МІЖРЕГІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ

МАУП

М. І. Жалдак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов

МАТЕМАТИКА (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ) З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для вступників
до вищих навчальних закладів*

Київ 2003

ББК 22.14с.я729
Ж24

Рецензенти: *М. І. Бурда*, д-р пед. наук, проф., член-кор. АПН України
М. В. Працьовитий, д-р фіз.-мат. наук, проф.
В. С. Руденко, вчитель-методист вищої категорії

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 10 від 28.11.2000)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (лист № 2/4 від 09.01.01)

Жалдак М. І.

Ж24 Математика (алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб. для підготов. від-нь / М. І. Жалдак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов. — К.: МАУП, 2003. — 304 с.: іл. — Бібліогр.: с. 296–297.

ISBN 966-608-265-9

У навчальному посібнику міститься теоретичний матеріал шкільного курсу математики у вигляді опорних конспектів, алгоритмічних приписів основних методів розв'язання задач, які супроводжуються прикладами їх використання. Форма викладу матеріалу зручна для користування, систематизації і узагальнення знань з математики.

Для вступників до вищих закладів освіти, вчителів математики, учнів ліцеїв, гімназій і студентів математичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів.

ББК 22.14с.я729+22.161с.я729

ISBN 966-608-265-9

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

N — множина натуральних чисел
Z — множина цілих чисел
Z_0 — множина невід'ємних чисел
Q — множина раціональних чисел
I — множина ірраціональних чисел
R — множина дійсних чисел
$\{a, b, c, ...\}$ — множина, що складається з елементів a, b, c, ...
$D(f)$ — область визначення функції f
$E(f)$ — область значень функції f
$\varnothing$ — порожня множина
$\in$ — знак належності елемента множині:
$a \in M$ — елемент a належить множині M
$\subset$ — знак належності підмножини елементів множині:
$A \subset B$ — кожний елемент множини A належить множині B
$\cup$ — знак об'єднання множин
$\cap$ — знак перетину множин
$\Rightarrow$ — знак слідування (логічного наслідку):
$A \Rightarrow B$ — з A випливає B
$\Leftrightarrow$ — знак рівносильності (еквівалентності):
$A \Leftrightarrow B$ — з A випливає B і, навпаки, з B випливає A
∞ — нескінченність
$\{$ — знак системи рівнянь
$[$ — знак сукупності рівнянь
$\sqrt[n]{\ }$ — корінь (радикал) n-го степеня
ОДЗ — область допустимих значень

1 ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО УСНОГО ЕКЗАМЕНУ З МАТЕМАТИКИ

1.1. ФУНКЦІЯ $y = ax + b$

Означення. Якщо функцію можна подати у вигляді $y = ax + b$, де x — незалежна дійсна змінна; a, b — деякі числа, її називають *лінійною*.

При $b = 0$ формула набирає вигляду $y = ax$ і при $a \neq 0$ задає пряму пропорційність. Графіком лінійної функції є пряма. Щоб побудувати графік лінійної функції, потрібно знайти координати двох точок, що задовольняють рівняння $y = ax + b$, нанести ці точки на координатну площину і провести пряму через нанесені дві точки.

Лінійна функція виражає залежності між змінними різної природи (з точністю до області визначення):

• залежність шляху довжиною S від часу t при рівномірному русі: $S = S_0 + vt$, де S_0 — довжина шляху, пройденого до моменту $t = 0$, з якого почався відлік часу; v — стала швидкість;

• залежність вартості N телеграми від кількості слів x: $N = 5x + 20$ за умови, що одне слово коштує 5 коп., а кольоровий бланк — 20 коп.

Властивості лінійної функції

1. Областю визначення є множина всіх дійсних чисел.

2. При $a > 0$ функція зростаюча, при $a < 0$ — спадна.

Справді, нехай $a < 0$ і вибрано довільні значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Тоді

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1) > 0,$$

оскільки $a > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Отже, $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Це означає, що при $a > 0$ функція зростаюча.

Аналогічно доводять, що при $a < 0$ функція спадна.

3. При $a \neq 0$ і $b \neq 0$ функція ані парна, ані непарна.

Справді, хоч область визначення симетрична відносно початку координат, але $f(-x) = -ax + b \neq f(x) = ax + b$ і, отже, $f(-x) \neq -f(x)$.

При $a \neq 0$ і $b = 0$ лінійна функція непарна, оскільки область визначення функції симетрична відносно початку координат і $f(-x) = -ax = -f(x)$. За таких умов графіком функції є пряма, що проходить через початок координат і симетрична відносно початку координат.

При $a = 0$ і $b \neq 0$ функція парна, оскільки $f(-x) = b = f(x)$ і область визначення симетрична відносно початку координат. Графіком функції є пряма, паралельна осі абсцис (або збігається з нею). Графік симетричний відносно осі Oy.

При $a = 0$ і $b = 0$ функція $f(x) = ax + b$ водночас парна і непарна, оскільки $f(-x) = 0 = -f(x)$ і $f(-x) = 0 = f(x)$ при довільних $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. Лінійна функція критичних точок не має.

Приклади графіків лінійних функцій, побудованих за допомогою програми *GRAN*, подано на рис. 1.1.

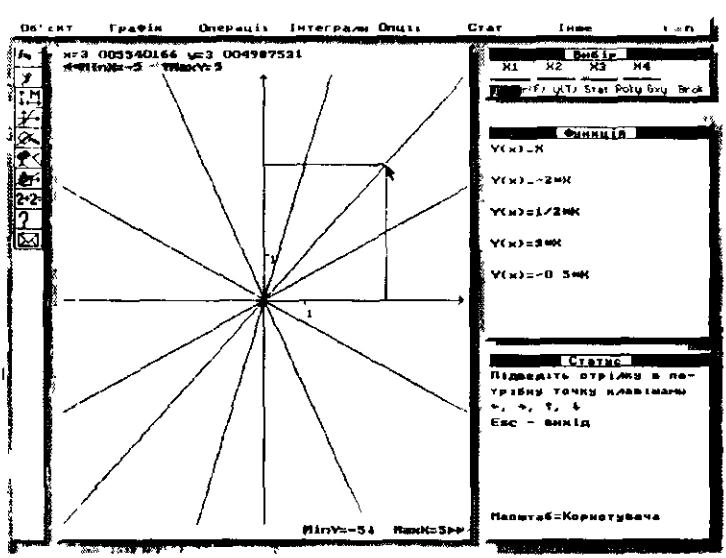


Рис. 1.1

1.2. ФУНКЦІЯ $y=\dfrac{k}{x}$

Означення. Функцію, яку можна задати формулою $y=\dfrac{k}{x}$, де x — незалежна змінна; $k \neq 0$ — деяке дійсне число, називають *оберненою пропорційністю.*

Графіком є *гіпербола*, що складається з двох гілок.

При $k > 0$ гіпербола розміщена в I і III координатних чвертях, а при $k < 0$ — у II і IV.

Приклади:

1. Час t, необхідний для проходження шляху довжиною S, залежить від швидкості V: $t=\dfrac{S}{V}$.

2. Кількість N купленого товару на задану суму S грошей залежить від ціни W цього товару (з точністю до області визначення).

Властивості функції

1. Областю визначення і областю значень функції є множина дійсних чисел $R\setminus\{0\}$.

2. При $k>0$ функція $y=\dfrac{k}{x}$ спадна на обох частинах множини визначення, тобто при $x\in(-\infty;0)$ або $x\in(0;+\infty)$.

Доведемо цей факт. Нехай $x_1\in(-\infty;0)$, $x_2\in(-\infty;0)$ і $x_1<x_2$. Тоді

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{k(x_1-x_2)}{x_2x_1}<0,$$

оскільки $x_2x_1>0$ (добуток двох від'ємних чисел), $k>0$ (за вибором), $x_1-x_2<0$ (за вибором x_1 і x_2).

З того, що $f(x_2)-f(x_1)<0$, випливає, що $f(x_2)<f(x_1)$ при $x_1<x_2$, тобто при $x\in(-\infty;0)$ функція $f(x)=\dfrac{k}{x}$, $k>0$ спадна.

Нехай $x_1\in(0;+\infty)$, $x_2\in(0;+\infty)$, $x_1<x_2$. Тоді $f(x_2)-f(x_1)=$ $=\dfrac{k(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0$, оскільки $x_2x_1>0$, $k>0$, $x_1-x_2<0$, бо $x_1<x_2$.

Отже, $f(x_2)-f(x_1)<0$, звідки $f(x_2)<f(x_1)$ при $x_1<x_2$, $x_1\in(0;+\infty)$ $x_2\in(0;+\infty)$, тобто при $x\in(0;+\infty)$ функція $f(x)=\frac{k}{x}$, $k>0$ спадна.

Аналогічно можна довести, що при $k<0$ функція зростає на обох частинах області визначення.

3. Функція $y=\frac{k}{x}$ непарна. Справді, областю визначення є множина, симетрична відносно початку координат, і $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$.

Графік функції — гіпербола — симетричний відносно початку координат.

4. Критичних точок функція $y=\frac{k}{x}$ не має, оскільки $y'=-\frac{k}{x^2}\neq 0$ при довільних x з області визначення функції, не існує також точок з області визначення, в яких похідна y' невизначена.

5. Якщо $k>0$, то при $x\in(0;+\infty)$ графік функції опуклий вниз, а при $x\in(-\infty;0)$ — вгору. При $k<0$ опуклість графіка функції змінюється на протилежну.

Приклади графіків функції $y=\frac{1}{x}$ і $y=-\frac{3}{x}$, побудованих за допомогою програми *GRAN 1*, подано на рис. 1.2.

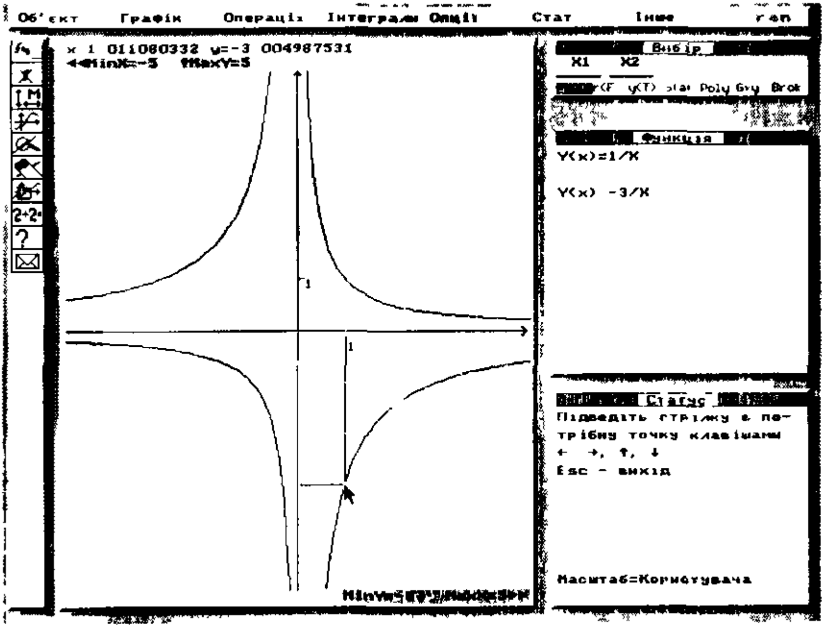

Об'єкт Графік Операції Інтеграли Опції Стат Інше
x 1 011080332 y=-3 004987531
Вибір
X1 X2
Функція
Y(x)=1/X
Y(x) -3/X
Статус
Підведіть стрілку в потрібну точку клавішами
Esc - вихід
Масштаб=Користувача

Рис 1 2

1.3. ФУНКЦІЇ $y = ax^2 + bx + c$

Означення. Функцію, яка задається формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дійсні числа, $a \neq 0$, називають *квадратичною*.

Приклад. Залежність координати тіла (матеріальної точки) від часу t при прямолінійному рівноприскореному русі вздовж осі Ox: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, де x_0 — початкова координата тіла; v_0 — початкова швидкість; a — прискорення.

Графіком квадратичної функції є *парабола*. Вершина параболи розміщується в точці M_0 з координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Справді,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ в такий спосіб:

1) перенести на $\left|\frac{b}{2a}\right|$ одиниць (вправо чи вліво залежно від знаку значення виразу $-\frac{b}{2a}$) вздовж осі Ox;

2) стиснути (чи розтягнути) з коефіцієнтом $|a|$ одержаний графік до осі абсцис;

3) якщо $a < 0$, то відобразити одержаний графік симетрично відносно осі Ox;

4) перенести на $\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right|$ одиниць (вгору чи вниз залежно від знаку значення виразу $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$) вздовж осі Oy. Схематично це показано на рис. 1.3.

1.5. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

Означення. Вираз вигляду ax^2+bx+c, де $a\neq 0$: a, b, c — деякі дійсні числа, називають *квадратним тричленом*.

Нехай $D=b^2-4ac\geq 0$. З виразу ax^2+bx+c виділимо повний квадрат:

$$ax^2+bx+c=a(x^2+2\ \frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}\right)=$$

$$=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Відомо, що при $b^2-4ac\geq 0$ числа $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ є коренями квадратного тричлена, отже, можна записати: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Якщо $D=0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2=a(x-x_1)(x-x_1)$, де $x_1=\dfrac{-b}{2a}$ — подвійний корінь квадратного тричлена.

При $D<0$ квадратний тричлен на лінійні множники не розкладається.

Приклади:

1. $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$.
2. Квадратний тричлен x^2-2x+8 на лінійні множники не розкладається, оскільки $D=4-4\cdot 8<0$.
3. $5x^2-8=5\left(x-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\left(x+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)=5\left(x-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)\left(x+\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)$.

За допомогою програми *DERIVE* розкладання квадратного тричлена на лінійні множники можна виконати автоматично (рис. 1.12).

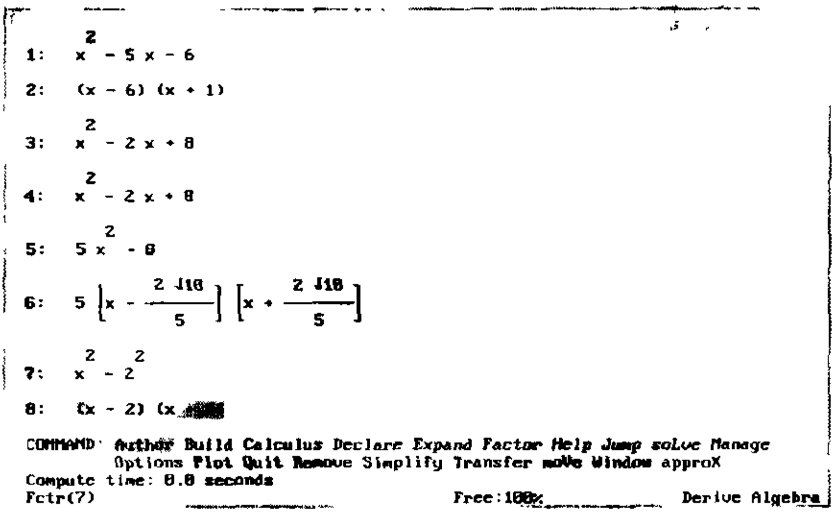

1: x^2 - 5 x - 6
2: (x - 6) (x + 1)
3: x^2 - 2 x + 8
4: x^2 - 2 x + 8
5: 5 x^2 - 8
6: 5 [x - 2 √10 / 5] [x + 2 √10 / 5]
7: x^2 - 2^2
8: (x - 2) (x
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Fctr(7)
Free:100%
Derive Algebra

Рис. 1.12

Приклад 6.

$$\frac{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{m+2}\sqrt{m+2}+\sqrt{m-2}\sqrt{m-2}}{\sqrt{(m-2)(m+2)}}}{\dfrac{\sqrt{m+2}\sqrt{m+2}-\sqrt{m-2}\sqrt{m-2}}{\sqrt{(m-2)(m+2)}}}=$$

$$=\frac{(m+2)+(m-2)}{(m+2)-(m-2)}=\frac{2m}{4}=\frac{m}{2}.$$

Приклад 7.

$$\frac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}=\frac{(\cos 2\alpha-\cos 14\alpha)-(\cos 6\alpha-\cos 10\alpha)}{(\sin 2\alpha+\sin 14\alpha)+(\sin 6\alpha+\sin 10\alpha)}=$$

$$=\frac{-2\sin 8\alpha\sin(-6\alpha)+2\sin 8\alpha\sin(-2\alpha)}{2\sin 8\alpha\cos(-6\alpha)+2\sin 8\alpha\cos(-2\alpha)}=\frac{2\sin 8\alpha(\sin 6\alpha-\sin 2\alpha)}{2\sin 8\alpha(\cos 6\alpha+\cos 2\alpha)}=$$

$$=\frac{2\cos 4\alpha\sin 2\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Приклад 8.

$$\frac{\log_a b+\log_a b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\frac{\log_{ab} b\,\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}=\frac{\log_a b+\log_a b^{\log_b a}}{\log_a b-\dfrac{\log_a b}{\log_a ab}}\times$$

$$\times\frac{\dfrac{\log_a b}{\log_a ab}\log_a b}{\left(b^{\log_b\log_a b}\right)^2-1}=\frac{\log_a b+\log_a a}{\log_a b-\dfrac{\log_a b}{\log_a a+\log_a b}}\cdot\frac{\dfrac{\log_a b}{\log_a a+\log_a b}\log_a b}{\log_a^2 b-1}=$$

$$=\frac{(\log_a b+1)(1+\log_a b)}{\log_a b(1+\log_a b)-\log_a b}\cdot\frac{\log_a^2 b}{(1+\log_a b)(\log_a^2 b-1)}=$$

$$=\frac{(1+\log_a b)\log_a^2 b}{\log_a b(1+\log_a b-1)(\log_a b-1)(\log_a b+1)}=\frac{1}{\log_a b-1}.$$

2.1.2. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

I. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів.
Спростити вираз:

1) $t\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\dfrac{4}{\sqrt{t+4}}$; 2) $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$;

3) $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$; 4) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

5) $\dfrac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

Перевірити рівність:

6) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; 7) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

Позбавитись від ірраціональності у знаменнику:

8) $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 9) $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 10) $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

II. Тотожні перетворення тригонометричних виразів.
Довести тотожність:

11) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$; 12) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

13) $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$; 14) $\operatorname{tg} 4\alpha+\sec 4\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$;

15) $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=2\operatorname{cosec} 2\alpha$.

Спростити вираз:

16) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}$; 17) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$; 18) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

Перетворити на добуток (звести до вигляду, зручного для логарифмування)

19) $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1$, 20) $\sec^4\alpha-\operatorname{cosec}^4\alpha$

III Тотожні перетворення логарифмічних і показникових виразів

Спростити вираз

21) $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\,\log^2_{1/a}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\,\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$, 22) $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\,\log_a\dfrac{a}{b}}$,

23) $\sqrt[\log_b a]{a^2}-2\sqrt[\log_b a]{a}\,\sqrt[\log_a b]{b}+\sqrt[\frac{1}{2}\log_c b]{b}$,

24) $\dfrac{3\log_7 2-\log_7 24}{\log_7 3+\log_7 9}$, 25) $\dfrac{3\lg 4+\lg\frac{1}{2}}{\lg 7-\lg 14}$

Конкурсний рівень

I Тотожні перетворення алгебраїчних виразів

Спростити вираз

26) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$, 27) $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$,

28) $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$,

29) $\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{11-\sqrt{\frac{5}{9}}}\,\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}$; 30) $\dfrac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

Перевірити рівність

31) $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$, 32) $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}$

Спростити вираз і відшукати область допустимих значень параметра a

33) $\dfrac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$; 34) $\left(\sqrt{x^4-a^4}-\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Довести тотожність:

35) $p^3=\left(p\,\dfrac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right)^3+\left(q\,\dfrac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right)^3+q^3.$

II. Тотожні перетворення тригонометричних виразів.

Довести тотожність:

36) $\dfrac{2\cos\left(\dfrac{1}{6}\pi-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}$;

37) $\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha-1=\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$; 38) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha$;

39) $\dfrac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha$; 40) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Спростити вираз:

41) $(\cos 8\alpha\operatorname{tg}4\alpha-\sin 8\alpha)\,(\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha+\sin 8\alpha)$;

42) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\dfrac{5}{4}\pi\right)+1}$; 43) $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

Перетворити на добуток (звести до вигляду, зручного для логарифмування):

44) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha$; 45) $2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha$.

III. Тотожні перетворення **логарифмічних і показникових виразів.**

Спростити вираз:

46) $\left(x^{\log_4 x^2} \sqrt{x} + {}^{\log_{x^2}} \sqrt[2]{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$;

47) $\left[\left(\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \right]^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$;

48) $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2}\ (\log_n p - \log_{np} p)\ \sqrt{\log_n p}$.

Довести тотожність:

49) $\dfrac{1}{\log_x 2\ \log_x 4} + \dfrac{1}{\log_x 4 \log_x 8} + \ldots + \dfrac{1}{\log_x 2^{n-1} \log_x 2^n} = \left(1 - \dfrac{1}{n} \right) \dfrac{1}{\log_x^2 2}$;

50) $\log_3 2\ \log_4 3\ \log_5 4\ \log_6 5\ \log_7 6\ \log_8 7 = \dfrac{1}{3}$;

51) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$;

52) $\log_3 12 = \log_3 7\ \log_7 5\ \log_5 4 + 1$;

53) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c\ \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

Обчислити суму при $N = 2000$:

54) $\dfrac{1}{\log_2 N} + \dfrac{1}{\log_3 N} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{2000} N}$.

Спростити вираз:

55) $\dfrac{\dfrac{1-3^x}{1-3^x+3^{2x}} + \dfrac{1+3^x}{1+3^x+3^{2x}}}{\dfrac{1+3^x}{1+3^x+3^{2x}} - \dfrac{1-3^x}{1-3^x+3^{2x}}}$.

2.2. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

2.2.1. Основні способи доведення нерівностей

Теоретичні положення цієї теми висвітлимо далі в темі "Властивості числових нерівностей".

Зупинимося детальніше на доведенні числових нерівностей. Розрізняють кілька способів доведення нерівностей.

1. *Спираючись на властивості нерівностей.*

Зміст способу. Істинність твердження доводять, спираючись на такі властивості:

1) $(a > b) \Leftrightarrow (a - b > 0)$, $(a < b) \Leftrightarrow (a - b < 0)$;

2) $(a > b) \Leftrightarrow (b < a)$, $(a < b) \Leftrightarrow (b > a)$;

3) $(a > b)$ і $(b > c) \Rightarrow (a > c)$;

4) $(a > b)$ і $c \in R \Leftrightarrow (a + c > b + c)$;

5) $(a > b)$ і $(c > 0) \Rightarrow ac > bc$;

6) $(a > b)$ і $(c < 0) \Rightarrow ac < bc$ (a, b, c — дійсні числа).

2. Використовуючи групування і розкладання на множники.

Зміст способу. Складають різниця лівої і правої частин нерівності, доданки групують або розкладають на множники і, спираючись на властивості нерівностей і логічні закони, доходять висновку щодо знаку різниці.

3. Використовуючи тотожності.

Зміст способу. Складають різницю лівої і правої частин нерівності, здійснюють тотожні перетворення і за допомогою відомих тотожностей встановлюють знак різниці. Тотожності використовують, як правило, на проміжному етапі, а всі попередні перетворення спрямовані саме на використання відомої тотожності.

4. Використовуючи квадратний тричлен.

Зміст способу. Складають різницю лівої і правої частин нерівності, спираючись на відомі властивості квадратного тричлена.

5. Використовуючи дискримінант деякого квадратного тричлена.

Зміст способу. Різницю лівої і правої частин нерівності беруть за дискримінант деякого квадратного тричлена. Потім досліджують, квадратний тричлен з таким дискримінантом має два різних або два рівних дійсних корені. Після цього доходять висновку щодо знаку дискримінанта і відповідно щодо істинності нерівності.

6 Використовуючи аналіз Евкліда

Зміст способу Нерівність, яку потрібно довести, замінюють тотожними нерівностями доти, поки не встануть істинну нерівність за цих умов Знайшовши істинну нерівність, доведення здійснюють у зворотному напрямі

7 Використовуючи властивості функції

Зміст способу Доведення нерівності спирається суто на властивості функцій (за умови, що нерівність містить вирази які є значеннями деяких функцій)

8 Використовуючи посилення нерівності (іноді називають методом підсилення, або методом мажоризації)

Зміст способу Завдання довести нерівність $X > Y$ ($X < Y$) заміниється на завдання довести нерівність $X_1 > Y_1$ ($X_1 < Y_1$), що сильніша від вихідної нерівності Вибираючи X_1 і Y_1, враховують особливості виразів X і Y Зручно застосовувати метод посилення для доведення нерівності $X > Y$ ($X < Y$), якщо нерівності $Y > Y_1$, $Y < Y_1$ ($X < X_1$, $Y > Y_1$) очевидні або близькі до них

9 Використовуючи розширення області дослідження

Зміст способу Спочатку послаблюють умови, що накладаються на змінні, тобто розширюють область дослідження

Вибирають для розгляду такі значення змінних з розширеної області, при яких доведення заданої нерівності значно спрощується, і потім, використовуючи певні особливості початкових виразів і властивості функцій, доходять висновку про твердження, яке потрібно довести

Множина числових нерівностей, які дістають на основі заданої області значень змінних, є підмножиною множини числових нерівностей, які дістають на основі розширеної області досліджень

10 Використовуючи результати розв'язання нерівностей

Зміст способу Розв'язують нерівність і вважають її доведеною на одержаній множині розв'язків

11 Використовуючи заміну змінних

Зміст способу Замінюючи вирази, що входять у нерівність, одержують нерівність, яку легше доводити

12 Методом від протилежного

Зміст способу Вихідну нерівність замінюють на нерівність протилежного змісту і, припускаючи, що існує хоча б одне значення змінної, при якому протилежна нерівність істинна, приходять до суперечності, що доводить істинність початкової нерівності

13. Методом математичної індукції.

Зміст способу. Метод грунтується на використанні принципу математичної індукції. Деяке твердження $A(n)$ істинне для $\forall\, n$ у таких випадках:

а) якщо $A(n)$ істинне для $n = 1$;

б) з того, що $A(n)$ істинне для $n = k$ (k — довільне натуральне число), випливає, що $A(n)$ істинне для числа $n = k + 1$.

14. Використовуючи елементи диференціального та інтегрального числення.

Зміст способу. Доведення грунтується на властивостях функції, безпосередньо пов'язаних із застосуванням похідної або інтегралу.

15. Графічно.

Зміст способу. Доведення грунтується на використанні графіків функцій, з яких складається нерівність.

16. Використовуючи спеціальні нерівності.

Зміст способу. Доведення нерівностей грунтується на використанні нерівності:

- Евкліда. Нехай a, b, c, d — будь-які різні додатні числа, для яких $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Тоді сума найбільшого і найменшого членів пропорції перевищує суму решти її членів. Якщо a — найбільше, а d — найменше з чисел a, b, c, d, то нерівність Евкліда пишеться так:

$$a + d > b + + c;$$

- Коші. Якщо $a_1, a_2, ..., a_n$ — будь-які невід'ємні дійсні числа, то

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Нерівність Коші інколи читають так: середнє арифметичне невід'ємних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ не менше за їх середнє геометричне;

- Бернуллі:

   а) нехай x і y — будь-які дійсні числа, такі що $x \geq -1$ і $0 < y < 1$. Тоді $(1+x)^y \leq 1 + yx$;

   б) нехай x і y — будь-які дійсні числа, такі що $x \geq -1$ і $y < 0$ або $y > 1$. Тоді $(1+x)^y \geq 1 + yx$;

* Коші — Буняковського:

якщо $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ — довільні дійсні числа, то

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

Зазначимо, що подані раніше способи 8–10 і 14–16 є спеціальними способами доведення нерівностей, а способи 11–13 — загальноматематичними. Потрібно також пам'ятати, що, використовуючи перший спосіб, який грунтується на властивостях нерівностей, окрім зазначених властивостей можна використовувати й інші, зокрема такі:

* якщо $a < b$ і $c > d$, то $a - c < b - d$;
* якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
* якщо $a < 0$, $b < 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Розглянемо приклади доведення нерівностей із застосуванням розглянутих способів.

2.2.2. Приклади доведення нерівностей

Приклад 1. Спираючись на властивості нерівностей, довести нерівність

$$\left(\sqrt{2} + 2\right)\left(\sqrt{3} - 2\right) < \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

Доведення. Складаємо різницю лівої та правої частин і виконуємо тотожні перетворення:

$$\left(\sqrt{2} + 2\right)\left(\sqrt{3} - 2\right) - \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) =$$
$$= \sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} - 3.$$

Очевидно, що $\sqrt{3} - \sqrt{2} - 3 < 0$.

Спираючись на властивість $(a < b) \Leftrightarrow (a - b < 0)$, доходимо висновку, що $\left(\sqrt{2} + 2\right)\left(\sqrt{3} - 2\right) < \left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Приклад 2. Використовуючи групування і розкладання на множники, довести, що для всіх $x \in (-\infty; -2)$ виконується нерівність $x\left(2x - x^2 + 3\right) > 6$.

Доведення. Складаємо різницю лівої і правої частин нерівності й розкриваємо дужки, здійснюємо групування і розкладання на множники:

$$x\left(2x-x^2+3\right)-6=2x^2-x^3+3x-6=\left(2x^2-x^3\right)-(6-3x)=$$
$$=x^2(2-x)-3(2-x)=\left(x^2-3\right)(2-x)=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)(2-x).$$

При $x\in\left(-\infty;-2\right)$ *вирази* $x-\sqrt{3}<0,\quad x+\sqrt{3}<0,\quad 2-x>0$, отже,

$$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)(2-x)>0.$$

Спираючись на властивості $a<b\Leftrightarrow a-b>0$, доходимо висновку: $x(2x-x^2+3)>6$.

Приклад 3. Використовуючи тотожності, довести нерівність $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ для всіх a і b, таких що $ab>0$ (див.“Властивості числових нерівностей”, приклад 11).

Приклад 4. Використовуючи квадратний тричлен, довести нерівність

$$3u^2+1>2u.$$

Складаємо різницю лівої і правої частин нерівності: $3u^2+1-2u=$ $=3u^2-2u+1>0$ для будь-якого u, оскільки дискримінант D квадратного тричлена $3u^2-2u+1$ є числом від'ємним ($D=4-4\cdot 3\cdot 1=-8<0$) і коефіцієнт при u^2 — числом додатним ($3>0$). Отже, за відомою схемою $3u^2+1-2u>0\Leftrightarrow 3u^2+1>2u$.

Приклад 5. Використовуючи дискримінант деякого квадратного тричлена, довести, що для всіх дійсних m виконується нерівність

$$\left(m^2+m+3\right)^2>4\left(m^2+2\right)(m+1).$$

Різницю лівої і правої частин нерівності $\left(m^2+m+3\right)^2-$ $-4\left(m^2+2\right)\left(m+1\right)$ можна вважати дискримінантом квадратного тричлена $x^2-\left(m^2+m+3\right)x+\left(m^2+2\right)(m+1)$.

Очевидно, що коренями такого квадратного тричлена є m^2+2 і $m+1$, причому $m^2+2\neq m+1$ при всіх m, тобто дискримінант D квадратного тричлена додатний ($D>0$). Отже, для будь-якого дійсного m

виконується нерівність $\left(m^2+m+3\right)^2-4\left(m^2+2\right)(m+1)>0$. Звідси

$$\left(m^2+m+3\right)^2>4\left(m^2+2\right)(m+1)$$

Зауваження У розглядуваному випадку корені квадратного тричлена очевидні, але це не завжди так Тоді потрібно скористатись таким фактом якщо корені квадратного тричлена — різні дійсні числа, то квадратний тричлен двічі змінює знак з "+" на "–" і з "–" на "+" при додатному старшому коефіцієнті і з "–" на "+" і з "+" на "–" при від'ємному старшому коефіцієнті Отже, якщо при невідомих коренях можна встановити, що при різних значеннях x, вибраних у певний спосіб, відбувається подвійна зміна знаку квадратного тричлена, то такий квадратний тричлен має дискримінант $D>0$

Приклад 6. Використовуючи аналіз Евкліда, довести, що для всіх від'ємних a і b, таких що $a>b+1$, виконується нерівність

$$a^2-a+1<b(b-1)$$

Доведення Спочатку проаналізуємо

$$a^2-a+1<b(b-1)\Rightarrow a^2-a+1-b(b-1)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2-a+1-b^2+b<0\Rightarrow a^2-b^2-\left(a-(b+1)\right)<0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(a-b)(a+b)-\left(a-(b+1)\right)<0$$

Остання нерівність при заданих умовах є істинною, оскільки $(a<0)\wedge(b<0)\Rightarrow a+b<0$, $\quad(a>b+1)\Rightarrow a-b>1>0$

Отже, $(a+b<0)\wedge(a-b>0)\Rightarrow(a-b)(a+b)<0$,
$(a>b+1)\Rightarrow\left(a-(b+1)>0\right)$

Остаточно

$$\left((a-b)(a+b)<0\right)\wedge\left(a-(b+1)>0\right)\rightarrow\left((a-b)(a+b)-\left(a-(b+1)\right)<0\right),$$

що й потрібно було довести

Здійснимо доведення у зворотному напрямі.

$$\left((a-b)(a+b)-\left(a-(b+1)\right)<0\right)\rightarrow\left(a^2-b^2-a+b+1<0\right)\rightarrow$$

$$\to\left(a^2-a+1-b(b-1)<0\right)\to a^2-a+1<b(b-1),$$
що й потрібно було довести.

Приклад 7. Використовуючи властивості функції, довести нерівність

$$3^{300}\cdot 25^{15}>256^{50}\cdot 4^{30}.$$

Доведення. Вирази, що фігурують у нерівності, подамо так:

$$3^{300}=\left(3^3\right)^{100}=27^{100};\ 256^{50}=\left(16^2\right)^{50}=16^{100};\ 25^{15}=\left(5^2\right)^{15}=5^{30}.$$

Згідно з властивостями показникової функції $27^{100}>16^{100}$, $5^{30}>4^{30}$.

З останніх двох нерівностей випливає $27^{100}\cdot 5^{30}>16^{100}\cdot 4^{30}$, що й доводить нерівність $3^{300}\cdot 25^{15}>256^{50}\cdot 4^{30}$.

Приклад 8. Методом посилення нерівності довести нерівність $\sqrt{6a+1}+\sqrt{1-4a}<2,26$.

Доведення. Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}6a+1\ge 0\\ 1-4a\ge 0\end{cases}$, $a\in\left[-\frac{1}{6};\ \frac{1}{4}\right]$.

За нерівністю Коші $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ для $x\ge 0$, $y\ge 0$ можна записати

$$\sqrt{6a+1}=\sqrt{(6a+1)\cdot 1}\le\frac{(6a+1)+1}{2}=3a+1;$$
$$\sqrt{1-4a}=\sqrt{(1-4a)\cdot 1}\le\frac{1-4a+1}{2}=1-2a.$$

Використовуючи посилення нерівностей, маємо

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{1-4a}\le 3a+1+1-2a=2+a.$$

З того, що $a\in\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right]$, випливає

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{1-4a}\le 2+\frac{1}{4}=2{,}25<2{,}26,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 9. Використовуючи розширення області дослідження, довести, що для всіх m і n, таких що $n>m>\frac{1}{2}$, виконується нерівність $m^2-2n+1<mn$.

Доведення Згідно із заданими умовами $n > m$ Розширимо область дослідження умовою $n = m$, тобто розширена область $n \geq m$ Для $m = n$ задана нерівність перетворюється на $m^2 - 2m + 1 < m^2$, що рівносильно $-2m + 1 < 0$, звідки $-2m < -1$, $m > \frac{1}{2}$ При будь-якому $m > \frac{1}{2}$ виконується нерівність $m^2 - 2m + 1 < m^2$ При збільшенні n значення лівої частини нерівності $m^2 - 2n + 1 < mn$ зменшується, а значення правої — збільшується Отже, при всіх заданих m і n вихідна нерівність не порушується

Приклад 10. Використовуючи результати розв'язання нерівності, довести нерівність

$$\frac{5x+2}{x^2+10{,}4x+4} < -\frac{1}{3}, \text{ де } -24 \leq x \leq -12$$

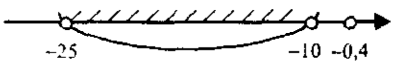
Доведення Розв'яжемо задану нерівність

$$\frac{5x+2}{x^2+10{,}4x+4} + \frac{1}{3} < 0,$$

$$\frac{(5x+2)\,3 + x^2 + 10{,}4x + 4}{3\left(x^2+10{,}4x+4\right)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+25{,}4x+10}{3\left(x^2+10{,}4x+4\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+0{,}4)(x+25)}{3(x+0{,}4)(x+10)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+25}{3(x+10)} < 0, \quad x \neq -0{,}4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+25)(x+10) < 0, \quad x \neq 0{,}4$$



Відповідь $x \in (-25, -10)$

Очевидно, що задана нерівність справедлива і на відрізку [−24, −12], який є підмножиною множини точок проміжку (−25, −12)

Приклад 11. Використовуючи заміну змінних, довести нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0{,}75$, якщо $a + b + c = 1{,}5$

Доведення Для будь-яких дійсних a, b, c з рівності $a + b + c = 1{,}5$ після піднесення до квадрату випливає рівність $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 2{,}25$ Доведемо допоміжну нерівність Очевидно, що $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$. **Звідси** $a^2-2ab+b^2 \geq 0$; $b^2-2bc+c^2 \geq 0$; $a^2-2ac+c^2 \geq 0$.

Додамо почленно останні три нерівності:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 0, \text{ звідки } a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac.$$

Використовуючи останню нерівність, можна записати: $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ac+x$, де $x>0$. У рівності $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=2{,}25$ зробимо заміну:

$$a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2-x)=2{,}25.$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні доданки, маємо

$$3a^2+3b^2+3c^2-2x=2{,}25;$$
$$3(a^2+b^2+c^2)=2{,}25+2x;$$
$$a^2+b^2+c^2=0{,}75+\frac{2}{3}x.$$

Оскільки $x>0$, то справедлива нерівність $a^2+b^2+c^2 \geq 0{,}75$, що й потрібно було довести.

Приклад 12. Використовуючи метод від супротивного, довести нерівність $x^7+x^2+1 \geq 3x^3$ при $x \geq 0$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто $x^7+x^2+1<3x^3$ при $x \geq 0$. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$x^7+x^2+1-3x^3=(x-1)^2\left(x^5+2x^4+3x^3+4x^2+2x+1\right) \geq 0,$$

оскільки $(x-1)^2 \geq 0$ для всіх дійсних x, а вираз $x^5+2x^4+3x^3+4x^2+2x+1$ при $x \geq 0$ є сумою додатних значень. Отже, $x^7+x^2+1-3x^3 \geq 0$, звідки $x^7+x^2+1 \geq 3x^3$, що суперечить зробленому припущенню і водночас доводить задану нерівність.

Приклад 13. Методом математичної індукції довести нерівність

$$3+7+13+21+\ldots+\left(n^2-n+1\right)<\frac{n\left(n^2+2\right)}{3},\ n>1.$$

Доведення. Перевіримо справедливість нерівності при $n = 2$:

$$2^2-2+1<\frac{2(2^2+2)}{3}\Leftrightarrow 3<\frac{2\cdot 6}{3}\Leftrightarrow 3<4.$$

При $n = 2$ нерівність справедлива. Припустимо справедливість нерівності при $n = k,\ k \in N$. Тоді

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)<\frac{k(k^2+2)}{3}.$$

Покажемо істинність нерівності при $n = k + 1$:

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)+\left((k+1)^2-(k+1)+1\right)<\frac{(k+1)\left((k+1)^2+2\right)}{3};$$

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)+(k^2+k+1)<\frac{(k+1)(k^2+2k+1+2)}{3};$$

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)+(k^2+k+1)<\frac{k(k^2+2)}{3}+\frac{k(2k+1)+(k^2+2k+3)}{3};$$

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)+(k^2+k+1)<\frac{k(k^2+2)}{3}+\frac{3k^2+3k+3}{3};$$

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)+(k^2+k+1)<\frac{k(k^2+2)}{3}+(k^2+k+1);$$

$$3+7+13+\ldots+(k^2-k+1)<\frac{k(k^2+2)}{3}.$$

Остання нерівність справедлива внаслідок зробленого припущення. Отже, згідно з принципом математичної індукції нерівність виконується для всіх натуральних $n > 1$.

Приклад 14. Використовуючи методи диференціального числення, довести нерівність $a^6-a^4\geq 2a^5-16$ при $a\geq 2$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності: $a^6-a^4-2a^5+16$. Поставимо останньому виразу у відповідність функцію $f(a)=a^6-a^4-2a^5+16$ при $a\geq 2$.

Очевидно, що $f'(a)=6a^5-4a^3-10a^4$.

Для того щоб відшукати критичні точки функції, прирівняємо похідну до нуля:

$$6a^5-10a^4-4a^3=0,\quad 2a^3(3a^2-5a-2)=0,\quad a_1=0;\ a_2=2;\ a_3=-\frac{1}{3}.$$

За умовою $a\geq 2$. Знайдемо знак похідної на проміжку $[2;+\infty)$:

$$f'(3)=2\cdot 3^3(3\cdot 3^2-5\cdot 3-2)=540>0.$$

Отже, при $a\geq 2$ функція $f(a)=a^6-a^4-2a^5+16$ зростає. Найменшого значення на проміжку $[2;+\infty)$ функція набуває в точці $a=2$. Враховуючи, що $f(2)=0$, а також те, що функція зростаюча, маємо $a^6-a^4-2a^5+16\geq 0$ при $a\geq 2$. З останньої нерівності випливає $a^6-a^4\geq 2a^5-16$, що й потрібно було довести.

Приклад 15. Використовуючи графічний метод, довести, що $\sin x>\sin 2x$ для всіх $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Доведення. Побудуємо в системі координат xOy графіки функцій $y_1=\sin x$ і $y_2=\sin 2x$ (рис. 2.1).

При $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ усі точки графіка функції $y_2=\sin 2x$ розміщуються під віссю Ox, а всі точки графіка функції $y_1=\sin x$ — над цією віссю, що й доводить нерівність $\sin x>\sin 2x$ при $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

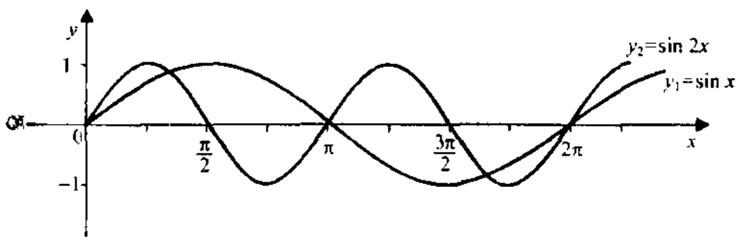


Рис. 2.1

Приклад 16. Використовуючи спеціальні нерівності, довести, що

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)\ge 2^n,$$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=1,\ a_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}.$$

Доведення. Оцінимо множники a_i+1, $i=\overline{1,n}$., використовуючи нерівність Коші $\frac{a_i+1}{2}\ge\sqrt{a_i}$, тобто $a_i+1\ge 2\sqrt{a_i}$. При $i=\overline{1,n}$ маємо

$$a_1+1\ge 2\sqrt{a_1};$$

$$a_2+1\ge 2\sqrt{a_2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n+1\ge 2\sqrt{a_n}.$$

Перемножимо почленно останні n нерівностей:

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)\ge 2^n\ \sqrt{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=2^n,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 17. Використовуючи спеціальні нерівності, довести

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2001\le 1001^{2001}.$$

Доведення. Задана нерівність рівносильна такій:

$$\sqrt[2001]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2001}\le 1001$$

За нерівністю Коші

$$\frac{1+2+3+\ldots+2001}{2001}\ge\sqrt[2001]{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2001}.$$

Але $1+2+3+\ldots+2001=\frac{1+2001}{2}\cdot 2001=1001\cdot 2001.$

Тому $\frac{1001\cdot 2001}{2001}=1001$, звідки $1001\ge\sqrt[2001]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2001}$, тобто

$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2001\le 1001^{2001}$, що й потрібно було довести.

Приклад 18. Використовуючи спеціальні нерівності, довести, що

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2 \text{ при } x_i>0,\ i=\overline{1,n}.$$

Доведення. Очевидно, що $x=(\sqrt{x})^2$ при $x\geq 0$. Використовуючи останню рівність, ліву частину вихідної нерівності запишемо так:

$$\left(\left(\sqrt{x_1}\right)^2+\left(\sqrt{x_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{x_n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x_1}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{x_2}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(\sqrt{x_n}\right)^2}\right)=$$

$$=\left(\left(\sqrt{x_1}\right)^2+\left(\sqrt{x_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{x_n}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right).$$

Застосовуючи нерівність Коші — Буняковського, записуємо:

$$\left(\left(\sqrt{x_1}\right)^2+\left(\sqrt{x_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{x_n}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right)\geq$$

$$\geq\left(\left(\sqrt{x_1}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+\left(\sqrt{x_2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{x_n}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right)^2=n^2,$$

тобто $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$, що й потрібно було довести.

2.2.3. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Довести нерівності:

56) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$ для всіх $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$;

57) $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, $a \ge 0$, $b \ge 0$;

58) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{2^n+1}<1$; 59) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 \ge 1$;

60) $a^4+b^4 \ge \dfrac{1}{8}$, якщо $a+b=1$; 61) $a^2+b^2 \ge \dfrac{1}{2}$, якщо $a+b=-1$;

62) $\dfrac{1}{|a|}+\dfrac{1}{|b|} \ge 2$, якщо $ab>0$, $|a|+|b|=2$;

63) $(a^2+b^2+c^2)^2 \ge (ab+bc+ac)^2$;

64) $a+\dfrac{1}{a} \ge 2$, якщо $a>0$; 65) $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

Конкурсний рівень

Довести нерівності:

66) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}<2$;

67) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$, якщо $a+b=c$, $a>0$, $b>0$;

68) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$; 69) $a^8b+ab^8 \le a^9+b^9$, якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$;

70) $a^4+b^4 \ge a^3b+b^3a$; 71) $x^7-x^6+x^5+1 \ge 2x^3$, якщо $x \ge 0$;

72) $\dfrac{x^2}{1+x^4} \le \dfrac{1}{2}$; 73) $x\sin x-x+\dfrac{\pi}{2}<1,6$, якщо $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

74) $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \le 3$; 75) $|5\sin x-12\cos x| \le 13$;

76) $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}<\dfrac{1}{12}$, $n \in N$;

77) $-5 \le 3\cos^2\alpha-2\sin 2\alpha-4 \le 0$.

2.3. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

2.3.1. Алгоритмічні приписи побудови графіків

1. **Функція** $y = f(x \pm |a|)$.

Алгоритмічний припис побудови графіка:

1) побудова графіка функції $y = f(x)$;
2) паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ **уздовж осі** Ox:

при знаку "–" перед $|a|$ — вправо на $|a|$;

при знаку "+" перед $|a|$ — вліво на $|a|$.

Контрольні точки: $(|a|; f(0))$ для $y = f(x - |a|)$; $(-|a|; f(0))$ для $y = f(x + |a|)$.

Приклади схематичної побудови графіків функцій (рис. 2.2, 2.3):

1) $y = (x+2)^2$; 2) $y = (x-2)^2$.

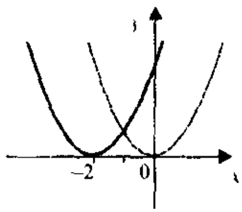


Рис. 2.2

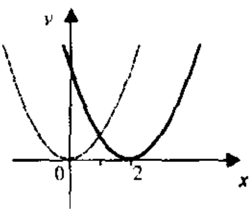


Рис. 2.3

2. **Функція** $y = f(x) \pm |b|$.

Алгоритмічний припис побудови графіка.

1) побудова графіка функції $y = f(x)$;
2) паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ **уздовж осі** Oy:

при знаку "+" — на $|b|$ вгору;

при знаку "–" — на $|b|$ вниз.

Контрольні точки: $(0; f(0)+|b|)$ для $y=f(x)+|b|$; $(0; f(0)-|b|)$ для $y=f(x)-|b|$.

Приклади схематичної побудови графіків функцій (рис. 2.4, 2.5):

3) $y=x^3+2$; 4) $y=x^3-2$.

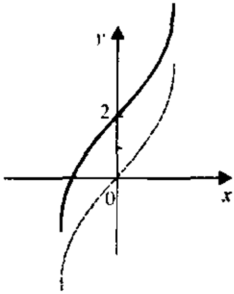


Рис. 2.4

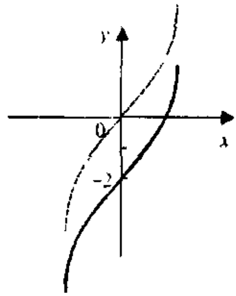


Рис. 2.5

3. Функція $y=f(ax)$, $a \neq 0$.

