системи випливає, що $x \neq 0$, $y \neq 0$, то $4\lambda^2 + 9\lambda - 34 = 0$, звідки $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -17/4$.

Вибравши $\lambda = \lambda_1 = 2$, $y = -\frac{2}{3}x$, дістанемо $x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25$, звідки $x = \pm 3$, $y = \mp 2$. Вибравши $\lambda = \lambda_2 = -\frac{17}{4}$, $y = \frac{3}{8}x$, дістанемо $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 25$, звідки $x = \pm 4$, $y = \pm\frac{3}{2}$. Отже, маємо чотири умовно-стаціонарні точки $M_1(3,-2)$, $M_2(-3,2)$, $M_3(4, 3/2)$, $M_4(-4, -3/2)$.

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$dL = 4xdx + 12xdy + 12ydx + 2ydy + \lambda(2xdx + 8ydy),$$

$$d^2L = 4dx^2 + 24dxdy + 2dy^2 + 2\lambda(dx^2 + 4dy^2).$$

Зв'язок між диференціалами dx і dy дістанемо, диференціюючи повним чином рівняння зв'язку $x^2 + 4y^2 = 25$: $2xdx + 8ydy = 0$, звідки $dy = -\frac{x}{4y}dx$. Тому для точок M_1 і M_2 маємо $dy = \frac{3}{8}dx$, а для точок M_3 і M_4 – $dy = -\frac{2}{3}dx$. Знайдемо

$$d^2L(M_{1,2}) = \left[dy = \frac{3}{8}dx,\ \lambda = 2 \right] =$$

$$= 4dx^2 + 24\cdot\frac{3}{8}dx^2 + 2\cdot\frac{9}{64}dx^2 + 4\left(dx^2 + 4\cdot\frac{9}{64}dx^2\right) = \frac{625}{32}dx^2$$

– додатно визначена квадратична форма однієї змінної;

$$d^2L(M_{3,4}) = \left[dy = -\frac{2}{3}dx,\ \lambda = -\frac{17}{4} \right] =$$

$$= 4dx^2 + 24\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)dx^2 + 2\cdot\frac{4}{9}dx^2 - \frac{17}{2}\left(dx^2 + 4\cdot\frac{4}{9}dx^2\right) = -\frac{625}{18}dx^2$$

– від'ємно визначена квадратична форма однієї змінної. Тому

$$z_{\text{ум. мін.}} = z(M_{1,2}) = -50\,, \quad z_{\text{ум. макс.}} = z(M_{3,4}) = \frac{425}{4}\,. \ \square$$

5. Перетворити диференціальне рівняння $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, виконавши заміну змінних $u = x + z$, $v = y + z$, $z = z(u,v)$.

Р о з в ' я з а н н я. Для того, щоб виразити похідні функції z по x і по y через похідні цієї функції по u і по v, використаємо метод повного диференціювання. Маємо

$$z = z(x,y) \ \Rightarrow \ z = z(u,v),\ u = x + z,\ v = y + z\,,$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy\,, \quad dz = z'_u du + z'_v dv\,,$$

$$du = dx + dz\,, \quad dv = dy + dz\,,$$

$$dz = z'_u (dx + dz) + z'_v (dy + dz)\,,$$

$$d^2 z = z''_{uu} du^2 + 2z''_{uv} du dv + z''_{vv} dv^2 + z'_u d^2 u + z'_v d^2 v\,.$$

Оскільки $du = dx + dz$, $dv = dy + dz$, $d^2 u = d^2 z$, $d^2 v = d^2 z$, то з двох останніх рівнянь дістанемо

$$dz = \frac{z'_u dx + z'_v dy}{1 - z'_u - z'_v}\,,$$

$$d^2 z = \frac{z''_{uu}(dx + dz)^2 + 2z''_{uv}(dx + dz)(dy + dz) + z''_{vv}(dy + dz)^2}{1 - z'_u - z'_v}\,.$$

Знайдемо $(dx + dz)^2 = \dfrac{\left((1 - z'_v)dx + z'_v dy\right)^2}{(1 - z'_u - z'_v)^2}$,

$$(dy + dz)^2 = \frac{\left(z'_u dx + (1 - z'_u)dy\right)^2}{(1 - z'_u - z'_v)^2}\,,$$

$$(dx + dz)(dy + dz) = \frac{\left((1 - z'_v)dx + z'_v dy\right)\left(z'_u dx + (1 - z'_u)dy\right)}{(1 - z'_u - z'_v)^2}\,.$$

Тому $d^2 z = \dfrac{1}{(1 - z'_u - z'_v)^3}\Big(z''_{uu}\left((1 - z'_v)dx + z'_v dy\right)^2 +$

$$+2z''_{uv}\left((1 - z'_v)dx + z'_v dy\right)\left(z'_u dx + (1 - z'_u)dy\right) +$$

$$+z''_{vv}\left(z'_u dx + (1 - z'_u)dy\right)^2 \Big).$$

З іншого боку, $d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$. Прирівнюючи коефіцієнти при dx^2, $dxdy$, dy^2 у лівій і правій частинах рівності, дістанемо

$$z''_{xx} = \frac{z''_{uu}(1-z'_v)^2 + 2z''_{uv}(1-z'_v)z'_u + z''_{vv}z'^2_u}{(1-z'_u-z'_v)^3},$$

$$z''_{xy} = \frac{z''_{uu}(1-z'_v)z'_v + z''_{uv}\left((1-z'_v)(1-z'_u) + z'_u z'_v\right) + z''_{vv}z'_u(1-z'_u)}{(1-z'_u-z'_v)^3},$$

$$z''_{yy} = \frac{z''_{uu}z'^2_v + 2z''_{uv}z'_v(1-z'_u) + z''_{vv}(1-z'_u)^2}{(1-z'_u-z'_v)^3}.$$

Підставивши отримані вирази в диференціальне рівняння $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, маємо

$$z''_{uu}(1-2z'_v + z'^2_v + 2z'_v - 2z'^2_v + z'^2_v) +$$
$$+2z''_{uv}(z'_u - z'_v z'_u + 1 - z'_u - z'_v + z'_v z'_u + z'_u z'_v + z'_v - z'_u z'_v) +$$
$$+z''_{vv}(z'^2_u + 2z'_u - 2z'^2_u + 1 - 2z'_u + z'^2_u) = 0,$$

або $z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv} = 0$. □

5′. Перетворити диференціальний вираз $W = z'^2_x + z'^2_y$, виконавши заміну змінних $z = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо метод повного диференціювання. Маємо

$$z = z(x,y) \quad \Rightarrow \quad z = z(r,\varphi),\ z = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$
$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \quad dz = z'_r dr + z'_\varphi d\varphi,$$
$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \quad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi,$$
$$z'_x dx + z'_y dy = dz = z'_r dr + z'_\varphi d\varphi,$$
$$z'_x(\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) + z'_y(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) = z'_r dr + z'_\varphi d\varphi.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових диференціалах dr і $d\varphi$, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно z'_x і z'_y:

$$\begin{cases} z'_r = z'_x\cos\varphi + z'_y\sin\varphi, \\ z'_\varphi = -z'_x r\sin\varphi + z'_y r\cos\varphi, \end{cases}$$

яку розв’яжемо методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\,,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}z'_r & \sin\varphi\\ z'_\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=z'_r r\cos\varphi-z'_\varphi\sin\varphi\,,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos\varphi & z'_r\\ -r\sin\varphi & z'_\varphi\end{vmatrix}=z'_\varphi\cos\varphi+z'_r r\sin\varphi\,,$$

$$z'_x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=z'_r\cos\varphi-z'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r},\ z'_y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=z'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}+z'_r\sin\varphi\quad(r\neq 0).$$

Отже,

$$W=\left(z'_r\cos\varphi-z'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2+\left(z'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}+z'_r\sin\varphi\right)^2=z_r'^2+\frac{1}{r^2}z_\varphi'^2\,.\ \square$$

5″. Перетворити диференціальне рівняння $x^3y''+xyy'-y^2=0$, виконавши заміну змінних $x=e^t$, $y=ue^t$, $u=u(t)$.

Р о з в ’ я з а н н я. Маємо

$$y=y(x)\ \Rightarrow\ u=u(t),\ y=ue^t,\ x=e^t\,,$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(ue^t)}{e^t dt}=\frac{(\dot u e^t+ue^t)dt}{e^t dt}=\dot u+u\,,$$

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(\dot u+u)}{e^t dt}=\frac{(\ddot u+\dot u)dt}{e^t dt}=e^{-t}(\ddot u+\dot u)\quad\left(\dot u=\frac{du}{dt},\ \ddot u=\frac{d^2u}{dt^2}\right).$$

Підставивши у рівняння, дістанемо

$$e^{3t}e^{-t}(\ddot u+\dot u)+e^t ue^t(\dot u+u)-u^2e^{2t}=0\,,$$

або $\ddot u+\dot u+u\dot u+u^2-u^2=0$, $\ddot u+\dot u+u\dot u=0$. $\square$

4.6. Самостійна робота № 6

1. Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{5-3\operatorname{ctg}^3x}{\cos^2x}dx$. 2. $\int x^2\sqrt{1-2x}\,dx$. 3. $\int(3x-2)\sin 4x dx$.

4. $\int\frac{x^3+2x^2-x+10}{x(x-1)(x+1)}dx$. 5. $\int\frac{xdx}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$. 7. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$. 8. $\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+3x+2}}$.

9. $\int\frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x}$. 10. $\int\frac{dx}{(2\operatorname{tg}x+3)\sin 2x}$.