Алгоритмічний припис побудови графіка:

1) побудова графіка функції $y=f(x)$;

2) а) якщо $a=-1$, то графік функції $y=f(-x)$ отримується симетричним відображенням графіка функції $y=f(x)$ відносно осі Oy;

б) при $|a|>1$ стискання в $|a|$ разів до осі Oy;

в) при $0<|a|<1$ розтягування в $\frac{1}{|a|}$ разів від осі Oy.

Контрольні точки: $(x_0; f(ax_0))$ для будь-якої точки $x_0 \in D(f)$.

Приклади схематичної побудови графіків функцій (рис. 2.6–2.8):

5) $y=\sqrt{-x}$;

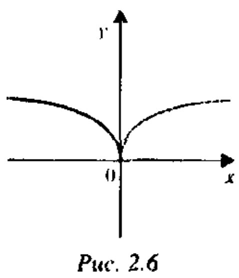


Рис. 2.6

6) $y = \sin 2x$;   7) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

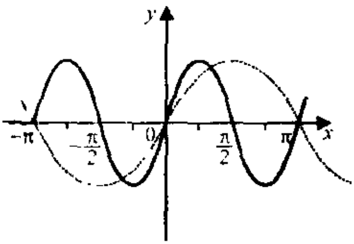


Рис. 2 7

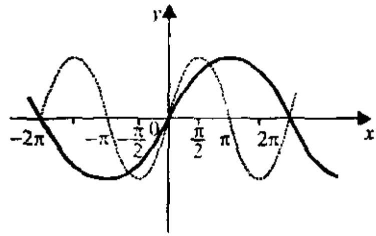


Рис. 2 8

4 **Функція** $y = bf(x), b \neq 0$.

Алгоритмічний припис побудови графіка:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

2) а) якщо $b = -1$, то графік функції $y = -f(x)$ отримується симетричним відображенням графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox;

б) при $|b| > 1$ розтягування в $|b|$ разів по осі Oy;

в) при $0 < |b| < 1$ стискання в $\frac{1}{|b|}$ разів по осі Oy.

Контрольні точки: $(x_0; bf(x_0))$ для будь-якої точки $x_0 \in D(f)$.

Приклади схематичної побудови графіків функцій (рис. 2.9– 2.11):

8) $y = -\sin x$;   9) $y = 2\sin x$;

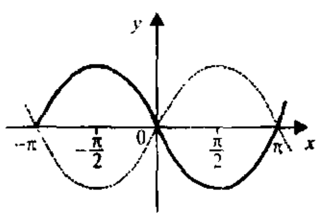


Рис. 2.9

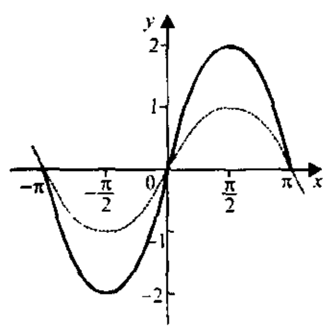


Рис. 2.10

$$10)\ y = \frac{1}{2}\sin x.$$

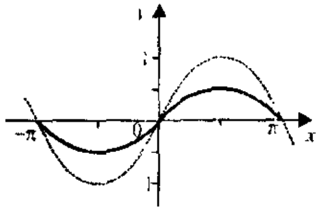


Рис. 2.11

5. Функція $y = |f(x)|$; $|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \ge 0; \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$

Алгоритмічний припис побудови графіка:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;
2) залишити без змін частину графіка, розміщену над віссю Ox і на осі Ox;
3) перетворити симетрично відносно осі Ox частину графіка, розміщену під цією віссю.

Контрольні точки: $(x_0; |f(x_0)|)$ для будь-якої точки $x_0 \in D(f)$.

Приклад схематичної побудови графіка функції (рис. 2.12):

$$11)\ y = |x^3|.$$

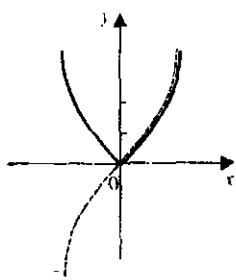


Рис. 2.12

6. Функція $y = f(|x|)$; $f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \ge 0; \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$

Алгоритмічний припис побудови графіка:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;
2) залишити без змін частину графіка розміщену ліворуч і на осі Oy;
3) побудувати симетричний йому графік відносно осі Oy.

Контрольні точки: $f\left(\left|x_0\right|\right) = f\left(\left|-x_0\right|\right)$ для будь-якої точки $x_0 \in D(f)$.

Точки $\left(x_0, f(x_0)\right)$, $\left(-x_0, f(-x_0)\right)$ належать до графіка і симетричні відносно осі Oy.

Приклад схематичної побудови графіка функції (рис. 2.13):

12) $y = \sqrt{|x|}$.

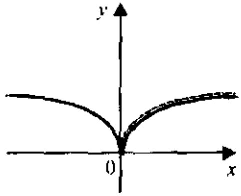


Рис. 2.13

7. **Рівність** $|y| = f(x)$.

Алгоритмічний припис побудови графіка:

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;
2) залишити без змін частину графіка, розміщену над віссю Ox і на осі Ox;
3) побудувати симетричний йому графік відносно осі Ox.

Приклад схематичної побудови графіка функції (рис. 2.14):

13) $|y| = x - 1$.

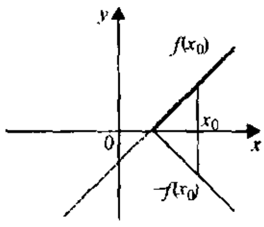
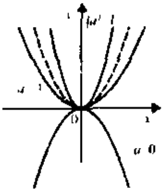
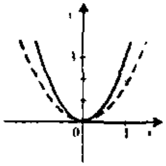
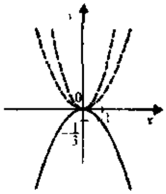
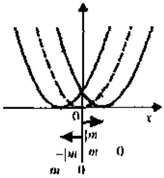
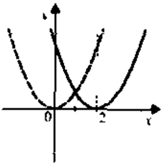
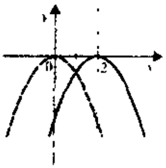
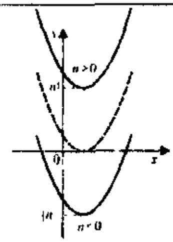
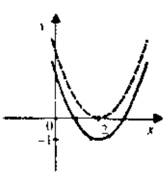
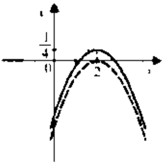


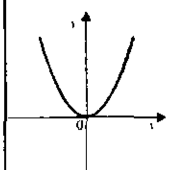
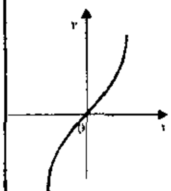
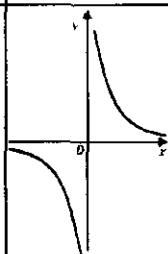
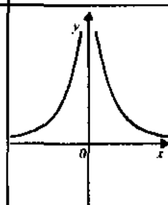
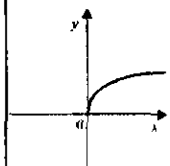
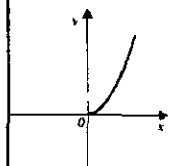
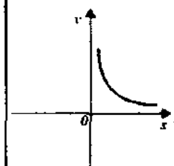
Рис. 2.14

Контрольні точки: $\left(x_0, f(x_0)\right)$ і $\left(x_0, -f(x_0)\right)$ належать до графіка для будь-якої точки $x_0 \in D(f)$.

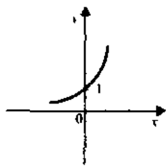
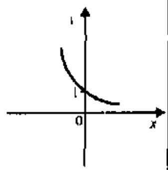
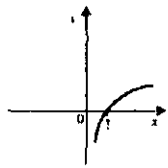
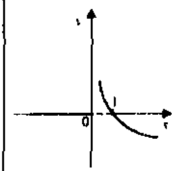
8. Побудова графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$.

№ пор	Алгоритмічний припис	Побудова графіка функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	Приклад	
			$y = 3x^2 - 12x + 11$	$y = -\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{12}$
1	Подати функцію у вигляді $y = a(x+m)^2 \pm n$	$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x+m)^2 \pm n$	$y = 3(x^2 - 4x + 4) - 1 = 3(x-2)^2 - 1$	$y = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 4) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + \frac{1}{4}$
2	а. При $\lvert a \rvert > 1$ розтягування графіка $y = x^2$ уздовж осі Oy в $\lvert a \rvert$ разів б. $\lvert a \rvert < 1$ – стискання в $\frac{1}{\lvert a \rvert}$ разів уздовж осі Oy. в. $a < 0$, після виконання п. а або п. б виконати симетричне відображення графіка відносно осі Ox	 *Рис. 2.15*	 *Рис. 2.16*	 *Рис. 2.17*
3	Паралельне перенесення графіка $y = ax^2$ вздовж осі Ox на $\lvert m \rvert$ одиниць вліво при $m > 0$ або вправо при $m < 0$	 *Рис. 2.18*	 *Рис. 2.19*	 *Рис. 2.20*
4	Паралельне перенесення графіка функції $y = a(x-m)^2$ вздовж осі Oy на $\lvert n \rvert$ одиниць вниз при $n < 0$ або на n одиниць вгору при $n > 0$	 *Рис. 2.21*	 *Рис. 2.22*	 *Рис. 2.23*

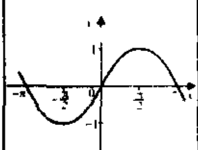
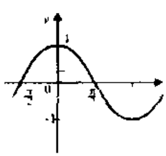
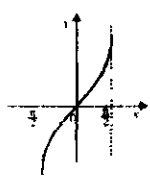
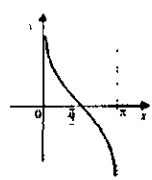
9. Степенева функція $y = x^{\alpha}$.

Значення	Функція	Графік
$\alpha = 2n$, $n \in N$	$y = x^{2n}$	 Рис. 2.24
$\alpha = 2n+1$, $n \in N$	$y = x^{2n+1}$	 Рис. 2.25
$\alpha = -(2n+1)$, $n \in N$	$y = \frac{1}{x^{2n+1}}$	 Рис. 2.26
$\alpha = -2n$, $n \in N$	$y = \frac{1}{x^{2n}}$	 Рис. 2.27
$0 < \alpha < 1$	$y = x^{\frac{n}{m}}$, $\frac{n}{m} < 1$	 Рис. 2.28
$\alpha > 1$, $\alpha \notin Z$	$y = x^{\frac{n}{m}}$, $\frac{n}{m} > 1$	 Рис. 2.29
$\alpha < 0$, $\alpha \notin Z$	$y = x^{\frac{n}{m}}$,	 Рис. 2.30

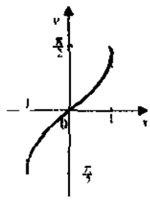
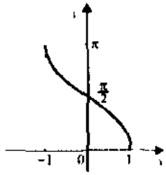
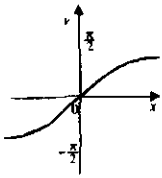
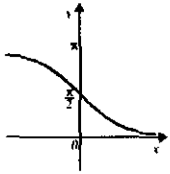
10. Показникова і логарифмічна функції.

Функція	$y = a^x$		$y = \log_a x$	
Значення	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Графік	 *Рис. 2.31*	 *Рис. 2.32*	 *Рис. 2.33*	 *Рис. 2.34*

11. Тригонометрична функція.

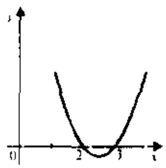
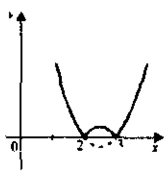
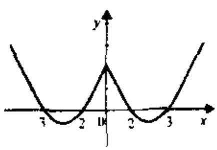
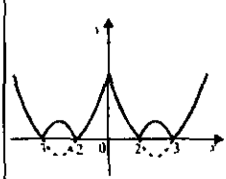
Значення	Функція			
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
$D(f)$	R	R	R, крім $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	R, крім $x = \pi k$, $k \in Z$
$E(f)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R	R
Графік	 *Рис. 2.35*	 *Рис. 2.36*	 *Рис. 2.37*	 *Рис. 2.38*

12. **Обернені тригонометричні функції.**

Значення	Функція			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcctg}\, x$
$D(f)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R	R
$E(f)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$[0, \pi]$
Графік	 Рис 2 39	 Рис 2 40	 Рис 2 41	 Рис 2 42

2.3.2. Приклади побудови графіків функцій

Приклад 1. Квадратична функція.

$y = ax^2 + bx + c$	$y = \lvert ax^2 + bx + c\rvert$	$y = ax^2 + b\lvert x\rvert + c$	$y = \lvert ax^2 + b\lvert x\rvert + c\rvert$
$y = x^2 - 5x + 6,$ $x_1 = 2,\ x_2 = 3$	$y = \lvert x^2 - 5x + 6\rvert$	$y = x^2 - 5\lvert x\rvert + 6$	$y = \lvert x^2 - 5\lvert x\rvert + 6\rvert$
 Рис 2 43	 Рис 2 44	 Рис 2 45	 Рис 2 46

Самоперевірка:

а) до $y=\left|x^2-5x+6\right|$, $x=2{,}5$, $y=\left|2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+6\right|>0$;

б) до $y=x^2-5\left|x\right|+6$, $\begin{cases} x=-2; \\ y=0; \end{cases}$

в) до $y=\left|x^2-5\left|x\right|+6\right|$, $\begin{cases} x=-3; \\ y=0. \end{cases}$

Приклад 2. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x+2}{x-3}$.

1. Виконаємо перетворення: $y=\dfrac{x-3+3+2}{x-3}$; $y=1+\dfrac{5}{x-3}$.

2. Побудуємо графік функції (рис. 2.47):

а) $y=\dfrac{1}{x}$;

б) $y=\dfrac{5}{x}$ — розтягування в 5 разів уздовж осі Oy;

в) $y=\dfrac{5}{x-3}$ — паралельне перенесення вздовж осі Ox на три одиниці вправо;

г) $y=1+\dfrac{5}{x-3}$ — паралельне перенесення вздовж осі Oy на одну одиницю вгору.

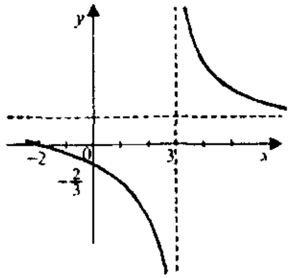


Рис. 2.47

Приклад 3.

$$y=\begin{cases} 2^x, & \text{якщо } x\le -1; \\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } -1<x<0; \\ \lg x, & \text{якщо } x>0. \end{cases}$$

1 Наносимо межі зміни x на осі Ox.

2. Через межі проводимо прямі паралельно осі Oy.

3. Зображуємо графіки зазначених функцій і залишаємо лише ті частини, що відповідають заданим проміжкам (рис. 2.48)

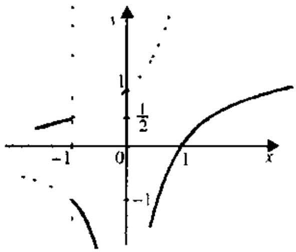


Рис 2 48

Приклад 4. $y = 2^{\log_2 \operatorname{tg} x}$.

1) $D(f): \begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \quad k \in Z;$

2) $\begin{cases} y = \operatorname{tg} x, \\ D(f) \end{cases}$

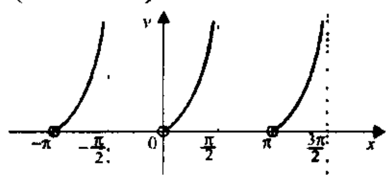


Рис 2 49

Приклад 5. $y = -\pi^x$.

1) $y = \pi^x$;

2) $y = -\pi^x$ (алгоритм. припис 4 п. 2.3.1).

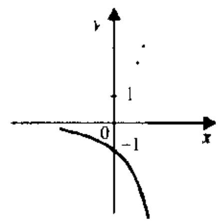


Рис 2 50

Приклад 6. $y = -\sqrt{x} + 1{,}5$.

1) $y = \sqrt{x}$;

2) $y = -\sqrt{x}$ (алгоритм. припис 4 п. 2.3.1);

3) $y = -\sqrt{x} + 1{,}5$ (алгоритм. припис 2 п. 2.3.1).

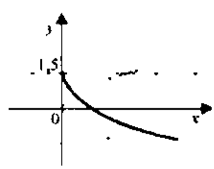


Рис 2 51

Приклад 7. $y = -3\sin(x - 0,5\pi)$.

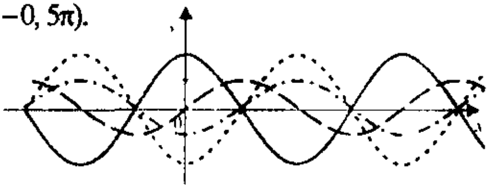


Рис 2 52

1-й спосіб:

1) $y = \sin x$;

2) $y = \sin(x - 0,5\pi)$ (алгоритм. припис 1 п. 2.3.1);

3) $y = 3\sin(x - 0,5\pi)$ (алгоритм. припис 4 п. 2.3.1);

4) $y = -3\sin(x - 0,5\pi)$ (алгоритм. припис 4 п. 2.3.1).

2-й спосіб. Ураховуючи непарність функції $y = \sin x$, виконуємо перетворення $y = \sin(x - 0,5\pi)$. Використовуючи формулу зведення, маємо $y = 3\cos x$.

Приклад 8. $y = \sin(\arcsin x)$.

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1; \\ y = x. \end{cases}$$

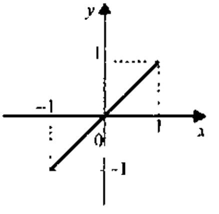


Рис. 2.53

Приклад 9. $y = 10^{\lg(9-x^2)}$.

$$\begin{cases} y = 9 - x^2, \\ 9 - x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9 - x^2, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$$

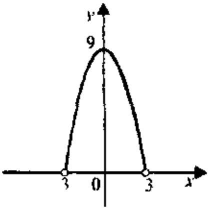


Рис. 2.54

Приклад 10. $y = \log_{\sin x} \sin x$.

$$\begin{cases} y = 1, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \ne 1; \end{cases}$$

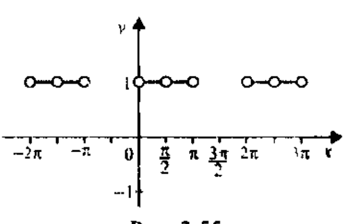


Рис. 2.55

$$\begin{cases} y = 1, \\ x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k), \quad k \in Z, \\ x \neq \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Приклад 11. $y = x \sin x$.

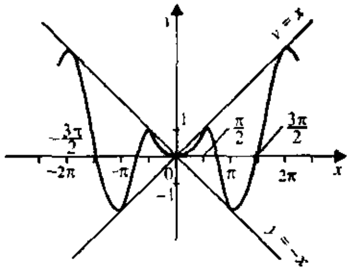


Рис 2.56

1) $D(f) = R$;

2) оскільки функція парна, тобто

$$f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x = f(x),$$

дослідимо її для $x \in [0; +\infty)$;

3) $y = 0$ при $x = \pi k, \quad k \in Z$;

4) при $x > 0$ маємо $y > 0$, якщо $\sin x > 0$;
$y < 0$, якщо $\sin x < 0$;

5) при $x > 0$ функція зростає (спадає) у проміжках, де зростає (спадає) функція $y = \sin x$.

Приклад 12. $y = \dfrac{|x|}{x^2}$.

$D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = -\dfrac{1}{x}. \end{cases} \end{array}\right.$$

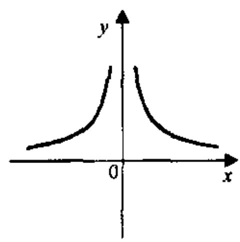


Рис 2.57

Приклад 13. $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$.

$D(f): x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

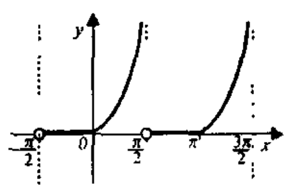


Рис 2.58

$$y=\operatorname{tg} x+|\operatorname{tg} x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{tg} x>0,\\ y=2\operatorname{tg} x;\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\le 0,\\ y=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right), \quad k\in Z,\\ y=2\operatorname{tg} x;\end{cases}\\ \begin{cases}x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi k\right], \quad k\in Z,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Приклад 14. Зобразити на площині множину точок, координати яких задовольняють рівняння $|x|+|y|=1$.

1-й спосіб. Оскільки $|x|$, $|y|$ невід'ємні, то

$$\begin{cases}|x|\le 1,\\ |y|\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1,\\ -1\le y\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ x+y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ y<0,\\ x-y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ y\le 0,\\ x+y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y>0,\\ -x+y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

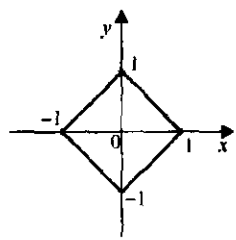


Рис. 2.59

2-й спосіб. Фігура симетрична відносно осей координат, тому достатньо побудувати її в першому квадранті.

Приклад 15. $y=-\sqrt{2x-x^2}$.

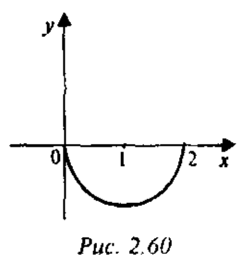


Рис. 2.60

1) $D(f): 2x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;\ 2]$;

2) $y\le 0$;

$$\begin{cases} y^2 = \left(-\sqrt{2x-x^2}\right)^2, \\ y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x - x^2, \\ y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ y \le 0. \end{cases}$$

Маємо півколо з центром у точці (1; 0) радіуса $R = 1$, що лежить у нижній півплощині.

Приклад 16. $y = \log_2\left(2-|x|\right)$.

1-й спосіб.

$D(f): 2-|x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2; 2)$;

$$y = \log_2\left(2-|x|\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2 < x < 0, \\ y = \log_2(2+x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 2, \\ y = \log_2(2-x). \end{cases} \end{array} \right.$$

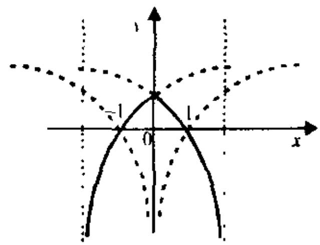


Рис. 2.61

2-й спосіб.

1) Будується графік для $x \in [0; 2]$;

2) Враховуючи парність функції добудова графіка здійснюється шляхом симетрії відносно осі Oy

Приклад 17. $y = 2|x+3| - |x+1| - |x| - 1$.

1. Знаходимо нулі виразів, що стоять під знаком модуля:

$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3;$$
$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1;$$
$$x=0.$$

2. З'ясовуємо знаки значення підмодульних виразів на кожному з проміжків, на які розбивають вісь Ox знайдені значення.

Вираз	$(-\infty,-3)$	$(-3;-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
$x+3$	–	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+
x	–	–	–	+

3. Визначаємо вид функції для кожного проміжку

$$
\begin{aligned}
&-\infty < x < -3 && y = -2(x+3)+(x+1)+x-1 \Leftrightarrow y = -6,\\
&-3 \le x \le -1 && y = 2(x+3)-(x+1)+x-1 \Leftrightarrow y = 4x+6,\\
&-1 < x < 0 && y = 2(x+3)-(x+1)+x-1 \Leftrightarrow y = 2x+4,\\
&0 \le x < +\infty && y = 2(x+3)-(x+1)-x-1 \Leftrightarrow y = 4
\end{aligned}
$$

4 Будуємо графік функції на кожному проміжку (рис 2 62)

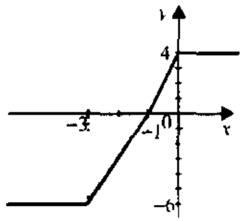


Рис 2 62

2.3.3. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Побудувати графіки функцій

78) $y = \dfrac{1}{x+3}$,

79) $y = \dfrac{2-x}{3x+1}$,

80) $y = -\sqrt{x-1}$,

81) $y = x^2 + 7|x| + 6$,

82) $y = \left|x^2 + 7|x| + 6\right|$,

83) $y = |x^3| - 4$,

84) $y = |-x^2 - x + 6|$,

85) $y = \pi^{\log_\pi \sin x}$,

86) $y = -2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$,

87) $y = |\operatorname{tg} x| + 1,5$,

88) $y = \log_\pi(x-3)$,

89) $y = |x-4| + 5$,

90) $y = \left|\dfrac{1}{2}\right|^x$,

91) $y = \lg_{\frac{1}{2}}(-x)$,

92) $y = \begin{cases} 2^x, \text{ якщо } & x \ge 0,\\ -x, \text{ якщо } & x < 0,\end{cases}$

93) $y = |\arcsin x|$,

94) $y = \arccos|x|$;

95) $y = \dfrac{|\text{tg } x|}{\text{tg } x}$;

96) $y = \dfrac{|2^x - 1|}{2^x - 1}$.

Конкурсний рівень

Побудувати графіки функцій:

97) $y = |4x^2 - 1| - 3x$;

98) $y = 3^{\frac{x^2}{|x|}}$;

99) $y = |\sin x| + \sin|x|$;

100) $y = \lg_{\cos x} \cos x$;

101) $y = \text{arctg}(\text{tg } x)$;

102) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;

103) $|y| = \dfrac{1}{\frac{x-1}{x}}$;

104) $|y| = \cos x$;

105) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{\cos^2 x}}$;

106) $|y| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

107) $y = \text{tg}(\text{arctg } x)$;

108) $y = \sin(\arccos x)$;

109) $y = \text{tg}(\text{arcctg } x)$;

110) $y = |\log_\pi |x||$;

111) $y = ||x| - 1|$;

112) $y = |\log_3(|x| - 2)|$;

113) $y = 2^{\arcsin x}$;

114) $y = (x^2 - 1)\log_x \sqrt{x}$;

115) $y = \sqrt{|x| - 2}$.

Для 103, 104, 106 зобразити на площині множину точок, координати яких задовольняють наведеним рівностям.

2.4. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

2.4.1. Основні поняття та їх означення

Опорний конспект

Основні поняття, пов'язані з рівняннями і нерівностями, і їх означення		
Поняття	Рівняння	Нерівності
	Означення	
1 *Рівняння* (нерівність)	Рівність із змінною, *відносно якої потрібно* встановити, для яких її значень (можливо, таких значень і не існує) рівність перетворюється у правильну числову рівність, *називається рівнянням*	Означення аналогічне
2 **Розв'язок**	Коренем (розв'язком) рівняння з однією змінною *називається значення* змінної, при якому рівняння перетворюється у правильну числову рівність, або, інакше кажучи, при якому змінна задовольняє *рівняння*	Розв'язком нерівності з однією змінною називається значення *змінної, яке перетворює її у* правильну числову нерівність
3 ОДЗ (область допустимих *значень*)	Областю визначення рівняння, або областю *допустимих значень* заданого рівняння, називають множину всіх значень змінної, для яких ліва і права частини рівняння не втрачають *смислу*	**Означення аналогічне**
4 Рівносильні рівняння (нерівності)	Рівняння, які мають однакові множини розв'язків	Означення **аналогічне**
5 Розв'язати рівняння (нерівність)	Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені (розв'язки) або довести, *що їх немає*	Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що нерівність *розв'язків не має*

2.4.2. Основні теореми для розв'язання раціональних рівнянь

Теорема 1 (узагальнена теорема Віста).

Якщо $x_1, x_2, ..., x_n$ — корені рівняння $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$, то мають місце такі рівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0}; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}\ x_n = \dfrac{a_2}{a_0}; \\ x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n = -\dfrac{a_3}{a_0}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n\ \dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

Якщо $n = 2$, то $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Якщо $n = 3$, то $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}; \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Теорема 2. Якщо зведене з алгебраїчного рівняння $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ з цілими коефіцієнтами має раціональний корінь, то цей корінь — ціле число, що є дільником вільного члена a_n.

Теорема 3. Щоб раціональне число $\dfrac{p}{q}$ (нескоротний дріб) було коренем рівняння з цілими коефіцієнтами $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ необхідно, щоб число:

1) p було дільником вільного члена a_n;

2) q було дільником старшого коефіцієнта a_0.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то рівняння $f(x) = a$ може мати не більше одного кореня на цьому проміжку (рис. 2.63).

Теорема 5. Якщо функція $f(x)$ спадає, а $\varphi(x)$ — зростає на деякому проміжку, то рівняння $f(x)=\varphi(x)$ може мати не більше одного кореня на цьому проміжку (рис. 2.64).

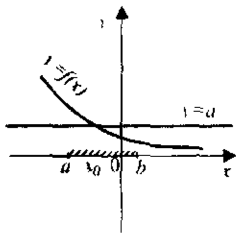


Рис. 2.63

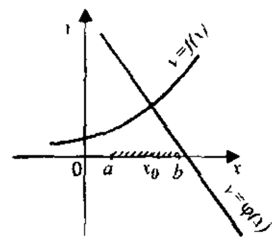


Рис. 2.64

2.4.3. Найпростіші види раціональних рівнянь і способи їх розв'язання

№ пор	Вид рівняння	Спосіб розв'язання
1	*Лінійне* $ax=b$ $(a\neq 0)$	$x=\dfrac{b}{a}$
2	$ax+b=cx+d$ зводиться до лінійного	$ax-cx=d-b$, $(a-c)x=d-b$, розв'язуємо як 1
3	$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0$	$x-x_1=0$, $x=x_1$, $x-x_2=0$, $x=x_2$, … $x-x_n=0$, $x=x_n$
4	Квадратне $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$	За формулою $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D=b^2-4ac\geq 0$
5	$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, $a_0\neq 0$, $n\geq 3$, $a_0,\ldots,a_n$ — цілі	Звести до вигляду 3 розкладанням на множники лівої частини
6	Раціональне $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}+\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}+\ldots=0$	Зводиться до вигляду $\dfrac{F(x)}{G(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)=0, \\ G(x)\neq 0 \end{cases}$

2.4.4. Деякі методи і прийоми розв'язання раціональних рівнянь вищих степенів

1. Симетричне рівняння $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + cx^2 + bx + a = 0$.

а. $n = 2k$ (парного степеня).

Алгоритмічний припис:

1) ділимо праву і ліву частини рівняння на x^k;

2) групуємо: $a\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + b\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + ... + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + f = 0$;

3) виконуємо заміну: $y = x + \frac{1}{x}$.

б. $n = 2k + 1$ (непарного степеня).

Алгоритмічний припис:

1) ділимо на двочлен $x + 1$;

2) одержане симетричне рівняння парного степеня розв'язуємо за попереднім алгоритмом.

2. Рівняння вигляду $(ax^2 + bx + c_1)(ax^2 + bx + c_2) = A$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Виконуємо заміну: $ax^2 + bx = y$.

3. Рівняння вигляду $(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = Ax^2$, де $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Алгоритмічний припис:

1) ділимо праву і ліву частини рівняння на x^2;

2) одержуємо $(ax + \frac{c}{x} + b_1)(ax + \frac{c}{x} + b_2) = A$;

3) виконуємо заміну: $ax + \frac{c}{x} = y$.

4. Рівняння вигляду

$$\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = p; \qquad \frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} + \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A.$$

Алгоритмічний припис:

1) ділимо чисельник і знаменник кожного доданку в лівій частині рівняння на x;

2) виконуємо заміну: $ax + \frac{c}{x} = y$.

5. Рівняння вигляду $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)(a_4x+b_4)=A.$

Алгоритмічний припис:

1) ділимо обидві частини рівняння на добуток $a_1a_2a_3a_4$;

2) одержуємо $\left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)\left(x+\frac{b_2}{a_2}\right)\left(x+\frac{b_3}{a_3}\right)\left(x+\frac{b_4}{a_4}\right)=\frac{A}{a_1a_2a_3a_4}$.

Якщо $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}$, то початкове рівняння зводиться до рівняння вигляду 2.

6. Рівняння має вигляд $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)(a_4x+b_4)=Ax^2$.

Алгоритмічний припис:

1) ділимо обидві частини рівняння на добуток $a_1a_2a_3a_4$;

2) попарно перемножуємо відповідні множники $\frac{b_1}{a_1}$ і $\frac{b_2}{a_2}$; $\frac{b_3}{a_3}$ і $\frac{b_4}{a_4}$;

3) якщо $\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}\frac{b_4}{a_4}$, то рівняння, зведене до вигляду

$$\left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)\left(x+\frac{b_2}{a_2}\right)\left(x+\frac{b_3}{a_3}\right)\left(x+\frac{b_4}{a_4}\right)=\frac{Ax^2}{a_1a_2a_3a_4},$$

зводиться до рівняння вигляду 3.

7. Рівняння має вигляд

$$(x+a)^{2n}+(x+b)^{2n}=A, \quad (x+a)^{2n+1}-(x+b)^{2n+1}=A.$$

Виконуємо заміну: $x=t-c$, де $c=\frac{a+b}{2}$.

8. Рівняння має вигляд $\frac{a_1x+b_1}{d_1x+c_1}+\frac{a_2x+b_2}{d_2x+c_2}+\ldots+\frac{a_kx+b_k}{d_kx+c_k}=A.$

Кожний доданок подаємо у вигляді $\frac{a_ix+b_i}{d_ix+c_i}=m_i+\frac{n_i}{x+p_i}$,

де m_i, n_i, p_i — деякі комбінації чисел a_i, b_i, c_i, d_i, $i=\overline{1,4}$.

9. Рівняння має вигляд $\dfrac{f(x)+A}{f(x)+B}+\dfrac{f(x)+C}{f(x)+D}=P.$

Виконуємо заміну: $f(x)=y$.

10. Однорідне рівняння

$$A_0f^n(x)+A_1f^{n-1}(x)\varphi(x)+\ldots+A_{n-1}f(x)\varphi^{n-1}(x)+A_n\varphi^n(x)=0,$$

де $n>1$ — натуральне число; $A_0\neq 0$, $A_n\neq 0$, $f(x)$, $\varphi(x)$ — функції.

Алгоритмічний припис.

1. Ділимо обидві частини рівняння або на $\varphi^n(x)\neq 0$:

$$A_0\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^n+A_1\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}+A_n=0,$$

або на $f^n(x)\neq 0$:

$$A_0+A_1\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\ldots+A_{n-1}\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)^{n-1}+A_n\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)^n=0.$$

2. Заміна $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=y$ у першому випадку або $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=y$ у другому зводить задане рівняння до рівняння першого виду.

2.4.5. Приклади розв'язання рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0.$$

1-й спосіб. Розкладання на множники методом групування:

$$x^4-x^3-9x^3+9x^2+26x^2-26x-24x+24=0,$$

$$(x^4-x^3)-(9x^3-9x^2)+(26x^2-26x)-24x+24=0,$$

$$x^3(x-1)-9x^2(x-1)+26x(x-1)-24(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x^3-9x^2+26x-24)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^3-9x^2+26x-24=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x^3-9x^2+27x-x-27+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ (x^3-9x^2+27x-27)-(x-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ (x-3)^3-(x-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ (x-3)(x^2-6x+9-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x-3=0, \\ x^2-6x+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3, \\ x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

2-й спосіб. Метод заміни.

Задане рівняння рівносильне

$$(x^4-10x^3+25x^2)+10(x^2-5x)+24=0,$$
$$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0.$$

Виконавши заміну $x^2-5x=y$, одержимо $y^2+10y+24=0$,

$$\left[\begin{array}{l} y=-4, \\ y=-6; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x=-4, \\ x^2-5x=-6; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0, \\ x^2-5x+6=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

3-й спосіб. Використання теореми 2 п.2.4.2 і ділення многочлена на многочлен.

1. Записуємо множину дільників вільного члена рівняння:

$$\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm8,\ \pm12,\ \pm24\}.$$

2. Способом підстановки відбираємо корені рівняння: 1; 2;

$$(x-1)(x-2)=x^2-3x+2.$$

3. Знижуємо степінь рівняння, застосовуючи схему Горнера або “ділення кутом”:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4-10x^3+35x^2-50x+24 \\ \underline{x^4-3x^3+\ \ 2x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2-3x+2} \\ x^2-7x+12 \end{array} \\
-\begin{array}{l} -7x^3+33x^2-50x+24 \\ \underline{-7x^3+21x^2-14x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 12x^2-36x+24 \\ \underline{12x^2-36x+24} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

4. Якщо степінь частки не перевищує 2, то процес знаходження коренів зводиться до розв'язання квадратних або лінійних рівнянь, у противному разі слід повернутися до п. 2.

Знаходимо корені рівняння $x^2-7x+12=0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $x=3$, $x=4$.

Відповідь: $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

4-й спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів.

1. Подамо многочлен лівої частини рівняння у вигляді добутку многочленів степеня, нижчого від заданого, сума степенів яких дорівнює степеню рівняння

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=(x^2+c_1x+c_2)(x^2+d_1x+d_2),$$

де c_1, c_2, d_1, d_2 — невідомі коефіцієнти.

Отже,

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=x^4+(c_1+d_1)x^3+(c_2+d_2+c_1d_1)x^2+$$
$$+(c_2d_1+c_1d_2)x+c_2d_2.$$

2. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності.

$$\begin{cases} c_1+d_1=-10, \\ c_2+d_2+c_1d_1=35, \\ c_2d_1+c_1d_2=-50, \\ c_2d_2=24. \end{cases}$$

3. Розв'язуємо систему (враховуючи, що розв'язки повинні бути цілими числами).

Якщо $d_2 = 6$, $c_2 = 4$ (з останнього рівняння), то $c_1 d_1 = 25$ (з другого рівняння), а тому, враховуючи перше рівняння, $c_1 = d_1 = -5$.

4. Одержуємо рівняння, еквівалентне вихідному:

$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=4, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $9x^3-15x^2-32x-12=0$.

Спосіб. На основі теореми 3.

1. Записуємо множину дільників вільного члена рівняння:

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12\}.$$

2. Записуємо множину дільників коефіцієнта старшого члена многочлена рівняння: $\{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9\}$.

3. Записуємо кілька можливих коренів рівняння: $\left\{\pm\frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 3\right\}$.

4. Підстановкою відбираємо корені рівняння: $x = 3$.

5. Знижуємо степінь рівняння "діленням кутом":

$$\begin{array}{r|l} 9x^3-15x^2-32x-12 & x-3 \\ \cline{2-2} -\ \underline{9x^3-27x^2} \qquad\qquad\quad & 9x^2+12x+4 \\ 12x^2-32x-12 & \\ -\ \underline{12x^2-36x} \qquad & \\ 4x-12 & \\ -\ \underline{4x-12} & \\ 0 & \end{array}$$

$$9x^3-15x^2-32x-12=(9x^2+12x+4)(x-3).$$

Ділення можна також виконати за схемою Горнера. Якщо многочлен $P_n(x) = a_0x^n + ... + a_{n-1}x + a_n$ поділити на $x - \alpha$, то схема Горнера набере такого вигляду:

α	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
	b_0	$b_1 = b_0\alpha + a_1$	...	$b_{n-1} = b_{n-2}\alpha + a_{n-1}$	$r = b_{n-1}\alpha + a_n$

де r — остача

3	9	–15	–32	–12
	9	12	4	0

6. Розв'язуємо рівняння $9x^2 + 12x + 4 = 0$:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18}, \quad x = -\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\{3;\ -\frac{2}{3}\}$.

Приклад 3. Розв'язати **рівняння** $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.

Спосіб. Як **симетричне рівняння парного степеня за алгоритмом 1, випадок** а п. 6.

1. Ділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$:

$$6\frac{x^4}{x^2} - 13\frac{x^3}{x^2} + 12\frac{x^2}{x^2} - 13\frac{x}{x^2} + 6\frac{1}{x^2} = 0,$$

$$6x^2 - 13x + 12 - 13\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0.$$

2. Групуємо: $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$

3. Вводимо заміну: $x + \frac{1}{x} = y;$

$$6(y^2 - 2) - 13y + 12 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 - 13y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{13}{6}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

4. Ураховуючи заміну, одержуємо

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=0, \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=0, \\ 6x^2-13x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x=\dfrac{13\pm5}{12} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, \\ x=\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{3}\right\}$.

Приклад 4. *Розв'язати рівняння* $12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0$.

Спосіб. Як симетричне рівняння непарного степеня за алгоритмом 1, випадок б п. 6.

1. Ділимо обидві частини рівняння на $x+1$:

$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ 12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0 \end{array}\right.$ — симетричне рівняння парного степеня.

2. Ділимо обидві частини другого рівняння системи на x^2:

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ 12x^2-4x-41-4\ \dfrac{1}{x}+12\ \dfrac{1}{x^2}=0. \end{array}\right.$$

3. Групуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ 12\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-41=0. \end{array}\right.$$

4. **Виконуємо** заміну: $x+\dfrac{1}{x}=y$;

$$12(y^2-2)-4y-41=0,$$

$$12y^2-4y-65=0,$$

$$y=\frac{5}{2}, \quad \text{або} \quad y=-\frac{13}{6}.$$

5. Ураховуючи заміну, одержуємо

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}, \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{13}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ 2x^2-5x+2=0, \\ 6x^2+13x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \\ x=0,5, \\ x=-\dfrac{3}{2}, \\ x=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{-1;\ 0{,}5;\ -\dfrac{2}{3};\ -1{,}5;\ 2\right\}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2+x-3)(x^2+x-4)-12=0$.

Спосіб. Виконуємо заміну $x^2+x=y$ (випадок 2 п. 6);

$$(y-3)(y-4)-12=0 \Leftrightarrow y^2-7y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=7. \end{array}\right.$$

Ураховуючи заміну, маємо

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x=0, \\ x^2+x=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ \ x=-1, \\ x^2+x-7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ \ x=-1, \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{0;\ \ -1;\ \ \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2};\ \ \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=15$.

Спосіб. Перемножуємо по два множники так, щоб добутки відрізнялися на сталу (випадок 2 п. 6): $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-15=0$.

Виконуємо заміну: $x^2-5x=y$;

$$(y+4)(y+6)-15=0 \Leftrightarrow y^2+10y+24-15=0 \Leftrightarrow y^2+10y+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-9, \\ y=-1. \end{array}\right.$$

Ураховуючи заміну, маємо

$$\left[\begin{array}{l} x^2-5x=-9, \\ x^2-5x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+9=0, \\ x^2-5x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}, \\ x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{5-\sqrt{21}}{2};\ \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

Розділимо праву і ліву частини рівняння на добуток $12\cdot 6\cdot 4\cdot 3$:

$$\left(x-\frac{1}{12}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12\cdot 6\cdot 4\cdot 3}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}$, то одержане рівняння зводимо до випадку 2 п. 6:

$$\left(x^2-\frac{5}{12}x+\frac{1}{36}\right)\left(x^2-\frac{5}{12}x+\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{12\cdot 72}.$$

Виконуємо заміну: $x^2-\dfrac{5}{12}x=y$;

$$\left(y+\frac{1}{36}\right)\left(y+\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{12\cdot 72},\quad (36y+1)(24y+1)=5,$$

$$216y^2+15y-1=0,\quad \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{9}, \\ y=\dfrac{1}{24}. \end{array}\right.$$

Задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\dfrac{5}{12}x=-\dfrac{1}{9}, \\ x^2-\dfrac{5}{12}x=\dfrac{1}{24} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36x^2-15x+4=0, \\ 24x^2-10x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ x=-\dfrac{1}{12}, \\ x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{-\frac{1}{12};\ \frac{1}{2}\right\}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$(x^2-4x+3)^2+x(x^2-4x+3)-6x^2=0.$$

Спосіб. Ділення на $x^2\neq 0$.

$$\left(\frac{x^2-4x+3}{x}\right)^2+\frac{x^2-4x+3}{x}-6=0.$$

Виконуємо заміну: $\frac{x^2-4x+3}{x}=y;$

$$y^2+y-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=-3. \end{array}\right.$$

Вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4x+3}{x}=2, \\ \dfrac{x^2-4x+3}{x}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-4x+3-2x}{x}=0, \\ \dfrac{x^2-4x+3+3x}{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-6x+3=0, \\ x^2-x+3=0, \end{array}\right. \\ x\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=3\pm\sqrt{6}.$$

Відповідь: $\{3-\sqrt{6};\ 3+\sqrt{6}\}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} x\neq 0, \\ x^2-6x-9\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq 0, \\ x\neq 3\pm 3\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Спосіб. Ділимо чисельник і знаменник кожного дробу на $x\neq 0$. Згідно з випадком 4 п. 6 маємо

$$\frac{x-6-\frac{9}{x}}{1}=\frac{x-4-\frac{9}{x}}{x-6-\frac{9}{x}}.$$

Виконуємо заміну: $x-\frac{9}{x}=y$;

$$y-6=\frac{y-4}{y-6}\Leftrightarrow y-6-\frac{y-4}{y-6}=0\Leftrightarrow\frac{y^2-12y+36-y+4}{y-6}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2-13y+40}{y-6}=0\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-13y+40=0,\\ y-6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=8,\\ y=5,\end{array}\right.\\ y\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=8,\\ y=5.\end{array}\right.$$

Вихідне рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-\frac{9}{x}=8,\\ x-\frac{9}{x}=5\end{array}\right.\\ x\neq 0,\\ x\neq 3\pm3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-8x-9=0,\\ x^2-5x-9=0\end{array}\right.\\ x\neq 0,\\ x\neq 3\pm3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=9,\\ x=-1,\\ x=\frac{5+\sqrt{61}}{2},\\ x=\frac{5-\sqrt{61}}{2}.\end{array}\right.\\ x\neq 0,\\ x\neq 3\pm3\sqrt{2}\end{cases}$$

Відповідь: $\left\{-1;\,9;\,\frac{5-\sqrt{61}}{2};\,\frac{5+\sqrt{61}}{2}\right\}$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2.$$

Спосіб. **Ділення** обох частин рівняння на $x^2\neq 0$ ($x=0$ перевіряємо **підстановкою). Згідно** з випадком 3 п. 6 маємо

$$\left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9.$$

Виконуємо заміну: $2x+\frac{1}{x}=y$;

$$(y-3)(y+5)=9 \Leftrightarrow y^2+2y-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=-6; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{1}{x}=4, \\ 2x+\dfrac{1}{x}=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x+1=0, \\ 2x^2+6x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}, \\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}=\dfrac{28}{5}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{2}\right)$.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Спосіб. Доповнення до повного квадрата двочлена

$$\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{x}=\frac{28}{5}\left(\frac{3}{x}-\frac{x}{2}\right)-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)^2+\frac{28}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)+3=0.$$

Виконуємо заміну: $\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=y$; $\quad 5y^2+28y+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5, \\ y=-\dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$

Вихідне рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=-5, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+10x-6=0, \\ 5x^2+6x-30=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5\pm\sqrt{31}, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{159}}{5}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{-5\pm\sqrt{31}; \dfrac{3\pm\sqrt{159}}{5}\right\}$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\cdot\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\cdot\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585};$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x-8}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-24}-\frac{2}{13}\cdot\frac{x^2-2x-35}{x^2-2x-48}=\frac{92}{585}.$$

Виконуємо заміну: $x^2-2x-3=y$;

$$\frac{1}{5}\frac{y}{y-5}+\frac{1}{9}\frac{y-12}{y-21}-\frac{2}{13}\frac{y-32}{y-45}=\frac{92}{585}.$$

Ураховуючи, що $\frac{92}{585}$ можна подати у вигляді

$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13}=\frac{92}{585}$, останнє рівняння рівносильне такому:

$$\frac{1}{5}\left(\frac{y}{y-5}-1\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{y-12}{y-21}-1\right)-\frac{2}{13}\left(\frac{y-32}{y-45}-1\right)=0;$$

$$\frac{1}{5}\frac{5}{y-5}+\frac{1}{9}\frac{9}{y-21}-\frac{2}{13}\frac{13}{y-45}=0;\quad \frac{1}{y-5}+\frac{1}{y-21}-\frac{2}{y-45}=0;$$

$$\left(\frac{1}{y-5}-\frac{1}{y-45}\right)+\left(\frac{1}{y-21}-\frac{1}{y-45}\right)=0;$$

$$\frac{40}{(y-5)(y-45)}+\frac{24}{(y-21)(y-45)}=0;$$

$$\frac{5}{y-5}=-\frac{3}{y-21};\ 5y-105=-3y+15;\ y=15.$$

Вихідне рівняння рівносильне такому:

$$x^2-2x-3=15\Leftrightarrow x^2-2x-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{19},\\ x=1-\sqrt{19}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1+\sqrt{19};1-\sqrt{19}\}$.