Розв'язання. 1. Оскільки $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\operatorname{tg}x)$, то інтеграл можна записати у вигляді

$$I=\int\left(5-\frac{3}{\operatorname{tg}^3 x}\right)d(\operatorname{tg}x)=\left[\operatorname{tg}x=t\right]=\int(5-3t^{-3})dt=$$

$$=5t-3\frac{t^{-2}}{-2}+C=5t+\frac{3}{2t^2}+C=5\operatorname{tg}x+\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 x+C.$$

2. Виконаємо заміну змінних за формулою $\sqrt{1-2x}=t$, $1-2x=t^2$, $x=\frac{1}{2}(1-t^2)$, $dx=-tdt$. Тоді

$$I=\int\frac{1}{4}(1-t^2)^2(-t)dt=-\frac{1}{4}\int(t-2t^3+t^5)dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{6}t^6\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(1-2x)-\frac{1}{2}(1-2x)^2+\frac{1}{6}(1-2x)^3\right)+C.$$

3. Застосуємо формулу інтегрування частинами: $u=3x-2$, $du=3dx$, $dv=\sin 4xdx$, $v=-\frac{1}{4}\cos 4x$. Тоді

$$I=-\frac{1}{4}(3x-2)\cos 4x-\int\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)3dx=$$

$$=-\frac{1}{4}(3x-2)\cos 4x+\frac{3}{16}\sin 4x+C.$$

4. Це інтеграл від неправильного раціонального дробу. Виділимо цілу частину цього дробу:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+2x^2-x+10 & x^3-x \\ \cline{2-2} x^3-x\qquad\qquad & 1 \\ \cline{1-1} 2x^2+10 & \end{array}$$

Тому

$$I = \int \left(1 + \frac{2x^2 + 10}{x(x-1)(x+1)} \right) dx = x + I_1 \text{, де } I_1 = \int \frac{2x^2 + 10}{x(x-1)(x+1)} dx \,.$$

Розкладемо правильний раціональний дріб $\dfrac{2x^2 + 10}{x(x-1)(x+1)}$ на елементарні дроби:

$$\frac{2x^2 + 10}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \,,$$

$$2x^2 + 10 = A(x^2 - 1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \,.$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B і C, скористаємося методом підстановки. Поклавши $x = 0$, дістанемо $10 = -A$, $A = -10$. При $x = 1$ маємо $12 = 2B$, $B = 6$. При $x = -1$ отримаємо $12 = 2C$, $C = 6$. Тому

$$I_1 = \int \left(-\frac{10}{x} + \frac{6}{x-1} + \frac{6}{x+1} \right) dx =$$

$$= -10 \ln |x| + 6 \ln |x-1| + 6 \ln |x+1| + C \,.$$

Таким чино, $I = x + \ln \dfrac{(x^2 - 1)^6}{x^{10}} + C$.

5. Це інтеграл від правильного раціонального дробу. Розкладемо цей дріб на елементарні дроби:

$$\frac{x}{(x+1)^2 (x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5} \,,$$

$$x = A(x+1)(x^2 + 2x + 5) + B(x^2 + 2x + 5) + (Cx + D)(x+1)^2 \,.$$

Якщо $x = -1$, то $-1 = B(1 - 2 + 5)$, $-1 = 4B$, $B = -1/4$. Далі прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x: при x^3 маємо $0 = A + C$; при x^2 маємо $0 = 3A - 1/4 + D + 2C$; при x^0 маємо $0 = 5A - 5/4 + D$. Отже, для відшукання коефіцієнтів A, C і D дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C = -A, \\ 3A + 2C + D = 1/4, \\ 5A + D = 5/4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -A, \\ 3A - 2A + 5/4 - 5A = 1/4, \\ D = 5/4 - 5A, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1/4, \\ A = 1/4, \\ D = 0. \end{cases}$$

Тому

$$I=\int\left(\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x+1)^2}-\frac{x}{4(x^2+2x+5)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{4}I_1,$$

де

$$I_1=\int\frac{xdx}{x^2+2x+5}=\int\frac{xdx}{(x+1)^2+4}=\begin{bmatrix}x+1=t,\\ dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{(t-1)dt}{t^2+4}=$$

$$=\int\frac{tdt}{t^2+4}-\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+4)}{t^2+4}-\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t^2+4|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Отже,

$$I=\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{8}\left(\ln|x^2+2x+5|-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

6. Маємо

$$I=\begin{bmatrix}x=4\sin t,\\ dx=4\cos t\,dt\end{bmatrix}=\int\frac{4\cos t\,dt}{\sqrt{(16\cos^2 t)^3}}=\frac{4}{4^3}\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^3 t}=\frac{1}{16}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{16}\operatorname{tg}t+C=\frac{1}{16}\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{x}{4}\right)+C=\frac{1}{16}\frac{\sin\left(\arcsin\frac{x}{4}\right)}{\cos\left(\arcsin\frac{x}{4}\right)}+C=$$

$$=\frac{1}{16}\frac{x/4}{\sqrt{1-x^2/16}}+C=\frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}+C.$$

7. Застосуємо підстановку Ейлера:

$$\sqrt{x^2+x+1}=t+x,\quad x^2+x+1=t^2+2tx+x^2,\quad x+1=t^2+2tx,$$

$$x-\sqrt{x^2+x+1}=-t,\quad x(1-2t)=t^2-1,\quad x=\frac{t^2-1}{1-2t},$$

$$dx=\frac{(1-2t)2t-(t^2-1)(-2)}{(1-2t)^2}dt=\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt.$$

Маємо

$$I=\int\frac{-2\dfrac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt}{-t}=2\int\frac{t^2-t+1}{t(1-2t)^2}dt=$$

$$=2\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{2t-1}+\frac{C}{(2t-1)^2}\right)dt=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2(2t-1)}+\frac{3}{2(2t-1)^2}\right)dt=$$

$$=2\left(\ln|t|-\frac{3}{4}\ln|2t-1|-\frac{3}{4}\frac{1}{2t-1}\right)+C=$$

$$=2\left(\ln(\sqrt{x^2+x+1}-x)-\frac{3}{4}\ln|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1|-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{4}\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1}\right)+C\,.$$

8. В інтегралі виконаємо заміну: $x=\frac{1}{t}-1,\quad dx=-\frac{dt}{t^2}$. Тоді

$$I=\int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\dfrac{1}{t}-1\right)+2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{t+1}{t^2}}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{t+1}}=$$

$$=-\int\sqrt{t+1}\,dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t+1}}=-\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}+2(t+1)^{1/2}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x+1}+1\right)^{3/2}+2\left(\frac{1}{x+1}+1\right)^{1/2}+C\,.$$

9. Маємо

$$\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}dx=2\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=$$

$$=-2\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}=-2\frac{(\cos x)^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{1}{\cos^2 x}+C\,.$$

10. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку

$$\operatorname{tg}x=t\quad(x\neq\pi/2+k\pi,k\in\mathbb{Z}).$$

Тоді $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\quad x=\operatorname{arctg}t$, $\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Маємо

$$I=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{(2t+3)\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t(2t+3)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+3}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{3t}-\frac{2}{3(2t+3)}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\ln|t|-\frac{1}{3}\ln|2t+3|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{3}\ln|2\operatorname{tg}x+3|\right)+C\ . \ \square$$

4.7. Самостійна робота № 7

1. Обчислити інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$; б) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\sin x}{\sin 3x}dx$; в) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^{3x}-e^{2x}}$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Запишемо інтеграл у вигляді

$$I=\int_0^3\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{(x+3)-x}dx=\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{x+3}\,dx-\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x+3)^{3/2}\Big|_0^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^3=$$

$$=\frac{2}{9}(6\sqrt{6}-3\sqrt{3})-\frac{2}{9}(3\sqrt{3}-0)=\frac{4}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})\ .$$

б) Маємо

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\sin x}{\sin 3x}dx=\left[\begin{array}{c}\sin 3x=\operatorname{Im}(\cos x+i\sin x)^3=\\=\operatorname{Im}(\cos^3x+3i\cos^2x\sin x-3\cos x\sin^2x-\\-i\sin^3x)=3\cos^2x\sin x-\sin^3x\end{array}\right]=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\sin x dx}{\sin x(3\cos^2x-\sin^2x)}=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{3\cos^2x-\sin^2x}=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{3-\operatorname{tg}^2x}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt,\ \ \mathrm{tg}\, x=t, \\ t_{\text{н}}=1/\sqrt{3},\ t_{\text{в}}=1\end{array}\right]=-\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{dt}{t^2-3}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{1/\sqrt{3}}^{1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) Маємо $I=\left[\begin{array}{c}e^x=t,\ x=\ln t,\ dx=\dfrac{dt}{t}, \\ t_{\text{н}}=2,\ t_{\text{в}}=3\end{array}\right]=\displaystyle\int\limits_2^3\frac{dt}{t(t^3-t^2)}$,

$$\frac{1}{t^3(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\frac{D}{t-1},$$

$$1=At^2(t-1)+Bt(t-1)+C(t-1)+Dt^3.$$

Для визначення коефіцієнтів A, B, C і D застосуємо метод підстановки зручних значень змінної t. Якщо $t=0$, то $1=-C$, $C=-1$. Якщо $t=1$, то $1=D$, $D=1$. Якщо $t=-1$, то $1=-2A+2B+2-1$, $B=A$. Якщо $t=-1$, то $1=4A+2B-1+8$, $2A+B=-3$. Отже, $2A+A=-3$, $A=-1$, $B=-1$. Тоді

$$I=\int\limits_2^3\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t-1}\right)dt=\left(-\ln|t|+\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\ln|t-1|\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\left(-\ln 3+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\ln 2\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ln 1\right)=\ln\frac{4}{3}-\frac{17}{72}.\ \square$$

2. Знайти площу S фігури, обмеженої кривими: а) $r=3\sin 2\varphi$ між суміжними найбільшим і найменшим радіусами-векторами; б) $|y|=|\ln x|$, $x=1/e$, $x=e$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Крива задана в полярній системі координат рівнянням типу $r=r(\varphi)$. Оскільки $r\geq 0$, то $\sin 2\varphi\geq 0$, звідки $2k\pi\leq 2\varphi\leq\pi+2k\pi$, $k\pi\leq\varphi\leq\pi/2+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$). Функція $\sin 2\varphi$ має період $T=2\pi/2=\pi$. Тому дану криву достатньо зобразити тільки в секторі $0\leq\varphi\leq\pi/2$ ($k=0$). У секторі $\pi\leq\varphi\leq 3\pi/2$ криву можна отримати за допомогою повороту на кут $\varphi=\pi$. Таким чином, дістанемо замкнену криву, яка складається з двох «пелюсток» – так звану «двопелюсткóву троянду». Складемо таблицю