2.4.6. Штучні способи розв'язання алгебраїчних рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(4x+2)^4+(x-3)^4=(2x+4)^4+(3x-1)^4.$$

Перерозподілимо доданки так, щоб **можна було розкласти на** множники обидві частини рівняння:

$$(4x+2)^4-(3x-1)^4=(2x+4)^4-(x-3)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((4x+2)^2+(3x-1)^2)((4x+2)^2-(3x-1)^2)=$$

$$=((2x+4)^2+(x-3)^2)((2x+4)^2-(x-3)^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(5x^2+2x+1)(7x^2+22x+3)=5(x^2+2x+5)(3x^2+22x+7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2+2x+1}{x^2+2x+5}=\frac{3x^2+22x+7}{7x^2+22x+3} \Leftrightarrow \frac{5x^2+2x+1}{x^2+2x+5}-1=\frac{3x^2+22x+7}{7x^2+22x+3}-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x^2-1)}{x^2+2x+5}=-\frac{4(x^2-1)}{7x^2+22x-3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0, \\ \dfrac{1}{x^2+2x+5}=-\dfrac{1}{7x^2+22x-3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1, \\ x=\dfrac{1}{2}(-3\pm\sqrt{8}). \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\pm 1; \dfrac{1}{2}(-3\pm\sqrt{8})\right\}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2+\dfrac{64}{x^2}-\dfrac{5x-30}{2}=\dfrac{25x^2}{16}$.

ОДЗ: $x \neq 0$

Перерозподілимо доданки так, щоб можна було **виділити повні** квадрати двочленів з обох частин рівняння:

$$x^2+\frac{64}{x^2}+16=\frac{25x^2}{16}+\frac{5x}{2}+1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{8}{x}\right)^2=\left(\frac{5x}{4}+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{8}{x}=\dfrac{5x}{4}+1, \\ x+\dfrac{8}{x}=-\left(\dfrac{5x}{4}+1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-32=0, \\ 9x^2+4x+32=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-8, \\ x\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-8; 4\}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(6-x)^4+(8-x)^4=16$;

$$(6-x)^4+(8-x)^4=16 \Leftrightarrow (x-6)^4+(x-8)^4=16.$$

Скористаємося способом розв'язання, наведеним у випадку 7 п. 6.

Виконаємо заміну: $x = t + 7$, де $t = \dfrac{-6-8}{2} = -7$;

$$(t+7-6)^4 + (t+7-8)^4 = 16 \Leftrightarrow (t+1)^4 + (t-1)^4 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t^2+2t+1)^2 + (t^2-2t+1)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 4t^2 + 1 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^3 + 2t^2 - 4t = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 1, \\ t^2 = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + 7, \\ x = -1 + 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{6; 8\}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{x-7}{x-1} + 4.$

Згідно з випадком 8 п. 6.

Спосіб. Виключаємо ціле число з кожного дробу:

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} - \frac{x-7}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{2x+2-3}{x+1} + \frac{3x+6-7}{x+2} - \frac{x-1-6}{x-1} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{x+1} + 3 - \frac{7}{x+2} - 1 + \frac{6}{x-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - \frac{6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+2) + 7(x^2-1) - 6(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 15x - 25 = 0, \\ x + 1 \neq 0, \\ x + 2 \neq 0, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{-\dfrac{5}{4}; 5\right\}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Спосіб. Виключаємо цілі многочлени з кожного дробу:

$$\frac{(x^2+2x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x^2+8x+16)+4}{x+4}=\frac{(x^2+4x+4)+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+7x+12}=\frac{x}{x^2+3x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2+7x+12-x^2-3x-2)=0,\\ x+4\neq 0,\\ x+3\neq 0,\\ x+2\neq 0,\\ x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-2,5.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-2{,}5;\ 0\}$.

Приклад 6. Розв'язати в цілих і додатних числах **рівняння**

$$x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}+z^2+\frac{1}{z^2}=6.$$

Розв'язання.

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2=6;$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{x}=0,\\ y-\frac{1}{y}=0,\\ z-\frac{1}{z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2-1}{x}=0,\\ \frac{y^2-1}{y}=0,\\ \frac{z^2-1}{z}=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=0,\\ y^2-1=0,\\ z^2-1=0,\\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0.\end{cases}$$

З урахуванням умови, що x, y, z — цілі й додатні, одержимо $\{(1;1;1)\}$.

Відповідь: $\{(1;1;1)\}$.

2.4.7. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати рівняння:

115) $x^8 - 1 = 0$;

116) $x^6 - 64 = 0$;

117) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

118) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

119) $8x^3 + 125 = 0$;

120) $x^4 + x^3 - 8x = 8$;

121) $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) = 15$;

122) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;

123) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2{,}9$;

124) $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$;

125) $\dfrac{1}{x^3+2} - \dfrac{1}{x^3+3} = \dfrac{1}{12}$;

126) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \dfrac{7}{6}$.

Конкурсний рівень

127) $(x+2)^4 + (x+4) = 82$;

128) $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1)$;

129) $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 26x + 24 = 0$;

130) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$;

131) $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$;

132) $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47$;

133) $x^5 = \dfrac{133x - 78}{133 - 78x}$;

134) $\dfrac{7}{x} - \dfrac{31}{x-1} + \dfrac{20}{x-2} + \dfrac{8}{x-3} + \dfrac{20}{x-4} - \dfrac{31}{x-5} + \dfrac{7}{x-6} = 0$;

135) $\dfrac{4x-17}{x-4} + \dfrac{10x-13}{2x-3} = \dfrac{8x-30}{2x-7} + \dfrac{5x-4}{x-1}$;

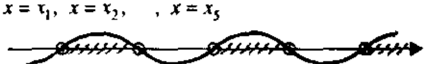
136) $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)=60$;

137) $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}=\dfrac{1}{6}$;

138) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}-\dfrac{2x+6}{x+2}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{2x+9}{x+3}$;

139) $x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=3$.

2.4.8. Найпростіші види раціональних нерівностей і способи їх розв'язання

№ пор	Вид нерівності	Спосіб (метод) розв'язання
1	2	3
1	Лінійні $ax>b,\ ax\ge b,$ $ax<b,\ ax\le b,$ $a\ne 0$. Необхідно враховувати знак a	$ax>b$ (інші аналогічно), $\begin{cases}x>\frac{b}{a},\\ a>0\end{cases}$ або $\begin{cases}x<\frac{b}{a},\\ a<0\end{cases}$ Відповідь $x\in\left(\frac{b}{a},\ +\infty\right)$ при $a>0$, $x\in\left(-\infty,\ \frac{b}{a}\right)$ при $a<0$
2	$ax+b>cx+d,$ $ax+b<cx+d,$ $ax+b\ge cx+d,$ $ax+b\le cx+d.$	Зводиться (подібно до відповідного виду рівняння) до лінійної нерівності
3	$(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0,$ $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)<0,$ $x_1<x_2<\ldots<x_n$	*Метод інтервалів.* $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_5)>0$ *Корені відповідного рівняння* $x=x_1,\ x=x_2,\ \ldots,\ x=x_5$  Відповідь $x\in(x_1,\ x_2)\cup(x_3,\ x_4)\cup(x_5;+\infty)$
4	$ax^2+bx+c>0,$ $ax^2+bx+c\ge 0,$ $ax^2+bx+c<0,$ $ax^2+bx+c\le 0$	*Метод інтервалів або графічний* $ax^2+bx+c>0$, де $a>0$ (інші аналогічно);  $x\in(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$

1	2	3
5	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n < (>) 0;$ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \le (\ge) 0$	1) звести до вигляду (3) подібно до відповідного вигляду рівняння; 2) далі розв'язується методом інтервалів
6		Зводиться до вигляду:
	а) $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \ldots > 0;$	а) $\frac{F(x)}{G(x)} > 0, \quad F(x)G(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}F(x) > 0,\\ G(x) > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}F(x) < 0,\\ G(x) < 0,\end{cases}\end{array}\right.$
	б) $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \ldots \ge 0;$	б) $\frac{F(x)}{G(x)} \ge 0, \quad \begin{cases}F(x)G(x) \ge 0,\\ G(x) \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}F(x) \ge 0,\\ G(x) > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}F(x) \le 0,\\ G(x) < 0,\end{cases}\end{array}\right.$
	в) $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \ldots < 0;$	в) $\frac{F(x)}{G(x)} < 0, \quad F(x)G(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}F(x) < 0,\\ G(x) > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}F(x) > 0,\\ G(x) < 0,\end{cases}\end{array}\right.$
	г) $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \ldots \le 0$	г) $\frac{F(x)}{G(x)} \le 0, \quad \begin{cases}F(x)G(x) \le 0,\\ G(x) \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}F(x) \le 0,\\ G(x) > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}F(x) \ge 0,\\ G(x) < 0\end{cases}\end{array}\right.$

2.4.9. Основні теореми для розв'язання нерівностей

Нехай $f(x)$ — многочлен, який можна подати у вигляді $f(x) =$ $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Теорема 6. $f(x) > 0$ для всіх значень $x > x_s$, де x_s — найбільше значення при якому $f(x) = 0$.

Теорема 7. Якщо $x = x_i$ — нуль функції $y = f(x)$ непарної кратності, то графік такої функції перетинає вісь Ox у точці $x = x_i$, а функція змінює свій знак на протилежний.

Теорема 8. Якщо $x = x_i$ — нуль функції $y = f(x)$ парної кратності, то графік такої функції дотикається до осі Ox у точці $x = x_i$ і функція при цьому зберігає свій знак.

Нехай $y = f(x)$ — раціональна функція, яку можна подати у вигляді $y = \frac{p(x)}{\varphi(x)}$, де $p(x)$, $\varphi(x)$ — многочлени.

Теорема 9. Нерівність $\frac{\rho(x)}{\varphi(x)} \geq 0$ рівносильна системі

$$\begin{cases} \rho(x)\varphi(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 10. Нерівність $\frac{\rho(x)}{\varphi(x)} > 0$ рівносильна нерівності

$$\rho(x)\varphi(x) > 0.$$

Теорема 11. Якщо функція $f(x)$ визначена, неперервна і не приймає нульового значення на інтервалі $(a; b)$, то для всіх $x \in (a; b)$ функція $f(x)$ зберігає свій знак.

Остання теорема є основою для загального методу розв'язання нерівностей.

2.4.10. Алгоритм розв'язання нерівностей загальним методом

$$F(x) < (>)\ 0, \text{ або } F(x) \leq (\geq)\ 0.$$

1. Знаходимо $D(F)$.

2. Розв'язуємо рівняння $F(x) = 0$.

3. Ділимо $D(F)$ коренями рівняння на інтервали знакосталості функції $F(x)$.

4. Визначаємо знак значення $F(x)$ на кожному інтервалі: обчислюємо значення $F(x)$ для будь-якого одного значення x з кожного інтервалу. Розв'язком вихідної нерівності будуть ті з інтервалів, на яких знак функції $F(x)$ збігається із знаком розв'язуваної нерівності: записуємо відповідь у вигляді об'єднання числових проміжків.

2.4.11. Приклади розв'язання основних видів алгебраїчних нерівностей

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\frac{x-1}{2}-\frac{x+2}{3}>\frac{x-3}{4}-x$.

Спосіб. Зведення до лінійної нерівності (п. 3, таблиця "нерівності", випадок 2).

Множимо на НСК(2, 3, 4) = 12 обидві частини нерівності:

$$6(x-1)-4(x+2)>3(x-3)-12x \Leftrightarrow 6x-6-4x-8>3x-9-12x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x-4x-3x+12x>-9+6+8 \Leftrightarrow 11x>5 \Leftrightarrow x>\frac{5}{11}.$$

Відповідь: $x\in\left(\frac{5}{11};+\infty\right)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $2-x-x^2\le 0$.

Спосіб. П. 3, таблиця "нерівності", випадок 4.

$$x^2+x-2\ge 0,\ x_1=1,\ x_2=-2.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $2x^2+5x+6>0$.

Розв'язання. $D=25-4\cdot 12<0$ — коренів рівняння $2x^2+5x+6=0$ не має.

Відповідь: $x\in R$.

Приклад 4. *а*) Розв'язати нерівність $(x-3)(2+x)(4-x)>0$.

Метод інтервалів: п. 3, таблиця "нерівності", випадок 3; п. 4 теореми 6.

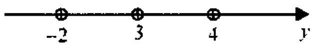
1. Кожний множник перетворюємо на вигляд $x-\alpha$, зберігаючи рівносильність нерівності. При множенні на одне і те саме від'ємне число обох частин нерівності знак змінюється на протилежний:

$$-(x-3)(2+x)(x-4)>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-4)<0.$$

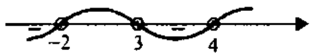
2. **Знаходимо значення** x при яких вираз **в лівій частині нерівності приймає нульове значення**:

$$x = 3, \quad x = -2, \quad x = 4.$$

3. **Позначаємо знайдені значення** x на числовій осі.



4. Знаходимо знак виразу на одному з інтервалів (у такому вигляді функція на самому крайньому правому інтервалі завжди додатна). Якщо немає кратних коренів, то знаки чергуються.



5. Записуємо відповідь, враховуючи знак нерівності.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; 4)$.

б) $(x-3)(2+x)(4-x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(2+x)(x-4) \leq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2] \cup [3; 4]$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$(x+5)(2x-3)^5(x-7)^3(3x+8)^8(4-x)^3 < 0.$$

Метод інтервалів.

1. Кожний множник перетворюємо на вигляд $x - \alpha$:

$$(x+5)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5 (x-7)^3 \left(x+\frac{8}{3}\right)^8 (x-4)^3 > 0.$$

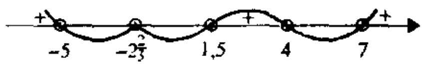
2. Замінюємо множники вигляду $(x-\alpha)^{2n+1}$ на $x-\alpha$, $(x-\alpha)^{2n}$ — на $(x-\alpha)^2$:

$$(x+5)(x-1,5)(x-7)\left(x+2\,\frac{2}{3}\right)^2 (x-4) > 0.$$

3. Діємо за алгоритмічним приписом попереднього прикладу (кроки 2–5). На кроці 4 слід урахувати, що при переході через нульове значення виразу знак виразу:

- змінюється, якщо нуль непарної кратності;
- зберігається, якщо нуль парної кратності.

$x=-5;\ x=1{,}5;\ x=7;\ x=-2\dfrac{2}{3};\ x=4.$



Відповідь: $x\in(-\infty;-5)\cup(1{,}5;4)\cup(7;+\infty)$.

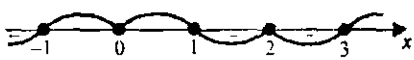
Приклад 6. Розв'язати нерівність $(x^2-3x+2)(x^3-3x^2)(4-x^2)\geq 0$.

Метод інтервалів.

1. Розкладаємо ліву частину на множники вигляду $(x-\alpha)^k$.
2. Діємо за алгоритмічним приписом попереднього прикладу:

$$x^2-3x+2: D=9-8=1>0;$$

$$(x^2-3x+2)(x^3-3x^2)(4-x^2)\geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-2)(x-3)(x-2)(x+2)\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x-2)^2(x-3)(x+2)\leq 0;$$
$$x=0,\quad x=1,\quad x=2,\quad x=3,\quad x=-2.$$



Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[1;3]$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність

$$-(x^2-3x-4)^3(x-1)^3(3x+1)^2(15-30x)^2(1-x)^3(-x^2-x-1)\geq 0.$$

Якщо можливо, розкладемо на множники вирази x^2-3x-4 і x^2+x+1:

$$x^2-3x-4: D_1=9+16=25>0 \Rightarrow x_1=4;\quad x_2=-1 \Rightarrow x^2-3x-4=$$
$$=(x-4)(x+1);\quad x^2+x+1: D_2=1-4<0 \Rightarrow x^2+x+1>0 \text{ для всіх } x\in R;$$

$$(x-4)^3(x+1)^3(x-1)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-1)^3(x^2+x+1)\leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x+1)(x-1)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0;$$

$$x=4, \quad x=-1, \quad x=1, \quad x=-\frac{1}{3}, \quad x=\frac{1}{2}.$$

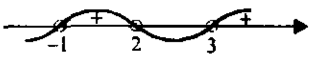
Відповідь: $x \in [-1; 4]$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} > 0$.

Згідно з п. 6, таблицею "нерівності", випадком 6 маємо

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3) > 0,$$

$$x=-1, \quad x=2, \quad x=3.$$



Відповідь: $x \in (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-3} \ge 0$.

Вихідна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} (x+1)(x-2)(x-3) \ge 0, \\ x-3 \ne 0, \end{cases}$$

$$x=-1, \quad x=2, \quad x \ne 3.$$

Відповідь: $x \in [-1; 2] \cup (3; +\infty)$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $(x^2-2x)(2x-2) - 9\,\dfrac{2x-2}{x^2-2x} \le 0$.

1. Зводимо до спільного знаменника.
2. Подаємо чисельник у вигляді добутку множників:

$$\frac{(x^2-2x)^2(2x-2)-9(2x-2)}{x^2-2x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{((x^2-2x)^2-9)(2x-2)}{x^2-2x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-2)(x^2-2x+3)(x^2-2x-3)}{x^2-2x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)x(x-2)\le 0, \\ x^2-2x\ne 0; \end{cases}$$

$$x^2-2x-3: D_1=4+12>0 \Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1);$$

$$x^2-2x+3: D_2=4-12<0 \Rightarrow x^2-2x+3>0 \text{ для всіх } x\in R;$$

$$x=-1,\ x=3,\ x=0,\ x=2,\ x=1;$$

$$\begin{cases} x(x-1)(x-3)(x+1)x(x-2)\le 0, \\ x\ne 0, \\ x\ne 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x\in(-\infty;-1]\cup(0;1]\cup(2;3]$.

Приклад 11. Розв'язати нерівність

$$12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12<0.$$

Загальний метод. За алгоритмом 5 п. 2.4.8.

1. Д(f): $x\in R$.

2. Розв'язуємо рівняння $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$.
Ділимо на $(x-1)$ за схемою Горнера:

12	–8	–45	45	8	–12
12	4	–41	4	12	0

$$(x-1)(12x^4+4x^3-41x^2+4x+12)=0 \Leftrightarrow x-1=0$$

або

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0.$$

Виконуємо заміну: $x + \dfrac{1}{x} = t$;

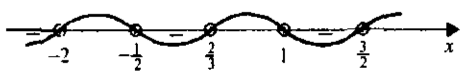
$$12(t^2 - 2) + 4t - 41 = 0; \quad 12t^2 + 4t - 65 = 0;$$

$$t = \frac{-2 \pm 28}{12}; \quad t_1 = -\frac{5}{2}; \quad t_2 = \frac{13}{6}.$$

Повертаючись до змінної x, одержуємо

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2}, \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0, \\ 6x^2 - 13x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; x = 1; \quad x = -2; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x = \frac{3}{2}; \quad x = \frac{2}{3}.$$

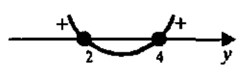
3. 

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Приклад 12. Розв'язати нерівність $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$.

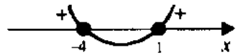
Виконуємо заміну: $x^2 + 3x = y$;

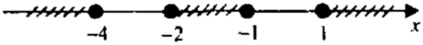
$(y + 1)(y - 3) \geq 5, \quad y^2 - 2y - 8 \geq 0, \quad \left[\begin{array}{l} y \leq -2, \\ y \geq 4. \end{array}\right.$



Вихідна нерівність рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x \leq -2, \\ x^2 + 3x \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 \leq 0, \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)(x+2) \leq 0, \\ (x-1)(x+4) \geq 0. \end{array}\right.$$





Відповідь: $x \in (-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$.

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$.

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1 \Leftrightarrow$$

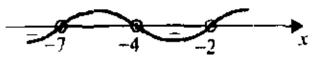
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-4)(x-7)-(x+2)(x+4)(x+7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big((x^2-6x+8)(x-7)-(x^2+6x+8)(x+7)\big)\,(x+2)(x+4)(x+7) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big((x^3-6x^2+8x-7x^2+42x-56)-(x^3+6x^2+8x+7x^2+42x+56)\big)\times$$

$$\times(x+2)(x+4)(x+7) > 0 \Leftrightarrow -(26x^2+112)(x+2)(x+4)(x+7) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+4)(x+7) < 0.$$



Відповідь: $x \in (-\infty; -7) \cup (-4; -2)$.

2.4.12. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати нерівності:

141) $x^2-5x+6<0$;

142) $-2x^2-5x+7 \le 0$;

143) $x^2+\dfrac{1}{x}+3 \ge 0$;

144) $x(x-3) < -2$;

145) $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$;

146) $\dfrac{x^2+4}{x-4} < x$;

147) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} \le 0$.

Конкурсний рівень

Розв'язати нерівності:

148) $(x+3)(x-5)(2-x) > 0$;

149) $(x+3)^8(3x-5)^4(x-5)^{17} < 0$;

150) $\dfrac{(x^2-4x+3)(x^2-4x+13)}{(x^2-6x+5)(x^2+6x+8)}>0;$

151) $x^5 \geq \dfrac{133x-78}{133-78x};$

152) $2x^4-x^3-9x^2+13x-5>0;$

153) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1;$

154) $x^2(x-4)(x-1)^4(2x+1)^3(x-\sqrt{2})^5 \leq 0;$

155) $(x^2-4x+5)^2-(x-1)(x-3)-4>0;$

156) $(x^2-3x+2)(x^3-3x)(4-x^2)>0;$

157) $\dfrac{x}{x^2-3x+1} \geq \dfrac{x}{x^2+3x+2};$

158) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}-\dfrac{18}{x^2+2x+1}<0;$

159) $(x^2+3x)(2x+3)-16\,\dfrac{2x+3}{x^2+3x} \geq 0;$

160) $x^{200}(x^2-7)(x^2+1)(5-10x)^2(-2x^2+x-1) \geq 0.$

2.5. СИСТЕМИ ТА СУКУПНОСТІ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

2.5.1. Основні поняття і їх означення

Опорний конспект

№ пор	Поняття	Системи рівнянь (нерівностей)	Сукупність рівнянь (нерівностей та їх систем)
		Означення	
1	Системи сукупності	*Системою рівнянь* (нерівностей) з однією, двома або більше невідомими *називається* група рівнянь (нерівностей) з однією, двома або більше невідомими, відносно яких поставлено завдання знайти всі спільні розв'язки	*Сукупністю рівнянь* (нерівностей або їх систем) з однією, двома або більше невідомими *називається* група рівнянь (нерівностей або їх систем) з однією, двома або більше невідомими, відносно яких поставлено завдання знайти всі такі їх розв'язки, при кожному з яких задовольняється хоча б одне рівняння (нерівність, система) з цієї сукупності і які входять в ОДЗ цієї сукупності
2	Символічний запис	$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) > (<, \geq, \leq)\, 0 \\ \varphi(x) > (<, \geq, \leq)\, 0 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} f(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} f(x) > (<, \geq, \leq)\, 0, \\ \varphi(x) > (<, \geq, \leq)\, 0 \end{array}\right.$
3	Вид системи сукупності	Визначається видом рівнянь (нерівностей), які входять у систему	Визначається видом рівнянь (нерівностей), які входять у сукупність
4	Алгебраїчні системи (сукупності)	Якщо $\left.\begin{array}{l} f(x)=0,\ \varphi(x)=0, \\ f(x,y)=0\ \ \varphi(x)=0 \\ f(x) > (<, \geq, \leq)\ 0,\ \ \varphi(x) > (<, \geq, \leq)\ 0 \end{array}\right\}$ є алгебраїчні рівняння (нерівності)	
5	Розв'язати систему (сукупність)	Знайти всі розв'язки системи або довести, що їх немає	Знайти всі розв'язки сукупності або довести, що їх немає
6	Рівносильні системи (сукупності)	Дві системи називаються *рівносильними*, якщо мають однакові множини розв'язків	Дві сукупності називаються *рівносильними*, якщо мають однакові множини розв'язків

2.5.2. Теореми про рівносильні перетворення системи

Теорема 1. Будь-яке рівносильне перетворення окремого рівняння (нерівності) системи не порушує рівносильності системи.

Теорема 2. Підстановка однієї частини рівняння системи замість другої в інше рівняння (нерівність) не порушує рівносильності системи.

Теорема 3. Система $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_1(x, y) \pm f_2(x, y) = g_1(x, y) \pm g_2(x, y) \end{cases}$

рівносильна системі $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases}$

Теорема 4. Якщо не існує таких пар (x, y), при яких обидва вирази $f_2(x, y)$ і $g_2(x, y)$ одночасно перетворюються на нуль, то система

$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$ рівносильна системі $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ \dfrac{1}{f_2(x, y)} = \dfrac{1}{g_2(x, y)}. \end{cases}$

Теорема 5. Якщо обидві частини рівняння $f_2(x, y) = g_2(x, y)$ при жодних значеннях (x, y) одночасно не перетворюються на нуль, то системи

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y); \end{cases} \begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_1(x, y) f_2(x, y) = g_1(x, y) g_2(x, y); \end{cases} \begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ \dfrac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = \dfrac{g_1(x, y)}{g_2(x, y)} \end{cases}$$

рівносильні.

Теорема 6. Системи $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$ і $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2^2(x, y) = g_2^2(x, y) \end{cases}$

рівносильні, якщо для будь-яких x, y з області визначення першої системи виконується нерівність $f_2(x, y) \cdot g_2(x, y) \geq 0$.

Теорема 7. Якщо до системи рівнянь додати ще одне рівняння, яке є наслідком цієї системи, то нова система буде рівносильною вихідній.

2.5.3. Способи розв'язання систем лінійних рівнянь

1. *Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Приклад 1. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$

а. Спосіб підстановки:

$$\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ (3 - 2y)\cdot 2 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y. \\ -5y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,4, \\ y = 0,8. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1,4;\ 0,8)\}$.

б. Спосіб додавання:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 5x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,4 + 2y = 3, \\ x = 1,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,8, \\ x = 1,4. \end{cases}$$

Довідка. Алгоритмічні приписи цих двох способів наведені у шкільному підручнику з алгебри для 7-го класу.

в. Спосіб порівнювання.

1. Виражаємо значення однієї з невідомих у кожному рівнянні системи

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ x = \dfrac{2 + y}{2}. \end{cases}$$

2. Прирівнюємо знайдені вирази і розв'язуємо одержане рівняння

$$3 - 2y = \frac{2 + y}{2} \Leftrightarrow 6 - 4y = 2 + y \Leftrightarrow 5y = 4 \Leftrightarrow y = 0,8.$$

3. Підстановкою одержаного значення в одне з рівнянь системи знаходимо значення іншого невідомого:

$$\begin{cases} y = 0,8, \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,8, \\ x = 1,4. \end{cases}$$

2. ***Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:***

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

а. Спосіб підстановки.

Приклад 2. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+3z=7, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$

1. З будь-якого рівняння визначаємо одну з невідомих через дві інших. Решту рівнянь переписуємо без змін:

$$\begin{cases} x=3-y-z, \\ x-y+z=7, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$$

2. Підставляємо одержаний вираз замість визначеної невідомої у два інші рівняння:

$$\begin{cases} x=3-y-z, \\ (3-y-z)-y+3z=7, \\ 2(3-y-z)+3y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-z, \\ -2y+2z=4, \\ y-3z=-6. \end{cases}$$

3. Одержану систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими розв'язуємо одним з трьох наведених способів:

$$\begin{cases} -2y+2z=4, \\ y-3z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-y=2, \\ -3z+y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2, \\ y=0. \end{cases}$$

4. Для визначення значення третьої невідомої підставляємо знайдені значення двох невідомих у вираз, одержаний у п. 1:

$$x=3-0-2 \Leftrightarrow x=1.$$

Відповідь: $\{(1;\ 0;\ 2)\}$.

б. Метод Гаусса.

Зведенням (у два етапи) задану систему приводять до трикутного вигляду.

Етап I

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2'x+b_2'y=d_2', \\ a_3'x+b_3'y=d_3'. \end{cases}$$

Етап II

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2'x+b_2'y=d_2', \\ -a_3''x=d_3''. \end{cases}$$

Приклад 3. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x-y+3z=7, & \mathrm{I}+\mathrm{II}, \\ 2x+3y-z=0, & \mathrm{II}\cdot(3)+\mathrm{III}; \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x+4z=10, \\ 5x+8z=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2z=5, \\ 2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2z=5, \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3, \\ x+4=5, \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=1, \\ z=2. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1;0;2)\}$.

Зауваження. Наведені способи придатні до розв'язання систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Перетворення, які лежать в основі методу Гаусса, переводять задану систему в систему такого вигляду:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+\ldots+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+\ldots+c_2z=d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+\ldots+c_nz=d_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+b_1'y+\ldots+c_1'z=d_1', \\ \qquad y+\ldots+c_2'z=d_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad z=d_n'. \end{cases}$$

2.5.4. Способи розв'язання систем нелінійних рівнянь

1. Системи лінійного рівняння і рівняння другого степеня довільного вигляду.

Спосіб підстановки.

Приклад 4. Розв'язати систему $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} y = 7+3x, \\ x^2 + x(7+3x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7+3x, \\ 4x^2 + 7x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 7+3x, \\ x = -2; \end{cases} \\ \begin{cases} y = 7+3x, \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -2, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}, \\ y = 7\dfrac{3}{4}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\left\{(-2;1);\left(\dfrac{1}{4};7\dfrac{3}{4}\right)\right\}$.

2. Штучні види і способи розв'язання.

$$\begin{cases} ax \pm by = m, \\ xy = n. \end{cases}$$

Спосіб. Застосування теореми Вієта.

Приклад 5. Розв'язати систему $\begin{cases} x+3y=5, \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=5, \\ 3xy=6. \end{cases}$

Розв'язання. Якщо x і $3y$ — корені рівняння $z^2-5z+6=0$, то $z_1=2$, $z_2=3$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ 3y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 3y = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\left\{(2;1);\left(3;\dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

3. Система двох рівнянь другого степеня з двома невідомими

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = m_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = m_2, \end{cases} \text{де } a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad m_1 \neq 0, \quad m_2 \neq 0.$$

Розв'язання.

1-й спосіб. Зрівняння правих частин рівнянь.

Алгоритмічний припис:

1. Зрівняти праві частини рівнянь системи, не порушуючи рівності.

2. Прирівняти ліві частини одержаних рівнянь і розв'язати квадратне рівняння відносно однієї з невідомих.

3. Скласти сукупність двох систем, рівносильних заданій системі, і розв'язати її. За друге рівняння кожної із сукупності рівнянь взяти будь-яке рівняння вихідної системи.

Приклад 6. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 2. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 4x^2 - 6xy + 4y^2 = 2, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 2; \end{cases}$$

$$4x^2 - 6xy + 4y^2 = 2x^2 + xy - y^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 7xy + 5y^2 = 0;$$

$$x = \frac{7y \pm \sqrt{49y^2 - 40y^2}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7y \pm 3y}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2{,}5y, \\ x = y; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2{,}5y, \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2{,}5y, \\ 2 \cdot 6{,}25y^2 - 7{,}5y^2 + 2y^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ 2y^2 - 3y^2 + 2y = 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7y^2 = 1, \\ x = 2{,}5y \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = 1, \\ x = y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{7}}{7}, \\ x = \frac{5}{14}\sqrt{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5\sqrt{7}}{14}, \\ y = -\frac{\sqrt{7}}{7}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{(1;1);\ (-1;-1);\ \left(\frac{\sqrt{7}}{7};\frac{5}{14}\sqrt{7}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{7}}{7};-\frac{5}{14}\sqrt{7}\right)\right\}.$

2-й спосіб Заміни.

1, 2 як у попередньому способі.

3. Ділимо обидві частини одержаного рівняння на $y^2 (y \neq 0)$.

4. Виконуємо заміну: $\frac{x}{y} = p.$

5. Розв'язуємо одержану сукупність систем рівнянь, рівносильну до вихідної системи.

$$2x^2 - 7xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow 2\frac{x^2}{y^2} - 7\frac{x}{y} + 5 = 0;$$

$$p = \frac{x}{y};\ 2p^2 - 7p + 5 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{7 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 2,5, \\ p = 1. \end{array}\right.$$

Враховуючи заміну, маємо

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y} = 2,5, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2,5y, \\ 2(2,5y)^2 + 2,5y^2 - y^2 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ 2y^2 + y^2 - y^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2,5y, \\ 14y^2 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ y^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\frac{5}{14}\sqrt{7}, \\ y = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

3-й спосіб. Підстановка $y = ax$.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3ax^2 + 2a^2x^2 = 1, \\ 2x^2 + x^2a - a^2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2 - 3a + 2a^2) = 1, \\ x^2(2 + a - a^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2 - 3a + 2a^2}, \\ x^2 = \dfrac{1}{2 + a - a^2}. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння відносно a:

$$\frac{1}{2 - 3a + 2a^2} = \frac{1}{2 + a - a^2};$$

$$5a^2 - 7a + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = \dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$$

Ураховуючи підстановку, одержуємо сукупність систем, рівносильну до заданої системи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x, \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{2}{5}x, \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x, \\ 2x^2 - 3x^2 + 2x^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{2}{5}x, \\ 2x^2 - \dfrac{6}{5}x^2 + \dfrac{8}{25}x^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{2}{5}x, \\ \dfrac{28}{25}x^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ y = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5}{14}\sqrt{7}, \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{7}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{5}{14}\sqrt{7}, \\ y = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}. \end{cases} \end{array}\right.$$

4-й спосіб. Ділення одного рівняння на друге і заміна $\frac{x}{y}=p$.

1. Ділимо одне рівняння системи на друге, наклавши умову, що дільник відмінний від нуля.

2. Ділимо чисельник і знаменник лівої частини на y^2.

$$\begin{cases}2x^2-3xy+2y^2=1,\\2x^2+xy-y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x^2-3xy+2y^2}{2x^2+xy-y^2}=\dfrac{1}{2},\\2x^2+xy-y^2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2\dfrac{x^2}{y^2}-3\dfrac{xy}{y^2}+2}{2\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{xy}{y^2}-1,}=\dfrac{1}{2},\\2x^2+xy-y^2\neq0,\quad y\neq0.\end{cases}$$

3. Виконуємо заміну: $\frac{x}{y}=p$;

$$\frac{2p^2-3p+2}{2p^2+p-1}=\frac{1}{2};\quad 4p^2-6p+4=2p^2+p-1;\quad 2p^2-7p+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=\dfrac{5}{2},\\p=1;\end{array}\right.$$

$$p_{1,2}=\frac{7\pm3}{4}.$$

4. Розв'язуємо сукупність двох систем, рівносильну заданій системі:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{2},\\\dfrac{x}{y}=1;\end{array}\right.\\2x^2+xy-y^2\neq0,\\y\neq0,\\2x^2+xy-y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2{,}5y,\\x=y;\end{array}\right.\\y\neq0,\\2x^2+xy-y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2{,}5y,\\12{,}5y^2+2{,}5y^2-y^2=2,\\y\neq 0;\end{cases}\\\begin{cases}x=y,\\5y^2+0{,}5y^2-y^2=2,\\y\neq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2{,}5y,\\y^2=\dfrac{1}{7};\end{cases}\\\begin{cases}x=y,\\y^2=9\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{5}{14}\sqrt{7},\\y=\dfrac{\sqrt{7}}{7};\end{cases}\\\begin{cases}x=-\dfrac{5}{14}\sqrt{7},\\y=-\dfrac{\sqrt{7}}{7};\end{cases}\\\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}\\\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

5. Перевіряємо, чи може $y=0$ бути розв'язком системи:

$$\begin{cases}y=0,\\2x^2=1,\\2x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0,\\x\in\varnothing.\end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(\dfrac{5}{14}\sqrt{7};\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right),\left(-\dfrac{5}{14}\sqrt{7};-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right),(1;1),(-1;-1)\right\}$.

Зауваження. Наведені способи можна використовувати при роз-в'язанні системи двох рівнянь з двома змінними вигляду

$\begin{cases}a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=c,\\b_0x^n+b_1x^{n-1}y+\ldots+b_ny^n=d,\end{cases}$ яку називають *однорідною системою.*

2.5.5. Штучні способи розв'язання деяких видів систем алгебраїчних рівнянь

Симетричними є системи вигляду $\begin{cases} F_1(x, y, \dots, z) = 0, \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0, \\ \dots\dots\dots // \dots\dots\dots \\ F_n(x, y, \dots, z) = 0, \end{cases}$

де $F_1, F_2, \dots, F_n$ — многочлени відносно змінних $(x, y, \dots, z)$, значення яких не змінюються при будь-яких перестановках цих змінних.

Теорема. Будь-який симетричний многочлен від змінних $x, y, \dots, z$ можна подати у вигляді многочлена від *основних симетричних многочленів* вигляду

$$\delta_1 = x + y + \ldots + p + z,$$
$$\delta_2 = xy + \ldots + xz + \ldots + pz,$$
$$\delta_n = xy \cdot \ldots \cdot pz.$$

Приклади 7–9.

7. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \delta_1^2 - 2\delta_2$.

8. $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2$.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \delta_1{}^2 - 2\delta_2$.

Розв'язання.

Виконуємо заміну: $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ чи $\begin{cases} x - y = u, \\ xy = v \end{cases}$ чи $\begin{cases} x^2 + y^2 = u, \\ xy = v. \end{cases}$

Алгоритмічний припис:

1. Кожне з рівнянь системи подаємо у вигляді многочлена від основних симетричних многочленів.
2. Виконуємо одну з наведених замін.
3. Розв'язуємо одержану систему відносно введених змінних (u, v).
4. Розв'язуємо одержану сукупність систем, рівносильну заданій системі.

Приклад 10. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1. \end{cases}$

Розв'язання.

1. $\begin{cases}(x+y)^2-xy=1,\\ x^4+y^4+x^2y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-xy=1,\\ ((x+y)^2-2xy)^2-x^2y^2=1.\end{cases}$

2. Заміна: $\begin{cases}x+y=u,\\ xy=v.\end{cases}$

3. $\begin{cases}u^2-v=1,\\ (u^2-2v)^2-v^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^2=1-v,\\ (1-v)^2-v^2=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u^2=1-v,\\ 1-2v+v^2-v^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=0,\\ u=\pm1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=0,\\ u=1;\end{cases}\\ \begin{cases}v=0,\\ u=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

4. Вихідна система рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1,\\ xy=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-1,\\ xy=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=0,\\ y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(0;\,1),\,(1;\,0),\,(0;\,-1),\,(-1;\,0)\}$.

Приклад 11. Розв'язати систему $\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3=17,\\ x+xy+y=5.\end{cases}$

Розв'язання.

1. $\begin{cases}(x^3+y^3)+x^3y^3=17,\\ (x+y)+xy=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)((x+y)^2-3xy)+(xy)^3=17,\\ (x+y)+xy=5.\end{cases}$

2. Заміна: $\begin{cases}x+y=u,\\ xy=v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u(u^2-3v)+v^3=17,\\ u+v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3-3vu+v^3=17,\\ u+v=5\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)-3uv=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5, \\ 5((u+v)^2-3uv)-3uv=17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5, \\ 5(25-3uv)-3uv=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5, \\ 125-18uv=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5, \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2, \\ v=3; \end{cases} \\ \begin{cases} u=3, \\ v=2. \end{cases} \end{array} \right.$$

3. Вихідна система рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(2;1),\ (1;2)\}$.

Приклад 12. Розв'язати систему **рівнянь** $\begin{cases} x^3+xy^2=40y, \\ y^3+x^2y=10x. \end{cases}$

Спосіб. Заміна: $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$

Розв'язання.

1. Перевіркою з'ясовуємо, що (0; 0) — **розв'язок системи, а (0; y),** (x; 0) не є розв'язками системи:

$$\begin{cases} 0+0=0, \\ 0+0=0; \end{cases} \begin{cases} 0+0\neq 40y, \\ y^3+0\neq 0 \end{cases} \text{за умови } y\neq 0; \ \begin{cases} x^3+0\neq 0, \\ 0+0\neq 10x \end{cases} \text{за умови } x\neq 0.$$

2. Ділимо обидві частини першого рівняння заданої **системи на y,** а другого — на x $(y\neq 0;\ x\neq 0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$$

3. **Заміна:** $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Система набирає вигляду $\begin{cases} \dfrac{r^3\cos^3\varphi}{r\sin\varphi} + r^2\cos\varphi\sin\varphi = 40, \\ \dfrac{r^3\sin^3\varphi}{r\cos\varphi} + r^2\cos\varphi\sin\varphi = 10, \end{cases}$

звідки $\begin{cases} r^2\operatorname{ctg}\varphi = 40, \\ r^2\operatorname{tg}\varphi = 10. \end{cases}$

4. Ділимо одне рівняння на друге: $\operatorname{ctg}^2\varphi = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\varphi = 2, \\ \operatorname{ctg}\varphi = -2; \end{array}\right.$

$\operatorname{ctg}\varphi = -2$ не підходить. Тоді

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}\varphi = 2, \\ \dfrac{1}{\sin^2\varphi} = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\varphi = 1/\sqrt{5}, \\ \cos\varphi = 2/\sqrt{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\varphi = -1/\sqrt{5}, \\ \cos\varphi = -2/\sqrt{5}; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$r^2 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}.$$

5. Ураховуючи заміну, одержуємо розв'язки заданої системи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(0;0);(4;2);(-4;-2)\}$.

Приклад 13. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Підсумовуємо всі рівняння системи:

$$(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0.$$

2. Підбором і перевіркою з'ясовуємо, що (3; 3; 3) є розв'язком як останнього рівняння, так і заданої системи $(3-3)^3+(3-3)^3+(3-3)^3=0$:

$$\begin{cases} 3^3-9\cdot 3^2+27\cdot 3-27=0, \\ 3^3-9\cdot 3^2+27\cdot 3-27=0, \\ 3^3-9\cdot 3^2+27\cdot 3-27=0. \end{cases}$$

3. Доведемо, що інших розв'язків задана система не має. Перетворимо перше, друге і третє рівняння системи і дослідимо можливі значення їх розв'язків за знаком.

Позначимо $(x_0; y_0; z_0)$ деякий розв'язок вихідної системи.

Дискримінант квадратного тричлена у правій частині рівняння

$$y^3=9x^2-27x+27$$

$$D=27^2-36\cdot 27<0, \text{ тому } y_0^3>0 \Rightarrow y_0>0.$$

Аналогічно з інших рівнянь системи доходимо висновку, що $x_0>0$ і $z_0>0$. Тоді

$$y^3-9x^2+27x-27=0 \Leftrightarrow y^3-27=9x^2-27x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y-3)(y^2+3y+9)=9x(x-3).$$

Оскільки $x_0>0$, $y^2+3y+9>0$ $(D=9-36<0)$, то вирази $y-3$ і $x-3$ можуть мати тільки однакові за знаком значення.

Міркуючи аналогічно, доходимо висновку щодо знаків виразів $z-3$ і $y-3$.

Отже, якщо $x_0>3$, то $y_0>3$ і $z_0>3$, а якщо $x_0<3$, то $y_0<3$ і $z_0<3$.

4. Доходимо висновку про співвідношення між розв'язками (3; 3; 3) і $(x_0; y_0; z_0)$ заданої системи.

Розв'язок $(x_0; y_0; z_0)$ системи задовольняє також рівняння

$$(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0.$$

Але це рівняння не сумісне з жодною з умов $x_0 > 3$, $y_0 > 3$, $z_0 > 3$: $x_0 < 3$, $y_0 < 3$, $z_0 < 3$.

Висновок: $x_0 = 3$, $y_0 = 3$, $z_0 = 3$ — єдиний розв'язок системи.

Відповідь: $\{(3; 3; 3)\}$.

2.5.6. Деякі види симетричних систем і способи їх розв'язання

I. *Симетричні системи рівнянь з двома невідомими.*

1. Симетричні системи вигляду $\begin{cases} x^n y^n (x^n + y^n) = a, \\ xy(x+y) = b. \end{cases}$

Спосіб розв'язання. Використання тотожності

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \ldots + y^n.$$

Алгоритмічний припис:

1. Записуємо рівність вигляду $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \ldots + y^n$.
2. В останню рівність підставляємо значення, одержані із заданої системи:

$$\begin{cases} x^n + y^n = \dfrac{a}{x^n y^n}; \\ x + y = \dfrac{b}{xy}. \end{cases}$$

3. **Розв'язуємо** одержане рівняння відносно xy.
4. Одержуємо сукупність систем вигляду $\begin{cases} x + y = \dfrac{b}{k}, \\ xy = k, \end{cases}$ рівносильну заданій системі.

Приклад 14. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^3y^3(x^3 + y^3) = 4, \\ xy(x+y) = 1. \end{cases}$

Розв'язання.

1. $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x$.

2. $\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{4}{x^3y^3}, \\ x+y=\dfrac{1}{xy}; \end{cases}$ $\left(\dfrac{1}{xy}\right)^3=\dfrac{4}{x^3y^3}+3xy\ \dfrac{1}{xy}.$

3. $\dfrac{3}{(xy)^3}=-3 \Leftrightarrow xy=-1.$

4. Вихідна система рівносильна системі

$$\begin{cases} xy=-1, \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$

2. Симетричні системи вигляду $\begin{cases} x^n+y^n=a, \\ xy=b. \end{cases}$

Спосіб розв'язання. Використання теореми Вієта.

Алгоритмічний припис:

1 Підносимо обидві частини другого рівняння до n-го степеня.

2 Застосовуючи теорему Вієта, зводимо розв'язання системи до розв'язання квадратного рівняння.

Приклад 15. $\begin{cases} x^5+y^5=6, \\ xy=-2. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} x^5+y^5=6, \\ x^5y^5=-32, \end{cases}$ де x^5, y^5 — корені квадратного рівняння $z^2-6z-32=0.$

$$z_1 = 3+\sqrt{41}; \quad z_2 = 3-\sqrt{41}.$$

Вихідна система рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^5 = 3+\sqrt{41}, \\ y^5 = 3-\sqrt{41}; \end{cases} \\ \begin{cases} x^5 = 3-\sqrt{41}, \\ y^5 = 3+\sqrt{41} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt[5]{3+\sqrt{41}}, \\ y = \sqrt[5]{3-\sqrt{41}}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt[5]{3-\sqrt{41}}, \\ y = \sqrt[5]{3+\sqrt{41}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(\sqrt[5]{3+\sqrt{41}}; \sqrt[5]{3-\sqrt{41}}\right); \left(\sqrt[5]{3-\sqrt{41}}; \sqrt[5]{3+\sqrt{41}}\right)\right\}$.

II. *Симетричні системи рівнянь, у яких невідомих більше двох.*

1. Система має вигляд $\begin{cases} x+y+\ldots+z = a, \\ xy+\ldots+xz+\ldots+zp = b, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ xy\cdot\ldots\cdot pz = c. \end{cases}$

Спосіб розв'язання. Зведення до розв'язання рівняння n-го степеня, яке складається на основі теореми Вієта.

Приклад 16. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z = 6, \\ xy+xz+yz = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$

Розв'язання. За теоремою Вієта числа x, y, z є коренями рівняння

$$t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0;$$
$$t_1 = 1; \ t_2 = 2; \ t_3 = 3.$$

Відповідь: $\{(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)\}$.

2. Система має вигляд $\begin{cases} x+y+z = a, \\ x^2+y^2+z^2 = b, \\ xyz = c. \end{cases}$

Алгоритмічний припис:

1. Підносимо до квадрату перше рівняння системи.
2. Використовуючи друге рівняння системи, зводимо задану систему до системи вигляду 1.

Приклад 17. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6. \end{cases}$

Розв'язання.

1. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=36.$

2. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+xy=11, \\ xyz=6. \end{cases}$

3. $t^3-6t^2+11t-6=0;$

   $t_1=1;\ t_2=2;\ t_3=3.$

Відповідь: $\{(1;\ 2;\ 3);\ (1;\ 3;\ 2);\ (2;\ 1;\ 3);\ (2;\ 3;\ 1);\ (3;\ 1;\ 2);\ (3;\ 2;\ 1)\}.$

III. ***Кругові системи рівнянь.***

1. Система має вигляд $\begin{cases} x+y=a, \\ x+z=b, \\ y+z=c. \end{cases}$

Алгоритмічний припис:

1. Додаємо почленно всі рівняння системи.
2. Розв'язуємо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}, \\ x+y=a, \\ x+z=b, \\ y+z=c. \end{cases}$$

Приклад 18. $\begin{cases} x+y=3, \\ x+z=1, \\ y+z=4. \end{cases}$

Розв'язання.

1. $2x+2y+2z=8 \Leftrightarrow x+y+z=4.$

2. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x+y=3, \\ x+z=1, \\ y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=3, \\ x=0. \end{cases}$

Відповідь: $\{(0;3;1)\}$.

2. Система має вигляд $\begin{cases} xy=a, \\ xz=b, \\ yz=c. \end{cases}$

Алгоритмічний припис:

1. Перемножуємо всі рівняння системи і добуваємо корінь квадратний з обох частин.
2. Розв'язуємо сукупність систем, рівносильну заданій:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xyz=\sqrt{abc}, \\ xy=a, \\ xz=b, \\ yz=c; \end{cases} \\ \begin{cases} xyz=-\sqrt{abc}, \\ xy=a, \\ xz=b, \\ yz=c. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 19. $\begin{cases} xy=2, \\ xz=5, \\ yz=1. \end{cases}$

Розв'язання.

1. $x^2y^2z^2=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xyz=\sqrt{10}, \\ xyz=-\sqrt{10}. \end{array}\right.$

$$2.\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} xyz = \sqrt{10}, \\ xy = 2, \\ xz = 5, \\ yz = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} xyz = -\sqrt{10}, \\ xy = 2, \\ xz = 5, \\ yz = 1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} z = \sqrt{2,5}, \\ y = \sqrt{0,4}, \\ x = \sqrt{10}; \end{cases} \\ \begin{cases} z = -\sqrt{2,5}, \\ y = -\sqrt{0,4}, \\ x = -\sqrt{10}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(\sqrt{10}; \sqrt{0,4}; \sqrt{2,5}\right),\ \left(-\sqrt{10}; -\sqrt{0,4}; -\sqrt{2,5}\right)\right\}$.

2.5.7. Приклади розв'язання алгебраїчних систем конкурсного рівня

Загальна установка. Розв'язання здійснюють, використовуючи комбінацію наведених раніше способів.

Приклад 20. $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 41, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 189. \end{cases}$

І-й спосіб. Зведення до розв'язання системи вигляду

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + yz + xz = b, \\ xyz = c. \end{cases}$$

1. Підносимо до квадрату перше рівняння системи:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81.$$

2. Віднімаємо від одержаного рівняння друге рівняння системи:

$$2xy + 2xz + 2yz = 40 \Leftrightarrow xy + xz + yz = 20.$$

3. Використовуючи тотожність

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),$$

одержуємо значення xyz: $189-3xyz=9(41-20)$, $xyz=0$.

4. Розв'язуємо систему вигляду $\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+xz=b, \\ xyz=c. \end{cases}$

Компоненти x, y, z будь-якого її розв'язку є коренями рівняння $t^3-at^2+bt-c=0$:

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ xy+yz+zx=20, \\ xyz=0; \end{cases} \quad t^3-9t^2+20t=0; \quad t_1=0,\ t_2=4, \quad t_3=5.$$

Відповідь: $\{(0;\,4;\,5);\,(0;\,5;\,4);\,(4;\,0;\,5);\,(4;\,5;\,0);\,(5;\,0;\,4);\,(5;\,4;\,0)\}$.

2-й спосіб.

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ x^2+y^2+z^2=41, \\ x^3+y^3+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ (x+y)^2-2xy+z^2=41, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ (x+y)^2-2xy+z^2=41, \\ (x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ (9-z)^2-2xy+z^2=41, \\ (9-z)\left((9-z)^2-3xy\right)+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ (9-z)\left((9-z)^2-3z^2+27z-60\right)+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ 3z^3-27z^2+60z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ z^3-9z^2+20z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ z=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ z=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ z=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=9, \\ xy=20, \\ z=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5, \\ xy=0, \\ z=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=4, \\ xy=0, \\ z=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5,\ y=4,\ z=0; \\ x=4,\ y=5,\ z=0; \\ x=0,\ y=5,\ z=4; \\ x=5,\ y=0,\ z=4; \\ x=0,\ y=4,\ z=5; \\ x=4,\ y=0,\ z=5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(0;4;5); (0;5;4); (4;0;5); (4;5;0); (5;0;4); (5;4;0)\}$.

Приклад 21. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy+yz=18, \\ xz+zy=20, \\ yx+xz=8. \end{cases}$

Розв'язання.

1. Додаємо почленно всі рівняння системи:

$$2xy+2yz+2xz=46,$$
$$xy+yz+xz=23.$$

2. Розв'язуємо систему, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} xy+yz+xz=23, \\ xy+yz=18, \\ xz+zy=20, \\ yx+xz=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz=5, \\ xy=3, \\ yz=15. \end{cases}$$

3. Перемножуємо всі рівняння останньої системи:

$$x^2y^2z^2 = 5\cdot 3\cdot 15 \Leftrightarrow xyz = \pm 15.$$

4. ***Дописуємо одержані рівняння до останньої системи і розв'язуємо сукупність систем***

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xyz = 15, \\ xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15; \end{cases} \\ \begin{cases} xyz = -15, \\ xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -3, \\ z = -5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(1;\,3;\,5),\,(-1;\,-3;\,-5)\}$.

Приклад 22. **Розв'язати систему рівнянь** $\begin{cases} x^2-(y-z)^2 = 1, \\ y^2-(z-x)^2 = 4, \\ z^2-(x-y)^2 = 9. \end{cases}$

Розв'язання.

1. Розкладаємо ліві частини рівнянь на множники:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) = 1, \\ (y-z+x)(y+z-x) = 4, \\ (z-x+y)(z+x-y) = 9. \end{cases}$$

2. Перемножуємо всі рівняння системи і добуваємо корінь квадратний з обох частин:

$$(x-y-z)^2(x+y-z)^2(y+z-x)^2 = 36;$$
$$(x-y+z)\,(x+y-z)\,(y+z-x) = \pm 6.$$

3. Розв'язуємо сукупність двох систем, рівносильну заданій системі:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-y+z)(x+y-z)\ (y+z-x)=6,\\(x-y+z)(x+y-z)=1,\\(y-z+x)(y+z-x)=4,\\(z-x+y)(z+x-y)=9;\end{cases}\\ \begin{cases}(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)=-6,\\(x-y+z)(x+y-z)=1,\\(y-z+x)(y+z-x)=4,\\(z-x+y)(z+x-y)=9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y+z-x=6,\\x-y+z=1{,}5,\\x+y-z=\dfrac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}-x+y+z=-6,\\x-y+z=-1{,}5,\\x+y-z=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

4. Додаємо всі рівняння кожної системи і розв'язуємо рівносильну сукупність до їх систем:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=8\dfrac{1}{6},\\y+z-x=6,\\x-y+z=1{,}5,\\x+y-z=\dfrac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+z=-8\dfrac{1}{6},\\-x+y+z=-6,\\x-y+z=-1{,}5,\\x+y-z=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\dfrac{1}{12},\\y=3\dfrac{1}{3},\\z=3\dfrac{3}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\dfrac{1}{12},\\y=-3\dfrac{1}{3},\\z=-3\dfrac{3}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(1\dfrac{1}{12};\,3\dfrac{1}{3};\,3\dfrac{3}{4}\right);\ \left(-1\dfrac{1}{12};\,-3\dfrac{1}{3};\,-3\dfrac{3}{4}\right)\right\}.$

Приклад 23. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x\,(x+y+z)=900,\\y\,(x+y+z)=5400,\\z\,(x+y+z)=1800.\end{cases}$

Розв'язання. 1. Підсумовуємо всі рівняння системи:

$$(x+y+z)^2=8100.$$

2. Розв'язуємо сукупність двох систем, рівносильну заданій:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y+z=90,\\ x\,(x+y+z)=900,\\ y\,(x+y+z)=5400,\\ z\,(x+y+z)=1800;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+z=-90,\\ x\,(x+y+z)=900,\\ y\,(x+y+z)=5400,\\ z\,(x+y+z)=1800\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=10,\\ y=60,\\ z=20;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-10,\\ y=-60,\\ z=-20.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(10;\,60;\,20),\,(-10;\,-60;\,-20)\}$.

Приклад 24. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x+y+xy=4,\\ x+z+zx=9,\\ y+z+yz=25.\end{cases}$

Розв'язання. 1. Додаємо до обох частин кожного рівняння по одиниці:

$$\begin{cases}x+y+xy+1=5,\\ x+z+xz+1=10,\\ y+z+yz+1=26.\end{cases}$$

2. Розкладаємо на множники ліві частини кожного з рівнянь:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=5,\\ (z+1)(x+1)=10,\\ (y+1)(z+1)=26.\end{cases}$$

3. Виконуємо заміну: $\begin{cases}x+1=x_1,\\ y+1=y_1,\\ z+1=z_1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1y_1=5,\\ x_1z_1=10,\\ y_1z_1=26.\end{cases}$

4. Перемножуємо всі рівняння одержаної системи:

$$xy_1^2 z_1^2 = 5\cdot 10\cdot 26;$$
$$x_1 y_1 z_1 = \pm 10\sqrt{13}.$$

5. Розв'язуємо сукупність систем, рівносильну останній системі рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_1 y_1 z_1 = 10\sqrt{13}, \\ x_1 y_1 = 5, \\ x_1 z_1 = 10, \\ y_1 z_1 = 26; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 y_1 z_1 = -10\sqrt{13}, \\ x_1 y_1 = 5, \\ x_1 z_1 = 10, \\ y_1 z_1 = 26 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{13}, \\ y_1 = \sqrt{13}, \\ x_1 = \dfrac{5\sqrt{13}}{13}; \end{cases} \\ \begin{cases} z_1 = -2\sqrt{13}, \\ y_1 = -\sqrt{13}, \\ x_1 = -\dfrac{5\sqrt{13}}{13}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь:

$$\left\{\left(5\,\frac{\sqrt{13}}{13}-1;\ \sqrt{13}-1;\ 2\sqrt{13}-1\right),\ \left(-5\,\frac{\sqrt{13}}{13}-1;\ -\sqrt{13}-1;\ -2\sqrt{13}-1\right)\right\}.$$

Приклад 25. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)=1, \\ x_2(x_1+x_2+\ldots+x_n)=3, \\ x_3(x_1+x_2+\ldots+x_n)=5; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(x_1+x_2+\ldots+x_n)=2n-1. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Підсумовуємо всі рівняння системи:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 1+3+5+\ldots+2n-1,$$
$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = n^2,$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_n = \pm n.$$

2. **Розв'язуємо сукупність двох систем, рівносильну заданій** системі:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_n=n,\\ \text{задана система};\end{cases}\\ \begin{cases}x_1+x_2+\ldots+x_n=-n,\\ \text{задана система}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{n},\\ x_2=\dfrac{3}{n},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=\dfrac{2n-1}{n};\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{n},\\ x_2=-\dfrac{3}{n},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=-\dfrac{2n-1}{n}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{3}{n};\ldots;\dfrac{2n-1}{n}\right)\left(-\dfrac{1}{n};-\dfrac{3}{n};\ldots;\dfrac{-2n+1}{n}\right)\right\}$.

2.5.8. Системи раціональних рівнянь

Для розв'язання систем раціональних рівнянь використовують такі самі способи, що й при розв'язанні алгебраїчних систем рівнянь.

Приклад 26. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2},\\ x-y=\dfrac{1}{4}xy.\end{cases}$

ОДЗ: $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Спосіб розв'язання. Заміну здійснюємо лише в одному рівнянні системи.

Заміна: $\dfrac{x}{y}=p$.

Розв'язуємо допоміжне рівняння:

$$p+\frac{1}{p}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{2p^2-5p+2}{p}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2p^2-5p+2=0,\\p\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p=2,\\p=0{,}5,\end{array}\right.\\p\neq 0.\end{cases}$$

Розв'язуємо задану систему:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x}{y}=2,\\x-y=\frac{1}{4}xy;\end{cases}\\\begin{cases}\frac{x}{y}=0{,}5,\\x-y=\frac{1}{4}xy\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y,\\2y-y-0{,}5y^2=0;\end{cases}\\\begin{cases}x=0{,}5y,\\2y-4y-0{,}5y^2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2y,\\y^2-2y=0;\end{cases}\\\begin{cases}x=0{,}5y,\\y^2+4y=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\\x=0;\end{cases}\\\begin{cases}y=2,\\x=4;\end{cases}\\\begin{cases}y=-4,\\x=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(0;0);(4;2);(-2;-4)\}$.

Приклад 27. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}xy-\frac{x}{y}=\frac{16}{3},\\xy-\frac{y}{x}=\frac{9}{2}.\end{cases}$

ОДЗ: $x\neq 0,\ y\neq 0$.

Спосіб розв'язання. Заміна в обох рівняннях системи.

Заміна: $\begin{cases}xy=z,\\\frac{x}{y}=p.\end{cases}$

Розв'язуємо допоміжну систему:

$$\begin{cases}z-p=\frac{16}{3},\\z-\frac{1}{p}=\frac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z-p=\frac{16}{3},\\2zp-2-9p=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{16}{3}+p,\\6p^2+5p-6=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{16}{3} + p, \\ \left[\begin{array}{l} p = \dfrac{2}{3}, \\ p = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = \dfrac{2}{3}, \\ z = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} p = -\dfrac{3}{2}, \\ z = \dfrac{23}{6}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо задану систему:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = 6, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} xy = \dfrac{23}{6}, \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y, \\ \dfrac{2}{3}y^2 = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y, \\ -\dfrac{3}{2}y^2 = \dfrac{23}{6} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3, \\ x = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} y = -3, \\ x = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(2; 3), (-2; -3)\}$.

Приклад 28. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Спосіб розв'язання. Розкладання на множники однієї з частин одного рівняння системи і підстановка в це рівняння замість одного з його множників числового значення, яке визначається другим рівнянням.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{x+1}-\frac{1}{y}=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x+1}=\frac{13}{12}, \\ \frac{2}{y}=-\frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{13}, \\ y=-\frac{24}{5}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(\frac{11}{13}; -\frac{24}{5}\right)\right\}$.

Приклад 29. Розв'язати **систему рівнянь** $\begin{cases} \frac{1}{2x+y}+x=3, \\ \frac{x}{2x+y}=-4. \end{cases}$

Спосіб розв'язання. Використання теореми Вієта для складання допоміжного квадратного рівняння.

Згідно з теоремою Вієта і з урахуванням вигляду заданої системи, складаємо допоміжне квадратне рівняння:

$$z^2-3z-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1, \\ z=4. \end{array}\right.$$

Розв'язуємо задану систему:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{2x+y}=-1, \\ x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2x+y}=4, \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=-9; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1, \\ y=\frac{9}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{(4; -9); \left(-1; 2\frac{1}{4}\right)\right\}$.

Приклад 30. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x+y}{4}=\frac{xy}{x+y}+\frac{1}{2}, \\ x^2+y^2=\frac{8x^2y^2}{(x+y)^2}+22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{4}=\frac{xy}{x+y}+\frac{1}{2}, \\ (x+y)^2-2xy=\frac{8x^2y^2}{(x+y)^2}+22. \end{cases} \qquad (*)$$

Спосіб розв'язання. Заміна (але не традиційна), що приводить до простішої допоміжної системи.

Заміна: $\begin{cases} x+y=u, \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=u+v, \\ 2y=u-v \end{cases} \Rightarrow 4xy=u^2-v^2.$

Розв'язуємо допоміжну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{4}=\dfrac{u^2-v^2}{4u}+\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(u+v)^2}{4}+\dfrac{(u-v)^2}{4}=\dfrac{(u^2-v^2)^2}{2u^2}+22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2=2u, \\ 3u^2v^2=v^4+44u^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v^2=2u, \\ 6u^3=4u^2+44u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=8, \\ v=4; \end{cases} \\ \begin{cases} u=8, \\ v=-4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуємо задану систему. Система (*) рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=8, \\ xy=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=8, \\ xy=-4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(6;2);(2;6)\}$.

Приклад 31. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{5}{7}, \\ \dfrac{x^3+y^3}{(1+xy)^3}=\dfrac{5}{49}. \end{cases}$

ОДЗ: $1+xy \neq 0$.

Спосіб розв'язання. **Виконання низки дій над рівняннями системи.**

1. Підносимо перше рівняння до квадрату, а друге ділимо на перше:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=\frac{25}{49}(1+2xy+x^2y^2), \\ \frac{x^2-xy+y^2}{(1+xy)^2}=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

2. Після тотожних перетворень замінюємо друге рівняння вихідної системи різницею першого і другого одержаної системи:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=\frac{25}{49}(1+2xy+x^2y^2), \\ x^2-xy+y^2=\frac{1}{7}(1+2xy+x^2y^2) \end{cases} \Rightarrow \quad 3xy=\frac{18}{49}(1+xy)^2.$$

Вихідна система рівносильна системі $\begin{cases} x+y=\frac{5}{7}(1+xy), \\ 3\cdot 49xy=18+36xy+18x^2y^2. \end{cases}$

3. Розв'язуємо допоміжне квадратне рівняння:

$$6z^2-37z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=6, \\ z=\frac{1}{6}, \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 6x^2y^2-37xy+6=0, \\ x+y=\frac{5}{7}(1+xy) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=6, \\ x+y=5; \end{cases} \\ \begin{cases} xy=\frac{1}{6}, \\ x+y=\frac{5}{6} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{(2;3),(3;2),\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Приклад 32. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{8}{15}, \\ \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{9}{20}. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+y\neq 0, \\ x+z\neq 0, \\ y+z\neq 0. \end{cases}$

Розв'язання. 1. Додаємо почленно всі рівняння системи:

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{x+z}+\frac{2}{y+z}=\frac{94}{60}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}=\frac{47}{60}.$$

Вихідна система рівносильна системі

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{47}{60}, \\ \text{вихідна система} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{5} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=3, \\ x+z=4, \\ y+z=5. \end{cases}\qquad(1)$$

2. Додаємо почленно всі рівняння останньої системи і одержуємо
зняння

$$2x+2y+2z=12\Leftrightarrow x+y+z=6$$

Утворюємо нову систему рівносильну системі (1):

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x+y=3, \\ x+z=4, \\ y+z=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1;2;3)\}$.

Приклад 33. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1, \\ \dfrac{xz}{x+z}=2, \\ \dfrac{yz}{y+z}=3. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+y\neq 0, \\ x+z\neq 0, \\ y+z\neq 0. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=1, \\ \dfrac{xz}{x+z}=2, \\ \dfrac{yz}{y+z}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=1, \\ \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} +\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \hline \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=1\dfrac{5}{6} \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{3}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{8}{3}, \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}3, \\ y=\dfrac{6}{19}, \\ z=\dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(0{,}3;\ \dfrac{6}{19};\ \dfrac{3}{8}\right)\right\}$.

Приклад 34. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=\dfrac{13}{6}, \\ y\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{20}{3}, \\ z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{15}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Розкриємо дужки.

1. Додаємо почленно всі рівняння системи і утворюємо нову систему рівнянь, рівносильну заданій:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{yz}{x}+\dfrac{yx}{z}=\dfrac{20}{3}, \\ \dfrac{xz}{y}+\dfrac{zy}{x}=\dfrac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=\dfrac{49}{6}, \\ \text{вихідна система.} \end{cases}$$

2. Перемножуємо всі рівняння системи і утворюємо нову систему, рівносильну останній:

$$\begin{cases} xyz=6; \\ \begin{cases} \dfrac{yz}{x}=6, \\ \dfrac{xz}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1, \\ y^2=4, \\ z^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=-2, \\ z=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(1;\ 2;\ 3);\ (1;\ -2;\ -3);\ (-1;\ 2;\ -3);\ (-1;\ -2;\ 3)\}$.

2.5.9. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати системи рівнянь:

161) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$

162) $\begin{cases} 3x - y = 15, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

163) $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 0{,}375, \\ x + y = 12; \end{cases}$

164) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$

165) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

166) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$

167) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x + y = 5; \end{cases}$

168) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$

169) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2; \end{cases}$

170) $\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 3, \\ zx = 2. \end{cases}$

Конкурсний рівень

Розв'язати системи рівнянь:

171) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22; \end{cases}$

172) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5; \end{cases}$

173) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$

174) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6; \end{cases}$

175) $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13; \end{cases}$

176) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 + xy + y^2 = 13; \end{cases}$

177) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$

178) $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0, \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0, \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0; \end{cases}$

179) $\begin{cases} 4x - y + 4z = 0, \\ x + 5y - 2z = 3, \\ -x + 8y - 2z = 1; \end{cases}$

180) $\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91, \\ y^2 = xz; \end{cases}$

181) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + x = 1, \\ \dfrac{x}{x-y} = -2; \end{cases}$

182) $\begin{cases} yz + zx = 15, \\ zx + xy = -16, \\ xy + yz = 9; \end{cases}$

183) $\begin{cases} \dfrac{yz}{y+z} = 4, \\ \dfrac{2xz}{z+x} = 3, \\ \dfrac{3xy}{x+y} = 5; \end{cases}$

184) $\begin{cases} xy + z^2 = 4, \\ xz + y^2 = 4, \\ yz + x^2 = 4; \end{cases}$

185) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^2 + zy + z^2 = 4, \\ y^2 + yz + z^2 = 7; \end{cases}$

186) $\begin{cases} \dfrac{1+xy}{x+y} = \dfrac{11}{7}, \\ \dfrac{x^2 + xy + y^2}{1 + xy + x^2y^2} = \dfrac{39}{111}; \end{cases}$

187) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 147, \\ x + xy + y = 0; \end{cases}$

188) $\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 72, \\ (x+z)(x+y+z) = 96, \\ (y+z)(x+y+z) = 120; \end{cases}$

189) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3}, \\ x + y + z = \dfrac{13}{3}, \\ xyz = 1. \end{cases}$

2.6. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ РІВНЯНЬ

2.6.1. Дві евристичні схеми пошуку рівняння

1. Схема Бронштейна

1. З'ясувати, числові значення яких величин можна зрівняти.

2. Вибрати невідому величину (через яку зручно виразити величини, які будемо зрівнювати) і позначити її x.

3. Виразити через x величини, значення яких будемо зрівнювати.

4. Скласти рівняння.

2. Схема Шапошнікова — Вальцева

1. З'ясувати, яку з невідомих величин прийняти як основну невідому.

2. Позначити цю невідому x (або іншою буквою) і виразити всі інші невідомі величини в умові задачі через x.

3. Спираючись на залежність між відомими і невідомими величинами, скласти рівняння.

2.6.2. Текстові задачі з абстрактними числами та однойменними величинами

1. На знаходження чисел:

а) за їх сумами і різницями;

б) за їх сумами або різницями і відношеннями;

в) інші.

Опорні знання

Зображення натурального числа у вигляді суми розрядних одиниць:

$$a_n a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

2. На знаходження цифр.

Опорні знання

Подання натурального числа m, при діленні якого на натуральне число n залишається остача z, у вигляді рівності:

$$m = nk + z, \quad m \geq n, \;\; z < k.$$

3. На пропорційне ділення.

Опорні знання

Якщо є ряд рівних відношень

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots, \quad \text{то} \quad \frac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}=\frac{a-e}{b-f}=\frac{a+c-m}{b+d-n}$$

Приклад 1. Якщо двозначне число поділити на суму його цифр, то в частці одержимо 6, а в остачі — 2. Якщо число поділити на добуток його цифр, то в частці одержимо 5, а в остачі — 2. Знайти це число.

Розв'язання. Нехай x — кількість десятків, y — кількість одиниць. Тоді $10x + y$ — шукане число.

Ураховуючи умову задачі й другу позицію опорних знань, складаємо систему

$$\begin{cases} 10x+y=6(x+y)+2, \\ 10x+y=5xy+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y-4x=-2, \\ y+10x-5xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-2}{5}, \\ 10x^2-32x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x-2}{5}, \\ x=3 \quad \text{або}\ x=\dfrac{1}{5}, \end{cases}$$

$x=\frac{1}{5}$ не задовольняє умову задачі, оскільки кількість десятків може виражатися однією з дев'яти цифр. Тому $x = 3$, $y = 2$.

Відповідь. 32.

Приклад 2. Сестра старша від брата на 6 років. Через рік вона буде старша від брата вдвічі. Скільки років кожному з них?

Розв'язання. Нехай x років — вік брата, тоді $x + 6$ років — вік сестри. Складаємо рівняння. $2(x + 1) = x + 7$, звідки $2x - x = 7 - 2$, $x = 5$.

Відповідь. сестрі 11 років, брату 5 років.

Приклад 3. Задача з фольклору Франції. Заплативши за вечерю в ресторані, Метив'є виявив, що в нього залишилась п'ята частина грошей, які були з собою. Причому сантимів залишилось стільки, скільки спочатку було франків (1 франк = 100 сантимів), а франків — у 5 разів менше, ніж спочатку було сантимів. Скільки Метив'є заплатив за вечерю?

Скорочений запис умови задачі:

	Кількість	
	франків	сантимів
Було		
Витрачено	?	?
Залишилося	у 5 разів менше	

$\frac{1}{5}$ від

Таблиця значень величин після введення невідомої змінної x.

	Кількість	
	франків	сантимів
Було	$\overbrace{x \qquad 5y}^{100x+5y}$	
Витрачено		
Залишилося	y	x

$100y + x$

Розв'язання. Позначимо y — кількість франків, x — кількість сантимів, які залишились у Метив'є. Тоді спочатку в нього було $5(100y + x) = 500y + 5x$ сантимів. З умови задачі випливає, що спочатку було x франків і $5y$ сантимів. Тому $5(100y + x) = 100x + 5y$, звідки $500y - 5y = 100x - 5x$, $495y = 95x$, $y : x = 95 : 495$, $y : x = 19 : 99$. Тому y і x можна виразити через коефіцієнт пропорційності z: $y = 19z$, $x = 99z$.

Згідно з умовою задачі $0 \le 99z < 100$, тому $z = 1$.

Отже, $y = 19$, $x = 99$, тобто спочатку у Метив'є було 99 франків 95 сантимів, залишилося 19 франків 99 сантимів, витрачено 79 франків 96 сантимів.

2.6.3. Текстові задачі про розчини, сплави, суміші тощо на проценти

І. Основні формули для обчислення концентрації розчинів.

Кількість розчинів: один.

Концентрацію суміші (розчину, сплаву) визначають за формулою

$$c = \frac{q}{m} \cdot 100\ \%,$$

де q — маса розчиненої речовини, m — маса розчину.

Кількість розчинів: два (немає значення, яку речовину вважати розчиненою).

Концентрацію суміші (розчину, сплаву) визначають за формулою

$$c = \frac{\frac{m_1}{100\ \%} c_1 + \frac{m_2}{100\ \%} c_2}{m_1 + m_2} \cdot 100\ \% = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2},$$

де $\frac{m_1}{100\ \%} c_1$, $\frac{m_2}{100\ \%} c_2$ — маса речовини, розчиненої в розчині відповідно першому і другому.

Кількість розчинів: n.

Концентрацію суміші (розчину, сплаву) визначають за формулою

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \ldots + m_n c_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

де m_n — маса n-го розчину; c_n — концентрація n-го розчину.

ІІ. Два типи задач про розчини та сплави.

Характеристика умов задач першого типу

Відомі: m_1, m_2 — маси змішуваних речовин (сплавів); c_1, c_2 — процентні концентрації (проби) змішуваних речовин.

Знайти c — процентну концентрацію (пробу) утвореного розчину (сплаву).

Спосіб розв'язання.

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Характеристика умов задач другого типу

Знайти одне із значень m_1, m_2, c_1, c_2 за достатньою кількістю інших відомих з них.

Спосіб розв'язання. Доцільніше за допомогою рівняння або системи рівнянь.

Увага! При розв'язуванні задач про розчини і сплави скорочений запис умов та їх наслідків зручніше подавати у вигляді таблиці.

Приклад 4. Морська вода містить 5 % солі. Визначити, скільки кілограмів прісної води треба додати до 40 кг морської, щоб концентрація суміші стала 2 %.

Скорочений запис умови задачі:

	m (кг)	q (кг)	c (%)
I	40		5
II	40+?		2

Тут m — маса розчину; q — маса солі; c — концентрація розчину, $c = \frac{q}{m} \cdot 100$ %.

Розв'язання.

Таблиця значень величин після введення невідомої змінної x, яка позначає масу води, що потрібно додати.

	m (кг)	q (кг)	c (%)
I	40	$\frac{40 \cdot 5}{100}$	5
II	$40 + x$	$\frac{(40+x)}{100} \cdot 2$	2

Оскільки маса солі не змінюється, маємо рівняння

$$\frac{(40+x)\cdot 2}{100} = \frac{40 \cdot 5}{100}, \text{ звідки } x = 60.$$

Відповідь: 60 кг.

Приклад 5. Маємо два куски латуні кожний масою 60 кг. Перший кусок містить 10 кг чистої міді, другий — 8 кг. Визначити, скільки відсотків міді містить перший кусок латуні, якщо другий містить на 15 % більше.

Скорочений запис умови задачі

<table>
<tr><th></th><th>m (кг)</th><th>q (кг)</th><th>c (%)</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">} 60</td><td>10</td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>8</td><td>на 15 більше</td></tr>
</table>

Розв'язання

Таблиця значень величин після введення x

<table>
<tr><th></th><th>m (кг)</th><th>q (кг)</th><th>c (%)</th></tr>
<tr><td>I</td><td rowspan="2">$\frac{10}{x}\,100$
$\frac{8}{x+15}\,100$ } 60</td><td>10</td><td>x</td></tr>
<tr><td>II</td><td>8</td><td>$x+15$</td></tr>
</table>

Складаємо рівняння

$$\frac{10}{x}\,100+\frac{8}{x+15}\,100=60,\ \text{звідки}\ x=25.$$

Відповідь 25 %

Приклад 6. У колбі міститься 12 л соляної кислоти. Частину кислоти відлили і долили в колбу води. Потім ще раз відлили таку саму кількість розчину і знову долили в колбу води. Визначити, скільки води доливали в колбу кожного разу, якщо одержали 25 %-й розчин.

Скорочений запис умови задачі

	Маса розчину (л)	Маса соляної кислоти (л)	Концентрація розчину (%)
I	12	12	100
II	12	12 ?	
III	12		25

Розв'язання.

Таблиця значень величин після введення невідомої змінної x.

	Маса розчину (л)	Маса соляної кислоти (л)	Концентрація розчину (%)
I	12	12	100
II	12	$12-x$	$\frac{12-x}{12}\,100$
III	12	$12-x-\frac{x(\frac{12-x}{12}\cdot 100)}{100}$	25

Маса соляної кислоти в x л розчину другого виду $x\left(\frac{12-x}{12}\cdot 100\right)$ л.

Складаємо рівняння і виконуємо розрахунок:

$$12-x-\frac{x\left(\frac{12-x}{12}\cdot 100\right)}{100}=\frac{12\cdot 25}{100};$$

$$144-12x-12x+x^2=36 \Leftrightarrow x^2-24x+108=0;$$

$$x=6 \text{ або } x=12.$$

Згідно з умовою задачі значення $x<12$.

Відповідь: 6 л.

Приклад 7. Маємо два сплави — із золота і срібла. В одному кількість цих металів перебуває у відношенні 2:3, у другому — у відношенні 3:7. Визначити, скільки треба взяти кожного сплаву, щоб дістати 8 кг нового сплаву, до якого золото і срібло входили б у відношенні 5:11.

Скорочений запис умови задачі:

	Маса сплаву (кг)	Маса золота (кг)	Відношення мас
I	?		$\frac{2}{3}$
II	?		$\frac{3}{7}$
III	8		$\frac{5}{11}$

Розв'язання.

1-й спосіб

Таблиця значень величин після введення невідомих змінних x, y.

	Маса сплаву (кг)	Маса золота (кг)	Відношення мас
I	x	$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{3}$
II	y	$\frac{3}{10}y$	$\frac{3}{7}$
III	8	$\frac{5}{16}\cdot 8=\frac{5}{2}$	$\frac{5}{11}$

За умовою задачі

$$\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x, \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{2}, \end{cases}$$

звідки $x=1$, $y=7$.

Відповідь: 1 кг першого сплаву і 7 кг другого.

2-й спосіб.

Таблиця значень величин після введення невідомої змінної x.

	Маса сплаву (кг)	Маса золота (кг)	Відношення мас
I	x	$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{3}$
II	$8-x$	$\frac{3}{10}(8-x)$	$\frac{3}{7}$
III	8	$\frac{5}{16}\cdot 8=\frac{5}{2}$	$\frac{5}{11}$

За умовою задачі $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{2}$, звідки $x=1$.

Відповідь: 1 кг першого сплаву і 7 кг другого.

Приклад 8. Один сплав містить цинку і міді у відношенні 2:1, другий — у відношенні 1:5. Визначити, в якому відношенні треба взяти перший і другий сплави, щоб одержати новий сплав, в якому цинк і мідь входитимуть у відношенні 1:2.

Скорочений запис умови задачі:

	Маса сплаву (кг)	Маса цинку (кг)	Відношення мас
I	?/?		$\frac{2}{1}$
II	?/?		$\frac{1}{5}$
III			$\frac{1}{2}$

Розв'язання.

Таблиця значень величин після введення невідомих змінних x, y.

	Маса сплаву (кг)	Маса цинку (кг)	Відношення мас
I	x	$\left(\frac{2}{3}\right)x$	$\frac{2}{1}$
II	y	$\left(\frac{1}{6}\right)y$	$\frac{1}{5}$
III	$x+y$	$\frac{1}{3}(x+y)$	$\frac{1}{2}$

За умовою задачі $\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y=\frac{1}{3}(x+y)$, звідки $2x=y$, $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

2.6.4. Текстові задачі про роботу

Два типи задач:

1) про одного працюючого;
2) про спільну роботу.

Фігурують три величини: продуктивність праці (N), час (t) і обсяг виконаної роботи (A). Залежність між величинами: $A = Nt$.

Варто всю роботу, якщо її значення відсутнє в умові, позначати або 1, або якоюсь буквою.

Скорочений запис умови зручно подавати у вигляді таблиці:

Різні випадки	*N*	*t*	*A*

Приклад 9. Бригада планувала засіяти 120 га за певний час. Але перевиконуючи заплановану щоденну норму на 10 га, завершила роботу на 2 дні раніше. Визначити, скільки гектарів засівала бригада щодня.

Скорочений запис умови задачі:

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної *роботи (га)*	Час (днів)	Денна продуктивність *(га)*
За планом	120		?
Насправді	120	*на 2 менше*	*? на 10 більше*

Розв'язання.

1-й спосіб.

Таблиця значень величин після введення x, y.

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи (га)	Час (днів)	Денна продуктивність (га)
За планом	120	$\frac{120}{x}$	x
Насправді	120	$\frac{120}{y}$ **на 2 менше**	y на 10 більше

$$\begin{cases} y - x = 10, \\ \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 2. \end{cases}$$

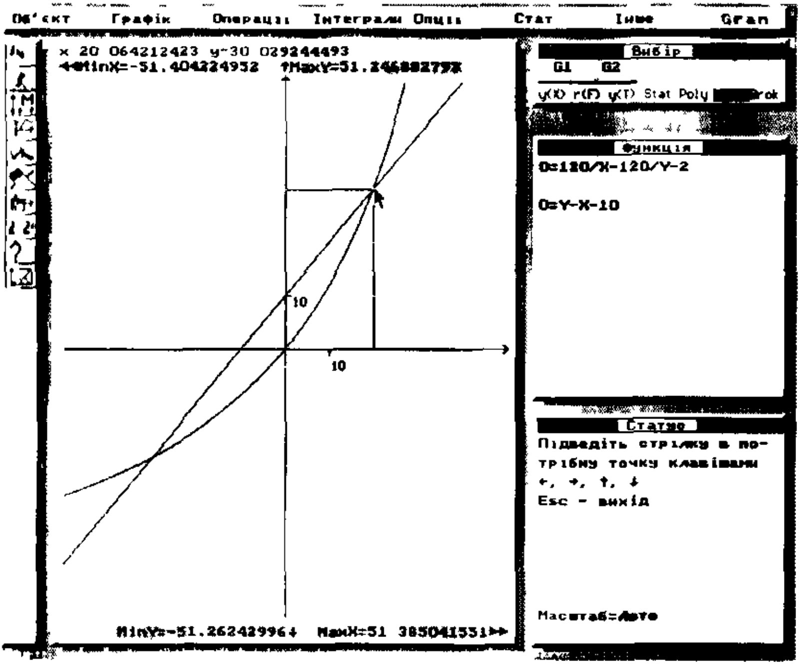


Рис 2 65

2-й спосіб

Таблиця значень величин після введення невідомої змінної x

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи (га)	Час (днів)	Денна продуктивність (га)
За планом	120	$\frac{120}{x-10}$	$x-10$
Насправді	120	$\frac{120}{x}$ на 2 менше	x на 10 більше

$\frac{120}{10}-\frac{120}{x}=2$, $\frac{60}{x-10}-\frac{60}{x}=1$, звідки $x_1=30$, $x_2\neq-20$ не підходить за умовою задачі. Отже, бригада засівала за день 30 га.

3-й спосіб.

Обсяг засівання	Обсяг виконуваної роботи (га)	Час (днів)	Денна продуктивність (га)
За планом	120	x	$\frac{120}{x}$
Насправді	120	$x-2$	$\frac{120}{x-2}$ на 10 менше

$$\frac{120}{x-2}-\frac{120}{x}=10,\quad \text{звідки}\quad \frac{12}{x-2}-\frac{12}{x}=1,$$

$x_1=6$; $x_2=-4$ не підходить за умовою задачі. Отже, бригада засівала за день $\frac{120}{6-2}=30$ (га).

Відповідь: 30 га.

Приклад 10. Два слюсарі одержали замовлення. Спочатку 1 год працював перший слюсар, а потім 4 год вони працювали разом. У результаті було виконано 40 % замовлення. Визначити, за який час міг би виконати замовлення кожний слюсар, якщо першому для цього потрібно було б на 5 год більше, ніж другому.

Скорочений запис умови задачі:

	Обсяг виконуваної роботи	Час (год)	Продуктивність
I	40 %	1	
I + II		4	
I	1	? на 5 >	
II	1	?	

$$A=Qt.$$

Розв'язання.

Таблиця значень величин після введення невідомої змінної x, що позначає час, необхідний першому слюсареві для виконання роботи.

	A	t	Q
I	$1\cdot\dfrac{40\ \%}{100\ \%}=0{,}4$	1	
I + II		4	
I	1	x	$\dfrac{1}{x}$
II	1	$x-5$	$\dfrac{1}{x-5}$

Рівняння

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x-5}=0{,}4;$$

$x_1=25$; $x_2=2{,}5$ не задовольняє умову задачі, бо $x>5$.

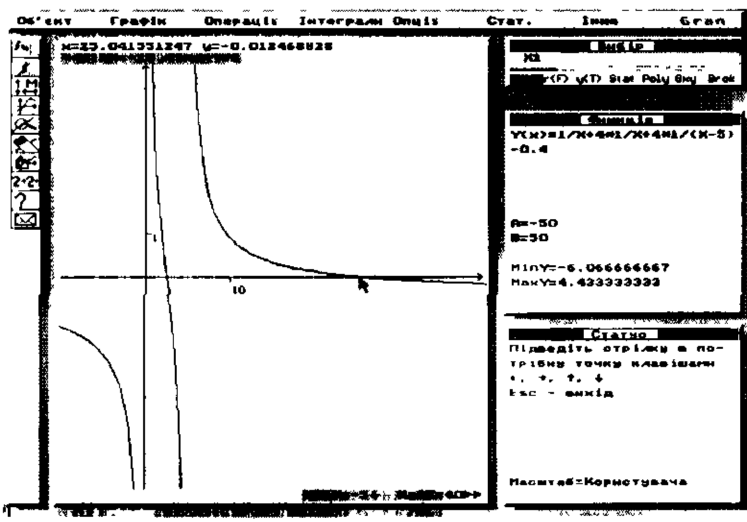


Рис. 2.66

Отже, перший слюсар міг би виконати всю роботу за 25 год, другий — за 25 – 5 = 20 год.

Відповідь: 25 і 20 год.

ıклад 11. **До басейну підведено дві труби: через одну постача•
ду, через другу спорожнюють басейн. Через першу трубу ба•
ıповнюється на 2 год довше, ніж через другу спорожнюється,
повненому на $\frac{1}{3}$ басейні відкрили дві труби разом, і басейн ви•
порожнім через 8 год. Визначити, за скільки годин одна пер•
'ба може наповнити басейн, а одна друга спорожнити його.
ɔрочений запис умови задачі:**

	A	t (год)	Q (1/год)
[	1	? на 2 більше	
I	1	?	
· II	$\frac{1}{3}$	8	

ıв'язання.

ɔлиця значень величин після введення невідомих змінних x, y,
- час, за який через першу трубу басейн можна заповнити; y –
ı який через другу трубу басейн можна спорожнити.

	A	t (год)	Q (1/год)
	1	x на 2 більше	$\frac{1}{x}$
I	1	y	$\frac{1}{y}$
II	$\frac{1}{3}$	8	

умовою задачі

$$\begin{cases} y = 2, \\ :\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2, \\ 1:\left(\frac{x-y}{xy}\right)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2, \\ \frac{xy}{x-y}=24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2, \\ xy=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2, \\ y^2+2y-48=0; \end{cases}$$

$y_1 = 6 \Rightarrow x = 8$;

$y_2 = -8$ не задовольняє умову задачі (за умовою $y > 0$).

Відповідь: перша труба заповнює басейн за 8 год, друга спорожнює його за 6 год.

2.6.5. Текстові задачі про рух

Задачі:
- про одне рухоме тіло
- за наявності течії
- про рух тіл
  - в одному напрямі
    - по прямій
    - по колу
  - у протилежних напрямах
    - по прямій
    - по колу
- інші.

Фігурують три величини: швидкість V, час t і відстань S.

Залежність між величинами: $S = Vt$, або $V = \frac{S}{t}$.

Скорочений запис умови зручно подавати або графічно, або у вигляді таблиці.

При розв'язуванні задач про рух необхідно з'ясувати:

І. За наявності течії річки.

1. Швидкість (V) руху тіла: за течією річки $V = V_{вл} + V_{т.р}$, проти течії річки $V = V_{вл} - V_{т.р}$, де $V_{вл}$ — власна швидкість тіла; $V_{т.р}$ — швидкість течії річки.

2. Пліт рухається зі швидкістю течії річки.

ІІ. Рух двох тіл у протилежних напрямах.

1. Якщо тіла одночасно почали рухатися назустріч один одному, то до моменту зустрічі вони рухались однаковий час.

2. Сума відстаней, пройдених обома тілами до зустрічі, дорівнює загальній відстані між пунктами, з яких вийшли ці тіла.

3. За одиницю часу тіла зближуються на відстань, що чисельно дорівнює сумі їх швидкостей (швидкість зближення).

4. Якщо тіла до зустрічі рухались однаковий час, то швидкість їх зближення визначають, поділивши всю пройдену ними відстань на час.

ІІІ. Рух двох тіл в одному напрямі.

1. Якщо два тіла одночасно вийшли з різних пунктів і одне наздоганяє друге, то з часом відстань між ними спочатку (до зустрічі) зменшується, а після зустрічі збільшується.

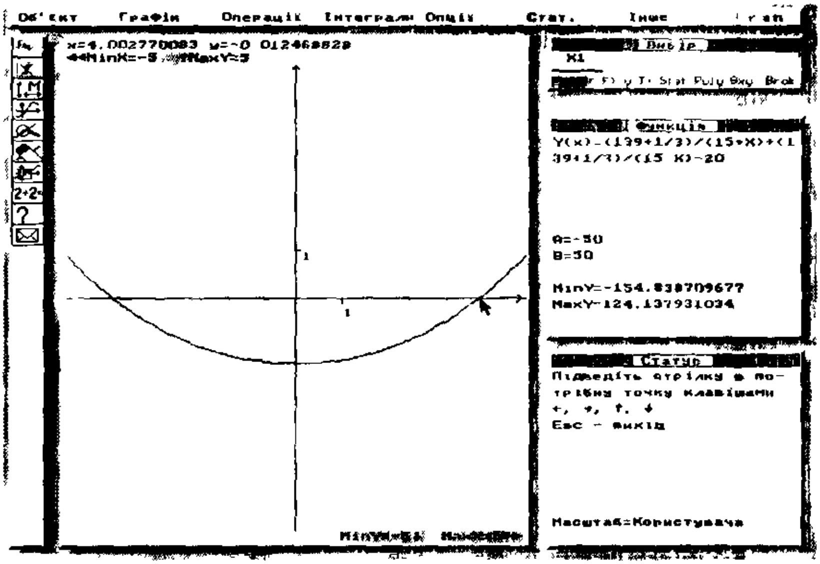


Рис 2.68

Приклад 14. З пунктів A і B одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти і зустрілися за 30 км від пункту B. Прибувши в A і B, вони повернулися назад. Друга зустріч відбулася за 18 км від пункту A. Знайти відстань між пунктами A і B.

Розв'язання.

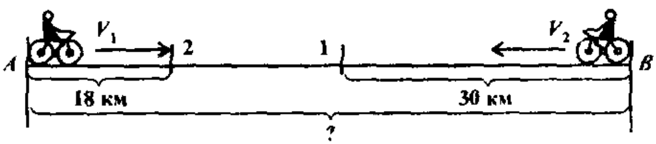


Рис 2.69

Нехай: x км — відстань AB;

V_1 км/год — швидкість велосипедиста, який рушив з пункту A;

V_2 км/год — швидкість велосипедиста, який рушив з пункту B.

$$\begin{cases} \dfrac{x-30}{V_1} = \dfrac{30}{V_2}, \\ \dfrac{2x-18}{V_1} = \dfrac{x+18}{V_2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x-30}{30} = \dfrac{V_1}{V_2}, \\ \dfrac{2x-18}{x+18} = \dfrac{V_1}{V_2}; \end{cases} \quad \dfrac{x-30}{30} = \dfrac{2x-18}{x+18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x - 540 = 60x - 540 \Leftrightarrow x^2 - 72x = 0; \qquad x = 0,\ x = 72.$$

Відповідь: 72 км.

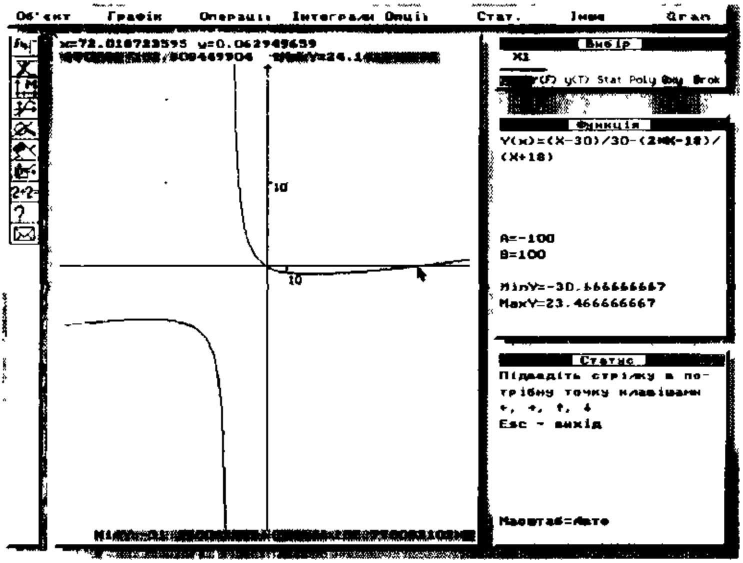


Рис. 2.70

Приклад 15. З пункту A одночасно в одному напрямі виїхали два велосипедисти: перший — зі швидкістю 18 км/год, другий — 24 км/год. Через годину слідом за ними виїхав автомобіль, який наздогнав спочатку першого велосипедиста, а через 10 хв — другого. Визначити швидкість автомобіля.

Скорочений запис умови задачі:

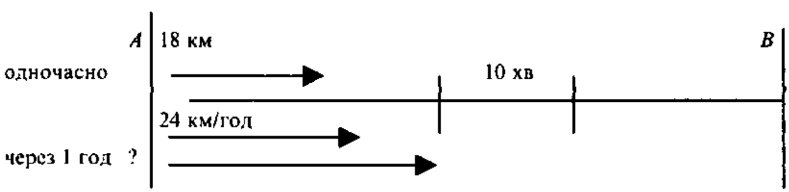


Рис. 2.71

Розв'язання. Нехай x км/год — швидкість автомобіля. Тоді $(x - 18)$ км/год — швидкість зближення автомобіля з першим велосипедистом, $(x-24)$ км/год — швидкість зближення автомобіля з другим велосипедистом, $\frac{18}{x-18}$ год — час, через який автомобіль наздожене першого велосипедиста, $\frac{24}{x-24}$ год — час, через який автомобіль наздожене другого велосипедиста.

$$\frac{24}{x-24}-\frac{18}{x-18}=\frac{1}{6}; \quad x=72.$$

Відповідь: 72 км/год.

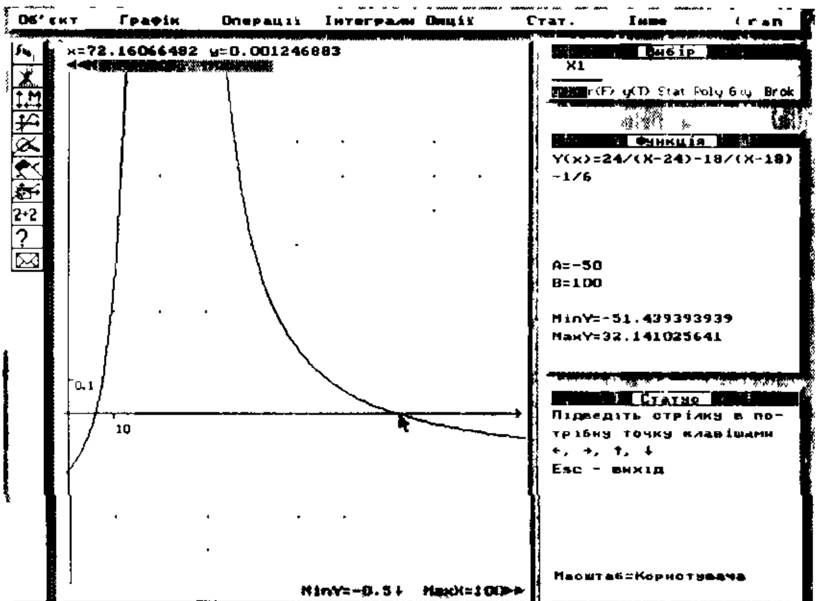


Рис. 2.72

Приклад 16. З однієї точки кругової доріжки довжиною 3 км рухаються в одному напрямі два мотоциклісти, які сходяться через кожні 36 хв. При цьому перший наздоганяє другого. Якщо вони почнуть рух у різні напрями, то зустрічатимуться через кожні 2 хв 24 с. Знайти швидкості руху мотоциклістів.