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$r=3\sin 2\varphi$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0

та побудуємо криву в секторі $0\le\varphi\le\pi/2$ (рис. 13). Найбільший радіус $r_{\max}=3$ ($\varphi=\pi/3$), найменший – $r_{\min}=0$ ($\varphi=0$). Тому

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}9\sin^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{9}{4}\int_{0}^{\pi/4}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{9}{4}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{9\pi}{16}.$$

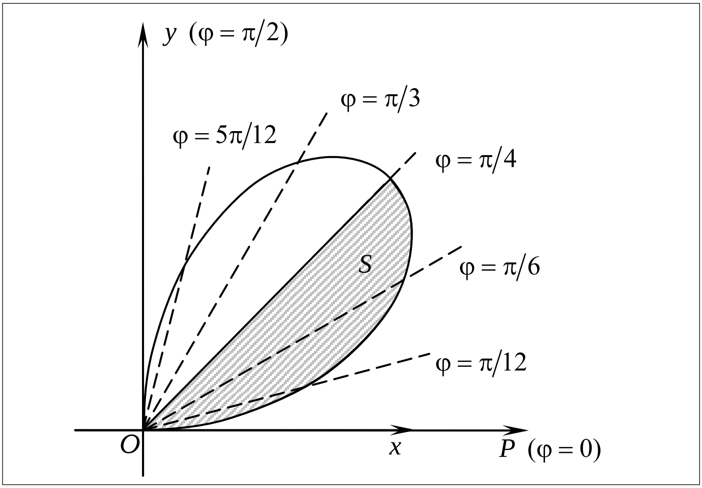


Рис. 13. Крива $r=3\sin 2\varphi$

б) Крива задана в прямокутній декартовій системі координат (рис. 14). Ураховуючи симетрію фігури, шукану площу можна обчислити так:

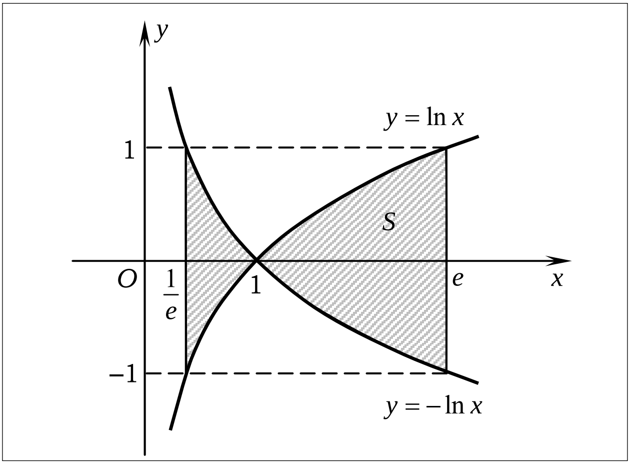


Рис. 14. Криві $|y|=|\ln x|$, $x=1/e$, $x=e$

$$S=2\int_{1/e}^{1}(-\ln x)dx+2\int_{1}^{e}\ln x\,dx=-2(x\ln x-x)\Big|_{1/e}^{1}+2(x\ln x-x)\Big|_{1}^{e}=$$

$$=-2\big(-1+2/e\big)+2=4-4/e\,.\ \square$$

3. Обчислити об'єм V тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої кривими: а) $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ ($b\ge a$), навколо осі Ox б) $x^2-y^2=16$, $y=\pm 4$, навколо осі Oy.

Розв'язання. а) В умові задано коло з центром у точці $M_0(a,b)$ радіуса a (рис. 15). Шуканий об'єм тіла дорівнює різниці об'ємів тіл обертання, утворених обертанням навколо осі Ox верхнього півкола $y=y_1(x)$ ($0\le x\le 2a$) і нижнього півкола $y=y_2(x)$ ($0\le x\le 2a$). Тому

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^{2a}y_1^2(x)dx-\pi\int_0^{2a}y_2^2(x)dx=\pi\int_0^{2a}\Big(y_1^2(x)-y_2^2(x)\Big)dx=$$

$$=\pi\int_0^{2a}2b\cdot 2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=4\pi ab\int_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$$

$$=\begin{bmatrix} x-a=a\sin t,\ dx=a\cos t dt, \\ t_{н}=-\pi/2,\ t_{в}=\pi/2 \end{bmatrix}=4\pi ab\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt$$

$$=8\pi a^3 b\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=8\pi a^3 b\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=4\pi a^3 b\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi^2 a^3 b\,.$$

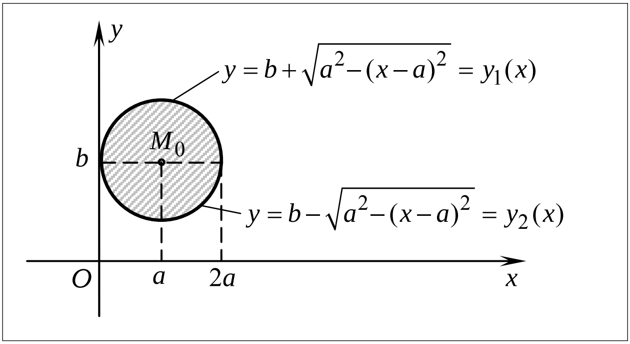


Рис. 15. Коло $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ $(b\ge a)$

б) Маємо фігуру, обмежену двома гілками рівносторонньої гіперболи і прямими $y=\pm 4$ (рис. 16).

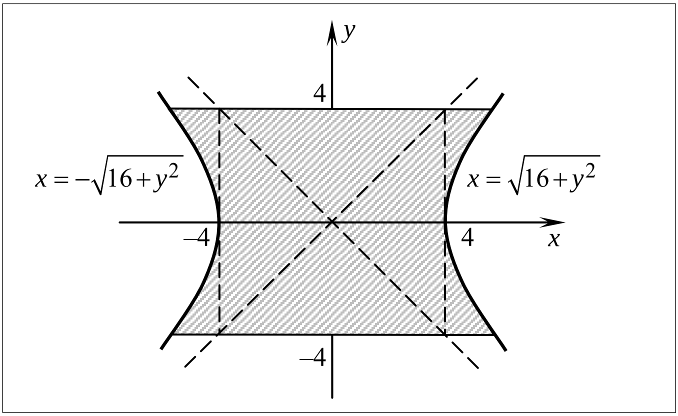


Рис. 16. Гіпербола $x^2-y^2=16$

Враховуючи симетрію фігури відносно осі Oy, маємо

$$V=\pi\int_{-4}^{4}(\sqrt{16+y^2})^2\,dy=2\pi\int_{0}^{4}(16+y^2)\,dy=$$

$$=2\pi\left(16\cdot 4+\frac{1}{3}\cdot y^3\Big|_0^4\right)=2\pi\left(64+\frac{1}{3}\cdot 64\right)=\frac{512}{3}\pi\,.\ \square$$

4. Обчислити довжину петлі кривої, заданої параметричними рівняннями $x=\sqrt{3}t^2-1$, $y=t^3-t$.

Р о з в ' я з а н н я. Крива утворює петлю, якщо на ній існує точка $M_0(x_0,y_0)$ (точка самоперетину кривої), у якій крива перетинає саму себе, тобто координати x і y набувають значень x_0 і y_0 принаймні двічі: при $t=u$ і при $t=v$ ($u\neq v$). Маємо

$$x_0=\sqrt{3}u^2-1=\sqrt{3}v^2-1\,,\quad y_0=u^3-u=v^3-v\,,$$

звідси $(u-v)(u+v)=0$, $v=-u$, $2v^3-2v=0$, $v=\pm1$, $u=\mp1$. Отже, на кривій є точка самоперетину $M_0(\sqrt{3}-1,0)$, через яку крива проходить двічі (при $t=-1$ і при $t=1$). Таким чином, параметричні рівняння задають петлю кривої при $-1\le t\le 1$. Складемо таблицю:

t	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
x	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}/4-1$	-1	$\sqrt{3}/4-1$	$\sqrt{3}-1$
y	0	$3/8$	0	$-3/8$	0

Дістанемо точки $M_0(\sqrt{3}-1{,}0)$, $M_1(\sqrt{3}/4-1{,}3/8)$, $M_2(-1,0)$, $M_3(\sqrt{3}/4-1{,}-3/8)$, $M_0(\sqrt{3}-1{,}0)$ на кривій, які відповідають зміні параметра t від -1 до 1 (з кроком $h=1/2$). За цими даними побудуємо ескіз кривої при $-1\le t\le 1$ (рис. 17). Довжину петлі обчислимо за формулою

$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{12t^2+9t^4-6t^2+1}\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{9t^4+6t^2+1}\,dt=$$

$$=2\int_{0}^{1}\sqrt{(3t^2+1)^2}\,dt=2\int_{0}^{1}(3t^2+1)dt=2(t^3+t)\Big|_0^1=4\,.\ \square$$

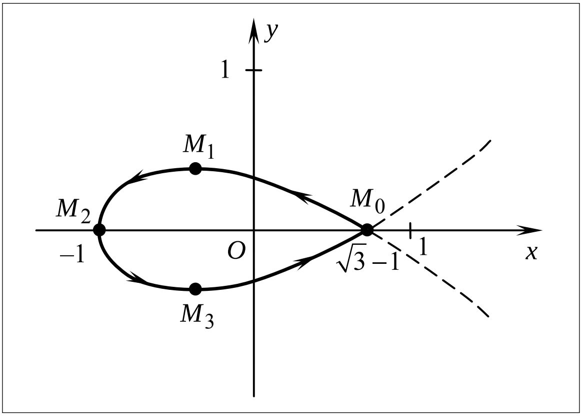


Рис. 17. Крива, задана рівняннями $x=\sqrt{3}t^2-1$, $y=t^3-t$

5. Знайти координати центру мас півкруга, обмеженого відрізком осі Ox, $y=-\sqrt{r^2-x^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Вважатимемо, що напівкругла пластинка (рис. 18) однорідна (густина $\rho(x,y)=1$). Нехай $M_c(x_c,y_c)$ – центр мас пластинки. Враховуючи симетрію пластинки відносно осі Oy, дістанемо $x_c=0$. Координати центру мас знайдемо за формулами

$$x_c=\frac{1}{S}\int_a^b x(-y(x))dx,\quad y_c=-\frac{1}{2S}\int_a^b y^2(x)dx\,.$$