Скорочений запис умови задачі:

Рух	Шлях (км)	Час (год)	Швидкість руху (км/год)
В одному напрямі	3	36	? – ?
Назустріч	3	24	? + ?

Розв'язання.

Таблиця значень величин після введення змінних величин x, y.

Рух	Шлях (км)	Час (год)	Швидкість руху (км/год)
В одному напрямі	3	36 хв = $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ (год)	$x - y$
Назустріч	3	2 хв 24 с = $2\frac{24}{60}\ \ 60 = \frac{1}{25}$ (год)	$x + y$

$$\begin{cases} x - y = 3 : \dfrac{3}{5}, \\ x + y = 3 : \dfrac{1}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 80, \\ 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40, \\ y = 35. \end{cases}$$

Відповідь: 40 і 35 км/год.

Приклад 17. За 7500 м переднє колесо екіпажу зробило на 1000 обертів більше, ніж заднє. Якщо довжину кола кожного колеса збільшити на 1 м, то на тій же відстані переднє колесо зробить на 625 обертів більше, ніж заднє. Визначити довжину кола кожного колеса.

Скорочений запис умови задачі:

Вид ситуації	Шлях (м)	Довжина кола колеса (м)	Кількість обертів	
I	7500	?	на 1000 обертів > переднє заднє	колеса
II	7500	? + 1	на 625 обертів > переднє заднє	колеса

Розв'язання. Кількість обертів $n = \dfrac{S}{l}$, де S — шлях; l — довжина кола колеса.

Таблиця значень величин після введення змінних величин x, y.

Вид ситуації	Шлях (м)	Довжина кола колеса (м)	Кількість обертів	Колесо
I	7500	x	$\frac{7500}{x}$ на 1000 більше	переднє
		y	$\frac{7500}{y}$	заднє
II	7500	$x+1$	$\frac{7500}{x+1}$ на 625 більше	переднє
		$y+1$	$\frac{7500}{y+1}$	заднє

Система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{7500}{x}-\dfrac{7500}{y}=1000, \\ \dfrac{7500}{x+1}-\dfrac{7500}{y+1}=625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{15}{x}-\dfrac{15}{y}=2, \\ \dfrac{12}{x+1}-\dfrac{12}{y+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15y-15x=2xy, \\ 12y+12-12x-12=xy+x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y-15x=2xy, \\ 22y-26x-2=2xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15y-15x=2xy, \\ 11x-7y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2+7y}{11} \\ 15y-15\,\dfrac{-2+7y}{11}=2y\left(\dfrac{-2+7y}{11}\right) \end{cases};$$

$$14y^2-64y-30=0; \qquad 7y^2-32y-15=0; \qquad y=\frac{32\pm 38}{14};$$

$y_1=5$, $y_2=-\dfrac{3}{7}$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь. 3 і 5 м.

Приклад 18. Колона довжиною 500 м рухається зі швидкістю 5 км/год. Велосипедист почав їхати з кінця колони в її початок, повернувся і без зупинки досяг кінця колони за 4 хв 30 с. Визначити власну швидкість велосипедиста.

Скорочений запис умови задачі:

	Шлях (м)	Час (хв)	Швидкість руху (км/год)
Велосипедист по ходу колони	500	4 хв 30 с	? – 5
Велосипедист назустріч колоні	500		? + 5
Колона			5

$$S = Vt, \quad t = \frac{S}{V}.$$

Розв'язання.

Таблиця значень величин після введення змінних величин x.

	Шлях (м)	Час (год)		Швидкість руху (км/год)
Колона				5
Велосипедист по ходу колони	$500\text{ м} = \frac{1}{2}\text{ км}$	$\frac{1}{2(x-5)}$	$\frac{3}{40}$	$x-5$
Велосипедист назустріч колоні	$500\text{ м} = \frac{1}{2}\text{ км}$	$\frac{1}{2(x+5)}$		$x+5$

Рівняння

$$\frac{1}{2(x+5)} + \frac{1}{2(x-5)} = \frac{3}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x - 100 + 20x + 100 = 3x^2 - 75 \Leftrightarrow 3x^2 - 40x - 75 = 0;$$

$x_1 = 15$, $x_2 \neq -\frac{5}{3}$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: 15 км/год.

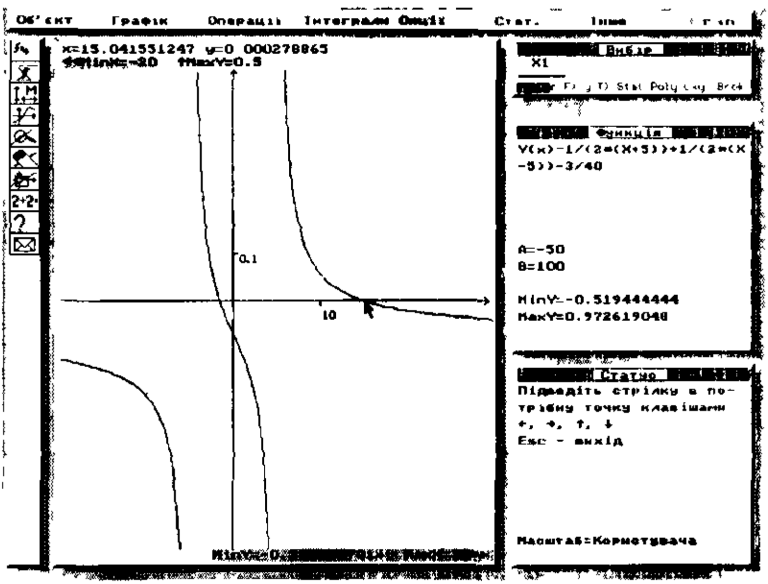


Рис 2 73

2.6.6. Текстові задачі про прогресію

Основні твердження та формули

№ пор		Прогресія	
		арифметична	геометрична
1	*Необхідна і достатня* умова, щоб послідовність була прогресією	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$	$u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$, $n \geq 2$
2	Формула загального (n-го) члена	$a_n = a_1 + d\,(n-1)$, a_1 — перший член, d — різниця прогресії	$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, u_1 — перший член, q — знаменник прогресії
3	Формула суми n членів прогресії	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, або $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}$	$S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Для нескінченної спадної геометричної прогресії $S = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Приклад 19. Турист піднімається вгору. За першу годину він піднявся на 800 м, а за кожну наступну годину піднімався на 25 м менше, ніж попередньо. Визначити, за скільки годин він досяг висоти 5700 м.

Розв'язання. Запишемо умову задачі, використовуючи символи арифметичної прогресії: $a_1 = 800$; $d = -25$; $S_n = 5700$; $n = ?$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad \frac{800 + 800 - 25(n-1)}{2} n = 5700;$$
$$n^2 - 65n + 456 = 0;$$

$n_1 = 8$, $n_2 = 57$ не підходить за умовою задачі, бо $a_{n_2} < 0$.

Відповідь: 8 год.

Приклад 20. Визначити, в яку суму обернеться вклад 1000 грн, покладений в ощадну касу на 5 років, якщо щорічно внесок збільшується на 5 %.

Розв'язання. Запишемо умову задачі, використовуючи символи геометричної прогресії: $u_1 = 1000$; $q = 1,05$; u_5 — ?

$$u_n = u_1 \cdot 1{,}05^n \qquad u_5 = u_1 \cdot 1{,}05^5 = 1000 \cdot 1{,}05^5 \approx 1215.$$

Приклад 21. У коло радіуса R вписано правильний шестикутник, у шестикутник — коло, у коло — знову правильний шестикутник і т. д. Знайти суму довжини всіх радіусів кіл S_{R_∞}, довжину всіх кіл S_{C_∞} і площу всіх кіл S_{S_∞}.

Розв'язання. $R_1 = AO = R$.

Із ΔAOB: $OB = R_2 = AO \cdot \cos 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Із ΔBOK: $OK = R_3 = BO \cdot \cos 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$R_1, R_2, R_3, \ldots$ утворюють нескінченну спадну геометричну прогресію, де $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

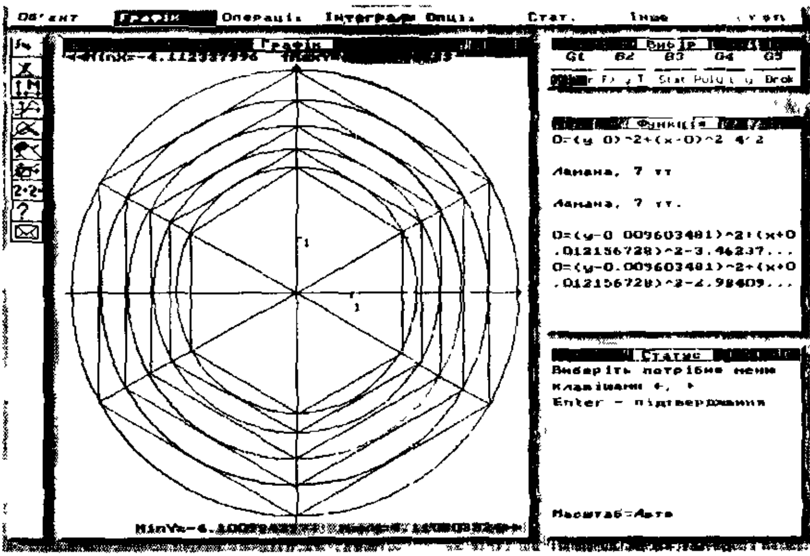


Рис 2.74

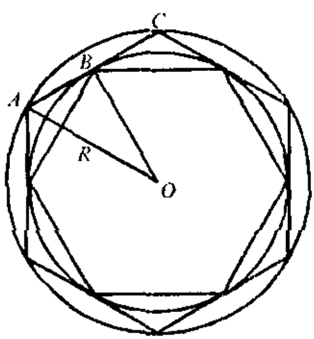


Рис 2.75

Тоді

$$S_{C_\infty} = \frac{u_1}{1-q} = \frac{R}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2R}{2-\sqrt{3}} = 2R(2+\sqrt{3});$$

$$S_{S_\infty} = \left(\pi R^2 + \frac{3}{4}\pi R^2 + \frac{9}{16}\pi R^2 + \ldots\right) = \frac{\pi R^2}{1-\dfrac{3}{4}} = 4\pi R;$$

$$S_{C_\infty}=\left(2\pi R+\sqrt{3}\pi R+\frac{3}{2}\pi R+\ldots\right)=\frac{2\pi R}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\left(2+\sqrt{3}\right)\pi R.$$

Приклад 22. У батька п'ятеро синів. Він дарує синам на день народження книги: таку кількість, як синам років починаючи з п'ятирічного віку. Кожний старший від молодшого, якому щонайменше 5 років, на 3 роки. Визначити вік кожного із синів, якщо в них зібралась бібліотека з 325 книг.

Розв'язання. Нехай зараз наймолодшому сину x років, тоді іншим *синам відповідно* $(x + 3)$, $(x + 6)$, $(x + 9)$, $(x + 12)$ *років.* ***Відповідно*** $x - 4$, $x - 1$, $x + 2$, $x + 5$, $x + 8$ разів кожний із синів одержував книжки.

$a_1 = 5$

$d = 1$

$S = 325$

Знайти: n_1, n_2, n_3, n_4, n_5.

$$S_1=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n=\frac{10+1(x-5)}{2}(x-4);$$

$$S_2=\frac{10+1(x+1)}{2}(x-1);$$

$$S_3=\frac{10+1(x+4)}{2}(x+2).$$

$$S_4=\frac{10+(x+4)}{2}(x+5);$$

$$S_5=\frac{10+1(x+7)}{2}(x+8);$$

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5.$$

Рівняння

$$\frac{10+(x-5)}{2}(x-4)+\frac{10+(x-2)}{2}(x-1)+\frac{10+(x+1)}{2}(x+2)+$$
$$+\frac{10+(x+4)}{2}(x+5)+\frac{10+(x+7)}{2}(x+8)=325;\quad x=5.$$

Відповідь: 5; 8; 11; 14; 17.

2.6.7. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

190. Різниця між шостим і четвертим членами геометричної прогресії дорівнює 72, а між третім і першим — 9. Знайти 8 членів цієї прогресії.

191. Яке двозначне число менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше їх подвійного добутку на 5?

192. Від пристані до міста відійшов човен зі швидкістю 12 км/год, а через півгодини в тому ж напрямі вийшов пароплав зі швидкістю 20 км/год. Визначити відстань від пристані до міста, якщо пароплав прибув на 1,5 год раніше від човна.

193. Сніг прибирали дві снігозбиральні машини. Одна з них може прибрати вулицю за 1 год, друга — за 75 % цього часу. Почавши прибирати одночасно, обидві машини пропрацювали разом 20 хв, після чого перша машина завершила роботу. Скільки потрібно часу, щоб друга машина завершила роботу?

194. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води. Після цього концентрація розчину зменшилась на 10 %. Скільки води містив розчин і якою була його концентрація?

Конкурсний рівень

195. В арифметичній прогресії другий член дорівнює 14, п'ятий — 20. Записати геометричну прогресію, в якій знаменник у 2 рази перевищував би різницю арифметичної прогресії, а сума трьох перших членів дорівнювала б сумі тих самих членів арифметичної прогресії.

196. Відомо, що період піврозпаду радіоактивного газу радону $T = 3{,}825$ доби. Визначити, скільки радону залишилось у запаяній ампулі через $t = 38{,}25$ доби, якщо його початкова кількість $M_0 = 0{,}5$ кг.

197. По колу довжиною 60 м рівномірно в одному напрямі рухаються дві точки. Одна робить повний оберт на 5 с швидше від другої і при цьому наздоганяє другу точку щохвилини. Визначити швидкості руху точок.

198. Обчислити масу і процентну місткість срібла у сплаві з міддю, знаючи, що після сплавлення його з 3 кг чистого срібла одержиться сплав, що міститиме 90 % срібла, а після сплавлення його з 2 кг сплаву, який містить 90 % срібла, одержиться сплав 84 % місткості срібла.

199. Свіжі фрукти містять 72 % води, сухі — 20 %. Скільки сухих фруктів одержимо з 20 кг свіжих?

200. Двома кранами баржу було розвантажено за 15 год, причому перший кран розпочав розвантажувати на 7 год пізніше від другого. Відомо, що перший кран, працюючи один, може розвантажити баржу на 5 год швидше, ніж другий. Визначити час, за який може розвантажити баржу кожний кран, працюючи окремо.

201. У змаганні зі стрільби за кожний промах у серії із 25 пострілів стрілок одержує штрафні очки: за перший промах — одне, за кожний наступний — на $\frac{1}{2}$ очка більше, ніж за попередній. Скільки разів влучив у ціль стрілок, який отримав 7 штрафних очок?

2.7. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ ІЗ ЗМІННОЮ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

2.7.1. Опорний конспект

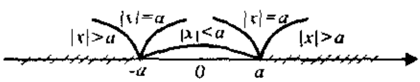
Б 1

Означення. Рівняння $f(x)=\varphi(x)$ (нерівність $f(x)\vee\varphi(x)$) називається рівнянням (нерівністю) зі змінною під знаком модуля, якщо воно містить невідому або функцію від невідомої під знаком модуля.

Означення. Модулем числа a називається число

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{якщо } a\ge 0;\\ -a, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$$

Геометричний зміст модуля числа: $|a|$ — відстань на координатній прямій від початку координат O до точки, яка відповідає числу a; $|a-b|$ — відстань між точками з координатами a і b.



Б 2

Основні рівносильні переходи від рівнянь і нерівностей до сукупності систем

№ пор	Вид рівняння (рівності)	№ пор.	Вид нерівності
1	2	3	4
1	$\lvert a\rvert=\lvert b\rvert \Leftrightarrow a^2=b^2$; $\lvert f(x)\rvert=\lvert\varphi(x)\rvert \Leftrightarrow f^2(x)=\varphi^2(x)$	1	$\lvert a\rvert\vee\lvert b\rvert \Leftrightarrow a^2\vee b^2$, $\lvert f(x)\rvert\vee\lvert\varphi(x)\rvert \Leftrightarrow f^2(x)\vee\varphi^2(x)$, $\lvert f(x)\rvert\vee\lvert\varphi(x)\rvert \Leftrightarrow f^2(x)\vee\varphi^2(x)$
2	$f(\lvert x\rvert)=\varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)=\varphi(x),\\ x\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases} f(-x)=\varphi(x),\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$	2	$f(\lvert x\rvert)\vee\varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\vee\varphi(x),\\ x\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases} f(-x)\vee\varphi(x),\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$

1	2	3	4
3 3'	$\lvert f(x)\rvert=\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ f(x)=\varphi(x)\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)=\varphi(x)\end{cases}\end{array}\right.$ **Частинний випадок** $\lvert f(x)\rvert=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ f(x)=a,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ -f(x)=a\end{cases}\end{array}\right.$	3 3'	При $\varphi(x)>0$ $\lvert f(x)\rvert<\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<\varphi(x),\\ -f(x)<\varphi(x)\end{cases}$ або $\begin{cases}f(x)<\varphi(x),\\ f(x)>-\varphi(x)\end{cases}$ При $\varphi(x)\leq 0$ $x\in\varnothing$ **Частинний випадок** При $a>0$ $\lvert f(x)\rvert<a\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<a,\\ f(x)>-a,\end{cases}$ $x\in\varnothing$ при $a\leq 0$
3"	$\lvert f(x)\rvert=a,\ a\in R,$ 1) $a<0,\ x\in\varnothing,$ 2) $a=0,\ f(x)=0,$ 3) $a>0,\ \left[\begin{array}{l}f(x)=a,\\ f(x)=-a\end{array}\right.$	3"	$\lvert f(x)\rvert>\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)>\varphi(x),\\ f(x)<-\varphi(x)\end{array}\right.$ **Частинний випадок** при $a\geq 0$ $\lvert f(x)\rvert>a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)>a,\\ f(x)<-a,\end{array}\right.$ $x\in$ ОДЗ $f(x)$ при $a\leq 0$
4	$\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert=\varphi(x)$ 1 Розкрити внутрішній модуль $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0,\\ \lvert f(x)\rvert=\varphi(x),\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \lvert f(-x)\rvert=\varphi(x)\end{cases}\end{array}\right.$ 2 Розкрити зовнішній модуль	4' 4	Розкриття внутрішнього модуля *1-й спосіб* $\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert<\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lvert f(x)\rvert<\varphi(x),\\ x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\lvert f(-x)\rvert<\varphi(x),\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$ *2-й спосіб* $\begin{cases}f(\lvert x\rvert)<\varphi(x),\\ f(\lvert x\rvert)>-\varphi(x)\end{cases}$ Розкриття зовнішнього модуля *1-й спосіб* $\lvert f(\lvert x\rvert)\rvert>\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lvert f(x)\rvert>\varphi(x),\\ x\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\lvert f(-x)\rvert>\varphi(x),\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$ *2-й спосіб* $\left[\begin{array}{l}f(\lvert x\rvert)>\varphi(x),\\ f(\lvert x\rvert)<-\varphi(x)\end{array}\right.$

1	2	3	4
5	$\varphi(x, \lvert f(x)\rvert) = \psi(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x, f(x)) = \psi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ \varphi(x, -f(x)) = \psi(x) \end{cases} \end{array}\right.$	5	$\varphi(x, \lvert f(x)\rvert) > (<)\ \psi(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x, f(x)) > (<)\ \psi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > (<)0, \\ \varphi(x, -f(x)) > (<)\ \psi(x) \end{cases} \end{array}\right.$
6	$a_1\lvert f_1(x)\rvert + a_2\lvert f_2(x)\rvert + \dots + a_n\lvert f_n(x)\rvert = \varphi(x)$	6	$a_1\lvert f_1(x)\rvert + a_2\lvert f_2(x)\rvert + \dots + a_n\lvert f_n(x)\rvert > (<)\ \varphi(x);$ $a_1\lvert f_1(x)\rvert + a_2\lvert f_2(x)\rvert + \dots + a_n\lvert f_n(x)\rvert \ge (\le)\ \varphi(x)$
	Розв'язуються методом інтервалів		

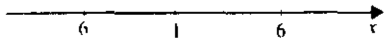
2.7.2. Алгоритмічний припис щодо розв'язання рівнянь (нерівностей) із змінною під знаком модуля методом інтервалів

1. Визначити ОДЗ рівняння (нерівності).
2. Знайти нулі всіх підмодульних виразів.
3. Позначити на координатній прямій ОДЗ і нулі підмодульних виразів.
4. Визначити знаки всіх підмодульних функцій на кожному інтервалі в межах ОДЗ.
5. Розв'язати рівняння (нерівність) на кожному інтервалі окремо з попереднім розкриттям модулів.
6. Остаточна відповідь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\lvert x+6\rvert - \lvert x^2 - 5x - 6\rvert = 6.$

1. ОДЗ: R.

2. $x + 6 = 0, \quad x^2 - 5x - 6 = 0; \quad x = -6; \quad x = -1, \quad x = 6.$

3. 

4. 

I) $\begin{cases} x \le -6, \\ -(x+6)-(x^2-5x-6)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -6, \\ x^2-4x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing \quad (D=16-24<0);$

II, IV) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>6, \\ -6<x<-1, \end{array}\right. \\ x+6-(x^2-5x-6)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>6, \\ -6<x<-1, \end{array}\right. \\ x^2-6x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3+\sqrt{15};$

III) $\begin{cases} -1 \le x \le 6, \\ x+6+(x^2-5x-6)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 6, \\ x^2-4x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{10}.$

Відповідь: $x \in \left\{ 3+\sqrt{15};\ 2+\sqrt{10} \right\}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $|x+6|-|x^2-5x-6|<6$.

1. ОДЗ: R.

2. –4. Див. у розв'язанні прикладу 1.

I) $\begin{cases} x \le -6, \\ -(x+6)-(x^2-5x-6)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -6, \\ x^2-4x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -6;$

II, IV) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6<x<-1, \\ x>6, \end{array}\right. \\ x+6-(x^2-5x-6)<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6<x<-1, \\ x>6, \end{array}\right. \\ x^2-6x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-6;-1) \cup (3+\sqrt{15};+\infty);$

III) $\begin{cases} -1 \le x \le 6, \\ x+6+x^2-5x-6<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 6, \\ x^2-4x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 6, \\ 2-\sqrt{10}<x<2+\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \le x < 2+\sqrt{10}.$

Відповідь: $x \in (-\infty; 2+\sqrt{10}) \cup (3+\sqrt{15}; +\infty)$.

2.7.3. Приклади розв'язання основних типів алгебраїчних рівнянь і нерівностей з модулем

Приклад 3. Розв'язати рівняння $|x-5|=3$.

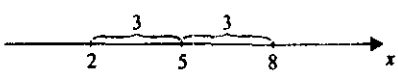
1-й спосіб. Згідно з **Б 2** (вид 1)

$$|x-5|=3 \Leftrightarrow (x-5)^2=9 \Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{2;\ 8\}$.

2-й спосіб. Спираючись на геометричний зміст $|a+b|$.

Оскільки $|x-5|$ — відстань між точками $M(x)$ і $M(5)$ на числовій прямій, то потрібно знайти всі точки $M(x)$, віддалені від $M(5)$ на відстань 3.



Відповідь: $\{2;8\}$.

3-й спосіб. Згідно з **Б 2** (вид 1)

$$|x-5|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-5 \ge 0, \\ x-5=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x-5<0, \\ -(x-5)=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 5, \\ x=8; \end{cases} \\ \begin{cases} x<5, \\ -x=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{2;\ 8\}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}=2x$.

Спосіб розв'язання. **Згідно з Б 2 (вид 2)**

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \dfrac{x^2+x-12}{x-3}=2x;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}=2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \dfrac{x^2+x-12-2x^2+6x}{x-3}=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0,\\ \dfrac{x^2-x-12-2x^2+6x}{x-3}=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x^2-7x+12=0,\\ x-3\neq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0,\\ x^2-5x+12=0,\\ x-3\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x\neq 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=4;\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.\\ \begin{cases}x\geq 0,\\ x\neq 3,\\ x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Приклад 5. $\left|x^3-1\right|=1-x$.

Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2** (вид 3 загальний випадок).

$$\left|x^3-1\right|=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-1<0,\\ -(x^3-1)=1-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-1\geq 0,\\ x^3-1=1-x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)<0,\\ (x-1)(x^2+x+1-1)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)\geq 0,\\ (x-1)(x^2+x+1+1)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0,\\ (x-1)(x+1)x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\geq 0,\\ (x-1)(x^2+x+2)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ x=1;\quad x=-1;\quad x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 1,\\ x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=0,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-1; 0; 1\}$.

Приклад 6. $\left||x-2|-x+3\right|=5.$

Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2** (вид 5)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\le 0,\\ |-(x-2)-x+3|=5;\end{cases}\\ \begin{cases}x-2>0,\\ |x-2-x+3|=5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2,\\ |-x+2-x+3|=5;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ 1=5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x<2,\\ |-2x+5|=5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2,\\ \left[\begin{array}{l}-2x+5=5,\\ -2x+5=-5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2,\\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Відповідь: $\{0\}$.

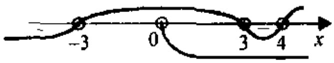
Приклад 7. Розв'язати рівняння $\left|\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\right|=2x.$

Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2** (вид 4).
ОДЗ: $x\ne 3$.
З умови випливає, що $2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ 4\ne 0\end{cases} \Rightarrow x\ne 0;\\ \begin{cases}x>0,\\ \left|\dfrac{x^2-x-12}{x-3}\right|=2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}=2x;\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}=2x<0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}=2x=-2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ (x+3)(x-4)(x-3)\ge 0, \\ x^2-x-12-2x^2+6x=0, \\ x-3\ne 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ (x+3)(x-4)(x-3)<0, \\ x^2-x-12+2x^2-6x=0, \\ x-3\ne 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ -3\le x\le 3 \quad \text{або} \quad x\ge 4 \\ x^2-5x+12=0, \quad D>0 \\ x\ne 3; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing \\ \begin{cases} x>0, \\ 3<x<4, \\ 3x^2-7x-12=0, \\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{7+\sqrt{193}}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{193}}{6}.$$



Відповідь: $\left\{\dfrac{7+\sqrt{193}}{6}\right\}$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-5|>3$.

1-й спосіб. Згідно з **Б 2** (вид 1)

$$|x-5|>3 \Leftrightarrow (x-5)^2>9 \Leftrightarrow x^2-10x+16>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>8, \\ x<2; \end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;\,2)\cup(8;\,+\infty)$.

2-й спосіб. Згідно з **Б 1** геометричний зміст $|a+b|$.

Оскільки $|x-5$ — відстань між точками $M(x)$ і $M(5)$ на числовій прямій, то потрібно знайти всі точки $M(x)$, віддалені від $M(5)$ на відстань більш як 3. Такими точками будуть тільки $M(x)$, для яких $x>8$, $x<2$.

Відповідь: $x\in(-\infty;\,2)\cup(8;\,+\infty)$.

3-й спосіб. Згідно з **Б 2** (вид 3 частинний випадок)

$$|x-5|>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-5\ge 0, \\ x-5>3; \end{cases} \\ \begin{cases} x-5<0, \\ -(x-5)>3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 5, \\ x>8; \end{cases} \\ \begin{cases} x<5, \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>8, \\ x<2. \end{array}\right.$$

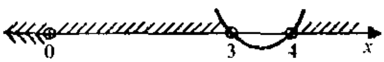
Відповідь: $x\in(-\infty;\,2)\cup(8;\,+\infty)$.

Приклад 9. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}<2x.$

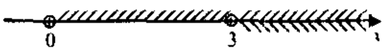
Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2 (вид 2)**

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \dfrac{x^2+x-12}{x-3}<2x;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}<2x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ (x^2-7x+12)(x-3)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ (x^2-5x+12)(x-3)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ (x-3)^2(x-4)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x>3.\end{cases}\end{array}\right.$$



$x\in(-\infty;\ 0)$



$x\in(3;\ +\infty)$

Відповідь: $x\in(-\infty;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$.

Приклад 10. $\left|x^3-1\right|>1-x.$

Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2 (вид 3 — загальний випадок)**

$$\left|x^3-1\right|>1-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-1<0,\\ 1-x^3>1-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-1\ge 0,\\ x^3-1>1-x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)<0,\\ (x-1)(1-x^2-x-1)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)\ge 0,\\ (x-1)(x^2+x+1+1)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0,\\ (x-1)(x+1)x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\ge 0,\\ (x-1)(x^2+x+2)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1,\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1.$$

Відповідь: $(-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 11. $\left| |x-2| - x + 3 \right| < 5$.

Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2** (**вид 5**)

$$\left| |x-2|-x+3 \right| < 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ |x-2-x+3| < 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0, \\ |-x+2-x+3| < 5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2, \\ |1| < 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ |-2x+5| < 5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2; \\ \begin{cases} x < 2, \\ -5 < -2x+5 < 5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2; \\ \begin{cases} x < 2, \\ -10 < -2x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2; \\ \begin{cases} x < 2, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x > 0.$$

Відповідь: $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 12. $\left| \dfrac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \right| > 2x$.

Спосіб розв'язання. Згідно з **Б 2** (**вид 4**).

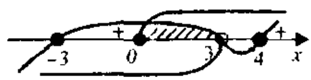
ОДЗ: $x \ne 3$.

Оскільки модуль виразу завжди перевищує від'ємне число, то всі $x \in (-\infty; 0)$ будуть розв'язками нерівності.

Залишається розв'язати задану нерівність для випадку $x \ge 0$.

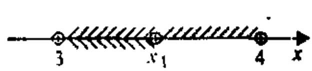
$$\begin{cases} x\ge 0,\\ \left|\dfrac{x^2-x-12}{x-3}\right|>2x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}>2x;\end{cases}\\ \\ \begin{cases}x\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}<0,\\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3}<-2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ (x+3)(x-4)(x-3)\ge 0,\\ x\ne 3,\\ (x^2-5x+12)(x-3)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ (x+3)(x-4)(x-3)<0,\\ (3x^2-7x-12)(x-3)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ (x+3)(x-4)(x-3)\ge 0,\\ x\ne 3,\\ x-3<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ (x+3)(x-4)(x-3)<0,\\ 3\left(x-\dfrac{7+\sqrt{193}}{6}\right)\left(x-\dfrac{7-\sqrt{193}}{6}\right)(x-3)<0,\end{cases}\end{array}\right.$$



де $x_1=\dfrac{7+\sqrt{193}}{6}$; $\quad x_2=\dfrac{7-\sqrt{193}}{6}$.

Відповідь: $(-\infty;\,3)\cup\left(3;\,\dfrac{7+\sqrt{193}}{6}\right)$.

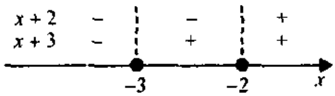


2.7.4. Приклади розв'язання рівнянь конкурсного типу, нерівностей та їх систем із змінною під знаком модуля

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\dfrac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|$.

Розв'язання.

1. $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3, \quad x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$

2. 

3. $\begin{cases} x \leq -3, \\ \dfrac{3}{-(x+3)-1} \geq -(x+2) \end{cases}$ або $\begin{cases} -3 < x < -2, \\ \dfrac{3}{x+3-1} \geq -(x+2) \end{cases}$ або $\begin{cases} x \geq -2, \\ \dfrac{3}{x+3-1} \geq x+2 \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

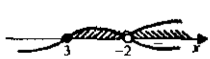
$\begin{cases} x \leq -3, \\ \dfrac{-3+(x+2)(x+4)}{x+4} \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} -3 < x < -2, \\ \dfrac{3+(x+2)^2}{x+2} \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq -2, \\ \dfrac{3-(x+2)^2}{x+2} \geq 0 \end{cases}$

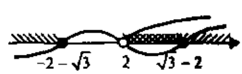
$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$\begin{cases} x \leq -3, \\ (x^2+6x+5)(x+4) \geq 0, \\ x+4 \neq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} -3 < x < -2, \\ (x+2)(3+(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq -2, \\ (x^2+4x+1)(x+2) \leq 0, \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$\begin{cases} x \leq -3, \\ (x+1)(x+5)(x+4) \geq 0, \\ x \neq -4; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} -3 < x < -2, \\ x+2 \geq 0, \\ x \neq -2; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x \geq -2, \\ (x+2)(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3}) \leq 0, \\ x \neq -2; \end{cases}$





$[-5; -4)$. $\qquad$ $x \in \varnothing$. $\qquad$ $(-2; \sqrt{3}-2]$.

Відповідь: $[-5; -4) \cup (-2; \sqrt{3}-2]$.

Приклад 14. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1, \\ y=3-|x-1|\ ; \end{cases}$$

$$x-1=0, \quad y-2=0;$$
$$x=1, \quad y=2.$$

Вихідна система рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x\le 1, \\ y\le 2, \\ -(x-1)-(y-2)=1, \\ y=3+(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ y<2, \\ x+y=2, \\ y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ y<2, \\ y=2, \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \\
\begin{cases} x>1, \\ y\le 2, \\ x-1-(y-2)=1, \\ y=3-(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ y<2, \\ x-y=0, \\ y+x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ y<2, \\ x=2, \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \\
\begin{cases} x\le 1, \\ y>2, \\ -(x-1)+y-2=1, \\ y=3+x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ y\ge 2 \\ -x+y=2, \\ y-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ y\ge 2, \\ x=c, \\ y=2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c, \\ y=2+c, \\ c\le 1, \\ 2+c\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c, \\ y=2+c, \\ 0\le c\le 1 \end{cases} \\
\begin{cases} x>1, \\ y>2, \\ x-1+y-2=1, \\ y=3-(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ y\ge 2, \\ x+y=4, \\ y+x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ y\ge 2, \\ x=c, \\ y=4-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=c, \\ y=4-c, \\ c\ge 1, \\ 4-c\ge 2. \end{cases}
\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\begin{array}{ll} (c,\ 2+c), & \text{де} \quad c\in[0;1]\,; \\ (c,\ 4-c), & \text{де} \quad c\in[1;2]\,; \end{array}\right\}.$

Приклад 15. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y-2x+1=0, \\ y-|x|-1=0; \end{cases}$ $\boldsymbol{x = 0}$.

Вихідна система рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0, \\ y-2x=-1, \\ y+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x,\ \ y\in\varnothing; \\ \begin{cases} x\geq 0, \\ y-2x=-1, \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x=2, \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(2;3)\}$.

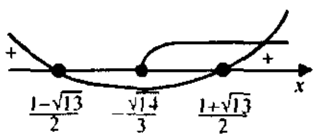
Приклад 16. Знайти всі корені рівняння $1+x+\left|x^2-x-3\right|=0$, які задовольняють нерівність $x+\dfrac{\sqrt{14}}{3}>0$.

Розв'язання зводиться до розв'язання мішаної системи рівняння і нерівності:

$$\begin{cases} 1+x+\left|x^2-x-3\right|=0, \\ x+\dfrac{\sqrt{14}}{3}>0. \end{cases}$$

1. $x^2-x-3=0;\quad D=1+12=13;\quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

2. Знаки виразу x^2-x-3.



Остання система рівносильна сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ або } x>\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ x>-\dfrac{\sqrt{14}}{3}, \\ 1+x+x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ x^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x>-\dfrac{\sqrt{14}}{3}, \\ 1+x-x^2+x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{14}}{3}<x\le\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ x^2-2x-4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing; \\ \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{14}}{3}<x\le\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, \\ x=1\pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{1-\sqrt{5}\}$.

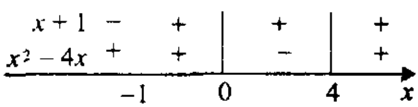
Приклад 17. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} |x^2-4x|<5, \\ |x+1|<3. \end{cases}$

Знайдемо нулі підмодульних виразів:

1. $x^2-4x=0, \quad x+1=0, \quad x=-1.$

$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4; \end{array}\right.$

2. Нанесемо одержані значення на числову пряму і визначимо знаки підмодульних виразів на кожному з утворених інтервалів.



Вихідна система рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} x \le -1, \\ x^2 - 4x < 5, \\ -(x+1) < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x \le -1, \\ -1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \text{ або } x > 4, \\ x^2 - 4x < 5, \\ x + 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \text{ або } x > 4, \\ x < 4, \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0, \\ (x-5)(x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1;\, 0);$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ -(x^2 - 4x) < 5, \\ x + 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ x < 2, \\ x^2 - 4x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;\, 2).$$

Відповідь: $[-1;2)$.

Приклад 18. На координатній площині xOy позначити множину точок, координати яких задовольняють нерівностям:

а) $\dfrac{y - 1 + |x-1|}{y - x^2 + 2x} \le 0$;

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Задана нерівність рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} x < 1, \\ \dfrac{y - 1 - x + 1}{y - x^2 + 2x} \le 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ge 1, \\ \dfrac{y - 1 + x - 1}{y - x^2 + 2x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x \le 0, \\ y - x^2 + 2x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y - x \ge 0, \\ y - x^2 + 2x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y + x - 2 \le 0, \\ y - x^2 + 2x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y + x - 2 \ge 0, \\ y - x^2 + 2x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le x, \\ y > x^2 - 2x; \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge x, \\ y < x^2 - 2x \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \textbf{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 2 - x, \\ y > x^2 - 2x; \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 2 - x, \\ y < x^2 - 2x; \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Відповідь на рис. 2.76.

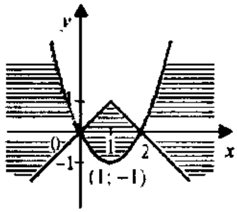


Рис. 2.76

б) $4 \le x^2 + y^2 \le 2(|x| + |y|)$.

Оскільки нерівність не змінюється при перетвореннях $x \to -x$ та $y \to -y$, то фігура симетрична відносно осей координат. Тому достатньо побудувати її в першому квадранті $(x \ge 0,\ y \ge 0)$ і виконати симетричне відображення відносно осей координат.

Задана нерівність рівносильна сукупності

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x^2 + y^2 \le 2x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2. \end{cases}$$

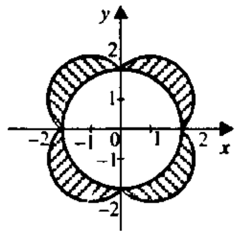


Рис. 2.77

Відповідь на рис. 2.77.

2.7.5. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

1. Розв'язати рівняння:

202) $|4x-1|=11$;

203) $|x-5|+3|x+2|=4$;

204) $|x^2-6x+8|=3x-1$;

205) $x^2+7|x|+6=0$;

206) $|x+2|+|x-1|+|x+5|=4$.

2. Розв'язати нерівність:

207) $|4-x|\geq 5x$;

208) $|x^2+7x|<-6$;

209) $|x+10|-|1-2x|\geq 3$;

210) $|x-3|+|x+5|\leq|4-x|$.

3. Розв'язати системи нерівностей:

211) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}\leq 2,\\ |x+3|\geq 1;\end{cases}$

212) $\begin{cases}|x+2|\leq|x-1|,\\ x+5\geq 0.\end{cases}$

Конкурсний рівень

1. Розв'язати рівняння:

213) $|x-1|+\dfrac{x}{|x|}-|x+1|=1$;

214) $|x-6|>|x^2-5x+9|$;

215) $(|x-1|-3)(|x+2|-5)=0$;

216) $|x-|6-x||-3x=7$.

2. Розв'язати нерівність:

217) $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|>2$;

218) $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$;

219) $\dfrac{4}{|x+1|-2}\geq|x-1|$;

220) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\geq 1$;

221) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right|<\left|\dfrac{2}{x-1}\right|$;

222) $|x^2-5|x|+4|\geq|2x^2-3|x|+1|$.

3. Розв'язати **системи рівнянь**:

223) $\begin{cases}|x|+2|y|=3,\\ 5y+7x=2;\end{cases}$

224) $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1,\\ y=3-|x-1|;\end{cases}$

225) $\begin{cases} y^2 - |xy| + 2 = 0, \\ 8 - x^2 = (x + 2y)^2; \end{cases}$

226) $\begin{cases} \dfrac{2}{|x-2|} > \left|\dfrac{-3}{2x-1}\right|, \\ |x^3 - x| \le x; \end{cases}$

227) $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \le 1. \end{cases}$

4. Розв'язати системи нерівностей:

228) $\begin{cases} |2x + 5| \ge |7 - 4x|, \\ |x| < 2|x - 4| + x - 2; \end{cases}$

229) $\begin{cases} |2x - 4| - |3x + 9| - |x - 1| > -6, \\ \big||x + 1| - |x - 1|\big| < 1; \end{cases}$

230) $\begin{cases} x^2 + 2|x + 3| - 10 < 0, \\ \dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \ge 1. \end{cases}$

5. На координатній площині позначити штриховкою множину точок, координати яких задовольняють нерівностям:

231) $|xy| < 1$;

232) $|x + y| + |x - y| \le 4$;

233) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge x^2 - 3, \\ |x| \le 1; \end{cases}$

234) $\dfrac{y - |x|}{xy^2} \ge 0.$

2.8. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

2.8.1. Опорний конспект

Б 1

Характеристика рівнянь (нерівностей) з параметрами.
Якщо рівняння (нерівності)

$$f(x;\, a;\, b;\, ...;\, c) = \varphi(x;\, a;\, b;\, ...;\, c) \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} f(x;\, a;\, b;\, ...;\, c) & > & \varphi(x;\, a;\, b;\, ...;\, c) \\ f(x;\, a;\, b;\, ...;\, c) & < & \varphi(x;\, a;\, b;\, ...;\, c) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

необхідно розв'язати відносно x для всіх допустимих значень $a, b, ..., c$, то таке рівняння (нерівності) називають рівнянням (нерівностями) з невідомою (змінною) x і параметрами $a, b, ..., c$.

Загальні установки до розв'язування рівнянь (нерівностей) з параметрами

1. Знайти ОДЗ(x), x — невідома; ОДЗ(a, b, ..., c), де a, b, ..., c — параметри.
2. Розв'язати як звичайне рівняння (нерівності).
3. При розв'язуванні потрібно слідкувати за можливою зміною виду рівняння (нерівностей) залежно від набуття різних значень параметра.

   У випадку розгалуження встановити граничні значення параметрів і розв'язувати рівняння (нерівності) для кожного проміжку значення параметра окремо згідно з одержаним видом рівняння (нерівностей).
4. Наприкінці розв'язання здійснити самоконтроль: чи для всіх значень з ОДЗ(a, b, ..., c) одержані значення невідомої x.

2.8.2. Два види задач з параметрами

Б 2

I. Для кожного значення параметра a (параметрів) знайти всі розв'язки заданого рівняння (нерівності).

Приклади.

1. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x^2+1}=a$.

2. Розв'язати нерівність $ax^2<1$.

II. "Задачі з умовами". Знайти всі значення параметра (параметрів), при кожному з яких розв'язки рівняння (нерівності) задовольняють задані умови.

Приклади.

1. При яких значеннях параметра a корені квадратного рівняння $(a-2)x^2-3(a+2)x+6a=0$ мають різні знаки?

2. Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $\frac{x-a}{x+8a}<0$ виконується для всіх $x\in[2;\,4]$.

Розрізняють такі методи розв'язування задач з параметрами:

Аналітичний	Геометричний
За допомогою алгебраїчних формул, перетворень	За допомогою графічних ілюстрацій

2.8.3. Розв'язання рівнянь і нерівностей з параметрами геометричним методом

Б 3

Алгоритмічний припис:

1. Рівняння (нерівність) з параметром звести до вигляду $f(x)=\varphi(x,a)$, де $f(x)$, $\varphi(x,a)$ — функції, графіки яких легко будуються.

2. З'ясувати вид графіків функцій:

а) $y_1=f(x)$ — один графік;

б) $y_2 = \varphi(x, a)$ — сукупність графіків, кожний з яких відповідає певному значенню параметра a.

3. Побудувати графіки в одній системі координат і з'ясувати всі можливі положення графіків функції $y = \varphi(x, a)$ відносно $y = f(x)$ залежно від a.

4. Визначити межі зміни параметра a в різних випадках і знайти розв'язки рівняння (нерівності) для кожного випадку.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 + 1 = 2x + a$.

1. $x^2 + 1 - 2x = a$.

2. $y_1 = x^2 - 2x + 1$ — парабола, $y_2 = a$ — прямі, паралельні осі x (рис. 2.78).

3.

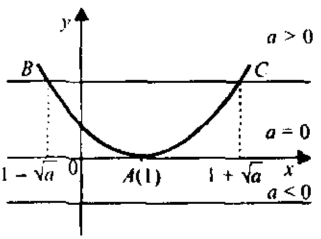


Рис. 2.78

4. $a < 0$: графіки не перетинаються, $x \in \varnothing$;
   $a = 0$: графіки перетинаються в точці A, $x = 1$;
   $a > 0$: графіки перетинаються в точках B і C.

Знаходимо абсциси точок B і C: $x^2 - 2x + 1 = a$,

$$(x-1)^2 = a, \quad x \in \left\{1-\sqrt{a}; 1+\sqrt{a}\right\}.$$

Відповідь: $x \in \{1\}$ при $a = 0$; $x \in \left\{1-\sqrt{a}; 1+\sqrt{a}\right\}$ при $a > 0$; $x \in \varnothing$ при $a < 0$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^2 + 1 < 2x + a$.

1. $x^2 - 2x + 1 < a$.

2. $y_1 = x^2 - 2x + 1$ — парабола, $y_2 = a$ — прямі, паралельні осі x (рис. 2.79).

3.

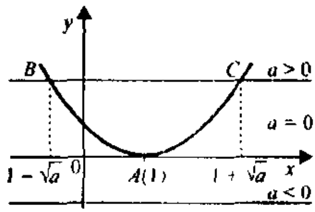


Рис. 2.79

4. $a < 0$: парабола проходить над прямою, $x \in \varnothing$;

$a = 0$: $x \in \varnothing$;

$a > 0$: частина параболи (BAC) проходить під прямою $x \in \left(1-\sqrt{a}; 1+\sqrt{a}\right)$.

Відповідь: $x \in \varnothing$ при $a \le 0$; $x \in \left(1-\sqrt{a}; 1+\sqrt{a}\right)$ при $a > 0$.

2.8.4. Алгебраїчний метод розв'язання рівнянь і нерівностей з параметрами

Б 4 І

І. Лінійні рівняння

Розв'язання в загальному вигляді рівняння $ax = b$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ne 0, \\ x = \dfrac{b}{a}; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ 0\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ b \ne 0, \\ 0\ x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b \ne 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $x=\frac{b}{a}$ **при** $a \neq 0$; $x \in \varnothing$ **при** $a=0$, $b \neq 0$; $x \in R$ **при** $a=0$, $b=0$.

Зауваження. Роль a може відігравати деяка функція $f(a)$, а **роль** b — деяка функція $\varphi(b)$ або $\varphi(a)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(a^2-5a+6)x=a^2-4$.

Вихідне рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases}(a^2-5a+6)\neq 0,\\ x=\dfrac{a^2-4}{a^2-5a+6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 2,\\ a\neq 3,\\ x=\dfrac{a+2}{a-3}\end{cases};\\
\begin{cases}a^2-5a+6=0,\\ a^2-4\neq 0,\\ 0x=a^2-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3,\\ x\in\varnothing;\end{cases}\\
\begin{cases}a^2-5a+6=0,\\ a^2-4=0,\\ 0x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2,\\ x\in R.\end{cases}
\end{array}\right.$$

Відповідь: $x=\frac{a+2}{a-3}$ при $a\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$; $x\in\varnothing$ **при** $a=3$; $x\in R$ при $a=2$.

II. Лінійна нерівність

Під знаком $\vee$ розумітимемо > (<).

$$ax\vee b \Leftrightarrow \begin{cases}a<0,\\ x\wedge\dfrac{b}{a}\end{cases} \text{ або } \begin{cases}a>0,\\ x\vee\dfrac{b}{a}\end{cases} \textbf{ або } \begin{cases}a=0,\\ 0x\vee b.\end{cases}$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $(a^2-5a+6)x > a^2-4$.
Задана нерівність рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-5a+6<0, \\ x<\dfrac{a^2-4}{a^2-5a+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<a<3, \\ x<\dfrac{a+2}{a-3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-5a+6=0, \\ 0x>a^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2, \\ 0x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ 0x>5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2, \\ x\in\varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ x\in\varnothing; \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} a^2-5a+6>0, \\ x>\dfrac{a^2-4}{a^2-5a+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<2 \text{ або } a>3, \\ x>\dfrac{a+2}{a-3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;\ \dfrac{a+2}{a-3}\right)$ при $a\in(2;3)$; $x\in\varnothing$ при $a=2$; $x\in R$ при $a=3$; $x\in\left(\dfrac{a+2}{a-3};\ +\infty\right)$ при $a\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Б 4 II

Квадратні рівняння і нерівності з параметрами

Розв'язання рівнянь в загальному вигляді

$$f(a)x^2+\varphi(a)x+\psi(a)=0.$$

1. ОДЗ(a).

2. $\begin{cases} f(a)=0, \\ \varphi(a)x+\psi(a)=0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(a)\neq 0, \\ D\geq 0, \\ x=\dfrac{-\varphi(a)\pm\sqrt{D}}{2f(a)} \end{cases}$ або $\begin{cases} f(a)\neq 0, \\ D<0. \\ x\in\varnothing. \end{cases}$

Див. Б 4 I

Відповідь: з урахуванням ОДЗ(a).

Приклад 5. Розв'язати рівняння $3ax^2-2(3a-2)x+3(a-1)=0$.
1. ОДЗ(a) = R.

2. $\begin{cases} 3a = 0, \\ -2(3a-2)x + 3(a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

або $\begin{cases} 3a \neq 0, \\ D = 16 - 12a \geq 0, \\ x = \dfrac{2(3a-2) \pm \sqrt{D}}{6a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ 12a \leq 16, \\ x = \dfrac{3a - 2 \pm \sqrt{4-3a}}{3a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a \leq \dfrac{4}{3}, \\ x = \dfrac{3a - 2 \pm \sqrt{4-3a}}{3a}, \end{cases}$

або $\begin{cases} 3a \neq 0, \\ D = 16 - 12a < 0, \\ x \in \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a > \dfrac{4}{3}, \\ x \in \varnothing. \end{cases}$

Відповідь: $x = \frac{3}{4}$ при $a = 0$; $x = \dfrac{3a - 2 \pm \sqrt{4-3a}}{3a}$ при $a \in (-\infty;\, 0) \cup \left(0;\, 1\frac{1}{3}\right]$; $x \in \varnothing$ при $a \in \left(1\frac{1}{3};\, +\infty\right)$.

Б 4 III

Алгоритмічний припис розв'язання квадратних нерівностей з параметрами

Розглянемо нерівність вигляду $f(a)x^2 + \varphi(a)x + \psi(a) > 0$.

Визначаємо $f(a)$, D (дискримінант), x_1, x_2 (при необхідності).

Можливі такі випадки:

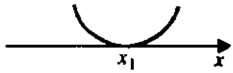
I. Якщо $\begin{cases} f(a) \neq \text{const}, \\ D \neq \text{const}; \end{cases}$

1) $f(a) = 0$: $\varphi(a)x + \psi(a) > 0$;

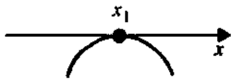
2) $f(a) > 0$, $D(a) < 0$: $x \in R$;

3) $f(a) < 0$, $D(a) < 0$: $x \in \varnothing$;

4) $f(a) > 0,\ D(a) = 0: (x - x_1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_1;\ \infty);$



5) $f(a) < 0,\ D(a) = 0: (x - x_1)^2 < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing;$



6) $f(a) > 0,\ D(a) > 0: (x - x_1)(x - x_2) > 0;$

7) $f(a) < 0,\ D(a) > 0: (x - x_1)(x - x_2) < 0.$

Розв'язання нерівності $f(a)x^2 + \varphi(a)x + \psi(a) < 0$ **здійснюється на** основі подібних міркувань.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $x^2 + x + a > 0$.

ОДЗ(a) = R.

Визначаємо: $f(a) = 1 > 0$;

$D(a) = 1 - 4a$ не const то $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$ **при** $D(a) \geq 0$.

Згідно з випадками IIa маємо

$$\begin{cases} 1 - 4a < 0 \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \dfrac{1}{4}, \\ x \in R \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} 1 - 4a = 0, \\ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4}, \\ x \neq -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases} 1-4a>0, \\ (x-x_1)(x-x_2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\dfrac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{2} \\ x>\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2} \end{array}\right. \end{cases};$$

, де

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}, \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2},$$

$$\text{бо } x_1-x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}-\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}=-\sqrt{1-4a}<0.$$

Відповідь: $x \in R$ при $a \in \left(\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$; $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ при $a=\dfrac{1}{4}$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}; +\infty\right)$ при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $a(a+1)x^2-(2a^2-1)x+a(a-1)>0$.

ОДЗ$(a)=R$.

Визначаємо: $f(a)=a(a+1)$ не const, знакозмінне

$$D(a)=(2a^2-1)^2-4(a+1)(a-1)a^2=4a^4-4a^2+1-4a^4+4a^2=1>0;$$

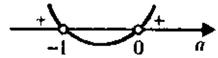
$$x_{1,2}=\frac{2a^2-1\pm1}{2a(a+1)}, \quad x_1=\frac{a}{a+1}, \quad x_2=\frac{a-1}{a}, \quad x_1-x_2=\frac{a^2-a^2+1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}.$$

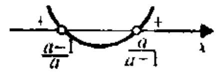
Відповідно до випадку IIIa. Згідно з алгоритмічним приписом.

а) $\begin{cases} a(a+1)=0, \\ -(2a^2-1)x+a(a-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ x>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a=-1, \\ -(2\cdot1-1)x-1(-1-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

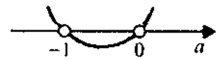
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1, \\ -x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1, \\ x<2; \end{cases}$$

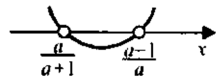
б) $\begin{cases} a(a+1) > 0, \\ \left(x - \dfrac{a}{a+1}\right)\left(x - \dfrac{a-1}{a}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \text{ або } \boldsymbol{a > 0}, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{a-1}{a}, \\ x > \dfrac{a}{a+1} \end{array}\right. \end{cases}$





в) $\begin{cases} a(a+1) < 0, \\ \left(x - \dfrac{a}{a+1}\right)\left(x - \dfrac{a-1}{a}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0, \\ \dfrac{a}{a+1} < x < \dfrac{a-1}{a}. \end{cases}$





Відповідь: $x \in (0, +\infty)$ при $a = 0$; $x \in (-\infty; 2)$ при $a = -1$;

$x \in \left(-\infty, \dfrac{a-1}{a}\right) \cup \left(\dfrac{a}{a+1}, +\infty\right)$ при $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;

$x \in \left(\dfrac{a}{a+1}; \dfrac{a-1}{a}\right)$ при $a \in (-1; 0)$.

Приклад 8. $3ax^2 - 2(3a-2)x + 3(a-1) > 0$.

ОДЗ$(a) = R$

Визначаємо: вираз $f(a) = 3a$ не const, має знакозмінне значення.

Дискримінант $D(a) = 4(3a-2)^2 - 4 \cdot 3a3(a-1) = 4 - 3a$ не const, має знакозмінне значення.

$$x_{1,2} = \frac{3a - 2 \pm \sqrt{4-3a}}{3a} \text{ (якщо } D(a) \geq 0);$$

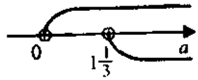
$$x_1 = \frac{3a - 2 - \sqrt{4-3a}}{3a}; \quad x_2 = \frac{3a - 2 + \sqrt{4-3a}}{3a};$$

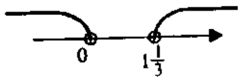
$$x_2 - x_1 = \frac{3a - 2 + \sqrt{4-3a}}{3a} - \frac{3a - 2 - \sqrt{4-3a}}{3a} = \frac{2\sqrt{4-3a}}{3a}.$$

Переберемо всі можливі випадки:

1) $\begin{cases} 3a = 0, \\ 4x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ x > \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a>0,\\16-12a<0,\\x\in R\end{cases}\\ \begin{cases}3a<0,\\16-12a<0,\\x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\a>1\dfrac{1}{3},\\x\in R\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\a>1\dfrac{1}{3},\\x\in\varnothing\end{cases}\end{array}\right.$$





$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\dfrac{1}{3},\\x\in R;\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\x\in\varnothing;\end{cases}\end{array}\right.$$

3) $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a>0,\\16-12a=0,\\\left(x-\dfrac{3a-2}{3a}\right)^2>0;\end{cases}\\ \begin{cases}3a<0,\\16-12a=0,\\\left(x-\dfrac{3a-2}{3a}\right)^2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\a=1\dfrac{1}{3},\\\left(x-\dfrac{3a-2}{3a}\right)^2>0;\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\a=1\dfrac{1}{3},\\\left(x-\dfrac{3a-2}{3a}\right)^2<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\dfrac{1}{3},\\x\neq\dfrac{3a-2}{3a};\end{cases}$$

4) $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a>0,\\16-12a>0,\\(x-x_1)(x-x_2)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}3a<0,\\16-12a>0,\\(x-x_1)(x-x_2)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\a<1\dfrac{1}{3},\\\left[\begin{array}{l}x<x_1,\\x>x_2;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\a<1\dfrac{1}{3},\\x_1<x<x_2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1\dfrac{1}{3},\\\left[\begin{array}{l}x<x_1,\\x>x_2;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\x_2<x<x_1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$ при $a=0$; $x\in R$ **при** $a\in\left(1\dfrac{1}{3};+\infty\right)$;

$$x \in \left(-\infty; \frac{3a-2}{3a}\right) \cup \left(\frac{3a-2}{3a}; +\infty\right) \text{ при } a = 1\frac{1}{3};$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3a-2-\sqrt{4-3a}}{3a}\right) \cup \left(\frac{3a-2+\sqrt{4-3a}}{3a}; +\infty\right) \text{ при } a \in \left(0; 1\frac{1}{3}\right);$$

$$x \in \left(\frac{3a-2+\sqrt{4-3a}}{3a}; \frac{3a-2-\sqrt{4-3a}}{3a}\right) \text{ при } a \in (-\infty; 0).$$

2.8.5. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

235) визначити, при якому додатному m вираз $x^2 + m(m-1)x + 36$ є повний квадрат;

236) визначити, при якому найменшому цілому $k (k \neq 0)$ корені квадратного рівняння $kx^2 - (1-2k)x + k - 2 = 0$ раціональні.

Розв'язати нерівність:

237) $a^2x + 2 = a(x+2)$;

238) $5x - a > ax - 4$;

239) $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$;

240) $ax^2 - (1-2a)x + a - 2 \geq 0$.

Конкурсний рівень

241) x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Знайти a таке, щоб величина виразу $x_1^2 + x_2^2$ була найменшою;

242) визначити, при якому найбільшому значенні k корені рівняння $x^2 - (2k+1)x + k^2 = 0$ відносяться як 1:4;

243) визначити, для яких цілих m нерівність $x^2 - (8m-2)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$ виконується при всіх x;

244) визначити, при якому найменшому цілому p система рівнянь $\begin{cases} px + 3y = -p, \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ має розв'язки $(x; y)$, для яких $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Розв'язати рівняння, нерівності та системи:

245) $(a^2-5a+6)x=a^2-4$;

246) $a(a+1)x^2-(2a-1)x+a(a-1)=0$;

247) $\dfrac{5}{3x-k}=\dfrac{3}{kx-4}$;

248) $(a^2-1)x^2-2ax+1<0$;

249) $\dfrac{a}{x-a}=\dfrac{a}{x+a}$;

250) $|x-3|+a\,|x+3|=5$;

251) $|x^2-a^2|>2a^2$;

252) $\begin{cases}(a+4)x+3y=a+1,\\ ax+(a-1)y=a-1.\end{cases}$

2.9. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

2.9.1. Опорний конспект

Означення. Ірраціональними називають **рівняння (нерівності)**, що містять змінну під знаком **кореня**.

Б 1

Основні теореми про рівносильність ірраціональних рівнянь:

1) $\sqrt[2k-1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x);$

2) $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2k}(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Основні теореми про рівносильність **ірраціональних нерівностей**:

1) $\sqrt[2k-1]{f(x)} \vee \sigma(x) \Leftrightarrow f(x) \vee \sigma^{2k+1}(x);$

2) $\sqrt[2k]{f(x)} < \sigma(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \sigma(x) > 0, \\ f(x) < \left(\sigma(x)\right)^{2k}; \end{cases}$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} > \sigma(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \sigma(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sigma(x) \geq 0, \\ f(x) > \left(\sigma(x)\right)^{2k}. \end{cases} \end{array} \right.$

Б 2

Деякі методи розв'язання ірраціональних рівнянь

№ пор	Вид рівняння	Метод розв'язання
1	2	3
1	$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{q(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{\varphi(x)} = \sqrt[3]{q(x)}$	Метод відокремлення радикала (кореня) і піднесення до степеня, рівного показнику кореня

1	2	3
2	$a\sqrt{f(x)} = k f(x) + p$	Метод заміни: $\sqrt{f(x)} = y$, $ky^2 - ay + p = 0$
3	$\sqrt[n]{a - f(x)} + \sqrt[n]{b + f(x)} = c$	Метод заміни: $\begin{cases} \sqrt[n]{a - f(x)} = u, \\ \sqrt[n]{b + f(x)} = v. \end{cases}$ $\begin{cases} u + v = c, \\ u^n + v^n = a + b \end{cases}$
4	$\sqrt{f^2(x)} = p$	$\lvert f(x) \rvert = p$

Б 3
Деякі методи розв'язання ірраціональних нерівностей

№ пор.	Вид нерівності	Метод (прийом) розв'язання
1	2	3
1	$\sqrt[n]{f(x)} > a (1)$ **Пам'ятай!** 1) функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$ має $D_y = E_y = R$; 2) якщо $a > b$, то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$ **Пам'ятай!** 1) функція $y = \sqrt[2k]{x}$ має $D_y = [0; +\infty)$, $E_y = [0; +\infty)$; 2) якщо $a > b$ при $a > 0$, $b \geq 0$, то $a^{2k} > b^{2k}$	1. $n = 2k + 1$, $a \in (-\infty; +\infty)$; $(1) \Leftrightarrow f(x) > a^n$. Приклад: 1) $\sqrt[3]{x-5} > -2$ 2) $\sqrt[3]{x-5} > 2$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$ Розв'язання: $x - 5 > (-2)^3$ $x - 5 > 2^3$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $x - 5 > -8$ $x - 5 > 8$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $x > -3$. $x > 13$. **Відповідь:** $x \in (-3; +\infty)$; $x \in (13; +\infty)$. 2. $n = 2k$, $a > 0$ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > a^n \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > a^n$, $a = 0$ $(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$, $a < 0$ $(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

1	2	3
		Приклад $\sqrt{x-5}>2$ $\Updownarrow$ Розв'язання $x-5>2^2$ $\Updownarrow$ $x>9$ Відповідь $x\in(9,+\infty)$ Приклад $\sqrt{x-5}>0$ $\Updownarrow$ Розв'язання $x-5>0$ $\Updownarrow$ $x>5$ Відповідь $x\in(5,+\infty)$ Приклад $\sqrt{x-5}>-2 \Leftrightarrow x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$ Відповідь $x\in[5,+\infty)$
2	$\sqrt[n]{f(x)}<a$ (2)	1 $n=2k+1$, $a\in(-\infty,+\infty)$, $(2)\Leftrightarrow f(x)<a^n$ Приклад $\sqrt[3]{x-5}<-2$ $\Updownarrow$ Розв'язання $x-5<-8$ $\Updownarrow$ $x<-3$ Відповідь $x\in(-\infty,-3)$ Приклад $\sqrt[3]{x-5}<2 \Leftrightarrow x-5<8 \Leftrightarrow x<13$ Відповідь $x\in(-\infty,13)$ 2 $n=2k$, $a>0$ $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ f(x)<a^n,\end{cases}$ $a=0$ $x\in\varnothing$, $a<0$ $x\in\varnothing$

1	2	3
		Приклад: $\sqrt{x-5}<2$ $\Updownarrow$ Розв'язання: $\begin{cases} x-5\ge 0, \\ x-5<2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5, \\ x<9. \end{cases}$ Відповідь: $x\in[5;9)$. Приклад: $\sqrt{x-5}<0$. Відповідь: $x\in\varnothing$ Приклад: $\sqrt{x-5}<-2$. Відповідь: $x\in\varnothing$
3	$a\sqrt[2k]{f(x)}+b\sqrt[k]{f(x)}+c\vee 0$	Метод заміни $\sqrt[2k]{f(x)}=y$. Одержимо $by^2+ay+c\vee 0$

2.9.2. Приклади розв'язання основних видів ірраціональних рівнянь і нерівностей

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

а) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=2$.

ОДЗ: $\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ x-6\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 4, \\ x\ge 6. \end{cases} \varnothing$

Відповідь: $x\in\varnothing$.

б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=-4$. (1)

1. ОДЗ: $x\ge 2$.

2. Аналізуючи умову з урахуванням властивостей про область зміни функції $y=\sqrt[2k]{x}$, маємо

$$\sqrt{x+3}\ge 0, \quad \sqrt{x-2}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}>0,$$

тому рівність (1) хибна при будь-яких змінних x.

Відповідь: $x\in\varnothing$.

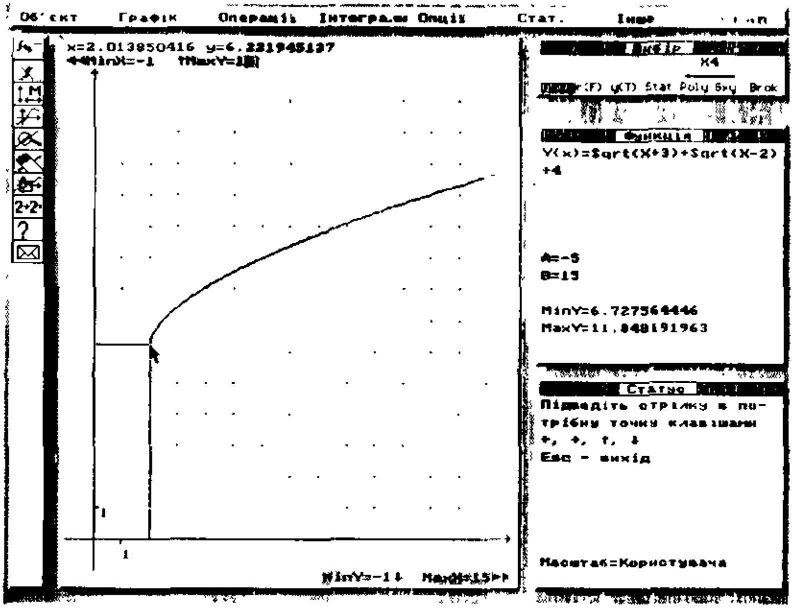


Рис. 2.80

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

а) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}>2$.

ОДЗ: $x\in\varnothing$.

Відповідь: $x\in\varnothing$.

б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}>-4$.

ОДЗ: $x\geq 2$.

Міркуючи аналогічно до міркування при проведені оцінки значення лівої частини нерівності, доходимо висновку, що нерівність б) істинна при будь-яких x з ОДЗ.

Відповідь: $x\in[2;+\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x+2}+x=2$.

Метод: піднесення до квадрату обох частин рівняння.

1-й спосіб (з використанням рівнянь-наслідків).

1. ОДЗ: $x^2-3x+2\geq 0$; $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

2. Підносимо до квадрату ліву і праву частини рівняння:

$$x^2-3x+2=4-4x+x^2;\quad x=2.$$

3. Перевірка: $\sqrt{2^2-3\cdot 2+2}=0, \quad 2-2=0.$

Відповідь: $x=2$.

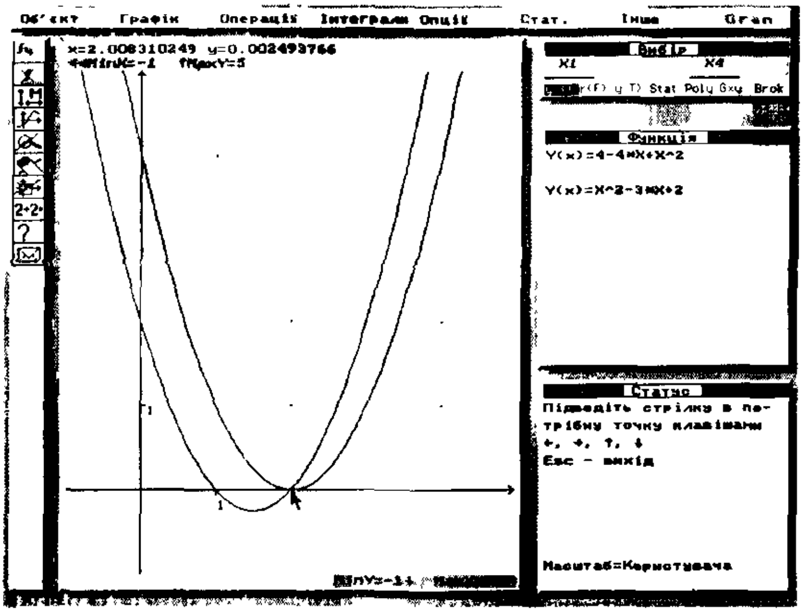


Рис 2 81

2-й спосіб (здійсненням тільки рівносильних переходів).

$$3.\ \begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x^2-3x+2=(2-x)^2, \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=(2-x)^2, \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x=2}.$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність:

а) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$;

б) $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2$.

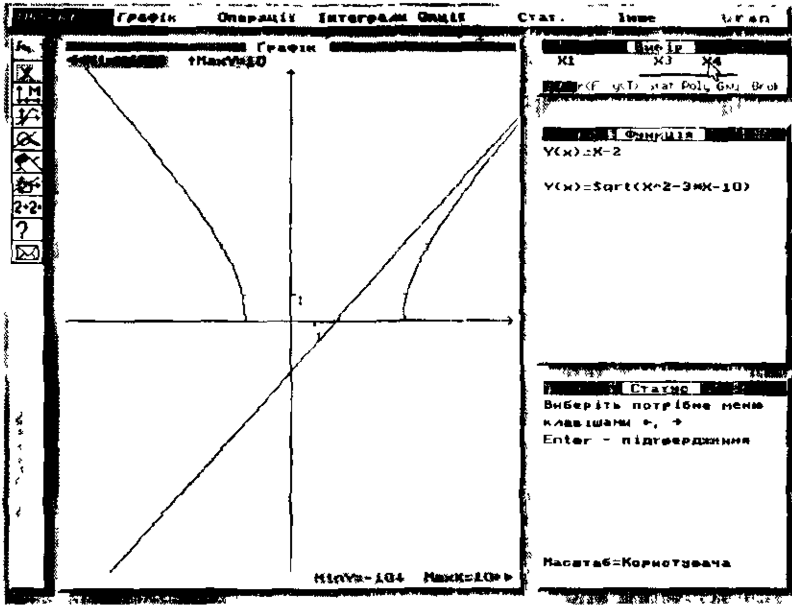


Рис. 2.82

Міркуючи або використовуючи опорний конспект Б 3, випадок 1.2, одержуємо системи, рівносильні заданим нерівностям відповідно а), б).

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0, \\ x-2 \ge 0, \\ x^2-3x-10 > (x-2)^2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0, \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \le -2 \quad \text{або} \quad x \ge 5, \\ x \ge 2, \\ x > 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le -2 \quad \text{або} \quad x \ge 5, \\ x < 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x > 14. \qquad\qquad\qquad\qquad x \le -2.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (14; +\infty)$.

Опорний конспект Б 3, випадок 2.2.

$$(б) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0, \\ x-2>0, \\ x^2-3x-10<(x-2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ або } x \ge 5, \\ x>2, \\ x<14; \end{cases} \Leftrightarrow 5 \le x < 14.$$

Відповідь $x \in [5;14)$.

Приклад 5. Розв'язати:

а) рівняння $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x}$;

б) нерівність $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$.

Розв'язання

Знаходимо ОДЗ. $\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ x \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x \ge -2, \\ x \ge -1, \\ x \ge 0; \end{cases} \quad x \ge 0.$

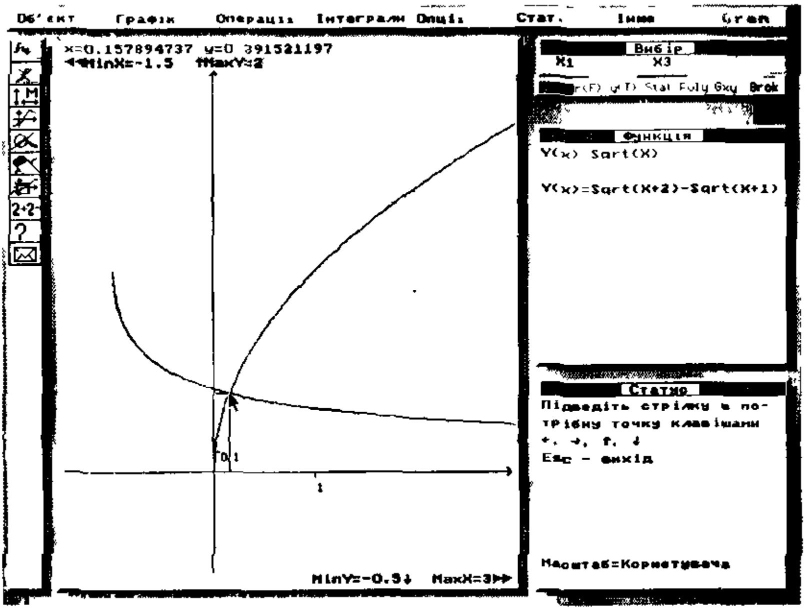


Рис. 2.83

Перший спосіб незручний, тому що одержані корені є ірраціональні числа і їх важко перевіряти.

Розв'яжемо другим способом, використовуючи метод піднесення до квадрату.

а. Вихідне рівняння рівносильне

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x+2=x+1+x+2\sqrt{x(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ 2\sqrt{x(x+1)}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ 1-x\ge 0, \\ 4\left(x^2+x\right)=1+x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x\le 1, \\ x=-1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ або } x=-1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1.$

б. Вихідна нерівність рівносильна системі

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}>\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x+2>x+1+x+2\sqrt{x(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ 2\sqrt{x(x+1)}<1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ 1-x>0, \\ 4\left(x^2+x\right)<1+x^2-2x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x<1, \\ 3x^2+6x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<1, \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $x\in\left[0; \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}\right).$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Метод Піднесення до кубу лівої і правої частин заданого рівняння:

$$x-1+x-2+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=2x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-3+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)=2x-3.$$

Використовуючи умову задачі, а саме, що $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$, маємо

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-2=0, \\ 2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=1,5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{1; 2; 1{,}5\}$.

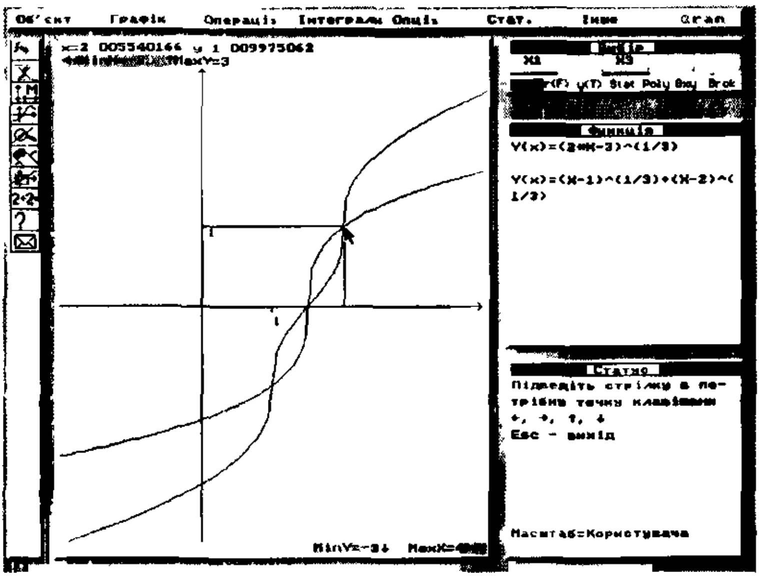


Рис. 2.84

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

Метод. заміни.

Позначимо $\sqrt[3]{x}=y$.

Тоді

$$\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3 \;\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{x}=y,\\ 2y^2+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{x}=y,\\ y=1 \quad \text{або} \quad y=-1,5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=1 \quad \text{або} \quad \sqrt[3]{x}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \; x=1, \quad \text{або} \quad x=-\frac{27}{8}.$$

Відповідь: $x\in\left\{-\frac{27}{8};1\right\}$.

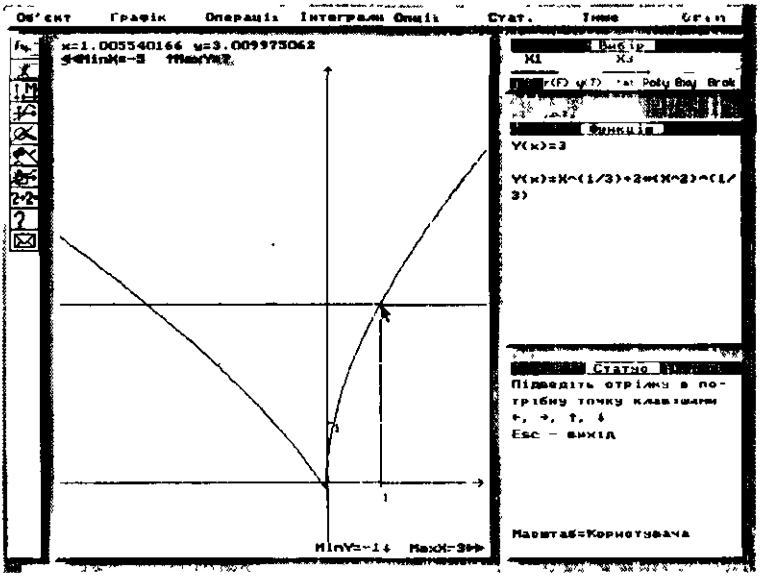


Рис. 2.85

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{2-x}=1$.
Метод: заміни.

Позначимо: $2-x=p^3$, $x-1=u^2$.

Вихідне рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases}p^3+u^2=1,\\ p+u=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=1-p,\\ p^3+(1-p)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=0,\\ u=1\end{cases} \text{або} \begin{cases}p=1,\\ u=0\end{cases} \text{або} \begin{cases}p=-2\\ u=3.\end{cases}$$

Повертаємося до вихідної змінної x і одержуємо відповідь.

Відповідь: $x \in \{1; 2; 10\}$.

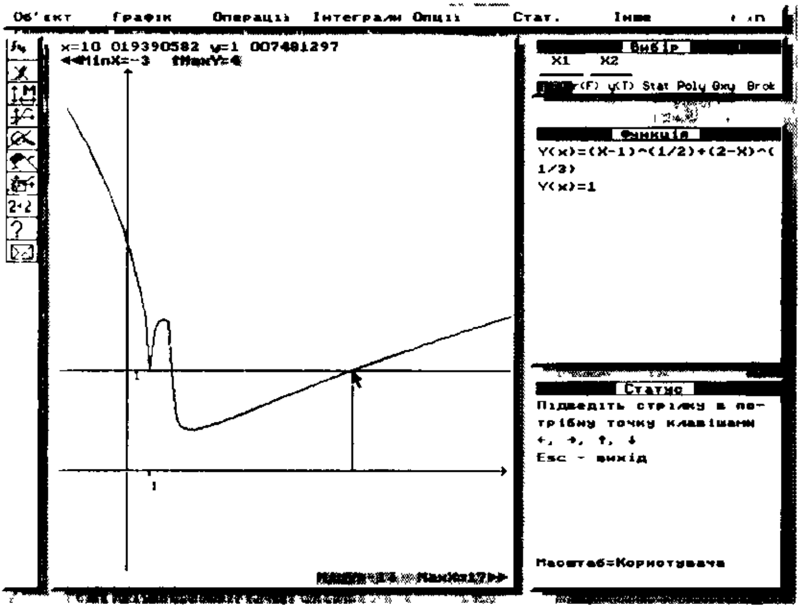


Рис 2 86

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=8.$$

Метод. виділення повних квадратів під знаком кожного із квадратних коренів.

$$\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-6)^2}=8.$$

Використовуючи тотожність $\sqrt{a^2}=|a|$, одержуємо

$$|x+2|-|x-6|=8,$$

$$x+2=0, \quad x-6=0,$$

$$x=-2, \quad x=6.$$

$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$+$
x	-2	6	

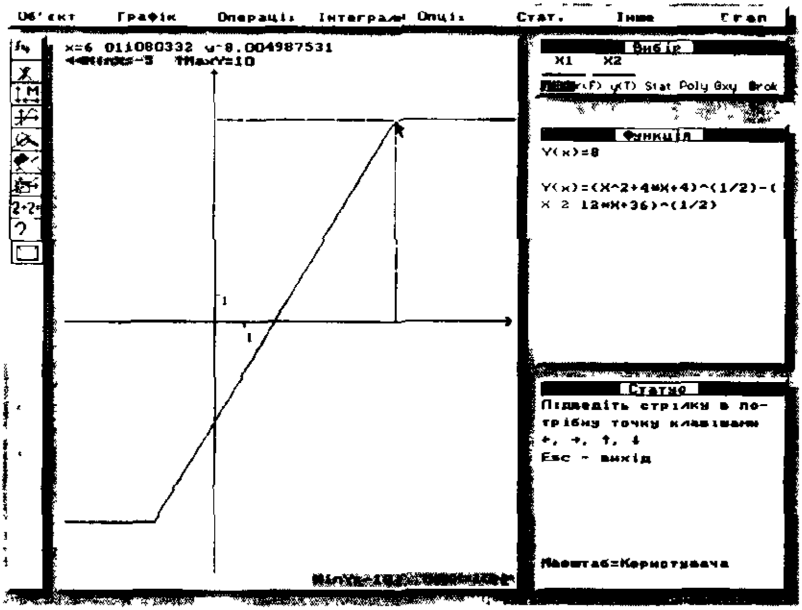


Рис 2 87

Останнє рівняння рівносильне сукупності трьох систем:

$$\begin{cases} x \le -2, \\ -x-2+(x-6)=8 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -2<x<6, \\ x+2+(x-6)=8 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ge 6, \\ x+2-(x-6)=8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le -2, \\ -8=8 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -2<x<6, \\ 2x=12 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ge 6, \\ 8=8, \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x \in \varnothing \qquad \begin{cases} -2<x<6, \\ x=6, \end{cases} \qquad x \ge 6,$$

$$x \in \varnothing$$

Відповідь: $x \in [6, +\infty)$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$$

1-й спосіб.

Метод: домноження лівої і правої частин рівняння на вираз, спряжений до однієї з частин рівняння. У розглядуваному випадку на вираз $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}-\sqrt{x-\sqrt{x+11}}$:

$$x+\sqrt{x+11}-x+\sqrt{x+11}=4\left(\sqrt{x+\sqrt{x+11}}-\sqrt{x-\sqrt{x+11}}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+\sqrt{x+11}}-\sqrt{x-\sqrt{x+11}}\right)=\sqrt{x+11}$$

додамо до останнього рівняння вихідне рівняння, домножене на 2:

$$4\sqrt{x+\sqrt{x+11}}=\sqrt{x+11}+8.$$

Піднесемо ліву і праву частини одержаного рівняння до квадрату:

$$16x+16\sqrt{x+11}=x+11+64+16\sqrt{x+11};\quad 15x=75;\qquad x=5.$$

Перевірка: $\sqrt{5+\sqrt{5+11}}+\sqrt{5-\sqrt{5+11}}=3+1=4.$

Зауваження. Можна було б обмежитись лише перевіркою додатності значення виразу $x-\sqrt{x+11}$ при $x=5$.

2-й спосіб.

Метод: піднесення до квадрату лівої і правої частин заданого рівняння.

$$x+\sqrt{x+11}+2\sqrt{x^2-x-11}+x-\sqrt{x+11}=16;$$
$$\sqrt{x^2-x+11}=8-x;$$
$$x^2-x-11=x^2-16x+64;$$
$$15x=75;$$
$$x=5.$$

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4.$

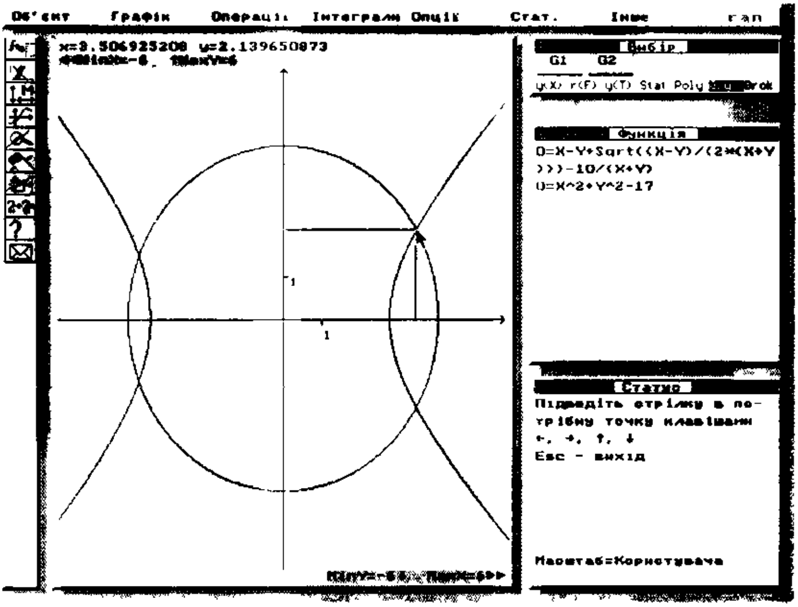


Рис 2.88

Метод: заміни.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 18+5x \ge 0, \\ 64-5x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{18}{5}, \\ x \le \dfrac{64}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{18}{5} \le x \le \frac{64}{5}.$$

1. Виконуємо заміну: $\begin{cases} \sqrt[4]{18+5x} = t, & t \ge 0; \\ \sqrt[4]{64-5x} = u, & u \ge 0. \end{cases}$

2. Розв'яжемо систему: $\begin{cases} u+t=4, \\ u^4+t^4=82. \end{cases}$

Зобразимо ліву частину другого рівняння цієї системи як многочлен від $u+t$ та ut і, враховуючи перше рівняння, виконаємо заміну $ut = z$:

$$u^4+t^4=(u^2+t^2)^2-2u^2t^2=\left((u+t)^2-2ut\right)^2-2u^2t^2=(4^2-2z)^2-2z^2=$$
$$=(16-2z)^2-2z^2=256+4z^2-64z-2z^2=2z^2-64z+256;$$

$$2z^2-64z+256=82,$$

$$z^2-32z+87=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=29, \\ z=3. \end{array}\right.$$

Для знаходження u, t маємо сукупність двох систем

$$\begin{cases} u+t=4, \\ ut=3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u+t=4, \\ ut=29. \end{cases}$$

Розв'язками першої системи будуть $u=3$, $t=1$ та $u=1$, $t=3$.
Друга система дійсних розв'язків не має.
Для знаходження x достатньо взяти одне з рівнянь з першої заміни:

$$\text{або} \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{18+5x}=3, \\ \sqrt[4]{18+5x}=1, \end{array}\right. \text{або} \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{64-5x}=3, \\ \sqrt[4]{64-5x}=1. \end{array}\right.$$

Звідси $x=\frac{63}{5}$ або $x=-\frac{47}{5}$. Обидва значення x належать ОДЗ.

Відповідь: $\left\{\frac{63}{5};\ -\frac{17}{5}\right\}$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x^2+y}+\sqrt{y+2}=\sqrt{4x-y^2}$.
Розв'язання.

Спосіб: традиційний для ірраціональних рівнянь — піднесення до квадрату обох частин рівняння:

$$\begin{cases} 4x-y^2\geq 0, \\ 4x^2+y\geq 0, \\ y+2\geq 0, \\ 4x^2+y+y+2+2\sqrt{(4x^2+y)(y+2)}=4x-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y^2\geq 0, \\ 4x^2+y\geq 0, \\ y+2\geq 0, \\ (2x-1)^2+(y+1)^2+2\sqrt{(4x^2+y)(y+2)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y^2 \geq 0, \\ 4x^2 + y \geq 0, \\ y + 2 \geq 0, \\ 2x - 1 = 0, \\ y + 1 = 0, \\ (4x^2 + y)(y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(\dfrac{1}{2};\ -1\right)\right\}$.

Приклад 13. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x} < 1$.

Метод: загальний.

Алгоритм загального методу:

1. Подамо нерівність у вигляді $F(x) < 0$.

2. Знаходимо область визначення функції $y = F(x)$.

3. Знаходимо нулі функції $y = F(x)$ (для цього розв'язуємо рівняння $F(x) = 0$).

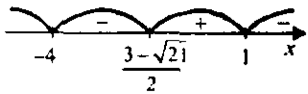
4. Наносимо область визначення і нулі функції на числову пряму і визначаємо знак функції $y = F(x)$ на кожному з одержаних проміжків.

1. $\dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x} - 1 < 0$.

2. $D(F): \begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ 1 - xx \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4, \\ x \neq 1. \end{cases}$ $D(F) = [-4;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$;

3. $\dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ 1 - x \geq 0, \\ x + 4 = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4, \\ x \leq 1; \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}, \\ x = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$.

4. 

а. $F(-4) = -1 < 0$.

б. $-4 < x < \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} : F(-2) = \dfrac{\sqrt{-2+4}}{1+2} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{3} - 1 < 0,$

на $\left(-4; \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$ $F(x) < 0$.

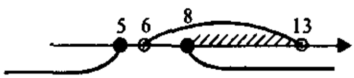
в. $\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} < x < 1 : F(0) = \dfrac{\sqrt{0+4}}{1-0} - 1 = 1$, на $\left(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}; 1\right)$ $F(x) > 0$.

г. $1 < x < +\infty : F(2) = \dfrac{\sqrt{2+4}}{1-2} - 1 = -\sqrt{6} - 1 < 0$, на $(1; +\infty)$ $F(x) < 0$.

Відповідь: $x \in \left[-4; \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 14. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2 - 13x + 40}{\sqrt{19x - x^2 - 78}} \geq 0$.

Розв'язання нерівності зводиться до розв'язання системи алгебраїчних нерівностей:



$$\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geq 0, \\ 19x - x^2 - 78 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \quad \text{або} \quad x \geq 8, \\ 6 < x < 13. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [8; 13)$.

Приклад 15. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.
ОДЗ: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

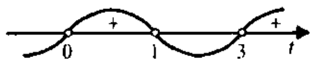
$$\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1}.$$

Піднесемо до кубу ліву і праву частини нерівності:

$$2 - x > \left(1 - \sqrt{x-1}\right)^3 \Leftrightarrow 1 - (x-1) > \left(1 - \sqrt{x-1}\right)^3.$$

Після заміни $\sqrt{x-1} = t \geq 0$ одержимо

$$1-t^2 > (1-t)^3 \Leftrightarrow (1-t)(1+t-1+2t-t^2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t(t-3)(t-1) > 0,$$



$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < 1, \\ t > 3, \end{array}\right. \quad \text{тобто} \quad \left[\begin{array}{l} 0 < \sqrt{x-1} < 1, \\ \sqrt{x-1} > 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (1;2) \cup (10;+\infty)$.

2.9.3. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

I. Розв'язати рівняння:

253) $\sqrt{x^2+2x+10} = 2x-1$;

254) $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$;

255) $\dfrac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}$;

256) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$;

257) $\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt{3x+1} = 0$;

258) $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$;

259) $\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4$.

II. Розв'язати нерівності:

260) $\sqrt{3x-5} < 7$;

261) $\sqrt{3x+1} > -5$;

262) $-2x+3 < \sqrt{4-x^2}$;

263) $\sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+1)}{2-x}$;

264) $\sqrt{x+5} > \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3}$;

265) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$;

266) $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \ge 0$;

267) $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$;

268) $\sqrt[3]{-9x^2+6x}<3x$;

269) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}>1$.

Конкурсний рівень

I. Розв'язати рівняння:

270) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$;

271) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

272) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$;

273) $x^3-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$;

274) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$;

275) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$;

276) $\sqrt{2x-1}=3a$;

277) $\sqrt[3]{x+3}=2+2a$;

278) $\sqrt{x^2+a^2}=x+\dfrac{5a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$;

279) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

II. Розв'язати нерівності:

280) $\dfrac{\sqrt{-x^2-4x+5}}{x}<1$;

281) $\sqrt{2+5x}-6\sqrt[4]{2+5x}>-5$;

282) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<4$;

283) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

284) $a\sqrt{x+1}<1$;

285) $\sqrt{2x-a}\geq x$;

286) $\sqrt{x-a}+\sqrt{-x-a}>-a$;

287) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}>a+b$, $|b|\geq|a|$.

2.9.4. Приклади розв'язання ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметрами

Приклад 16. Розв'язати рівняння з параметром $\sqrt{5-2x}=2a+1$.

Розв'язання цього рівняння зводиться до розв'язання сукупності двох систем:

$$\begin{cases} 2a+1<0, \\ x\in\varnothing \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2a+1\ge 0, \\ 5-2x\ge 0, \\ \left(\sqrt{5-2x}\right)^2=(2a+1)^2; \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} a<-\dfrac{1}{2}, \\ x\in\varnothing \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a\ge -\dfrac{1}{2}, \\ 5-2x=4a^2+1+4a; \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a\ge -\dfrac{1}{2}, \\ x=-2a^2-2a+2. \end{cases}$$

Відповідь: $x=-2a^2-2a+2$ при $a\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$; $x\in\varnothing$ при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння з параметром $\sqrt{a-x}=a-\sqrt{-x}$.
Метод. піднесення до квадрату.
Розглянемо три випадки:

1) $a<0$, $x\in\varnothing$;

2) $a=0$, $\sqrt{-x}+\sqrt{-x}=0$; $\Leftrightarrow$ $2\sqrt{-x}=0 \Leftrightarrow x=0$;

3) $a>0$:

$$\begin{cases} -x\ge 0, \\ a-x\ge 0, \\ a-\sqrt{-x}\ge 0, \\ a-x=a^2-x-2a\sqrt{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ \sqrt{-x}\le a, \\ 2a\sqrt{-x}=a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ \sqrt{-x}=\dfrac{a-1}{2}. \end{cases}$$

а. $a<0$: $x\in\varnothing$;

б. $a\ge 1$: $x=-\dfrac{1}{4}(a-1)^2$.

Відповідь: $x\in\varnothing$ при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$; $x=0$ при $x=-\dfrac{1}{4}(a-1)^2$ при $a\ge 1$.

Приклад 18. Розв'язати нерівність з параметрами $(a+1)\sqrt{2-x}<1$.

Розглянемо три випадки:

1) $a+1<0$, тобто $a<-1$:

$$\sqrt{2-x}>\frac{1}{a+1}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0,\\ x\in R\end{cases}\Leftrightarrow x\leq 2;$$

2) $a+1=0$, тобто $a=-1$:

$$\sqrt{2-x}<1\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0,\\ 0<1\end{cases}\Leftrightarrow x\leq 2;$$

3) $a+1>0$, тобто $a>-1$:

$$\sqrt{2-x}<\frac{1}{a+1}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0,\\ 2-x<\dfrac{1}{(a+1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2,\\ x>2-\dfrac{1}{(a+1)^2}\end{cases}$$

($2-\dfrac{1}{(a+1)^2}<2$ для будь-якого $a>-1$).

Відповідь: $x\in(-\infty;\,2]$ при $a\leq -1$; $x\in\left(2-\dfrac{1}{(a+1)^2};\,2\right]$ при $a>-1$.

Приклад 19. $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2+x}>a+b,\quad b>a>0.$

Метод: штучний і полягає в порівнянні окремих доданків лівої і правої частин нерівності.

Якщо $x>0$, то $\sqrt{a^2+x}>a$, $\sqrt{b^2+x}>b$. Додаючи почленно останні дві нерівності, отримаємо $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2+x}>a+b$.

Якщо $x<0$, то $\sqrt{a^2+x}<a$, $\sqrt{b^2+x}<b$, (якщо $x\in$ ОДЗ). Тому $\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2+x}<a+b$.

Якщо $x=0$, то $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}>a+b$ — нерівність хибна.

Відповідь: $x\in(0;\,+\infty)$ при $b>a>0$.

Приклад 20. **Розв'язати нерівність** $\sqrt{x+2a} > \sqrt{x} + \sqrt{a}$.
Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ a \ge 0, \\ x+2a \ge 0, \\ x+2a > x+a+2\sqrt{xa} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ a \ge 0, \\ a > 2\sqrt{xa} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ a > 0, \\ a^2 > 4xa \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ a = 0, \\ 0 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ a > 0, \\ a > 4x \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ x \in \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \quad a > 0, \\ x < \dfrac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x < \dfrac{a}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left[0; \dfrac{a}{4}\right)$ **при** $a > 0$; $x \in \varnothing$ **при** $a \le 0$.