Маємо

$$S=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi r^2$$

(площа півкруга),

$$x_c=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=0$$

(інтеграл від непарної функції по симетричному відносно точки $x=0$ відрізку $[-r,r]$),

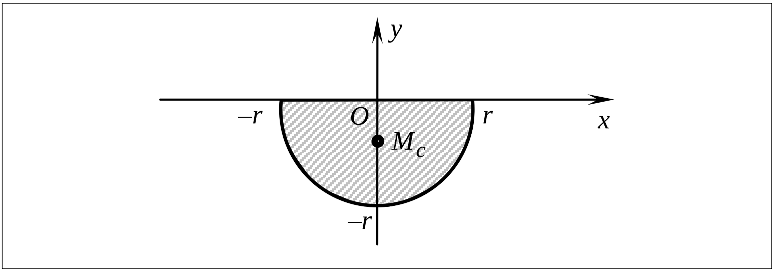


Рис. 18. Центр мас півкруга

$$y_c = \frac{1}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} -(r^2 - x^2)dx = -\frac{2}{\pi r^2}\int_{0}^{r}(r^2 - x^2)dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi r^2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = -\frac{2}{\pi r^2}\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = -\frac{4r^3}{3\pi r^2} = -\frac{4r}{3\pi}.$$

Отже, $M_c\left(0, -\frac{4r}{3\pi}\right)$. □

ДОДАТОК 4

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ

1. Визначити та зобразити множини $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, якщо:

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le 2y < 0\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \log_{1/5}(3x + 3y + 5) > 0\}$;

2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,y\,| = |\cos x|\}$,
$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,y\,| = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}\right\}$;

3) $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 6x + 8 < 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 12x < 0\}$;

4) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,x\,| + |\,y\,| = 1\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,x\,| - |\,y\,| = 1\}$;

5) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,y\,| = |\sin x|\}$,
$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,y\,| = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}\right\}$;

6) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^3 > y^3\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 > y^2\}$;

7) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy > 0\}$;

8) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = y\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,x\,| + |\,y\,| \le 1\}$;

9) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < (x - 1) + (y + 2)^2 < 4\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ -x^2 + 3x - 2 > 0\}$;

10) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,y\,| - |\,x\,| \ge 1\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0{,}2 < |\,x - 0{,}1| < 0{,}3\}$;

11) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ (3x - 4y - 12 > 0) \wedge (x + y - 2 < 0)\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (y+3\ge x^2+2x)\wedge(x+y\le 3)\}$;

12) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le y<0\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \log_{1/3}(2x+2y+3)>0\}$;

13) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (|x|-|y|\ge 1)\wedge(|x|<2)\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0{,}1<|y-0{,}3|<0{,}2\}$;

14) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<|x-1|<2\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le y<2x\}$;

15) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (|y|-|x|\le 1)\wedge(|x|<1)\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2y-0{,}5<0)\wedge(y-x<0)\}$;

16) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \log_2(x+y-1)<0\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y\le x\}$;

17) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|-|x|\le 1\}$,

$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y-\frac{\pi}{2}\le 1\right\}$;

18) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<|x-y|\le 2\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2|x|<3\}$;

19) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\ge 0\}$;

20) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$;

21) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>\sqrt{x}\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2\le 1\}$;

22) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^{-1}>y^{-1}\}$,

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x>0)\wedge(y>0)\}$;

23) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2^{2x}-6\cdot 2^x+8\ge 0\}$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \log_{1/2}(x-1{,}5)>1\}$;

24) $A=\{x\in\mathbb{R} : \sin x>1/2\}$, $A=\{x\in\mathbb{R} : \cos x\le 1/2\}$;

25) $A=\left\{x\in\mathbb{R} : \dfrac{x^2-5x+6}{x-4}<0\right\}$, $A=\left\{x\in\mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+2}\ge 1\right\}$;

26) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2^{x+1}=y^2\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge 2^{x+1}\}$.

2. Визначити та зобразити множини $\bigcup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$ і $\bigcap\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$, якщо:

1) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y^2\}$, $T=[-1,1]$.

2) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y^2\}$, $T=(-\infty,0)$.

3) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y^2\}$, $T=(0,+\infty)$.

4) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y\}$, $T=(0,+\infty)$.

5) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y\}$, $T=[-1,1]$.

6) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha y\}$, $T=(-\infty,0)$.

7) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\alpha x^2\}$, $T=(-\infty,0)$.

8) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\alpha x^2\}$, $T=[-1,1]$.

9) $A_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\alpha x^2\}$, $T=(0,+\infty)$.

3. Нехай $A_{m,n} = \{x\in\mathbb{R} : m<x<m+n\}$, $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$. Визначити множини $\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0}\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{m,n}$, $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_{m,n}$, $\bigcup\limits_{m=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_{m,n}$, $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_{m,n}$, $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{m,n}$, $\bigcap\limits_{m=0}^{+\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{m,n}$.

4. Визначити множини $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ і $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, якщо:

а) $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, б) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$,

в) $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$, г) $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right]$,

д) $A_n = \left[\frac{n}{n+1}, \frac{n}{2n+1}\right)$, е) $A_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$,

є) $A_n = \left(0, \frac{n}{n+1}\right)$, ж) $A_n = (3n-2, 3n+1)$.

5. Чи правильна рівність:

а) $(A\times B)\bigcup(C\times D) = (A\bigcup C)\times(B\bigcup D)$;

б) $A\setminus(B\bigcup C) = (A\setminus B)\setminus C$; в) $A\bigcup(B\setminus C) = (A\bigcup B)\setminus C$;

г) $(A\setminus B)\bigcap C = (A\bigcap C)\setminus B$; д) $(A\setminus B)\bigcup C = (A\bigcup C)\setminus B$?

6. Довести рівність:

а) $(A\Delta B)\setminus C=(A\setminus C)\Delta(B\setminus C)$;

б) $(A\Delta B)\bigcap C=(A\bigcap C)\Delta(B\bigcap C)$;

в) $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$; г) $\overline{\overline{\bar{A}\bigcup B}\bigcup(A\bigcup\bar{B})}=B\setminus A$;

д) $\overline{A\setminus B}=\bar{A}\bigcup B$; е) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;

є) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)=A\bigcup B\bigcup C$

ж) $(A\times B)\bigcap(C\times D)=(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)$;

з) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;

и) $(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$; і) $\overline{A\setminus B}=\bar{A}\bigcup B$;

й) $\left(A\bigcap(B\Delta D)\right)=(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap D)$; к) $A\Delta A=\varnothing$;

л) $(A\bigcap B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$; м) $A\Delta\varnothing=A$;

н) $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap\bar{B})\bigcup(\bar{A}\bigcap B)=A\bigcup B$;

о) $A\setminus(B\setminus C)=A\setminus\left((A\bigcap B)\setminus C\right)$.

7. Довести, що якщо $A\subset P,\ \ B\subset Q$, то $A\times B=(A\times C)\bigcap(P\times B)$.

8. Спростити вираз $\overline{\overline{X\bigcup Y}\bigcap(\bar{X}\bigcup\bar{Y})}$.

9. Чи випливає з $A\setminus B=C$, що $A=B\bigcup C$?

10. Чи випливає з $A=B\bigcup C$, що $A\setminus B=C$?

11. Довести, що $\log_3 7$, $\log_5 11$ – ірраціональні числа.

12. Довести, що $\lg 3$, $\lg 5$, $\lg 9$, $\lg 11$, $\lg 13$ – ірраціональні числа.

13. Довести, що $\sqrt{103}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{23}$ – ірраціональні числа.

14. Чи завжди сума двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним? Обґрунтувати відповідь.

15. Чи завжди добуток двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним? Обґрунтувати відповідь.

16. Чи завжди різниця двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним? Обґрунтувати відповідь.

17. Довести, що сума й різниця раціонального числа a та ірраціонального числа b – ірраціональні числа.

18. Нехай $a \in \mathbb{Q}$, $b \notin \mathbb{Q}$. Довести, що добуток ab і частка $\frac{a}{b}$ – ірраціональні числа.

19. Довести, що не існує раціонального числа r такого , що а) $r^2 = 17$; б) $r^2 = 19$; в) $r^2 = 23$.

20. Нехай a і b – раціональні числа. Що можна сказати про раціональність чисел: а) $a + b$; б) $a - b$; в) $a \cdot b$; г) $\frac{a}{b}$?

21. Нехай a і b – ірраціональні числа. Що можна сказати про ірраціональність чисел: а) $a + b$; б) $a - b$; в) $a \cdot b$; г) $\frac{a}{b}$?

22. Серед даних чисел знайти раціональні та записати їх у вигляді звичайних дробів:

а) $\sqrt{5}$; б) $2{,}075$; в) $5{,}(82)$; г) $3{,}12(3)$;

д) $1{,}010010001\ldots$; е) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

23. Чи є зліченною множина всіх кіл на площині, радіуси яких раціональні?

24. Чи є зчисленною множина всіх кіл на площині, радіуси і координати центрів яких – раціональні числа?

25. На площині побудована деяка множина кіл, які попарно не перетинаються. Чи може ця множина бути незліченною?

26. Чи є зліченною множина всіх кругів на площині, які не перетинаються ?

27. Чи є зліченною множина всіх відрізків на числовій прямій?

28. Чи є зліченною множина всіх відрізків на числовій прямій, які не перетинаються?