2.9.5. Приклади розв'язання систем ірраціональних рівнянь

Приклад 21. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{3}{4}\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

Метод: піднесення до квадрату лівої і правої **частин одного** рівняння в заданому прикладі (першого).

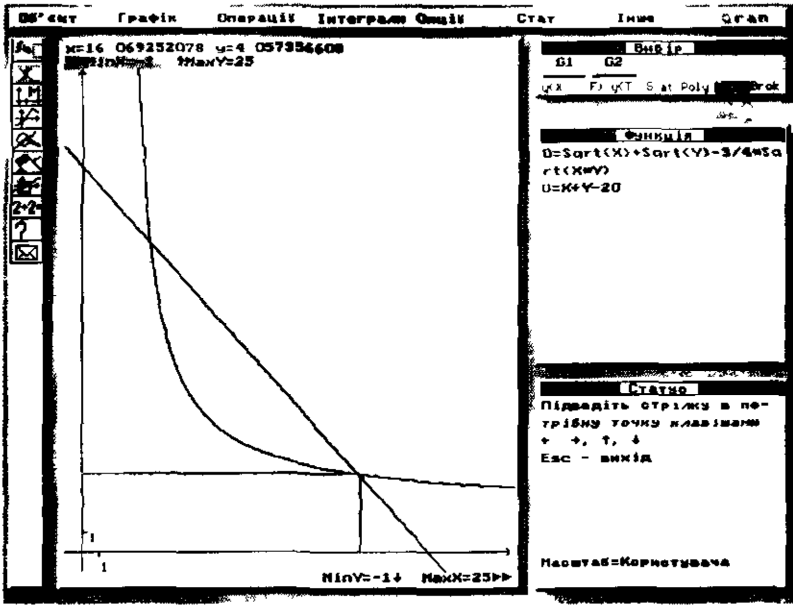


Рис. 2.89

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{3}{4}\sqrt{xy}, \\ x+y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}=\dfrac{9}{16}\,xy, \\ x+y=20, \\ x\ge 0,\ \ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20\cdot 16+2\cdot 16\sqrt{xy}=9xy, \\ x+y=20, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}=8, \\ x+y=20, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=64, \\ x+y=20, \\ x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=16, \\ y=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x=4, \\ y=16 \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь. $\{(16, 4); (4, 16)\}$

Приклад 22. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8 \end{cases}$

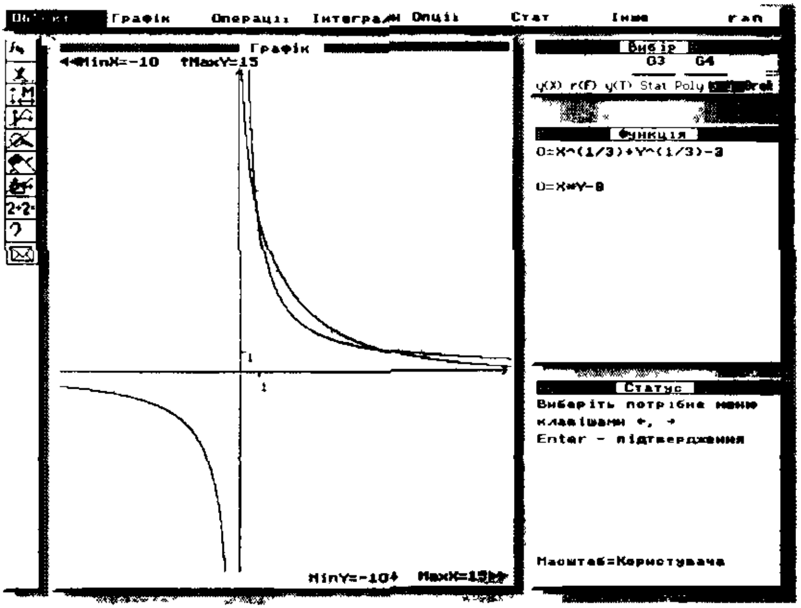


Рис. 2.90

Метод заміни

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y} = 2. \end{cases}$$

Використовуючи теорему Вієта, робимо заміну розв'язання системи ірраціональних рівнянь розв'язанням квадратного рівняння:

$$z^2 - 3z + 2 = 0,$$

$$z_1 = 2, \quad z_2 = 1.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2,\\ \sqrt[3]{y}=1;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{x}=1,\\ \sqrt[3]{y}=2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=8,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=8.\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь: $\{(8;1);\ (1;8)\}$.

2.9.6. Приклади розв'язання систем ірраціональних рівнянь конкурсного рівня

Приклад 23. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{2(x+y)}}=\dfrac{10}{x+y};\\ x^2+y^2=17.\end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases}x-y\ge 0,\\ x+y>0\end{cases}$ або $\begin{cases}x-y\le 0,\\ x+y<0;\end{cases}$

$\begin{cases}x\ge y,\\ x+y>0\end{cases}$ або $\begin{cases}x\le y,\\ x+y<0.\end{cases}$

1-й спосіб розв'язання.

Вихідна система еквівалентна сукупності двох систем:

$$\begin{cases}x-y\ge 0,\\ x+y>0,\\ x^2-y^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-y^2}=10,\\ x^2+y^2=17\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x-y\le 0,\\ x+y<0,\\ x^2-y^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-y^2}=10,\\ x^2+y^2=17.\end{cases}$$

Введемо допоміжну змінну $\sqrt{x^2-y^2}=z$. Тоді перше рівняння кожної системи матиме вигляд квадратного рівняння;

$$z^2+\frac{1}{\sqrt{2}}z-10=0 \qquad \text{або} \qquad z^2-\frac{1}{\sqrt{2}}z-10=0;$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$z=\frac{4}{\sqrt{2}} \text{ або } z=-\frac{5}{\sqrt{2}}; \qquad z=\frac{5}{\sqrt{2}} \text{ або } z=-\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Ураховуючи, що $z>0$, маємо $z=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ або $z=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Отже,

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{4}{\sqrt{2}},\\ x^2+y^2=17,\\ x-y\ge 0,\\ x+y>0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{5}{\sqrt{2}},\\ x^2+y^2=17,\\ x-y\le 0,\\ x+y<0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=8,\\ x^2+y^2=17,\\ x-y\ge 0,\\ x+y>0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x^2-y^2=\dfrac{25}{2},\\ x^2+y^2=17,\\ x-y\le 0,\\ x+y<0.\end{cases}$$

Методом додавання розв'яжемо одержану сукупність систем:

$$\begin{cases}2x^2=25,\\ 2y^2=9,\\ x-y\ge 0,\\ x+y>0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}2x^2=\dfrac{59}{2},\\ 2y^2=\dfrac{9}{2},\\ x-y\le 0,\\ x+y<0;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}},\\ x=\dfrac{5}{\sqrt{2}},\ y=-\dfrac{3}{\sqrt{2}};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\sqrt{59}}{2},\ y=-\dfrac{3}{2};\\ x=-\dfrac{\sqrt{59}}{2},\ y=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(-\dfrac{\sqrt{59}}{2};-\dfrac{3}{2}\right);\ \left(-\dfrac{\sqrt{59}}{2};\ \dfrac{3}{2}\right);\ \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right);\ \left(\dfrac{5}{\sqrt{2}};-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

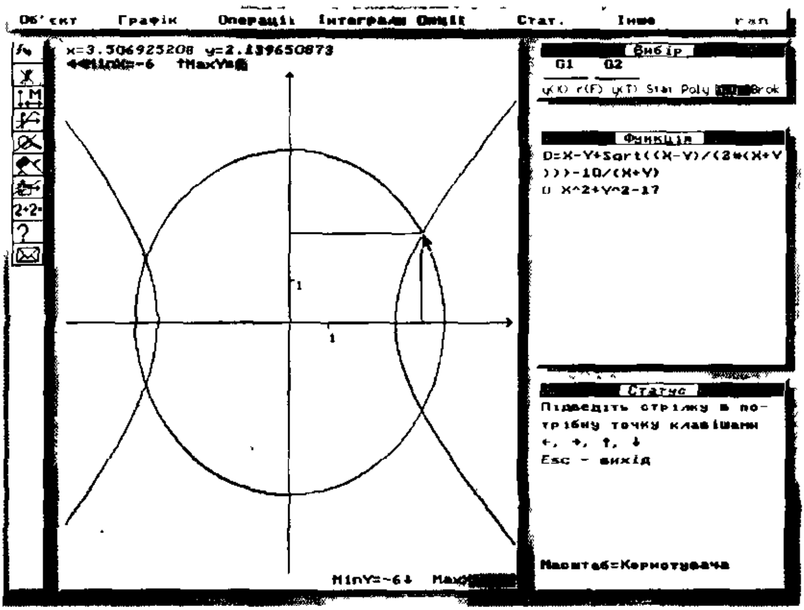


Рис 2 91

2-й спосіб.

Метод: введення допоміжної змінної.

Позначимо $(x+y)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=p$. Тоді перше рівняння системи матиме вигляд квадратного рівняння:

$$2p^2+p-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=2, \\ p=-\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Отже,

$$\begin{cases} (x+y)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=2, \\ x^2+y^2=17 \end{cases} \text{або} \begin{cases} (x+y)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=-\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=17; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{25}{2}, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

Враховуючи область визначення вихідної системи, одержуємо

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{\sqrt{2}},\ \ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}; \\ \dfrac{5}{\sqrt{2}},\ \ y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{59}}{2},\ \ y = -\dfrac{3}{2}; \\ x = -\dfrac{\sqrt{59}}{2},\ \ y = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь зазначена в першому способі.

3-й спосіб.

Використаємо формулу $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.

Система набирає вигляду $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{|x-y|}{2|x+y|}} = \dfrac{10}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$

Враховуючи наявність модулів, розв'язання виконаємо окремо для двох випадків, подібних до тих, які розглядалися при розв'язанні системи першим способом.

1-й випадок *2-й випадок*

$$\begin{cases} x - y \ge 0, \\ x + y > 0, \\ x - y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{10}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - y \le 0, \\ x + y < 0, \\ x - y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{-(x-y)}{-(x+y)}} = \dfrac{10}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

Подальше розв'язання збігається з наведеним у першому способі.

Приклад 24. Розв'язати систему ірраціональних рівнянь з параметрами

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y, \\ x^4 - y^4 = 144a^4. \end{cases}$$

Розв'язання. Піднесемо до квадрату перше рівняння системи:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x^2-y^2-2\sqrt{x^4-y^4}=y^2, \\ y\ge 0, \\ x^2-y^2\ge 0, \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-y^2-2\cdot 12a^2=0, \\ y\ge 0, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0, \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2x^2-24a^2, \\ y\ge 0, \\ (x+y)(x-y)\ge 0, \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4=4x^4+24^2a^4-96a^2x^2, \\ y\ge 0, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0, \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4+144a^4+576a^4-96a^2x^2=0, \\ y\ge 0, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0, \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4-96a^2x^2+720a^4=0, \\ y\ge 0, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0, \\ x^4-y^4=144a^4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=20a^2, \\ y\ge 0, \\ y^2=16a^2, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=12a^2, \\ y\ge 0, \\ y^2=0, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{20}a, \\ y\ge 0, \\ y=|4a|, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{12}a, \\ y\ge 0, \\ y=0, \\ (x+y)\,(x-y)\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(\sqrt{20}a;\, 4|a|\right);\left(-\sqrt{20}a;\, 4|a|\right);\left(\sqrt{12}a;\, 0\right);\left(-\sqrt{12}a;\, 0\right)\right\}$ при $a\neq 0$; $\{(0;\,0)\}$ при $a=0$.

2.9.7. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв`язати системи ірраціональних рівнянь:

288) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y=13; \end{cases}$

289) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10, \\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6; \end{cases}$

290) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216; \end{cases}$

291) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27; \end{cases}$

292) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ x-y=32. \end{cases}$

Конкурсний рівень

293) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1; \end{cases}$

294) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=3, \\ x+xy+y=7; \end{cases}$

295) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}, \\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}; \end{cases}$

296) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2a, \\ x^4-y^4=a^4; \end{cases}$

297) $\begin{cases} x\sqrt{x+y}=a, \\ y\sqrt{x+y}=b; \end{cases}$ $a\neq 0, \quad b\neq 0$

298) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\sqrt{a}, \\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=\left(\sqrt{41}-3\right)a. \end{cases}$

2.10. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

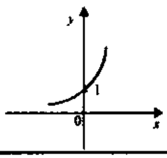
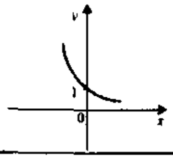
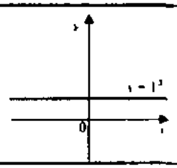
2.10.1. Опорний конспект

Означення Показниковими називають рівняння (нерівності), що містять змінну лише в показнику степеня.

Б 1

Функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ має такі властивості:

1. $a^x > 0$ — для довільного $x \in R$.
2.

$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
 зростає	 спадає	 стала

Б 2

Таблиця найпростіших показникових рівнянь

№ пор	Вид рівняння	Розв'язання	Метод розв'язання
1	$a^{f(x)} = 1$ при $a \neq 1$, $a > 0$	$\Leftrightarrow f(x) = 0$	
2	$a^{f(x)} = b$ при $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a > 0$	$\Leftrightarrow f(x) = \log_a b$	Логарифмування за основою a з урахуванням властивостей показникової функції, наведених в **Б 1**

Таблиця найпростіших показникових нерівностей

№ пор	Вид нерівності	Розв'язання			Метод розв'язання
		$a>0,\ b\le 0$	$a>1,\ b<0$	$0<a<1,\ b>0$	Логарифмування за основою a з урахуванням властивостей *показникової* функції, наведених в **Б 1**
1	$a^{f(x)}>b$	$x\in D(f)$	$f(x)>\log_a b$	$f(x)<\log_a b$	
2	$a^{f(x)}\ge b$		$f(x)\ge\log_a b$	$f(x)\le\log_a b$	
3	$a^{f(x)}\le b$	$x\in\varnothing$	$f(x)\le\log_a b$	$f(x)\ge\log_a b$	
4	$a^{f(x)}<b$		$f(x)<\log_a b$	$f(x)>\log_a b$	

Б 3

Таблиця окремих методів розв'язання показникових рівнянь і нерівностей

№ пор	Загальний вигляд рівняння	Загальний вигляд нерівності	Метод (прийом) розв'язання
1	2	3	4
1	$a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 1,\\ f(x)=g(x)\end{cases}$ або $\begin{cases}a=1,\\ x\in ОДЗ\end{cases}$	$a^{f(x)}>(<)a^{\varphi(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1,\\ f(x)>(<)g(x)\end{cases}$ або $\begin{cases}0<a<1;\\ f(x)\wedge\varphi(x)\end{cases}$	На основі властивостей показникової функції
2	$a_1^{f_1(x)}\ a_2^{f_2(x)}\ \ldots\ a_n^{f_n(x)}=b$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — додатні числа, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ — многочлени	$a_1^{f_1(x)}\ a_2^{f_2(x)}\ \ldots\ a_n^{f_n(x)}>(<)b$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — додатні числа, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ — многочлени	Логарифмування за основою деякого числа a ($a>0$, $a\ne 1$)
3	$A_0a^{f(x)+k_1}+A_1a^{f(x)+k_2}+\ldots$ $+A_na^{f(x)+k_n}=M\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{f(x)+k_i}(A_0a^{k_0-k_i}+$ $+A_1a^{k_1-k_i}+\ldots+A_i+\ldots$ $+A_na^{k_n-k_i})=M\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{f(x)+k_i}N=M$, де N, M — сталі	$A_0a^{f(x)+k_1}+A_1a^{f(x)+k_2}+\ldots$ $+A_na^{f(x)+k_n}>(<)M\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{f(x)+k_i}(A_0a^{k_0-k_i}+A_1a^{k_1-k_i}+$ $+A_i+\ldots+A_na^{k_n-k_i})>(<)M\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{f(x)+k_i}N>(<)M$, де N, M — сталі	Винесення спільного множника за дужки, зручніше найменшого серед $a^{f(x)+k_i}$

1	2	3	4
4	$P\left(a^{f(x)}\right)=0$, де $P\left(a^{f(x)}\right)$ — многочлен; $y=a^{f(x)} \Rightarrow \begin{cases} P(y)=0, \\ y>0 \end{cases}$	$P\left(a^{f(x)}\right)>(<)\,0$, де $P\left(a^{f(x)}\right)$ — многочлен; $y=a^{f(x)} \Rightarrow \begin{cases} P(y)>(<)\,0, \\ y>0 \end{cases}$	Метод заміни $\left(a^{f(x)}=y\right)$
5	$Aa^x+Bb^x=C$	$Aa^x+Bb^x>(<)\,C$	Розв'язуються лише при певних залежностях між a і b
	1) якщо $a\,b=1$		Заміна: $a^x=y,\ b^x=\dfrac{1}{y}$
	$\begin{cases} Ay^2-Cy+B=0, \\ y>0 \end{cases}$	$\begin{cases} Ay^2-Cy+B>(<)\,0, \\ y>0 \end{cases}$	
	2) якщо $b=a^m$ або $a=b^m$		Заміна: $a^x=y,\ y>0;$ $b^x=\left(a^x\right)^m=y^m$
	$\begin{cases} By^m-Ay-C=0, \\ y>0 \end{cases}$	$\begin{cases} By^m+Ay-C>(<)0, \\ y>0 \end{cases}$	

2.10.2. Приклади розв'язання основних видів показникових рівнянь і нерівностей

І. Зведення до однієї основи

Приклад 1. Розв'язати рівняння $3^{x^2-5x+6}=1$.

$$3^{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6}=3^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, \text{ або } x=3.$$

Відповідь: $\{2;3\}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $0{,}6^x\left(\dfrac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\dfrac{27}{125}\right)^3$.

$$0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{5}\right)^9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x^2-24-x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-9} \Leftrightarrow 2x^2-x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2{,}5, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-2{,}5;\,3\}$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $3^{x^2-5x+6} > 1$.

$$3^{x^2-5x+6} > 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Пояснення: $3 > 1$, показникова функція зростаюча.

$$(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

Приклад 4. Розв'язати нерівність $0{,}6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} < \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

$$0{,}6^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} < \left(\frac{27}{125}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2x^2+24} < \left(\frac{3}{5}\right)^9; \quad 0 < \frac{3}{5} < 1.$$

Показникова функція спадає, тому одержана нерівність рівносильна нерівності $x - 2x^2 - 24 > 9$, звідки $2x^2 - x - 15 < 0$, $2(x-3)(x+2{,}5) < 0$, $x \in (-2{,}5; 3)$.

Відповідь: $x \in (-2{,}5; 3)$.

II. Логарифмування

Приклад 5. Розв'язати рівняння $5^{2x-3} = 19^{1-x}$.

$$5^{2x-3} = 19^{1-x} \Leftrightarrow \log_5\left(5^{2x-3}\right) = \log_5\left(19^{1-x}\right) \Leftrightarrow 2x-3 = (1-x)\log_5 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2 + \log_5 19\right) x = 3 + \log_5 19;$$

$$x = \frac{3 + \log_5 19}{2 + \log_5 19} \Leftrightarrow x = \frac{\log_5 125 + \log_5 19}{\log_5 25 + \log_5 19} \Leftrightarrow x = \log_{475} 2375.$$

Відповідь: $\left\{\log_{475} 2375\right\}$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $5^{2x-3} > 19^{1-x}$.

Логарифмічна функція зростає, коли основа перевищує одиницю Оскільки $5 > 1$, то

$$\log_5\left(5^{2x-3}\right) > \log_5\left(19^{1-x}\right) \Leftrightarrow 2x-3 > (1-x)\log_5 19 \Leftrightarrow x > \log_{475} 2375.$$

Відповідь: $x \in (\log_{475} 2375; +\infty)$.

III. Винесення спільного множника за дужки

Приклад 7. Розв'язати рівняння $2^{3x}+2^{3x-1}+2^{3x-2}+2^{3(x-1)}=120.$

$$2^{3x}+2^{3x-1}+2^{3x-2}+2^{3(x-1)}=120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-3}(2^{3x-(3x-3)}+2^{(3x-1)-(3x-3)}+2^{(3x-2)-(3x-3)}+1)=120 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-3}(2^3+2^2+2+1)=120 \Leftrightarrow 15\cdot 2^{3x-3}=120 \Leftrightarrow 2^{3x-3}=8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-3=3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2.$$

Відповідь: $\{2\}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1} \Leftrightarrow 4^x+4^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{x-\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{2}}+1\right)=3^{x-\frac{1}{2}}\left(1+3^{\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow x=1{,}5.$$

Відповідь: $\{1{,}5\}$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $2^{3x}+2^{3x-1}+2^{3x-2}+2^{3(x-1)}\le 120.$

Виконуючи перетворення, подібні до перетворень при розв'язуванні відповідного рівняння, одержуємо

$$2^{3x-3}(2^3+2^2+2+1)\le 120 \Leftrightarrow 2^{3x-3}\le 8 \Leftrightarrow 3x-3\le 3 \Leftrightarrow x\le 2.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;\,2]$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}\ge 3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

Виконуючи перетворення, подібні до перетворень при розв'язуванні відповідного рівняння, одержуємо

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}}\ge\frac{4}{3}.$$

Основа $\frac{4}{3}>1$. Показникова функція зростає, тому

$$x-\frac{1}{2}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1,5.$$

Відповідь: $x\in[1,5;+\infty)$.

IV. Введення додаткової змінної

Приклад 11. Розв'язати рівняння $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$.

$$5^{2x-1}+5^{x+1}=250;$$

$$\frac{1}{5}\cdot 5^{2x}+5\cdot 5^{x}-250=0;$$

$5^x=y$ — заміна;

$$y^2+25y-1250=0 \Leftrightarrow y=\frac{-25\pm 75}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25, \\ y=-50. \end{array}\right.$$

Звідки

$$\left[\begin{array}{l} 5^x=25, \\ 5^x=-50 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{2\}$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $9^x+6^x=2\cdot 4^x$.

$9^x+6^x=2\cdot 4^x$. Ділимо на $4^x\neq 0$.

$$\frac{9^x}{4^x}+\frac{6^x}{4^x}-2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-2=0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=y$ — заміна;

$$y^2+y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=-2. \end{array}\right.$$

Звідки

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Відповідь: $\{0\}$.

Приклад 13. Розв'язати нерівність $5^{2x-1} + 5^{x+1} < 250$.

Виконуючи перетворення, подібні до перетворень при розв'язуванні відповідного рівняння, одержуємо

$5^x = y$ — заміна;

$$y^2 + 25y - 1250 < 0 \Leftrightarrow (y-25)(y+50) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y > -50, \\ y < 25. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} 5^x > -50, \\ 5^x < 25 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;\ 2)$.

Приклад 14. Розв'язати нерівність $9^x + 6^x > 2 \cdot 4^x$.

Міркуючи подібно до того, як при розв'язування рівняння, одержуємо

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 > 0.$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = y \text{ — заміна;}$$

$$y^2 + y - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < -2, \\ y > 1, \end{array}\right. \text{ звідки } \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x < -2, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0.$$

Відповідь: $x \in (0;\ +\infty)$.

V. Графічний метод або підбір з подальшим доведенням, що інших розв'язків не існує

Приклад 15. Розв'язати рівняння $5^x + 2^x = 7$.

$5^x = 7 - 2^x$.

$x = 1$ — корінь рівняння.

Рівняння має єдиний розв'язок, тому що функції:

$y = 5^x$ — зростаюча;

$y = 7 - 2^x$ — спадна (рис. 2.92).

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 16. Розв'язати нерівність $5^x + 2^x > 7$.

$$5^x + 2^x > 7 \Leftrightarrow 5^x > 7 - 2^x.$$

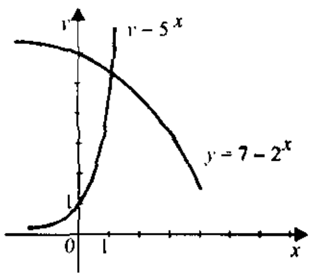


Рис. 2.92

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$.

2.10.3. Приклади розв'язання показникових рівнянь і нерівностей конкурсного рівня

Приклад 17. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

Метод заміни.

Враховуючи, що $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8}) = 1$ і замінивши $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = y \neq 0$, одержимо

$$\frac{1}{y} + y = 6 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 6y + 1}{y} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3+\sqrt{8}, \\ y = 3-\sqrt{8}, \end{array}\right.$$

звідки

$$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=3+\sqrt{8},\\ \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=3-\sqrt{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(3+\sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}}=3+\sqrt{8},\\ \left(3+\sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}}=\left(3+\sqrt{8}\right)^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{3}=1,\\ \frac{x}{3}=-1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-3;\ 3\}$.

Приклад 18. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x<6.$

Метод заміни. $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=y>0$ — заміна.

$$\frac{1}{y}+y<6\Leftrightarrow\frac{y^2-6y+1}{y}<0.$$

$$3-\sqrt{8}<y<3+\sqrt{8}\Leftrightarrow\begin{cases}y>3-\sqrt{8},\\ y<3+\sqrt{8},\end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases}\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x>3-\sqrt{8},\\ \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x<3+\sqrt{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3+\sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}}>\left(3+\sqrt{8}\right)^{-1},\\ \left(3+\sqrt{8}\right)^{\frac{x}{3}}<3+\sqrt{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}>-1,\\ \frac{x}{3}<1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3,\\ x<3.\end{cases}$$

Відповідь: $x\in(-3;\ 3)$.

Приклад 19. Розв'язати *рівняння* $12^x+5^x=13^x$.

Штучний спосіб. Ділимо на $13^x\neq0$ обидві частини рівняння:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{12}{13}\right)^x+\left(\frac{5}{13}\right)^x=1.$$

Підбором визначаємо, що коренем одержаного рівняння є $x=2$. Доведемо, що інших коренів вихідного рівняння не існує.

Якщо $x < 2$, то

$\left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{12}{13}\right)^2$, $\left(\frac{5}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2$. Додамо одержані нерівності:

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2$, тобто $\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > 1$.

Міркуючи так само, одержуємо, що коли $x > 2$, то $\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x < 1$.

Це означає, що серед чисел $x \neq 2$ задане рівняння не має коренів.
Відповідь: $x = 2$.

Приклад 20. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Штучний спосіб. Ділимо на $2^x \neq 0$ обидві частини рівняння:

$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1$. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \leq 1$. Позначимо $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sin\varphi$.

Знайдемо $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. $\sin^x\varphi + \cos^x\varphi = 1$.

Відповідь: $x = 2$. Доведення, що інших коренів немає, можна здійснити як при розв'язанні попереднього прикладу.

Приклад 21. Розв'язати рівняння $1 + 9^{\frac{x}{2}} = 4^x$.

Штучний спосіб. Ділимо обидві частини рівняння на $4^x \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{9}}{4}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x} = 1.$$

Існує кут α, для якого $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тому останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\sin^{2x}\alpha + \cos^{2x}\alpha = 1.$$

Порівнюючи останнє рівняння з основною тригонометричною тотожністю $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, доходимо висновку, що $2x = 2$, $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$. Доведення, що інших коренів немає, можна здійснити як у прикладі 20.

Приклад 22. Розв'язати нерівність $2^x+3^x+4^x+5^x>54$.

Штучний спосіб. $2^x+3^x+4^x+5^x>2^2+3^2+4^2+5^2$.

Підбором одержуємо, що при $x=2$

$$2^x+3^x+4^x+5^x=2^2+3^2+4^2+5^2=54.$$

Функція $y=2^x+3^x+4^x+5^x$ неперервна і монотонна, 54 — стале число, тому рівняння не може мати більше одного кореня.

Очевидно, що нерівність виконується для $x\in(2;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(2;+\infty)$.

Приклад 23. Розв'язати нерівність $(2^x-1)^2-2\left|2^{x+1}-2\right|\le 5$.

$$(2^x-1)^2-2\left|2^{x+1}-2\right|\le 5 \Leftrightarrow (2^x-1)^2-4\left|2^x-1\right|\le 5 \Leftrightarrow \left|2^x-1\right|^2-4\left|2^x-1\right|\le 5.$$

Заміна: $\left|2^x-1\right|=y$. Тоді $y^2-4y-5\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -1, \\ y\le 5, \end{cases}$

звідки

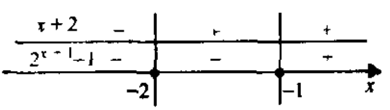
$$\begin{cases} \left|2^x-1\right|\ge -1, \\ \left|2^x-1\right|\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow -5\le 2^x-1\le 5 \Leftrightarrow -4\le 2^x\le 6 \Leftrightarrow 2^x\le 6 \Leftrightarrow x\le \log_2 6.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;\log_2 6]$.

Приклад 24. Розв'язати рівняння $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1$.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$;

$2^{x+1}-1=0 \Leftrightarrow x=-1$.



Розглянемо три випадки:

1) $x<-2$:

$$2^{-x-2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1 \Leftrightarrow 2^{-x-2}=2 \Leftrightarrow x=-3;$$

2) $-2 \le x \le -1$:

$$2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1 \Leftrightarrow 2^{x+2}=2 \;\Leftrightarrow\; x+2=1 \Leftrightarrow x=-1;$$

3) $x>-1$:

$$2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1 \Leftrightarrow 2^{x+2}=2\cdot 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x+2}=2^{x+2} \Leftrightarrow 0=0.$$

Відповідь: $x \in \{-3\} \cup [-1;\, +\infty)$.

2.10.4. Приклади розв'язання показникових рівнянь і нерівностей з параметрами

Приклад 25. Розв'язати рівняння $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$.

Метод: заміни. $4^{x-2}=y \Rightarrow y>0$.

$$3y-ay=a-27 \Leftrightarrow (3-a)y=a-27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3-a=0, \\ y\cdot 0=a-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3, \\ y\in\varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} 3-a\ne 0, \\ y=\dfrac{a-27}{3-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 3, \\ y=\dfrac{a-27}{3-a} \end{cases}; \\ \begin{cases} 3-a\ne 0, \\ a=27, \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=27, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3, \\ x\in\varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} a\ne 3, \\ 4^{x-2}=\dfrac{a-27}{3-a} \end{cases}; \\ \begin{cases} a=27, \\ 4^{x-2}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a\ne 3, \\ \dfrac{a-27}{3-a}>0, \\ x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<a<27, \\ x=\log_4\dfrac{a-27}{3-a}+2. \end{cases}$$

У розглядуваному прикладі можна обійтися без заміни, а саме:

$$3\cdot 4^{x-2}-a\cdot 4^{x-2}=a-27 \Leftrightarrow 4^{x-2}(3-a)=a-27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-a\neq 0,\\ 4^{x-2}=\dfrac{a-27}{3-a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 3,\\ \dfrac{a-27}{3-a}>0,\\ x=\log_4\dfrac{a-27}{3-a}+2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<a<27,\\ x=\log_4\dfrac{a-27}{3-a}+2;\end{cases}\\ \begin{cases}3-a=0,\\ 4^{x-2}\cdot 0=-24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3,\\ x\in\varnothing;\end{cases}\\ \begin{cases}a-27=0,\\ 4^{x-2}\cdot(-24)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=27,\\ 4^{x-2}=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$ при $a\in(3;\,27)$; $x\in\varnothing$ при $a\in(-\infty;\,3]\cup[27;\,+\infty)$.

Приклад 26. Розв'язати нерівність $a^{2-x}\sqrt[x]{a^{-1}}<a^{x-1}$.

Метод: зведення лівої і правої частин нерівності до однієї основи і використання властивості монотонності показникової функції.

$a^{2-x}\cdot a^{-\frac{1}{x}}<a^{x-1}\Leftrightarrow a^{2-x-\frac{1}{x}}<a^{x-1}$. Остання нерівність рівносильна сукупності трьох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<a<1,\\ 2-x-\dfrac{1}{x}>x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1,\\ \dfrac{2x^2-3x+1}{x}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1,\\ x<0\quad\text{або}\quad\dfrac{1}{2}<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}a>1,\\ 2-x-\dfrac{1}{x}<x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1,\\ \dfrac{2x^2-3x+1}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1,\\ 0<x<\dfrac{1}{2}\quad\text{або}\quad x>1;\end{cases}\\ \begin{cases}a=1,\\ 1<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,\\ x\in\varnothing.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(-\infty;\,0)\cup\left(\dfrac{1}{2};\,1\right)$ при $a\in(0;\,1)$; $x\in\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;\,+\infty)$ при $a\in(1;\,+\infty)$; $x\in\varnothing$ при $a\in(-\infty;\,0)\cup\{1\}$.

2.10.5. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати рівняння (нерівності):

299) $5^{2x^2+x-6}=1$; 300) $5^{2x^2+x-6}>1$;

301) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}\le 0,01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$; 302) $3^{x\ \sqrt{3x-5}}\ge 27$;

303) $2^{x+3}-2^x\le 112$; 304) $6^x+6^{x+1}-2^x-2^{x+2}\ge 2^x$;

305) $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}\le 9^{-\frac{1}{x}}$; 306) $2^{x\ 1}\le 2-x$;

307) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<x+2$; 308) $2^{\left|x^2+6x-7\right|}<2^{1-3x}$;

309) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

Конкурсний рівень

310) $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0,125^{\frac{1}{x}}}}-4\sqrt[3]{2}=0$; 311) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2-6x-4}\le\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^x$;

312) $2^{2x-1}+2^{2x-2}-3\cdot 2^{2x-3}\le 6+3+1,5+\ldots$;

313) $\sqrt{7^{2x+6}}-\sqrt{49^{x+2}}-2^{x+5}+2\cdot 0,25-(1+0,5x)\le 0$;

314) $8^x+18^x\ge 2\cdot 27^x$; 315) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$;

316) $6+4\cdot 2^{-|x|}=|x+4|+|x-4|$;

317) скільки розв'язків має рівняння:

а) $2^{-|x|}=\left|2-|x|\right|$; б) $\sqrt{x+4}=2^x$;

318) $\left|4-x^2\right|^{\left|x^2-5x+6\right|}>1$; 319) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^{\left|5-4x-x^2\right|}<1$;

320) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x-4\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x-4\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=-6$;

321) $|x+1|^{x^2+2x}\le|x+1|^3$.

Розв'язати рівняння (нерівності) з параметрами:

322) $a^{2x-3}-a^{2x-2}+a^{2x}=b,\quad a>0;$

323) $3^{x+1}>\dfrac{3^x-a}{3^{x-1}-1}$;

324) $a^{\frac{3}{x+1}}a^{\frac{2}{x+1}}=\dfrac{1}{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^{10x}}$;

325) $a^2-9^{x+1}-8a3^x>0$;

326) $a^{x+1}=b^{3-x}$;

327) $\dfrac{a^x}{a^x-1}>\dfrac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}}$;

328) $\dfrac{m^{2x}-10}{m^x+1}<3-\dfrac{15}{m^{2x}+m^x}$.

2.10.6. Приклади розв'язання систем показникових рівнянь і нерівностей

Приклад 27. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25.\end{cases}$$

Метод: заміни $\begin{cases}3^x=u,\\ 2^{\frac{y}{2}}=v.\end{cases}$

$$\begin{cases}u^2-v^2=725,\\ u-v=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=29,\\ u-v=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=27,\\ v=2.\end{cases}$$

Тому

$$\begin{cases}3^x=27,\\ 2^{\frac{y}{2}}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$$

Відповідь: $\{(3;2)\}$.

Приклад 28. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=6,\\ 3^x\cdot 4^y=12.\end{cases}$$

Метод. Зведення кожного рівняння системи до рівнянь, обидві частини яких є степенями з однією основою:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2 \cdot 3, \\ 3^x \cdot 2^{2y} = 2^2 \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = 3^{1-y}, \\ 3^{x-1} = 2^{2-2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = 2^{(1-y)\log_2 3}, \\ 2^{(x-1)\log_2 3} = 2^{2-2y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (1-y)\log_2 3, \\ (x-1)\log_2 3 = 2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (1-y)\log_2 3, \\ (1-y)\log_2^2 3 = 2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = (1-y)\log_2 3, \\ (1-y)(\log_2^2 3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1;1)\}$.

Приклад 29. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 16, \\ 2 \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

1-й спосіб.

$$\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 4^2, \\ 2 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 4^2 \cdot 5^0, \\ 2 \cdot 3^x = 2 \cdot 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

2-й спосіб.

Метод. Логарифмування кожного рівняння (зручно за основою 10):

$$\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 16, \\ 2 \cdot 3^x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \lg 4 + y \lg 5 = \lg 16, \\ \lg 2 + x \lg 3 = \lg 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \lg 2 + y \lg 5 = 4 \lg 2, \\ x \lg 3 + \lg 2 = \lg 2 + 2 \lg 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Відповідь: (2; 0).

Приклад 30. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 27, \\ 3^x + 3^y = 12. \end{cases}$$

Спосіб. Використання властивостей коренів квадратного рівняння (теорема Вієта).

3^x і 3^y — корені квадратного рівняння.

$$z^2-12z+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3, \\ z=9. \end{array}\right.$$

Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x=3, \\ 3^y=9; \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x=9, \\ 3^y=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(1, 2); (2; 1)\}$.

2.10.7. Розв'язання мішаних систем рівнянь (одне рівняння показникове, друге — алгебраїчне)

Приклад 31. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6, \\ x^2+5y^2=6xy. \end{cases}$$

Спосіб. Заміна здійснюється лише в одному (показниковому) рівнянні системи:

$$2^{\frac{x+y}{6}}=z>0.$$

З новою змінною перше рівняння системи набирає вигляду квадратного рівняння:

$$z^2+z-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2, \\ z=-3, \end{array}\right. \text{ звідки } \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{x+y}{6}}=2, \\ 2^{\frac{x+y}{6}}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^{\frac{x+y}{6}}=2.$$

Отже, вихідна система еквівалентна

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{6}} = 2, \\ x^2 + 5y = 6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{6} = 1, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y, \\ (6-y)^2 + 5y^2 - 6y(6-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(3; 3); (5; 1)\}$.

Приклад 32. **Розв'язати систему рівнянь**

$$\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 8, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

1-й спосіб.

Метод. Логарифмування (лівої і правої частин показникового рівняння за основою 10):

$$\begin{cases} \lg(5^x \cdot 2^y) = \lg 8, \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \lg 5 + y \lg 2 = \lg 8, \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+y) \lg 5 + y \lg 2 = \lg 8, \\ x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\lg 8 - 3 \lg 5}{\lg 5 + \lg 2}, \\ x = 3 + \dfrac{\lg 8 - 3 \lg 5}{\lg 5 + \lg 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\lg 8 - 3 \lg 5}{\lg 5 + \lg 2}, \\ x = \dfrac{6 \lg 2}{\lg 5 + \lg 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lg \dfrac{8}{125}, \\ x = \lg 64. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(\lg 64; \lg \dfrac{8}{125} \right)\right\}$.

2-й спосіб.

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ 5^x \cdot 2^{x-3} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3, \\ 10^x = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lg 64, \\ y = \lg 64 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lg 64, \\ y = \lg 0{,}064. \end{cases}$$

Приклад 33. Розв'язати систему показникових рівнянь з параметром a

$$\begin{cases} a^{\frac{x+1}{y-1}} = a, \\ a^{\frac{x-1}{y+1}} a^{\frac{y-1}{x-1}} = a^2\sqrt[3]{a}. \end{cases}$$

ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$ — за означенням показникової функції;

$y \neq 1$, $y \neq -1$, $x \neq 1$ — дріб існує за умови відмінності від нуля знаменника.

Метод Зведенням обох частин кожного окремо рівняння системи до степенів з однією основою.

$$\begin{cases} a^{\frac{x+1}{y-1}} = a, \\ a^{\frac{x-1}{y+1}+\frac{y-1}{x-1}} = a^{2\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1} = 1, \\ \dfrac{x-1}{y+1} + \dfrac{y-1}{x-1} = 2\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1-y+1}{y-1} = 0, \\ \dfrac{3(x-1)^2 + 3(y^2-1) - 7(y+1)(x-1)}{(y+1)(x-1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2, \\ 3(y-2)^2 - 6(y-2) + 3y^2 - 3 - 7y^2 + 14y + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y-2, \\ y^2 + 4y - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -11, \\ y = -9; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(-11; -9); (3; 5)\}$ при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; $x, y \in \varnothing$ при $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$.

Приклад 34. Розв'язати подвійну нерівність

$$1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\left|-x^2+x\right|} \leq 9.$$

Спосіб. Зводимо до розв'язання системи двох нерівностей

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left|-x^2+x\right|} \geq 1, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left|-x^2+x\right|} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|-x^2+x\right| \leq 0, \\ \left|-x^2+x\right| \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+x=0, \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1. \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{0; 1\}$.

2.10.8. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати системи рівнянь:

329) $\begin{cases} 5^{3x} = 5^{4y+7}, \\ 2^x \cdot 4^y = 16; \end{cases}$

330) $\begin{cases} 2^x - 3^{2y} = 7, \\ 3^y - 2^{0,5x} = -1; \end{cases}$

331) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 3125, \\ 5^x + 5^y = 150; \end{cases}$

332) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Конкурсний рівень

333) $\begin{cases} 5^x - 36y = 0, \\ 6^x - 25y = 0; \end{cases}$

334) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 7, \\ x + y = 5; \end{cases}$

335) $\begin{cases} 2 \cdot 3^x = 18, \\ 4^x \cdot 5^y = 16; \end{cases}$

336) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18; \end{cases}$

337) $\begin{cases} 9 \cdot 2^{2x-2y} - 4 \cdot 3^{2x-2y} = -5 \cdot 6^{x-y}, \\ 2^x \cdot 3^y = 24; \end{cases}$

338) $\begin{cases} \sqrt[9]{5^{6xy}} = 5^8. \\ \left(9999^{x-y-1}\right)^{x^2+6x-60} = 1; \end{cases}$

339) $\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457, \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890; \end{cases}$

340) $\begin{cases} \left(a^x \cdot a^y\right) : a^5 = a^2, \\ \left(a^x\right)^y = \left(a^6\right)^2; \end{cases}$

341) $\begin{cases} 2^{\left(y-\frac{x}{98}\right)^2 - 16\left(y-\frac{x}{98}\right)} - 15,5 = 2\sqrt{2}, \\ x + y = 37y; \end{cases}$

342) розв'язати подвійну нерівність $1 < 5^{\left|x^2-2x\right|} < 25$.

2.11. ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

2.11.1. Опорний конспект

Б 1

I. *Означення.* Рівняння (нерівності), які містять невідому в основі та показнику степеня, називають показниково-степеневими.

II. Загальний вигляд показниково-степеневих рівнянь (нерівностей):

$$f(x)^{\varphi(x)} = g(x)^{h(x)};$$

$$f(x)^{\varphi(x)} > (<) g(x)^{h(x)}.$$

III. *Визначення ОДЗ показниково-степеневих рівнянь (нерівностей).*

$$\text{ОДЗ}: \begin{cases} 1)\ f(x),\ g(x),\ \varphi(x),\ h(x) \text{ — мають зміст;} \\ 2)\ f(x) > 0,\ g(x) > 0 \quad \text{за означенням показникової функції.} \end{cases}$$

IV. *Загальний спосіб розв'язання показниково-степеневих рівнянь і нерівностей.*

Алгоритмічний припис:

1. Визначити ОДЗ рівняння (нерівності).
2. Прологарифмувати обидві частини рівняння (нерівності) за деякою основою a: $a > 0$, $a \neq 1$ (зручно за основою 10).
3. Розв'язати рівняння вигляду $\varphi(x)\log_a(f(x)) = h(x)\log_a(g(x))$ (нерівність вигляду $\varphi(x)\log_a(f(x)) > (<) h(x)\log_a(g(x))$).
4. Відповідь подати з урахуванням ОДЗ рівняння (нерівності).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^{\sqrt[3]{x^2}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

1. ОДЗ: $x > 0$.
2. $\lg\left(x^{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \lg\left(\left(\sqrt{x}\right)^x\right)$, $\sqrt[3]{x^2}\lg x = \frac{1}{2}x\lg x$.

3. $\lg x\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=0,\\ \sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=8.\end{array}\right.$

4. Відповідь: $x \in \{1; 8\}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^{\sqrt[3]{x^2}} > \left(\sqrt{x}\right)^x$.

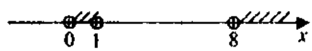
1. ОДЗ: $x > 0$.

2. $\lg\left(x^{\sqrt[3]{x^2}}\right) > \lg\left(\left(\sqrt{x}\right)^x\right)$, $\sqrt[3]{x^2}\lg x > \frac{1}{2}x\lg x$.

3. $\lg x\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}x\right)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lg x>0,\\ \sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}x>0\end{cases}$ або $\begin{cases}\lg x<0,\\ \sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}x<0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x>1,\\ 8x^2-x^3>0\end{cases} \text{або} \begin{cases}x>0,\\ x<1,\\ 8x^2-x^3<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1,\\ x^2(8-x)>0\end{cases} \text{або} \begin{cases}0<x<1,\\ x^2(8-x)<0.\end{cases}$$

$x \in (1; 8)$



$x \in \varnothing$

Відповідь: $x \in (1;8)$.

Б 2

$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ при $f(x) > 0$.

Обґрунтування наявності рівносильної системи або їх сукупності. Діючи за алгоритмом загального методу (Б1), одержимо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\text{ОДЗ}(f, g, h),\ f(x)>0,\\ f(x)=1;\end{cases}\\ \begin{cases}\text{ОДЗ}(f, g, h),\ f(x)>0,\\ g(x)=h(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}, \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{ОДЗ}(f, g, h) > 0, \\ f(x) = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \text{ОДЗ}(f, g, h) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$ **при** $3x-4>0$.

1) $\begin{cases} 3x-4>0, \\ 2x^2+2=5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3}, \\ 2x^2-5x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$

2) $3x-4=1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Відповідь: $x \in \left\{2; 1\frac{2}{3}\right\}$.

Б 3

$f(x)^{g(x)} > (<) f(x)^{h(x)}$ при $f(x) > 0$.

$$\begin{cases} \text{ОДЗ }(f, g, h), \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < (>) h(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \text{ОДЗ }(f, g, h), \\ f(x) > 1, \\ g(x) > (<) h(x); \end{cases}$$

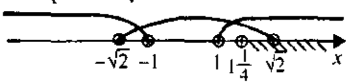
$$\begin{cases} f(x)^{g(x)} > (<) f(x)^{h(x)}, \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{ОДЗ }(f, g, h), \\ 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < (>) h(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \text{ОДЗ }(f, g, h), \\ f(x) > 1, \\ g(x) > (<) h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\left(x^2-1\right)^{2+x} > \left(x^2-1\right)^{5x-3} \text{ при } x^2-1>0.$$

$$\begin{cases} 0<x^2-1<1, \\ 2+x<5x-3 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2-1>1, \\ 2+x>5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x^2<2, \\ 4x>5 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2>2, \\ 4x<5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2>1, \\ x^2<2, \\ x>1\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2>2, \\ x<1\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$



Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(1\dfrac{1}{4}; \sqrt{2}\right)$.

Б 4

$f(x)^{g(x)} \geq (\leq) f(x)^{h(x)}$ при $f(x)>0$.

$$\begin{cases} f(x)^{g(x)} \geq (\leq) f(x)^{h(x)}, \\ f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{ОДЗ}(f,\, g,\, h), \\ 0<f(x)\leq 1, \\ g(x)\leq(\geq)h(x); \end{cases} \\ \begin{cases} \text{ОДЗ}(f,\, g,\, h), \\ f(x)\geq 1, \\ g(x)\geq(\leq)h(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\left(x^2-1\right)^{2+x} \geq \left(x^2-1\right)^{5x-3}$.

$$\begin{cases} 0<x^2-1\leq 1, \\ 2+x\leq 5x-3 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^2-1\geq 1, \\ 2+x\geq 5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\leq 2, \\ x^2>1, \\ x\geq 1\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2\geq 2, \\ x\leq 1\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[1\dfrac{1}{4}; \sqrt{2}\right]$.

$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$ за умови $f(x)$ — довільний вираз за значенням. Тоді розв'язання рівняння передбачає розгляд п'яти випадків.

1. $f(x) = 1$.

Обґрунтування.

$$\begin{cases} 1^{g(x)} = 1^{h(x)}, \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ 1 = 1, \\ f(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ f(x) = 1. \end{cases}$$

Висновок. Розв'язання вихідного рівняння за умови $f(x) = 1$ зводиться до розв'язання системи $\begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ f(x) = 1. \end{cases}$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$.

$$\begin{cases} x \in R, \\ 3x - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1\frac{2}{3}.$$

Висновок: $x = 1\frac{2}{3}$ — корінь рівняння.

2. $f(x) = -1$.

Обґрунтування.

$$\begin{cases} (-1)^{g(x)} = (-1)^{h(x)}, \\ f(x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ f(x) = -1, \\ g(x), h(x) \text{ — цілі числа,} \end{cases}$$

бо (–1) можна підносити лише до цілого степеня; $g(x)$, $h(x)$ — однакової парності, щоб виконувалась перша рівність вихідної системи.