29. Чи є зліченною множина всіх трикутників на площині, вершини яких мають раціональні координати?

30. Чи є зліченною множина всіх трикутників на площині, у яких тільки дві вершини мають раціональні координати?

31. Чи є зліченною множина всіх трикутників на площині, у яких тільки одна вершина має раціональні координати?

32. Чи є зліченною множина всіх трикутників на площині, які не перетинаються?

33. Чи є зліченною множина всіх прямокутників на площині, три вершини яких мають раціональні координати?

34. Чи є зліченною множина всіх прямокутників на площині, всі вершини яких мають раціональні координати ?

35. На площині побудовано деяку множину букв Г, які не перетинаються. Чи може ця множина бути незліченною?

36. Чи є зліченною множина всіх квадратів на площині, які не перетинаються?

37. Чи є зліченною множина всіх квадратів на площині, у яких дві вершини мають раціональні координати?

38. Чи є зліченною множина всіх ромбів на площині, які не перетинаються?

39. Чи є зліченною множина всіх раціональних чисел відрізка $[0,1]$?

40. Чи є зліченною множина відрізків на числовій прямій, які попарно не перетинаються?

41. Чи правильне таке твердження: кожна послідовність має зліченну множину різних елементів?

42. Чи є правильним твердження: кожна зліченна множина має зліченну власну підмножину?

43. Відомо, що $A \bigcup B$ – зліченна множина. Що можна сказати про множини A і B?

44. Чи є зліченною множина $A = \{(a,b):\ a,b \in \mathbb{Q}\}$?

45. Чи еквівалентні множини: а) $A=[0,1]$ і $B=(0,1)$; б) $A=[0,1]$ і $B=[a,b]$; в) $A=[0,1]$ і $B=[0,1)$?

46. Довести, що при $x \to a$:

а) $o(f)+o(f)=o(f)$; б) $o(f)-o(f)=o(f)$;

в) $o(cf)=o(f)$ ($c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$); г) $c \cdot o(f)=o(f)$;

д) $f^n \cdot o(f)=o(f^{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}$); е) $\dfrac{o(f)}{f}=o(1)$

є) $\dfrac{o(f^n)}{f}=o(f^{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

47. Нехай $\alpha_1 = o(f)$, $\alpha_2 = O(f)$ при $x \to a$. Довести, що $\alpha_1 + \alpha_2 = O(f)$ при $x \to a$.

48. Нехай $\alpha = o(f)$ при $x \to a$. Довести, що $\alpha = O(f)$ при $x \to a$.

49. Нехай $\alpha_1 = O(f)$, $\alpha_2 = O(f)$ при $x \to a$. Довести, що $\alpha_1 + \alpha_2 = O(f)$ при $x \to a$.

50. Нехай $f = o(1)$ при $x \to a$. Довести, що $o(f^n) = O(f^k)$ при $x \to a$ $(n, k \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ k \leq n-1)$.

51. Нехай $f = o(1)$ при $x \to a$. Довести, що $(o(f))^n = o(f^n)$ при $x \to a$ $(n \in \mathbb{N})$.

52. Нехай $f = o(1)$ при $x \to a$. Довести, що $o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f^k\right) = o(f)$ при $x \to a$.

53. Нехай $\alpha = o(f)$ при $x \to a$. Довести, що $o(\alpha) = o(f)$ при $x \to a$.

54. Нехай $f = o(1)$ при $x \to a$. Довести, що $o\big(f + o(f)\big) = o(f)$ при $x \to a$.

55. Нехай $\alpha = o(1)$, $\beta = o(1)$ при $x \to a$. Довести, що $\alpha\beta = o(\alpha)$ і $\alpha\beta = o(\beta)$ при $x \to a$.

56. Нехай $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$. Довести, що $\alpha - \beta = o(\alpha)$ і $\alpha - \beta = o(\beta)$ при $x \to a$.

57. Нехай $\alpha = o(f)$, $x \to a$, $g(x) \neq 0$. Довести, що $\dfrac{\alpha}{g} = o\left(\dfrac{f}{g}\right)$ при $x \to a$.

58. Нехай $\alpha = O(f)$ при $x \to a$, $g(x) \neq 0$. Довести, що $\dfrac{\alpha}{g} = O\left(\dfrac{f}{g}\right)$ при $x \to a$.

59. Нехай $\alpha = O(f)$ при $x \to a$. Довести, що $O(\alpha) = O\big(f\big)$ при $x \to a$.

60. Нехай $\alpha = o(f)$ та $\beta = O(f)$ при $x \to a$. Довести, що $\alpha\beta = o(f^2)$ при $x \to a$.

61. Нехай $\alpha = O(f)$ і $\beta = o(\alpha)$ при $x \to a$. Довести, що $C\alpha + \beta = O\big(f\big)$ при $x \to a$ $(C \in \mathbb{R})$.

62. Нехай $f = o(1)$ при $x \to a$. Довести, що $o(f + f^2) = o(f)$ при $x \to a$.

63. Нехай $\alpha = O(f)$ при $x \to a$. Довести, що: а) $o(\alpha) = o(f)$ при $x \to a$; б) $O(\alpha) = O(f)$ при $x \to a$.

64. Порівняти нескінченно великі при $x \to \infty$ функції $f(x) = 2x^2 + 3x$ і $g(x) = (x+2)^2$.

65. Визначити порядок нескінченно малої при $x \to 0$ функції $f(x) = 5\arcsin x - \operatorname{arctg} x$.

66. Визначити порядок нескінченно великої при $x \to \infty$ функції $f(x) = \dfrac{x^{10} + x^{12} + 1}{x^4 + x^7 + x^2 + 1}$ відносно функції $g(x) = x$.

67. Перевірити правильність твердження:

а) $2x + \ln x + \sin x = O(x)$ при $x \to +\infty$;

б) $e^{\sin x} - 1 = o(\sqrt{x})$ при $x \to 0$;

в) $\operatorname{ch} x \sim 1 + \dfrac{1}{2x^2}$ при $x \to 0$;

г) $O(x^m) \cdot O(x^n) = O(x^{m+n})$ при $x \to +\infty$ ($n > 0$);

д) $2^{-1/x} = o(x^n)$ при $x \to +0$ ($n \in \mathbb{N}$);

е) $1 - \dfrac{1}{1+x} \sim x$ при $x \to 0$.

68. Визначити головну частину вигляду $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$ ($C \neq 0$ – стала) при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$.

69. Визначити головну частину вигляду Cx^k ($C \neq 0$ – стала) при $x \to +\infty$ функції $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

70. За допомогою методу заміни еквівалентних обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^3} - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + 2\arcsin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{x \cdot \arcsin 3x + \sin^2(x/2)}$.

71. При яких значеннях α і β функції $f(x)=\alpha x^{\beta}$ і $g(x)=2e^{x^4}+(\cos x-1)^2+x^5-2$ еквівалентні при $x\to 0$?

72. При яких значеннях α і β функція $f(x)=(1-x^{\alpha})x^{\beta}$ є нескінченно малою при $x\to +0$?

73. Визначити порядок нескінченно малої при $x\to 0$ функції $f(x)=9\,\mathrm{tg}^3\,x^5-8\sin x^5$ відносно функції $g(x)=x$.

74. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x)$ на множині X, якщо:

а) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ X=[1,+\infty)$; б) $f(x)=e^x,\ X=\mathbb{R}$.

75. Чи можна застосувати теорему Ролля до функції:

а) $f(x)=\dfrac{1-5x^2}{x^4},\ x\in[1/2,1]$; б) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\in[-3,-1],\\ x^4, & x\in(-1,0];\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[-3,0),\\ e^x, & x\in[0,1];\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\le 0,\\ 1+x^2, & x>0,\end{cases}\quad x\in[a,b]$;

д) $f(x)=(4^x+2)(2-x)-6,\quad x\in\left[0,1/2\right]$ і $x\in\left[1/2,1\right]$?

76. За допомогою теореми Лагранжа довести нерівність:

а) $|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

б) $|\ln u-\ln v|\le\dfrac{|u-v|}{\alpha},\quad u\ge\alpha,\ v\ge\alpha\ \ (\alpha>0)$;

в) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\quad x>-1$;

г) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b},\quad a>b>0$;

д) $\arcsin x>x,\quad 0<x<1$; е) $\mathrm{arctg}\,x<x,\quad x>0$.

є) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}\le \mathrm{tg}\,b-\mathrm{tg}\,a\le\dfrac{b-a}{\cos^2 b},\quad 0<a\le b<\dfrac{\pi}{2}$;

ж) $na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a),\quad a<b\ \ (n>1)$;

з) $(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x,\quad x>-1\ \ (\alpha>1)$;

и) $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x,\quad x>-1\ \ (0<\alpha<1)$;

і) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, $x > 1$; к) $\mathrm{e}^{-x} > 1 - x$, $x > 0$.

77. Чи можна застосувати теорему Лагранжа до функції:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$, $x \in [-1/2, 1/2]$;

б) $f(x) = 0{,}1x + e^{x/2}$, $x \in [0, 2]$;

в) $f(x) = x + \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$;

г) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1], \\ 4x - x^2 - 2, & x \in (1,2]; \end{cases}$

д) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 2$, $x \in [0,1]$;

е) $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [-2, 0]$; ж) $f(x) = \ln x$, $x \in [e, e^2]$;

з) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ \dfrac{1}{x}, & x \in [1,4]; \end{cases}$ и) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2}, & x \in [0,1], \\ \dfrac{1}{x}, & x \in (1,2]; \end{cases}$

і) $f(x) = x - e^x$, $x \in [0,1]$; й) $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $x \in [1, e]$;

к) $f(x) = x \ln x$, $x \in [1, e^2]$; л) $f(x) = 3x + x^3$, $x \in [1, 2]$;

м) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, $x \in [e, e^2]$; н) $f(x) = x - x^3$, $x \in [-2, 1]$?

У разі позитивної відповіді знайти відповідну точку c.

78. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $f'(x) = 0$, де $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$, має три дійсних корені.

79. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $f'(x) = 0$, де $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$ (m, n – цілі додатні числа), має хоча б один корінь в інтервалі $(0, 1)$.

80. Користуючись теоремою Ролля, з'ясувати, скільки дійсних коренів має рівняння $f'(x) = 0$, і вказати в яких межах вони знаходяться, якщо $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

81. Показати, що рівняння $e^x = 1 + x$, крім $x = 0$, інших дійсних коренів не має.

82. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $x^3 + 3x + 6 = 0$ має тільки один дійсний корінь.

83. За допомогою теореми Ролля показати, що рівняння $x^n + px + q = 0$ не може мати більше двох дійсних коренів при парному n.

84. За допомогою теореми Ролля показати, що рівняння $x^n + px + q = 0$ не може мати більше трьох дійсних коренів при непарному n.

85. За допомогою теореми Ролля показати, що рівняння $x^4 - 4x - 1 = 0$ не може мати більше двох дійсних коренів.

86. За допомогою теореми Ролля показати, що для функції $f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$ на інтервалі $(-3,1)$ існує корінь рівняння $f''(x) = 0$.

87. Чи можна застосувати теорему Коші до функцій:

а) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \sqrt[3]{x^2},\ x \in [-8,8]$;

б) $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3,\ x \in [-1,1]$;

в) $f(x) = \sin x,\ g(x) = 1 + \cos x,\ x \in [0, \pi/2]$;

г) $f(x) = x^3,\ g(x) = x^2 + 1,\ x \in [1,2]$;

д) $f(x) = e^x,\ g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2},\ x \in [-2,2]$?

У разі позитивної відповіді знайти відповідну точку c.

88. Довести, користуючись теоремою Ролля, що корені рівняння $f'(x) = 0$, де $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$, є дійсними, і вказати, у яких межах вони знаходяться.

89. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $f'(x) = 0$, де $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ має дійсний корінь в інтервалі $(-1,1)$.

90. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $x^3 - 3x + c = 0$ не може мати двох рівних коренів в інтервалі $(0,1)$.

91. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $3x^5 + 15x - 8 = 0$ має тільки один дійсний корінь.

92. Довести, користуючись теоремою Ролля, що рівняння $x^4 - 4x - 1 = 0$ не може мати більше двох різних коренів.

93. Провести повне дослідження та побудувати графік функції, заданої неявно:

1) $y^3 = 6x^2 - x^3$;
2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;
3) $y + \cos y - x = 0$;
4) $x^3(y - x) = x^3 + 1$
5) $y^2 = x^3 - x$;
6) $2 - y^2 = x(x-1)^2$;
7) $y^2 = x^2\left(x-1\right)$;
8) $3xy^2 = x^3 - 2$;
9) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$;
10) $9y^2 = 4x^3 - x^4$;
11) $y^2 = x^2 - x^4$;
12) $16y^2 = (x^2 - 4)^2(1 - x^2)$;
13) $x^2y^2 = 4(x-1)$;
14) $(y-x)^2 = x^5$;
15) $y^2 = x^2\dfrac{2+x}{2-x}$;
16) $x^2 - xy + y^2 = a^2$;
17) $x^2y^2 = (x-1)(x-2)$;
18) $x^2y^2 = 4(x-1)$;
19) $xy^2 + x^2y = a^3$;
20) $y^2 = (1-x^2)^3$;
21) $y^2(2a - x) = x^3 \quad (a > 0)$;
22) $y^2x^4 = (x^2 - 1)^3$;
23) $x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0$;
24) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 5y - 1 = 0$;
25) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 24y = 0$;
26) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

94. Провести повне дослідження та побудувати криву, задану полярним рівнянням ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\rho = a\sin 3\varphi$;
2) $\rho = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$;
3) $\rho = a(1 + \mathrm{tg}\,\varphi)$;
4) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
5) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;
6) $\rho = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\dfrac{\varphi}{\pi}$;
7) $\rho = a\dfrac{\mathrm{th}\,\varphi}{\varphi - 1}$, $\varphi > 1$;
8) $\varphi = \arccos\dfrac{\rho - 1}{\rho^2}$;
9) $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}$;
10) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}$;
11) $\rho = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$;
12) $\rho = \sqrt{\pi/\varphi}$;

13) $\rho=\dfrac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos^2\varphi}$; 14) $\rho=\dfrac{a}{\sqrt{1-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}}$;

15) $\rho=\operatorname{tg}2\varphi$; 16) $\rho=a(1+\cos\varphi)$

17) $\rho=a\cos 2\varphi$; 18) $\rho=1+a\operatorname{tg}\varphi$;

19) $\rho=10\sqrt{1-\varphi^2}$; 20) $\rho=\sqrt{a(\cos\varphi-\sin\varphi)}$;

21) $\varphi=\arccos\dfrac{\rho-1}{\rho^2}$; 22) $\rho=\sqrt{2a(\cos\varphi+\sin\varphi)-a^2}$;

23) $\rho=a(1+b\cos\varphi)$; 24) $\rho=a\sin 2\varphi$.

95. Провести повне дослідження та побудувати криву, задану параметричними рівняннями:

а) $x=t+t^{-1}$, $y=t+t^{-2}$; б) $x=te^t$, $y=te^{-t}$.

96. Чи задовольняє функція

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x$$

диференціальне рівняння $y''+y=x\cos x$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

97. Чи задовольняє функція

$$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}\right)$$

диференціальне рівняння $y''+y=x\cos x$ (C_1, C_2 – довільні сталі)?

98. Знайти d^4y у точці $x=0$, якщо $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}x$.

99. Знайти x''_{yy}, якщо $x=-2+3t-t^3$, $y=t+2t^2+t^3$.

100. Користуючись правилом Лопіталя, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(2m+1)x}{\cos(2n+1)x}$ $(m,n\in\mathbb{N})$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.

101. Користуючись формулою Тейлора, обчислити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\sin^4 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-e^x+\frac{3}{2}x^2}{\sin x-\operatorname{tg}x}$.

102. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=e^{\operatorname{tg}x}$.

103. Дослідити функцію $f(x,y)=4x+5y+9$ на рівномірну неперервність на $\mathbb{R}^2$.

104. Показати, що функція $z=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ не диференційовна в точці $O(0,0)$.

105. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z=x^2+3y^2-x+18y-4$$

на множині $E=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:(0\le x\le 1)\wedge(0\le y\le 1)\}$.

106. Розкласти функцію $z=x^2-y^2+xy$ за формулою Тейлора в околі точки $M(1,2)$.

107. Дослідити функцію $f(x,y)=\cos\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}$.

108. Показати, що функція $z=x+y+\sqrt{|xy|}$ не диференційовна в точці $O(0,0)$.

109. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+3y^2-2xy$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0\le x\le 2)\wedge(0\le y\le 1)\}.$$

110. Розкласти функцію $z=x^2y^3$ За формулою Тейлора в околі точки $M(2,-2)$.

111. Дослідити функцію $f(x,y)=\arccos\dfrac{y}{x}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|y|<|x|\}$.

112. Для функції $z=\sqrt[3]{xy^2}$ знайти $z'_x(0,0)$ і $z'_y(0,0)$. Чи є дана функція диференційовною в точці $O(0,0)$?

113. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2y}{6}-\dfrac{xy^2}{8}$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\geq 0)\wedge(y\geq 0)\wedge\left(x/3+y/4\leq 1\right)\}.$$

114. Розкласти функцію $z=e^x\sin y$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=10$.

115. Дослідити функцію $f(x,y)=2x+3y+4$ на рівномірну неперервність на $\mathbb{R}^2$.

116. Чи диференційовна функція $z=\sqrt[3]{x^2y^2}$ в точці $O(0,0)$?

117. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+3y^2-x+18y-4$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y\leq 4\}.$$

118. Розкласти функцію $z=e^{-x}\cos y$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=12$.

119. Дослідити функцію $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (0<x<1)\wedge(0<y<1)\}.$$

120. Показати, що функція

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

є розривною в точці $O(0,0)$, але має частинні похідні в даній точці.

121. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-2y^3+3xy-5$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (-1\leq x\leq 1)\wedge(-1\leq y\leq 1)\}.$$

122. Розкласти функцію $z=y^2\ln(1+x)$ в околі точки $M(0,1)$ за формулою Тейлора порядку $n=8$.

123. Дослідити функцію $f(x,y)=7y-2x+3$ на рівномірну неперервність на $\mathbb{R}^2$.

124. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{якщо } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

на диференційовність у точці $O(0,0)$.

125. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8}$$

на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0\le x\le 3)\wedge(0\le y\le 4)\}$.

126. Розкласти функцію $z=e^{x-y}$ за формулою Тейлора в околі точки $(1,2)$ порядку $n=20$.

127. Дослідити функцію $f(x,y)=xy\cos\dfrac{1}{y}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0<x<1)\wedge(0<y<1)\}.$$

128. Показати, що функція $z=x-3y+\sqrt{3|xy|}$ не диференційовна в точці $O(0,0)$.

129. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3y+x^2y^2-x^2y$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0\le x\le 1)\wedge(0\le y\le 1)\}.$$

130. Розкласти функцію $z=(1+x^2)e^y$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=14$.

131. Дослідити функцію $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^6+y^6}}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0<x^2+y^2<1\}$.

132. Показати, що функція $z=\sqrt[3]{8x^3+y^3}$ не диференційовна в точці $O(0,0)$.

133. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$

на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x\ge 0)\wedge(y\ge 0)\wedge(x+y\le 1)\}$.

134. Розкласти функцію $z=(y^2+2y+3)e^x$ в околі точки $M(0,1)$ за формулою Тейлора порядку $n=6$.

135. Дослідити функцію $f(x,y)=x\cos\frac{1}{y}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0<x<2)\wedge(0<y<2)\}.$$

136. Дослідити функцію $z=e^{\sqrt[3]{xy^2}}$ на диференційовність в точці $O(0,0)$.

137. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x+y)$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0\le x\le\pi)\wedge(0\le y\le\pi)\}.$$

138. Розкласти функцію $z=(1-x-y+xy)-1$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=13$.

139. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f(x,y)=9y-10x+1$ на множині на $\mathbb{R}^2$.

140. Показати, що функція $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ має в точці $O(0,0)$ частинні похідні $f'_x(0,0)$ і $f'_y(0,0)$, але не є диференційовною в цій точці.

141. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x\ge 0)\wedge(y\ge 0)\wedge(x+y\le 3)\}.$$

142. Розкласти функцію $z=\ln(1-x)\ln(1-y)$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=20$.

143. Дослідити функцію $f(x,y)=\sin\frac{2}{x^2-y^2-2}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<2\}$.

144. Показати, що функція

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{якщо } x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2\ne 0,\end{cases}$$

не диференційовна в точці $O(0,0)$, хоча має в цій точці скінченні частинні похідні $f_x'(0,0)$ і $f_y'(0,0)$.

145. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на множині

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le x \le 2) \wedge (-1 \le y \le 2)\}.$$

146. Розкласти функцію $z = \dfrac{\ln(1-x-y+xy)}{(1-x-y)}$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n = 14$.

147. Дослідити функцію $f(x,y) = \dfrac{x^5 + y^5}{(x^2+y^2)^2}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 9\}.$$

148. Показати, що функція $z = \sqrt[4]{|xy|}$ не диференційовна в точці $O(0,0)$, хоча має в цій точці скінченні похідні $f_x'(0,0)$ і $f_y'(0,0)$.

149. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ на множині $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

150. Розкласти функцію $z = e^y \cos 2x$ в околі точки $O(0,0)$.за формулою Тейлора порядку $n = 10$.

151. Дослідити функцію $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^6 + y^6}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 2\}.$$

152. Для функції $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ знайти $f_x'(0,0)$ і $f_y'(0,0)$. Чи є дана функція диференційовною в точці $O(0,0)$?

153. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(2-x-y)$ на множині

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \ge 0) \wedge (y \ge 0) \wedge (x+y \le 6)\}.$$

154. Розкласти функцію $z=(1+x)^{-3}y^3$ в околі точки $M(0,1)$ за формулою Тейлора порядку $n=12$.

155. Дослідити функцію $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x^2+y^2<4\}$.

156. Чи диференційовна функція $z=\sqrt[3]{8x^3-3y^3}$ в точці $O(0,0)$?

157. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=(2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}.$$

158. Розкласти функцію $z=x^3\sqrt{1+y}$ в околі точки $(1,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=10$.

159. Дослідити функцію $f(x,y)=4y-7x+2$ на рівномірну неперервність на множині $\mathbb{R}^2$.

160. Чи диференційовна функція $z=e^{\sqrt[3]{x^3-y^3}}$ в точці $O(0,0)$?

161. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-xy+y^2-4x$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x\ge 0)\wedge(y\ge 0)\wedge(2x-3y\le 12)\}.$$

162. Розкласти функцію $z=x^3-2y^3+3xy$ в околі точки $M(2,1)$ за формулою Тейлора.

163. Дослідити функцію $f(x,y)=(x-1)\cos\dfrac{1}{y}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (0<x<1)\wedge(0<y<2)\}.$$

164. Чи диференційовна в точці $O(0,0)$ функція

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[5]{xy^6}}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0?\end{cases}$$

165. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z=xy(2-x)(2-y)$$

на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,0\le y\le 2x\le 4\}$.

166. Розкласти функцію $z=\sin(2x-3y)$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=9$.

167. Дослідити функцію $f(x,y)=(x-2)(y-1)\sin\dfrac{1}{y-1}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,(0<x<2)\wedge(0<y<1)\}.$$

168. Чи диференційовна в точці $O(0,0)$ функція

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2(x+y)}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0?\end{cases}$$

169. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=1-x^2-y^2$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 1\}.$$

170. Розкласти функцію $z=e^y\ln(1-x-y)$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=12$.

171. Дослідити функцію $f(x,y)=\dfrac{x^5+y^5}{x^2+y^2}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,0<x^2+y^2<9\}$.

172. Чи диференційовна в точці $O(0,0)$ функція

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0?\end{cases}$$

173. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=xy+x+y$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,(1\le x\le 2)\wedge(2\le y\le 3)\}.$$

174. Розкласти функцію $z=\dfrac{x^2}{y}$ в околі точки $M(1,1)$ за формулою Тейлора при $n=15$.

175. Дослідити функцію $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^8+y^8}}{x^4+y^4}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x^2+y^2<4\right\}.$$

176. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

на диференційовність у точці $O(0,0)$.

177. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-2y-3$ на множині

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (0\le x\le 1)\wedge(0\le y\le 1)\wedge(x+y\ge 1)\right\}.$$

178. Розкласти функцію $z=x^2-2y^3+2xy$ в околі точки $(1,2)$ за формулою Тейлора.

179. Дослідити функцію $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi}{4-x^2-y^2}$ на рівномірну неперервність на множині $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<4\right\}$.

180. Дослідити функцію $z=e^{\sqrt{3|xy|}}$ на диференційовність у точці $O(0,0)$.

181. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^3+y^3-9xy+27$ на множині

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (0\le x\le 4)\wedge(0\le y\le 4)\right\}.$$

182. Розкласти функцію $z=2xy-x^2+3y^2-6x-2y-4$ в околі точки $(-2,1)$ за формулою Тейлора.

183. Дослідити функцію $f(x,y)=(x-3)\cos\dfrac{1}{y-2}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (2<x<3)\wedge(2<y<3)\right\}.$$

184. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & \text{якщо } x+y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x+y=0,\end{cases}$$

на диференційовність у точці $O(0,0)$.

185. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-6y^2-3xy-6x-24y-25$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(-1\le x\le 1)\wedge(-3\le y\le 0)\}.$$

186. Розкласти функцію $z=\cos x\cdot\cos y$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n=5$.

187. Дослідити функцію $f(x,y)=(x-4)(y-5)\cos\dfrac{1}{y-5}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(4<x<5)\wedge(4<y<5)\}.$$

188. Дослідити функцію

$$z=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & \text{якщо } x+y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x+y=0,\end{cases}$$

на диференційовність у точці $A(1,-1)$.

189. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-2xy+3$ на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(y\ge 0)\wedge(y\le 4-x^2)\}.$$

190. Розкласти функцію $z=y^x$ в околі точки $M(1,1)$ за формулою Тейлора порядку $n=3$.

191. Дослідити функцію $f(x,y)=12x-5y+3$ на рівномірну неперервність на $\mathbb{R}^2$.

192. Дослідити функцію

$$z=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}, & \text{якщо } x-y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x-y=0,\end{cases}$$

на диференційовність у точці $O(0,0)$.

193. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 + 4x^3 + y^3 - 2xy$ на множині

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \ge 0) \wedge (x^2 \le y \le 4)\}.$$

194. Розкласти функцію $z = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-y}$ в околі точки $O(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n = 3$.

195. Дослідити функцію $f(x, y) = xy \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x < 1) \wedge (0 < y < 2)\}.$$

196. Дослідити функцію

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos y}{x - y}, & \text{якщо } x - y \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x - y = 0, \end{cases}$$

на диференційовність у точці $A(\pi/4, \pi/4)$.

197. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3$ на множині

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le x \le 4) \wedge (0 \le y \le 4)\}.$$

198. Розкласти функцію $z = e^{xy}$ в околі точки $(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n = 3$.

199. Знайти та зобразити графічно область визначення функції $z = \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - \sqrt{1 - x - y}$.

200. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ і $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$, якщо

$$f(x, y) = \frac{\ln(1 + y)}{x^2 + y}.$$

201. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1 - \cos}{x^2 y^2 (x^2 + y^2)}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{11x + 9y}{x^2 + \dfrac{xy}{5} + y^2}$.

202. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4}, \text{ якщо } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \text{ якщо } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

на неперервність по окремих змінних і по сукупності змінних.

203. Дослідити функцію $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(0<x<1)\wedge(0<y<1)\}.$$

204. Записати для поверхні $x^2+y^2-3z=0$ рівняння дотичної площини, яка проходить через точку $M(0,0,1)$ і паралельна прямій $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

205. Дослідити функцію

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos y}{x-y}, & \text{якщо } x-y\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x-y=0,\end{cases}$$

на диференційовність у точці $B(\pi,\pi)$.

206. Знайти повні диференціали першого і другого порядків для функції $u=f(\sin(x+y),2^{xy})$.

207. Функція $z=z(x,y)$ неявно задана рівнянням $F\left(\dfrac{z}{x+y},\ln(x+y+z)\right)=0$. Знайти z''_{yy}.

208. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z=z(x,y)$, неявно задану рівнянням $x^2-xy+y^2+x+y+z^2+6z+10=0$.

209. Дослідити на умовні екстремуми функцію $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, якщо $x+y=2$.

210. Знайти найбільше та найменше значення $z=x^3+6y(y-x)$ на множині $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le y\le x\le 2\}$.

211. Розкласти функцію $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в околі точки $M(0,0)$ за формулою Тейлора порядку $n = 2$.

212. Перетворити диференціальне рівняння $z''_{xx} - z'_y = 0$, виконавши заміну змінних

$$u = \frac{x}{y},\ v = -\frac{1}{y},\ z = \frac{w}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y^2}} \quad (w = w(u,v)).$$

213. Знайти та зобразити графічно область визначення функції $z = \sqrt{x \sin y}$.

214. Обчислити $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ і $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 1} f(x,y)$ для функції

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}.$$

215. Знайти: а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ x\to \infty}} \dfrac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$.

216. Дослідити функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}, & \text{якщо } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{якщо } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

на неперервність по кожній змінній і по сукупності змінних.

217. Дослідити функцію $f(x,y) = y \sin\dfrac{1}{x-1}$ на рівномірну неперервність на множині

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x < 2) \wedge (0 < y < 1)\}.$$

218. Записати рівняння нормалі до поверхні $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(1,0,0)$.

219. Дослідити функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{якщо } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{якщо } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

на диференційовність у точці $O(0,0)$.

220. Знайти повні диференціали першого і другого порядків для функції $u = f(xy^2, \cos(x+y^2))$.

221. Функція $z = z(x,y)$ неявно задана рівнянням
$$F(z + \operatorname{tg} xy, \cos x + \cos y) = 0.$$
Знайти z''_{yy}.

222. Дослідити на локальні екстремуми функцію $z = z(x,y)$, неявно задану рівнянням
$$x^2 + y^2 + 4xy + 2(x - y - e^z) + z^2 = 0.$$

223. Дослідити на умовні екстремуми функцію $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, якщо $x - y + z = 1$.

224. Перетворити диференціальне рівняння $yz''_{yy} + 2z'_y = \dfrac{2}{x}$, виконавши заміну змінних
$$yu = x,\ v = x,\ w = zx - y \quad (w = w(u,v)).$$

225. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ на множині
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \ge 0) \wedge (y \ge 0) \wedge (x + y \le 3)\}.$$

226. Розкласти функцію $z = e^x \sin y$ в околі точки $(0, \pi/2)$ за формулою Тейлора.

227. Перетворити диференціальний вираз $W = (z'_x)^2 + (z'_y)^2$, виконавши заміну змінних
$$u = xz,\ v = yz,\ w = x \quad (w = w(u,v)).$$

228. Знайти інтеграли:

1. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$. 2. $\displaystyle\int \frac{e^x + 2e^x}{e^{2x} + 1} dx$. 3. $\displaystyle\int (x-3)^2 \ln x dx$.

4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x}$. 5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. 6. $\displaystyle\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$. 8. $\displaystyle\int \frac{(2x-3)^{1/2} dx}{(2x-3)^{1/3}+1}$. 9. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x+1}}$.

10. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$. 11. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$. 12. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}} dx$.

13. $\int \frac{(3x^4+4)dx}{x^2(x^2+1)^3}$. 14. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$. 15. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, x^2 dx$.

16. $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. 17. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\, dx$. 18. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$.

19. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx$. 20. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

21. $\int \frac{(x^3+2x^2+3)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 22. $\int a^x \left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right) dx$.

23. $\int \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x+5)\sin 2x}$. 24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

229. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin 3x} dx$; в) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^{3x}-e^x}$;

г) $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$; д) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$; е) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

230. Знайти нижню та верхню суми Дарбу для функції $f(x)=x^2$ на $[0,1]$, розбиваючи цей відрізок на n рівних частин.

231. Знайти нижню та верхню суми Дарбу для функції $f(x)=x^2$ на $[-1,1]$, розбиваючи цей відрізок на n рівних частин.

232. Знайти нижню та верхню суми Дарбу для функції $f(x)=e^x$ на $[0,1]$, розбиваючи цей відрізок на n рівних частин.

233. Знайти нижню та верхню суми Дарбу для функції $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на $[1,2]$, розбиваючи цей відрізок на n рівних частин.

234. Знайти нижню та верхню суми Дарбу для інтеграла $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$, які відповідають розбиттям відрізка $[0, \pi]$ на три та на шість рівних частин.

235. Знайти нижню та верхню суми Дарбу для інтеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, що відповідають розбиттю відрізка $[1, 2]$ на п'ять рівних частин. Порівняти з точним значенням інтеграла.

236. Користуючись означенням, обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 x dx$.

237. Користуючись означенням, обчислити інтеграл

$$\int\limits_a^b x^m dx \quad (m \neq -1,\ 0 < a < b).$$

238. Користуючись означенням, обчислити інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

239. За допомогою граничного переходу від інтегральних сум обчислити інтеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$, розбиваючи відрізок $[1, 4]$ на рівні частини та обираючи за точки ξ_i: а) ліві кінці відрізків $[x_{i-1}, x_i]$; б) праві кінці відрізків $[x_{i-1}, x_i]$; в) середини відрізків $[x_{i-1}, x_i]$.

240. За допомогою граничного переходу від інтегральних сум обчислити інтеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$, розбиваючи відрізок $[1, 4]$ точками, які утворюють геометричну прогресію, та обираючи за точки ξ_i: а) ліві кінці відрізків $[x_{i-1}, x_i]$; б) праві кінці відрізків $[x_{i-1}, x_i]$; в) середини відрізків $[x_{i-1}, x_i]$.

241. Нехай функція $f(x)$ є інтегровною на $[a,b]$. Довести, що функція $f^2(x)$ є інтегровною на $[a,b]$.

242. Нехай функція $f(x)$ є монотонною на $[a,b]$, а функція $g(x)$ є неперервною на $[a,b]$. Довести, що функція $f(x)+g(x)$ є інтегровною на $[a,b]$.

243. Довести, що з інтегровності на $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$ випливає інтегровність на $[a,b]$ функції $f(x)g(x)$.

244. Нехай функція $f(x)$ є інтегровною на $[0,1]$. Довести, що функція $f(|x|)$ є інтегровною на $[-1,1]$.

245. Чи випливає з інтегровності на $[a,b]$ функції $|f(x)|$ інтегровність на $[a,b]$ функції $f(x)$? Розглянути функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & \text{якщо } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

246. Показати, що функція Діріхле

$$\chi(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ 1, & \text{якщо } x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}$$

не інтегровна на $[a,b]$.

247. Сума $f(x)+g(x)$ інтегровна на $[a,b]$. Чи випливає звідси, що кожний з доданків інтегровний на $[a,b]$? Розглянути дві функції

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ 1, & \text{якщо } x\notin\mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

248. Показати, що $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, якщо $f(x)$ – парна функція, і $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, якщо $f(x)$ – непарна функція.

249. Добуток $f(x)g(x)$ інтегровний на $[a,b]$. Чи випливає звідси, що кожний зі співмножників інтегровний на $[a,b]$? Розглянути на $[0,1]$ функції

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ -x, & \text{якщо } x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}\qquad g(x)=f^2(x)=x^2.$$

250. Показати, що функція $f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ -x, & \text{якщо } x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}$ визначена на $[0,1]$, неінтегровна на цьому проміжку.

251. Нехай функція $f(x)$ є монотонною на $[a,b]$, а функція $g(x)$ є неперервною на $[a,b]$. Довести, що функція $f(x)g(x)$ є інтегровною на $[a,b]$.

252. Вивести формулу для статичних моментів гладкої кривої відносно координатних осей.

253. Вивести формулу для визначення координат центра мас гладкої кривої.

254. Вивести формулу для визначення моментів інерції гладкої кривої відносно осей координат.

255. Вивести формули для визначення статичних моментів фігури на площині відносно осей координат.

256. Вивести формули для визначення координат центра мас фігури на площині.

257. Вивести формули для визначення моментів інерції фігури на площині відносно координатних осей.

258. Вивести формули для статичних моментів криволінійної трапеції відносно осей координат.

259. Вивести формули для визначення координат центра мас криволінійної трапеції.

260. Вивести формули для визначення моментів інерції криволінійної трапеції.

261. Вивести формули для координат центра мас плоскої фігури, яка обмежена кривими, заданими в параметричній формі.

262. Вивести формулу для роботи змінної сили F уздовж осі Ox.

263. Обчислити довжину дуги кривої

$$x=0,\ y=2\cos 3t,\ t\in\left[0,\pi/3\right].$$

264. Обчислити довжину петлі кривої $x=\frac{t}{3}(6-t),\ \ y=t^2$.

265. Знайти координати центра мас арки циклоїди

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$$

266. Знайти координати центра мас дуги астроїди

$$x = a\cos^3 t\ ,\quad y = a\sin^3 t\ ,$$

розташованої в першому квадранті.

267. Знайти координати центра мас дуги кола радіуса R, яка відповідає центральному куту x.

268. Знайти координати центра мас півкола $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

269. Знайти декартові координати центра мас дуги кривої $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$.

270. Знайти момент інерції еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ відносно осі Oy .

271. Знайти координати цента мас фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$, віссю Ox і прямою, яка відповідає абсцисі x.

272. Знайти координати центра мас фігури, обмеженої аркою циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (0 \le t \le 2\pi)$ і віссю абсцис.

273. Знайти координати центра мас фігури, обмеженої кривими $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$.

274. Знайти координати центра мас півкруга, обмеженого віссю Ox і півколом $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

275. Знайти координати центра мас фігури, обмеженої еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ і координатними осями ($x \ge 0$, $y \ge 0$).

276. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = 3 + \sin 2\varphi$ і суміжними найбільшим і найменшим радіусами-векторами.

277. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = 2 - \cos 3\varphi$ та суміжними найбільшим і найменшим радіусами-векторами.

278. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими

$$y = x^2 + 4x + 5\ ,\quad x = 0\ ,\quad y = 1\ .$$

279. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими

$$|\,y\,| = |\lg x\,|,\quad y = 0,\quad x = 1/10\ ,\quad y = 10\ .$$

280. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими $x^2 + y^2 = 4, \quad x = 1, \quad y = 0$.

281. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривою $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

282. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (b \geq a).$$

283. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривими $x^2 - y^2 = 16, \quad y = \pm 4$.

284. Електричний заряд E , зосереджений у початку координат, відштовхує заряд e з точки до точки $(x_2, 0)$. Визначити роботу сили відштовхування.

285. Знайти роботу сили $F = \dfrac{k}{1+x^2}$ на відрізку $[1, 2]$ у напрямі зростання абсциси x.

286. Знайти роботу сили $F = ax \ln x$ на відрізку $[2, e]$ у напрямі зростання абсциси x.

Навчальне видання

КРИВОШЕЯ Сергій Арсенович,
МАЙКО Наталія Валентинівна,
МОТОРНА Оксана Віталіївна,
ПРОЩЕНКО Тетяна Михайлівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
завдання для самостійної роботи студентів

Частина 1

Навчально-методичний посібник

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 18,8. Наклад 150. Зам. № 213-6785.
Вид. № Рф4. Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 27.12.13

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (044) 239 32 22; (044) 239 31 72; тел./факс (044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02