Висновок. Розв'язання вихідного рівняння за умови $f(x) = -1$ зводиться до розв'язання системи

$$\begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ f(x) = -1, \\ h(x), g(x) \text{ — цілі числа однакової парності;} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ 2\dfrac{1}{4} + 2 = 2\dfrac{1}{2}, \\ 5\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \left.\vphantom{\begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases}}\right\} \text{ — дробові числа.}$$

Висновок: $x = \dfrac{1}{2}$ — не є коренем рівняння.

Відповідь: $x \in \left\{ \dfrac{4}{3}; \dfrac{5}{3}; 2 \right\}$.

Б 6

$$\begin{cases} f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)}, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ f(x) > 0,\ h(x) > 0, \\ g(x) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \text{ОДЗ } (f, g, h), \\ f(x) > 0,\ h(x) > 0, \\ f(x) = h(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\left(x^2 + x + 1\right)^{x^2 - 5x + 6} = (x + 2)^{x^2 - 5x + 6} \text{ при}$$

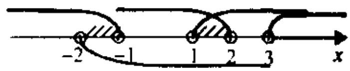
$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ x + 2 > 0; \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 + x + 1 = x + 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3, \\ x = 1, \\ x = -1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Відповідь: $\{-1; 1; 2; 3\}$.

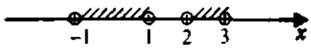
$$\begin{cases} f(x)^{g(x)} > h(x)^{g(x)}, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{ОДЗ } (f,\, g,\, h), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > h(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \text{ОДЗ } (f,\, g,\, h), \\ g(x) < 0, \\ h(x) > f(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Приклад 8. Розв'язати нерівність

$$\left(x^2 + x + 1\right)^{x^2 - 5x + 6} > \left(x + 2\right)^{x^2 - 5x + 6}.$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 + x + 1 > x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ x^2 - 1 > 0, \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \bigcup (1; 2) \bigcup (3; +\infty) \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0, \\ x + 2 > x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) < 0, \\ x^2 - 1 < 0, \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) < 0, \\ (x-1)(x+1) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$



$x \in \varnothing$

Відповідь: $x \in (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

2.11.2 Приклади розв'язання вправ конкурсного рівня

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$x^{\log_3(x^2+3x)} = (x^2 + 3x)^{\log_3(1-x)}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 3x > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3) > 0, \\ x < 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1).$

Використовуючи Б 1, маємо

$$\begin{cases} x \in (0;1), \\ \log_3(x^2+3x)\log_3 x = \log_3(1-x)\log_3(x^2+3x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+3x)(\log_3 x - \log_3(1-x)) = 0, \\ x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1), \\ \left[\begin{array}{l} \log_3(x^2+3x) = 0, \\ \log_3 x = \log_3(1-x) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;1), \\ x^2+3x = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \in (0;1), \\ x = 1-x \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \in (0;1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ x \in (0;1), \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $|x+1|^{x^2+2x} \le |x+1|^3$.

Використовуючи **Б 4**, маємо

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < |x+1| \le 1, \\ x^2+2x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x+1 \le 1, \\ x+1 \ne 0, \\ x^2+2x-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 0, \\ x \ne -1, \\ (x+3)(x-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing, \\ \begin{cases} |x+1| \ge 1, \\ x^2+2x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \ge 1, \\ x^2+2x-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ (x+3)(x-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;1], \\ \begin{cases} x+1 \le -1, \\ x^2+2x-3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2, \\ (x+3)(x-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3;-2]. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відповідь: $[0;1] \cup [-3;-2]$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $x^{5\sin 3x+2}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

ОДЗ: $x>0$.

Використовуючи **Б 2, маємо**

$$x=1 \text{ або } \begin{cases} x>0, \\ 5\sin 3x+2=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 5\sin 3x=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \sin 3x=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 3x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, \ n\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n, \ n\in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n, \ n\in N.$$

Відповідь: $\left\{1; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n, n\in N\right\}$.

Приклад 12. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$

1-й спосіб.

Метод. Логарифмування.

$$\begin{cases} \log_5(x^{2y^2-1})=\log_5 5, \\ \log_5(x^{y^2+2})=\log_5 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y^2-1)\log_5 x=1, \\ (y^2+2)\log_5 x=3. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння на перше, урахувавши, що $\log_5 x\neq 0$.

$$\frac{y^2+2}{2y^2-1}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1, \\ 2y^2-1\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=-1. \end{array}\right.$$

Підстановкою значення y в одне з рівнянь вихідної системи одержуємо значення x:

$$\begin{cases} y=1, \\ x=5 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y=-1, \\ x=5. \end{cases}$$

2-й спосіб.

Діленням кожної частини одного **рівняння на відповідні частини** другого рівняння системи дістаємо

$$\begin{cases} \dfrac{x^{2y^2+4}}{x^{2y^2-1}} = \dfrac{5^6}{5}, \\ x^{2y^2-1} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 = 5^5, \\ x^{2y^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ 2y^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5, \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(5;1);(5;-1)\}$.

Приклад 13. Розв'язати нерівність з параметром a

$x^{\log_a x+1} > a^2 x.$

ОДЗ: $\begin{cases} a,\ x > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$

$$x^{\log_a x+1} > a^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} a,\ x > 0, \\ a \neq 1, \\ x^{\log_a x} > a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,\ x > 0, \\ a \neq 1, \\ a^{\log_a^2 x} > a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ 0<a<1, \\ \log_a^2 x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 0<a<1, \\ -\sqrt{2}<\log_a x<\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 0<a<1, \\ a^{\sqrt{2}}<x<a^{-\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ a>1, \\ \log_a^2 x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ a>1, \\ \log_a x>\sqrt{2} \ \text{ або } \ \log_a x<-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ a>1, \\ x>a^{\sqrt{2}} \ \text{ або } \ x<a^{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (0;\ a^{\sqrt{2}}) \cup (a^{\sqrt{2}};\ +\infty)$ при $a>1$; $x \in (a^{\sqrt{2}};\ a^{-\sqrt{2}})$ при $0<a<1$.

2.11.3. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати рівняння:

343) $x^{\lg x-3}=0,01;$

344) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1};$

345) $x^{\log_a x}=a^2x \qquad (a>0,\ a\neq 1);$

346) $(x-1)^{x^2-9}=1;$

347) $|x-3|^{x^2-3x}=|3-x|^{3-x};$

348) $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}}=1.$

Розв'язати нерівність:

349) $(x-1)^{x^2-6x+5}<1;$

350) $|x+1|^{x^2+2x}\le|x+1|^3;$

351) $(x^2-2,5x+1)^{x+1}\le 1;$

352) $(x^2-4x+1)^{\log_2(3-x)}>1.$

Розв'язати системи:

353) $\begin{cases} x^{x+y}=x^4y^2, \\ y^{x+y}=x^2y^4; \end{cases}$

354) $\begin{cases} \left(x^2-3x-9\right)^{x^2-5x-6}>1, \\ |2x-3|>\sqrt{45}; \end{cases}$

355) $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y)=1, \\ (x+y)^{x-y}=2. \end{cases}$

Конкурсний рівень

Розв'язати нерівність:

356) $\left|4-x^2\right|^{\left|x^2-5x+6\right|}>1;$

357) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^{\left|5-4x-x^2\right|}<1;$

358) $\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x^2-\sqrt{x}+2}>\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x^2-\sqrt{x}+2};$

359) $x^{2x+3}>x^{\frac{1}{x}+x};$

360) $x^{\frac{1}{\lg x}}\lg x<1;$

361) $x^{\log_3(x^2+3x)}>(x^2+3x)^{\log_3(1-x)};$

362) $x^{|\log_x a|}\le\dfrac{1}{a}.$

Розв'язати рівняння:

363) $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = \frac{1}{x}$;

364) $x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$;

365) $x^{\frac{5}{4} - 2\cos 3x} = \sqrt[4]{x}$;

366) $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$;

367) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$;

368) $x^2 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$;

369) $|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2$;

370) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{-\sin^2 x}{1+\sin x}}$.

Розв'язати системи:

371) $\begin{cases} x^{2x-y} = y^{2x+y}, \\ xy^2 = 1; \end{cases}$

372) $\begin{cases} |x|^{|y|} = |y|^{|x|}, \\ 7^{|x|} = 12^{|y|}; \end{cases}$

373) $\begin{cases} x^{\log_7 y} = 9, \\ xy = 147; \end{cases}$

374) $\begin{cases} \log_3 x + 4^{\log_2 \sqrt{y}} = 5, \\ x^y = 81; \end{cases}$

375) $\begin{cases} (xy)^{\frac{xy}{\lg x + \lg y}} = 10^{10}, \\ x + y = 7; \end{cases}$

376) $\begin{cases} (ax)^{\lg a} = (by)^{\lg b}, \\ b^{\lg x} = a^{\lg y}. \end{cases}$

2.12. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

2.12.1. Опорний конспект

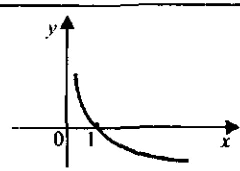
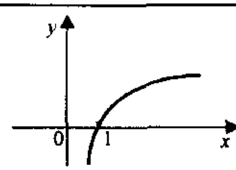
Означення. Логарифмічними називають **рівняння (нерівності), що містять змінну під знаком логарифма або в основі логарифма.**

Б 1

I. За означенням логарифма $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

II. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ **має такі властивості:**

1. $D(y) = R_+ (0; +\infty)$.
2.

$0 < a < 1$	$a > 1$
спадає 	зростає 
$\log_a 1 = 0$	

III. Основна логарифмічна тотожність $a^{\log_a x} = x$.

IV. Формула переходу до нової основи логарифма та наслідки з неї

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}; \quad \log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b.$$

V. Будь-яке число b можна подати у вигляді $b = \log_a a^b$.

Б 2

Таблиця розв'язання найпростіших логарифмічних рівнянь

№ пор	Вид рівняння	Розв'язання	Метод розв'язання
1	$\log_a f(x) = b$ при $a > 0,\ a \neq 1$	$f(x) = a^b$	Використання означення логарифма
2	$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ при $a > 0,\ a \neq 1$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = \varphi(x) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$	За властивостями логарифмічної функції

Таблиця розв'язання найпростіших логарифмічних нерівностей

№ пор.	Вид нерівності	Розв'язання		Метод розв'язання
		для $0 < a < 1$	для $a > 1$	
1	$\log_a f(x) \vee b$ $\Updownarrow$ $\log_a f(x) \vee \log_a a^b$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \wedge a^b \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \vee a^b \end{cases}$	Використання властивості монотонності логарифмічної функції
2	$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$	$\begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$	За властивостями логарифмічної функції
3	$\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$	$\begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	За властивостями логарифмічної функції

Б 3

Таблиця окремих методів (прийомів) розв'язання логарифмічних рівнянь і нерівностей

№ пор	*Загальний вид рівняння*	*Загальний вид нерівності*	Метод *(прийом)* розв'язання
1	2	3	4
1	$\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \ldots$ $+ \log_a f_n(x) = \log_a \varphi_1(x) +$ $+ \log_a \varphi_2(x) + \ldots + \log_a \varphi_m(x)$ $\Updownarrow$	$\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) +$ $\ldots + \log_a f_n(x) \vee \log_a \varphi_1(x) +$ $+ \log_a \varphi_2(x) + \ldots + \log_a \varphi_m(x)$ $\Updownarrow$	Потенціювання

1	2	3	4
	$\Updownarrow$ $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) \quad f_n(x)=\varphi_1(x) \quad \varphi_m(x) \\ f_1(x)>0 \quad f_2(x)>0, \quad , f_n(x)>0 \\ \varphi_1(x)>0, \varphi_2(x)>0, \quad , \varphi_m(x)>0 \end{cases}$	$\Updownarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x) \quad f_n(x) \vee \varphi_1(x) \quad \varphi_m(x), \\ a>1, \\ f_1(x)>0, \; f_2(x)>0, \quad , f_n(x)>0, \\ \varphi_1(x)>0, \varphi_2(x)>0, \quad , \varphi_m(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x)f_2(x) \quad f_n(x) \wedge \varphi_1(x)\varphi_2(x) \\ \quad \varphi_m(x), \\ 0<a<1, \\ f_1(x)>0, f_2(x)>0, \quad , f_n(x)>0, \\ \varphi_1(x)>0, \varphi_2(x)>0, \quad , \varphi_m(x)>0 \end{cases} \end{array} \right.$	
2	$f\left(\log_a \varphi(x)\right)=0$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} \log_a \varphi(x)=y, \\ f(y)=0 \end{cases}$	$f\left(\log_a \varphi(x)\right) \vee 0$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} \log_a \varphi(x)=y, \\ f(y) \vee 0 \end{cases}$	Заміна $\log_a \varphi(x)=y$
3	$\log_{g(x)} f(x)=b$ $\Updownarrow$ $\begin{cases} f(x)=\left(g(x)\right)^b, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	$\log_{g(x)} f(x) \vee b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_{g(x)} f(x) \vee \log_{g(x)} \left(g(x)\right)^b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \wedge (g(x))^b, \\ f(x)>0, \\ 0<g(x)<1 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \vee (g(x))^b, \\ f(x)>0, \\ g(x)>1 \end{cases}$	Рівняння використання означення логарифма Нерівності використання властивості монотонності логарифмічної функції
4	$\log_{\varphi(x)} f(x)=\log_{p(x)} g(x)$, $\dfrac{\lg f(x)}{\lg \varphi(x)}=\dfrac{\lg g(x)}{\lg p(x)}$ або за якоюсь іншою основою $h(x)$ $h(x)>0, h(x) \neq 1$	$\log_{\varphi(x)} f(x) \vee \log_{p(x)} g(x)$ $\Updownarrow$ $\dfrac{\lg f(x)}{\lg \varphi(x)} \vee \dfrac{\lg g(x)}{\lg p(x)}$	*Здійснення* переходу до однієї основи Див **Б I** формули IV
5	$\log_a f(x)=\varphi(x)$	$\log_a f(x) \vee \varphi(x)$	Графічний
6	Показниково-логарифмічні (коли показником є вираз із змінною під знаком логарифма)		Логарифмування, якщо обидві частини рівняння (нерівності) додатні

2.12.2. Приклади розв'язання основних видів логарифмічних рівнянь і нерівностей

I. *Метод розв'язання*: за означенням логарифму; нерівність — *за властивістю логарифмічної функції.*

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_2(x^2+4x+3)=3$.

$$\log_2(x^2+4x+3)=3 \Leftrightarrow x^2+4x+3=2^3 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{-5;1\}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\log_2(x^2+4x+3)>3$.

$$\log_2(x^2+4x+3)>3 \Leftrightarrow \log_2(x^2+4x+3)>\log_2 2^3, \quad 2>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+3>2^3 \Leftrightarrow x^2+4x-5>0$$

Логарифмічна функція зростає при основі, що перевищує одиницю.

Відповідь: $x\in(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$.

II. *Метод розв'язання*: потенціювання.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$.

$$\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11>0, \\ x-27>0, \\ \lg((3x-11)(x-27))=\lg 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{11}{3}, \\ x>27, \\ (3x-11)(x-27)=10^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>27, \\ 3x^2-92x-703=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>27, \\ \left[\begin{array}{l} x=37, \\ x=-6\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=37.$$

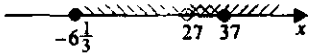
Відповідь: $\{37\}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\lg(3x-11)+\lg(x-27)\le 3$.

$$\lg(3x-11)+\lg(x-27)\le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11>0, \\ x-27>0, \\ \lg((3x-11)(x-27))\le \lg 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{11}{3}, \\ x>27, \\ (3x-11)(x-27)\le 10^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>27, \\ 3(x-37)\left(x+6\dfrac{1}{3}\right)\le 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x\in(27;37]$.



III. *Метод розв'язання*: заміна.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\lg^2 x-\lg x^6=\lg^2 3-9$.

$$\lg^2 x-\lg x^6=\lg^2 3-9 \Leftrightarrow \lg^2 x-6\lg x-(\lg^2 3-9)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x=y, \\ y^2-6y-(\lg^2 3-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x=y, \\ \left[\begin{array}{l} y=\lg 3+3, \\ y=-\lg 3+3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=\lg 10^3+\lg 3, \\ \lg x=\lg 10^3-\lg 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

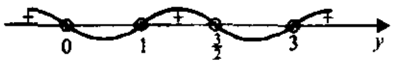
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=3000, \\ x=\dfrac{1000}{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{1000}{3};3000\right\}$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{1}{3-\lg x}<1-\dfrac{1}{2\lg x}$.

$$\frac{1}{3-\lg x}<1-\frac{1}{2\lg x} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x=y, \\ \dfrac{1}{3-y}<1-\dfrac{1}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x=y, \\ \dfrac{2y-(3-y)2y+3-y}{(3-y)2y}<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = y, \\ \dfrac{2y-6y+2y^2+3-y}{(3-y)2y} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = y, \\ (2y^2-5y+3)(3-y)2y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = y, \\ 4y(y-3)\left(y-\dfrac{3}{2}\right)(y-1) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = y, \\ y < 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \lg x = y, \\ y > 3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \lg x = y, \\ 1 < y < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x \leq 0 \quad \text{або } \lg x > 3 \quad \text{або } \; 1 < \lg x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ або } \; x > 1000 \quad \text{або } \; 10 < x < \sqrt{1000}.$$

Відповідь: $x \in (0;\, 1) \cup \left(10;\, \sqrt{1000}\right) \cup \left(1000;\, +\infty\right)$.

IV. *Метод розв'язання*: перехід до однієї основи.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\log_2 x + \log_3 x = 1$.

$$\log_2 x + \log_3 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x(\log_2 3 + 1) = \log_2 3 \Leftrightarrow$$

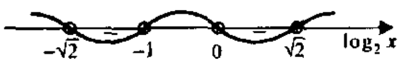
$$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 3}{\log_2 3 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x = \log_6 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2^{\log_6 3}.$$

Відповідь: $\left\{2^{\log_6 3}\right\}$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\log_x 2 \log_{2x} 2 \log_2 4x > 1$.

$$\log_x 2 \log_{2x} 2 \log_2 4x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 2x \neq 1, \\ x > 0, \\ \dfrac{\log_2 4x}{\log_2 x \log_2 2x} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ x > 0, \\ \dfrac{\log_2 x + 2}{\log_2 x(1+\log_2 x)} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ x > 0, \\ (\log_2^2 x - 2)(1+\log_2 x)\log_2 x < 0. \end{cases}$$



$$-\sqrt{2} < \log_2 x < -1 \text{ або } 0 < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2}, \text{ або } 1 < x < 2^{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $x \in \left(\dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}; \dfrac{1}{2} \right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

V. *Метод розв'язання*: рівняння — ***за означенням логарифма; коли основа логарифма — вираз із змінною***; нерівності — ***за властивістю монотонності логарифмічної функції.***

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\log_{3-x}(x-2,5) = 0$.

$$\log_{3-x}(x-2{,}5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 3-x \neq 1, \\ x-2{,}5>0, \\ x-2{,}5 = (3-x)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x \neq 2, \\ x > 2{,}5, \\ x-2{,}5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5 < x < 3, \\ x \neq 2, \\ x = 3{,}5. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\log_{3-x}(x-2{,}5) > 0$.

$$\log_{3-x}(x-2{,}5) > 0 \Leftrightarrow \log_{3-x}(x-2{,}5) > \log_{3-x} 1.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2{,}5>0,\\0<3-x<1,\\x-2{,}5<1,\\3-x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<3,\\x>2{,}5,\\x<3{,}5,\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow 2{,}5<x<3;\\ \begin{cases}3-x>1,\\x-2{,}5>1,\\x-2{,}5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2,\\x>3{,}5,\\x>2{,}5\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in(2{,}5;\,3)$.

VI. *Метод розв'язання:* графічний.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$$\log_2 x = x-1.$$

Коренями рівняння є абсциси точок перетину графіків функцій $y=\log_2 x$ і $y=x-1$ (рис. 2.93).

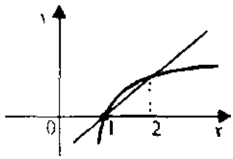


Рис. 2.93

Відповідь: $x\in\{1;\,2\}$.

Приклад 12. Розв'язати нерівність

$$\log_2 x > x-1.$$

Розв'язком нерівності є заштрихований проміжок (рис. 2.94).

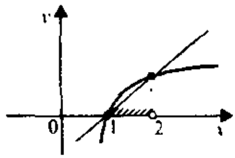


Рис. 2.94

Відповідь: $x\in(1;\,2)$.

VII. *Метод розв'язання*: логарифмування.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $x^{\lg x-1}=100$.

$$x^{\lg x-1}=100 \Leftrightarrow \lg(x^{\lg x-1})=\lg 100 \Leftrightarrow (\lg x-1)\lg x=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x-\lg x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=2,\\ \lg x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=100,\\ x=0{,}1.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in\{0{,}1;\,100\}$.

Приклад 14. Розв'язати нерівність $x^{\lg x-1}\le 100$.

$$x^{\lg x-1}\le 100 \Leftrightarrow \lg(x^{\lg x-1})\le \lg 100 \Leftrightarrow (\lg x-1)\lg x\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x-\lg x-2\le 0 \Leftrightarrow (\lg x-2)(\lg x+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le \lg x\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0{,}1\le x\le 100,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in[0{,}1;\,100].$$

Відповідь: $x\in[0{,}1;\,100]$.

2.12.3. Приклади розв'язання логарифмічних рівнянь і нерівностей конкурсного рівня

Приклад 15. Розв'язати рівняння $\log_5\log_4\log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0$.

$$\log_5\log_4\log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4\log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=5^0 \Leftrightarrow \log_3\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=3^4 \Leftrightarrow 2x-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{81} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2^{82}}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2^{81}+1}{2^{82}}.$$

Відповідь: $\left\{\frac{2^{81}+1}{2^{82}}\right\}$.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}=3y(1-\ln\ y)$.

Спосіб. Графічна інтерпретація обох частин рівняння.

Розв'язання. Будуємо графіки функцій

$$f(x)=\frac{1}{x}+2\sqrt{x} \qquad\qquad \varphi(x)=3x(1-\ln x)$$

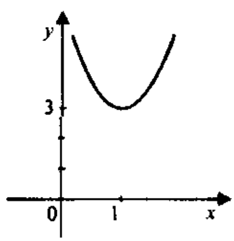
<table>
<tr><th>$f(x)=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$</th><th>$\varphi(x)=3x(1-\ln x)$</th></tr>
<tr><td>1. $D(f)=(0;+\infty)$</td><td>1. $D(\varphi)=(0;+\infty)$</td></tr>
<tr><td>2. $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=$
$=\dfrac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{x^2\sqrt{x}}$</td><td>2. $\varphi'(x)=-3\ln x$</td></tr>
<tr><td>3. $x=1$ — критична точка</td><td>3. $x=1$ — критична точка</td></tr>
<tr><td>4
<table>
<tr><th>x</th><th>$(0;1)$</th><th>1</th><th>$(1;+\infty)$</th></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>min
$f(1)=3$</td><td>↗</td></tr>
</table>


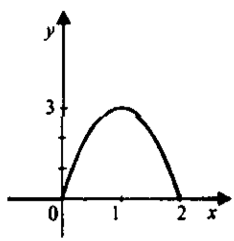
Рис. 2.95</td>
<td>4.
<table>
<tr><th>x</th><th>$(0;1)$</th><th>1</th><th>$(1;+\infty)$</th></tr>
<tr><td>$\varphi'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$\varphi(x)$</td><td>↗</td><td>max
$\varphi(1)=3$</td><td>↘</td></tr>
</table>


Рис. 2.96</td></tr>
</table>

Висновок: рівняння може мати лише єдиний розв'язок $(1;1)$.

Відповідь: $\{(1;1)\}$.

Приклад 17. Розв'язати нерівність $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}\le 12$.

$$6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}\le 12 \Leftrightarrow x^{\log_6 x}+(6^{\log_6 x})^{\log_6 x}\le 12 \Leftrightarrow 2x^{\log_6 x}\le 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_6 x} \le 6 \Leftrightarrow \log_6^2 x \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_6 x \ge -1, \\ \log_6 x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ge \dfrac{1}{6}, \\ x \le 6. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le x \le 6,$$

Відповідь: $x \in \left[\dfrac{1}{6}; 6\right]$.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\left|\log_x 3 - \log_x 2\right| = \dfrac{1}{2}$.

$$\left|\log_x 3 - \log_x 2\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ \log_x 3 - \log_x 2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \log_x 3 - \log_x 2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ \log_x \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \log_x \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{4}, \\ x = \dfrac{4}{9}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\dfrac{9}{4}; \dfrac{4}{9}\right\}$.

Приклад 19. Розв'язати нерівність $\dfrac{1}{\log_{0,5}\left|1-x\right|} \ge -1$.

1. Нерівність можна розв'язати двома способами: аналітично і графічно.

1-й спосіб (аналітичний).

Замінимо задану нерівність на рівносильну $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left|1-x\right|} + 1 \ge 0$.

Зведемо ліву частину до спільного знаменника:

$$\frac{1 + \log_{\frac{1}{2}}\left|1-x\right|}{\log_{\frac{1}{2}}\left|1-x\right|} \ge 0.$$

Остання нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1+\log_{\frac{1}{2}}|1-x|\ge 0,\\ \log_{\frac{1}{2}}|1-x|>0;\end{cases}\\ \begin{cases}1+\log_{\frac{1}{2}}|1-x|\le 0,\\ \log_{\frac{1}{2}}|1-x|<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}|1-x|>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}|1-x|\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|1-x|<1,\\ |1-x|\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3,\\ x\le -1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Задану нерівність можна розв'язати і методом інтервалів, виконавши заміну:

$$\log_{\frac{1}{2}}|1-x|=y.$$

Одержуємо нерівність $\dfrac{1+y}{y}\ge 0$, рівносильну системі

$$\begin{cases}(1+y)y\ge 0,\\ y\ne 0.\end{cases}$$

Для розв'язання першої нерівності виконаємо схематичний рисунок.

З цього випливає, що система рівносильна сукупності двох нерівностей $\left[\begin{array}{l}y\le -1,\\ y>0.\end{array}\right.$

Узявши до уваги, що $y=\log_{\frac{1}{2}}|1-x|$, маємо $\left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{2}}|1-x|\le -1,\\ \log_{\frac{1}{2}}|1-x|>0.\end{array}\right.$

Далі продовжуємо розв'язання як у попередньому випадку.

Відповідь: $x\in(-\infty;-1]\cup(0;2)\cup[3;+\infty)$.

2-й спосіб (графічний).

Побудуємо в одній системі координат графіки таких функцій:

$$y=\frac{1}{\log_{0,5}|1-x|};\quad y=-1 \text{ (рис. 2.97).}$$

Задана в умові нерівність виконується тільки для тих значень x, де графік першої функції розміщується над графіком другої функції або де графіки обох функцій перетинаються. Абсциси точок перетину зручно знайти, розв'язуючи рівняння $\log_{\frac{1}{2}}|1-x|=-1$ або скориставшись послугами комп'ютерних програм *GRAN*, *DERIVE*.

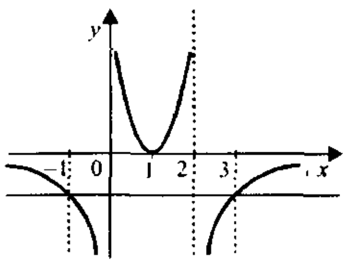


Рис. 2.97

Приклад 20. Розв'язати рівняння з параметром

$$\log_3 a-\log_x a=\log_{\frac{x}{3}} a.$$

ОДЗ: $x>0,\ x\neq 1,\ x\neq 3,$
$a>0.$

Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_3 a-\frac{\log_3 a}{\log_3 x}=\frac{\log_3 a}{\log_3 x-1}\Leftrightarrow \log_3 a\left(1-\frac{1}{\log_3 x}-\frac{1}{\log_3 x-1}\right)=0.$$

З останнього рівняння отримаємо два випадки:

1. $\log_3 a=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=3^0,\\ x\in\text{ОДЗ}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,\\ x\in\text{ОДЗ}.\end{cases}$

2. $1-\dfrac{1}{\log_3 x}-\dfrac{1}{\log_3 x-1}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3^2 x-3\log_3 x+1=0,\\ \log_3 x\neq 0,\\ \log_3 x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ \log_3 x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \end{array}\right. \\ x \neq 1, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \\ x = 3^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$ при $a = 1$; $x \in \left\{3^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; 3^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\}$ при $a > 0$ і $a \neq 1$.

Приклад 21. Розв'язати нерівність з параметром

$$\log_a x + \log_a (x-2) > 1.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x > 2;$ $\begin{cases} a>0, \\ a \neq 1; \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 2, \\ \log_a(x(x-2)) > \log_a a. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки:

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x^2 - 2x < a, \\ x > 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a > 1, \\ x^2 - 2x > a, \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2 < x < 1 + \sqrt{1+a}. \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 1, \\ x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{1+a}, \\ x > 1 + \sqrt{1+a} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a > 1, \\ x > 1 + \sqrt{1+a}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(2; 1+\sqrt{1+a}\right)$ при $0 < a < 1$; $x \in \left(1+\sqrt{1+a}; +\infty\right)$ при $a > 1$.

2.12.4. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

I. Розв'язати рівняння:

377) $\ln(x^2+3x-1)=\ln 11$;

378) $\log_4(\log_2 x) = -\frac{1}{2}$;

379) $\log_x 2+\log_2 x=\frac{5}{2}$;

380) $\lg^2(x^2)+\lg x-3=0$;

381) $\log_{x-2}(x^2-6x+10)=1$;

382) $\frac{1}{2}\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

383) $\frac{1}{5+\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}=1$;

384) $x^{\log_3 x-2}=27$;

385) $\log_5 x+\log_7 x=\log_5 35$;

386) $\log_2(x+3)=3-x$.

II. Розв'язати нерівність:

387) $\log_{0,3}(2,3-2x)<1$;

388) $\ln(3+2x-x^2+e^2)>2$;

389) $2\log_2(x-1)>\log_2(5-x)+1$;

390) $\log_{\frac{1}{x}}\frac{2x-1}{x-1}\le -1$;

391) $\frac{\log_2 x\log_8 4x}{\log_4 2x\log_{16} 8x}<5$;

392) $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\le 0$;

393) $\log_{x-3}(x^2-4x)^2\le 4$;

394) $\left|\log_5\frac{x+3}{x-4}\right|>1$;

395) $\ln^2 x-2<\ln x$.

Конкурсний рівень

I. Розв'язати рівняння:

396) $2\lg\lg x=\lg(3-\lg x)$;

397) $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$;

398) $3^{\log_3\lg\sqrt{x}}-\lg x+\lg^2 x-3=0$;

399) $(x-2)^{\lg^2(x-2)+\lg(x-2)^5-12}=10^{2\lg(x-2)}$;

400) $2(\log_x\sqrt{5})^2-3\log_x\sqrt{5}+1=0$;

401) $|1-\lg x|+|1+\lg x|=4\left(1-\frac{|x-5|}{2}\right)$;

402) $\lg|2x-3|-\lg|3x-2|=1$; 403) $\lg\sin x=\lg\cos x$;

404) $\log_x(ax)\,\log_a x=1+\log_x\sqrt{a}$; 405) $(a^{\log_b x})^2-5x^{\log_b a}+6=0$;

406) $\log_a x-\log_{a^2} x+\log_{a^4} x=\dfrac{3}{4}$; 407) $a^{\log_{a^2} 4}=x^{\log_x(x^2-x)}$.

II. Розв'язати нерівність:

408) $\dfrac{1}{\log_4\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)}<\dfrac{1}{\log_4(x+3)}$; 409) $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100$;

410) $\log_{0,5}\log_5(x^2-4)>\log_{0,5}1$; 411) $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geq 1$;

412) $\log_5 x+\log_x\dfrac{x}{3}<\dfrac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$;

413) $\log_{|x+2|}(2x^2+3x+1)\leq 0$; 414) $\log_x\left(x^2-|x^2-6|+4\right)>1$;

415) $\log_3\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\geq 0$; 416) $|\log_3 x|-\log_3 x-3<0$;

417) $\log_a(x-1)+\log_a x>2$; 418) $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_{a^2} x+2}>1$.

2.12.5. Приклади розв'язання систем логарифмічних рівнянь і нерівностей

Приклад 22. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=4,\\ \log_4 x+\log_2 y=5.\end{cases}$

1-й спосіб.

Метод: *заміни* $\begin{cases}\log_2 x=a,\\ \log_2 y=b.\end{cases}$

$$\begin{cases}\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 y=4,\\ \dfrac{1}{2}\log_2 x+\log_2 y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+\dfrac{1}{2}b=4,\\ \dfrac{1}{2}a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=4.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 16. \end{cases}$

Відповідь: $\{(4; 16)\}$.

2-й спосіб.

$$\begin{cases} x^2 y = 4^4, \\ xy^2 = 4^5. \end{cases}$$

Перемножимо ліві та праві частини рівнянь системи:

$$\begin{cases} x^3 y^3 = 4^9, \\ x^2 y = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 16. \end{cases}$$

Приклад 23. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

Задана система рівносильна до такої:

$$\begin{cases} \log_4 xy = \log_4 (4 \cdot 9), \\ x > 0, \ y > 0, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Спосіб: потенціювання до одного рівняння системи.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ xy = 36, \\ x + y = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 18; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 18, \\ y = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(2; 18), (18; 2)\}$.

Приклад 24. $\begin{cases} \log_{\sqrt{r}} (xy) = 8, \\ \log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x}{y} \right) = 0. \end{cases}$

Спосіб: використання означення **логарифма**.

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ xy = \left(\sqrt{x}\right)^8, \\ \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x}{y} = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x^4 = 0, \\ xy > 0,\ x > 0,\ x \neq 1, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y - x^3) = 0, \\ x > 0,\ y > 0,\ x \neq 1; \\ 3x = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, \\ y = 3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)\right\}$.

Приклад 25. $\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$

Спосіб: перехід до однієї основи.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(\log_2 x) - \log_3(-\log_2 y) = 1, \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\dfrac{\log_2 x}{-\log_2 y}\right) = 1, \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{-\log_2 y} = 3, \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -3\log_2 y, \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ x = \dfrac{1}{y^3}, \\ xy^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ y = \dfrac{1}{4}, \\ x = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64, \\ y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(64; \dfrac{1}{4}\right)\right\}$.

Приклад 26. $\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$

Спосіб: логарифмування.

$$\begin{cases} \lg\left(x^{\lg y}\right) = \lg 100, \\ y \neq 1, \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg y \ \lg x = 2, \\ y \neq 1, \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg y \lg y^2 = 2, \\ y \neq 1, \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lg^2 y = 2, \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 y = 1, \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg y = 1, \\ x = y^2; \end{cases} \\ \begin{cases} \lg y = -1, \\ x = y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 10, \\ x = 100; \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0{,}1, \\ x = 0{,}01. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(100;\ 10),\ (0,\ 01;\ 0,\ 1)\}$.

Приклад 27. $\begin{cases} \lg\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \dfrac{1}{\log_4 100}. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0, \\ x \neq 0, \\ x^2 + y^2 + 2xy > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \lg\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \dfrac{1}{\log_4 100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg|x + y| = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10, \\ \dfrac{y}{|x|} = 2, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2|x|, \\ \left|x + 2|x|\right| = 10, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2|x|, \\ x + 2|x| = 10, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(оскільки завжди $x + 2|x| \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x + 2x = 10, \\ y = 2x \end{cases} \text{або} \begin{cases} x < 0, \\ x - 2x = 10, \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\dfrac{1}{3}, \\ y = 6\dfrac{2}{3} \end{cases} \text{або} \begin{cases} x = -10, \\ y = 20. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{(-10;\ 20);\left(3\dfrac{1}{3};\ 6\dfrac{2}{3}\right)\right\}$.

Приклад 28. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} x^2-(\sqrt{1992}+\sqrt{1993}-\sqrt{1991}-\sqrt{1994})x+(\sqrt{1992}+\sqrt{1993})(\sqrt{1991}+\sqrt{1994})>0, \\ (\log_{111} x-112)(\log_{112} x-111)>0. \end{cases}$$

Для розв'язання першої нерівності визначимо дискримінант:

$$D=\left(\sqrt{1992}+\sqrt{1993}-\sqrt{1991}-\sqrt{1994}\right)^2-4\left(\sqrt{1992}+\sqrt{1993}\right)\left(\sqrt{1991}+\sqrt{1994}\right)=$$
$$=1992+1993+1991+1994+2\sqrt{1992\cdot1993}-2\sqrt{1992\cdot1991}-2\sqrt{1992\cdot1994}-$$
$$-2\sqrt{1993\cdot1991}-2\sqrt{1993\cdot1994}+2\sqrt{1991\cdot1994}-4(1992+1993+1991+1994)-$$

$$-4\left(\sqrt{1992\cdot1991}+\sqrt{1992\cdot1994}+\sqrt{1993\cdot1991}+\sqrt{1993\cdot1994}\right)=$$
$$=-3(1992+1993+1991+1994)+\left(2\sqrt{1992\cdot1993}-2\sqrt{1992\cdot1994}\right)+$$
$$+\left(2\sqrt{1991\cdot1994}-2\sqrt{1993\cdot1994}\right)-6\sqrt{1992\cdot1991}-4\sqrt{1992\cdot1994}-$$
$$-4\sqrt{1993\cdot1991}-4\sqrt{1993\cdot1994}<0.$$

Очевидно, що при $D<0$ перша нерівність має розв'язками множину всіх дійсних чисел, тому розв'язання системи зводиться до розв'язання другої нерівності, яка, у свою чергу, зводиться до розв'язання сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \log_{111} x-112>0, \\ \log_{112} x-111>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{111} x>112, \\ \log_{112} x>111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{111} x>\log_{111} 111^{112}, \\ \log_{112} x>\log_{112} 112^{111} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>111^{112}, \\ x>112^{111} \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} \log_{111} x-112<0, \\ \log_{112} x-111<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{111} x<112, \\ \log_{112} x<111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{111} x<\log_{111} 111^{112}, \\ \log_{112} x<\log_{112} 112^{111} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<111^{112}, \\ x<112^{111}. \end{cases}$$

Для розв'язання одержаних систем слід з'ясувати, яке з чисел більше: 111^{112} *чи* 112^{111}.

Розглянемо функцію $y=x^{\frac{1}{x}}$ при $x=111$; $x=112$.

Визначимо її похідну:

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln x,$$

$$(\ln y)' = (\frac{1}{x}\ln x)',$$

$$\frac{1}{y}y' = \left(\frac{1}{x}\right)'\ln x + \frac{1}{x}(\ln x)',$$

$$\frac{1}{y}y' = -x^{-2}\ln x + x^{-2},$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}}\ x^{-2}(1-\ln x),$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

Оскільки $y' < 0$ при $x > e$, то функція $y = x^{\frac{1}{x}}$ **спадна при** $x > e$ і $\sqrt[112]{112} < \sqrt[111]{111} \Rightarrow 112^{111} < 111^{112}$.

Повертаємось до розв'язання систем:

$$\begin{cases} x > 111^{112}, \\ x > 112^{111} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x < 111^{112}, \\ x < 112^{111}; \end{cases}$$

$$x > 111^{112}; \qquad\qquad x < 112^{111}.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;\, 112^{111}) \cup (111^{112};\, +\infty)$.

Приклад 29. Розв'язати систему рівнянь з параметром

$$\begin{cases} xy = a, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2}\lg^2 a. \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ a > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg a, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \dfrac{5}{2} \lg^2 a. \end{cases} \qquad (1)$$

Метод: *заміни.* $\begin{cases} \lg x = u, \\ \lg y = v; \end{cases}$

$$\begin{cases} u + v = \lg a, \\ u^2 + v^2 = \dfrac{5}{2} \lg^2 a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg a - v, \\ 4v^2 - 4v \lg a - 3 \lg^2 a = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$D = 16 \lg^2 a + 48 \lg^2 a = 64 \lg^2 a,$

$v = \dfrac{4 \lg a \pm 8 \lg a}{8},$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg a - v; \\ \left[\begin{array}{l} v = \dfrac{3}{2} \lg a, \\ v = -\dfrac{1}{2} \lg a. \end{array} \right. \end{cases} \quad \textit{Тому (1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = -\dfrac{1}{2} \lg a, \\ \lg y = \dfrac{3}{2} \lg a; \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x = \dfrac{3}{2} \lg a, \\ \lg y = -\dfrac{1}{2} \lg a \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{a}}{a}, \\ y = a\sqrt{a}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = a\sqrt{a}, \\ y = \dfrac{\sqrt{a}}{a}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\left\{ \left(\dfrac{\sqrt{a}}{a}; a\sqrt{a} \right), \left(a\sqrt{a}; \dfrac{\sqrt{a}}{a} \right) \right\}$ при $a > 0$; $x \in \varnothing$, $y \in \varnothing$ при $a \le 0$.

Приклад 30. Розв'язати систему рівнянь з параметрами a, b, c:

$$\begin{cases} \lg a \lg x + \lg b \lg y = 0, \\ xy = c. \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \left. \begin{array}{l} x > 0, \\ y > 0, \end{array} \right\} \Rightarrow c > 0. \\ a > 0, \\ b > 0; \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} \lg a \lg x + \lg b \lg y = 0, \\ \lg x + \lg y = \lg c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg a \lg x + \lg b \lg y = 0, \\ \lg x + \lg y = \lg c. \end{cases}$

Метод: *заміни.*

$$\begin{cases} \lg x = u, \\ \lg y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \lg a + v \lg b = 0, \\ u + v = \lg c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg c - v, \\ (\lg c - v) \lg a + v \lg b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg c - v, \\ \lg c \lg a - v(\lg a - \lg b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg c - v, \\ v(\lg a - \lg b) = \lg c \lg a. \end{cases}$$

Отримаємо три випадки:

$$1) \begin{cases} u = \lg c - v, \\ \lg a - \lg b \neq 0, \\ v = \dfrac{\lg c \lg a}{\lg a - \lg b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b, \\ v = \dfrac{\lg c \lg a}{\lg a - \lg b}, \\ u = \lg c - \dfrac{\lg c \lg a}{\lg a - \lg b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b, \\ v = \dfrac{\lg c \lg a}{\lg a - \lg b}, \\ u = \dfrac{\lg b \lg c}{\lg b - \lg a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \dfrac{\lg b \lg c}{\lg b - \lg a} \\ \lg y = \dfrac{\lg a \lg c}{\lg a - \lg b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{\lg c^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}}}, \\ y = 10^{\lg c^{\frac{\lg a}{\lg a - \lg b}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = c^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}}, \\ y = c^{\frac{\lg a}{\lg a - \lg b}}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u = \lg c - v, \\ \lg a - \lg b = 0, \\ \lg c \lg a = 0, \\ 0 \cdot v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg c - v, \\ a = b, \\ c = 1 \quad \text{або} \quad a = 1, \\ v \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ c = 1 \quad \text{або} \quad a = 1, \\ x > 0,\ y = \dfrac{c}{x}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} u = \lg c - v, \\ \lg a - \lg b = 0, \\ \lg c \lg a \neq 0, \\ 0 \cdot v = \lg c \lg a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lg c - v, \\ a = b, \\ a \neq 1, \\ c \neq 1, \\ v \in \varnothing. \end{cases}$$

Відповідь: при $a \neq b,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

$\left\{\left(c^{\frac{\lg b}{\lg b - \lg a}};\ c^{\frac{\lg a}{\lg a - \lg b}} \right)\right\}$ при $a = 1, b = 1, c = 1$ $\left\{\left(x; \dfrac{c}{x} \right), x > 0\right\}$; в інших випадках система не має розв'язку.

2.12.6. Вправи для самостійного розв'язання

Шкільний рівень

Розв'язати системи рівнянь:

419) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \dfrac{5}{4}, \\ \lg_x 10 + \lg_y 10 = 5; \end{cases}$

420) $\begin{cases} \lg_4 x + \lg_4 y = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

421) $\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8, \\ \lg_9(x^2 - y^2) - \lg_9(x+y) = 0{,}5; \end{cases}$

422) $\begin{cases} xy = 10, \\ (\lg x)(\lg y) = -2; \end{cases}$

423) $\begin{cases} \lg x + 2\lg y + 3 = 0, \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 7; \end{cases}$

424) $\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12), \\ \lg_x(x+2) > 2; \end{cases}$

425) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y) = 2, \\ \log_5(x-y) = 2; \end{cases}$

426) $\begin{cases} \dfrac{1}{\lg y - 1} + \dfrac{1}{\lg y + 1} = 2^{-x}, \\ \lg^2 y - 2^x = 5; \end{cases}$

427) $\begin{cases} \log_x y - 4\log_y x = 3, \\ y^2 - 2x^3 = 0; \end{cases}$

429) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 12; \end{cases}$

428) $\begin{cases} \log_{x+y}(x-y) = 1, \\ \log_{x-y}(x+y) = 0; \end{cases}$

430) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \lg_4 x - \lg_4 y = 1. \end{cases}$

Конкурсний рівень

Розв'язати системи рівнянь:

431) $\begin{cases} xy = 27, \\ 2\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$

432) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ \log_4(x+y) = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$

433) $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_{\frac{1}{5}} y^3 = -1, \\ \log_4 x^4 - \log_{\frac{1}{5}} y = 5; \end{cases}$

434) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = a + a^2; \end{cases}$

435) $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2(y-1) = 1, \\ \log_8 x^4 \log_{\sqrt{2}}(y-1) = -\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ 436) $\begin{cases} \log_{a^2} x + \log_y a = 1, \\ a^{\log_{\sqrt{a}} y} = 4; \end{cases}$

437) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20; \end{cases}$

438) $\begin{cases} \log_{\sqrt{10}}(x^2 + y^2) = 2\lg(2a) + 2\log_{100}(x^2 + y^2), \\ xy = a; \end{cases}$

439) $\begin{cases} \log_{|xy|}(x^2 - y^2) = 1, \\ \log_{|xy|}(x - y) = 0; \end{cases}$ 440) $\begin{cases} \log_x \log_3 \log_x y = 0, \\ \log_y 27 = 1; \end{cases}$

441) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 256, \\ \lg\sqrt{xy} - \lg 1{,}5 = 1; \end{cases}$ 442) $\begin{cases} \log_y \left|\log_y x\right| = \log_x \left|\log_x y\right|, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 8; \end{cases}$

443) $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \dfrac{3}{2}, \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 1; \end{cases}$ 444) $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2} = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \lg 2; \end{cases}$

445) знайти розв'язки системи

$$\begin{cases} \log_2 x \log_y 2 + 1 = 0, \\ \sin x \cos y = 1 - \cos x \sin y \end{cases}$$

за умови, що $x + y < 8$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 *Алгебра* и математический анализ для 9 и 10 классов Учеб пособие для учеников школ и классов с углубленным изучением курса математики / Н Я Виленкин и др — М Просвещение, 1993 — 352 с

2 *Бевз Г П* Алгебра Пробний підруч для 7–9 класів середніх шкіл — К Освіта, 1998 — 324 с

3 *Бурда М І Дубинчук О С Мальований Ю І* Математика 10–11 Пробний навч посіб для шкіл, ліцеїв та гімназій гуманітарного профілю — К Освіта, 1997 — 224 с

4 *Гайштут О Г Литвиненко Г М* Розв'язування алгебраїчних задач — К Рад шк 1991 — 224 с

5 *Грохольська А В* Методичні рекомендації до здійснення модульного підходу у вивченні шкільного курсу математики та методики його викладання — К , 1995 — 162 с

6 *Жалдак М І* Вступні екзамени з математики Довідник для абітурієнтів, вчителів учнів старших класів — К , 1999 — 72 с

7 *Кисельов А П* Алгебра Підруч для середньої шк — 2-ге вид — К Рад шк 1966 — 264 с — Ч II

8 *Коваленко В Г Кривошеев В Я Лемберский Л Я* Алгебра Эксперимент учеб пособие для 8 кл школ с углубленным изучением математики и специализир школ физ -мат профиля — К Рад шк , 1990 — 288 с

9 *Математика* завдання та тести Посіб -довідник для вступників до вищих навчальних закладів / В А Вишенськии, В О Золотарьов та ін — К Генеза 1993 — 285 с

10 *Математика* Метод посіб для вступників / М І Жалдак, Т О Михалін, В О Швець та ін — К , 1993 — 236 с

11 *Нестеренко Ю В Олехник С Н Потапов М К* Задачи для вступительных экзаменов по математике Учеб пособие — 3-е изд , доп — М . Наука 1986 — 512 с

12 *Пастушенко С М Пастушенко В М* Математика Означення, теореми формули Довідник для учнів середніх навч закладів — К 1997 — 352 с

13 *Рывкин А А., Рывкин А З, Хренов Л С* Справочник по математике: Справоч пособие для учащихся средних спец заведений и поступающих в вузы. — 5-е изд., стереотип. — М Высш шк, 1987 — 480 с
14. *Сборник* задач по математике для поступающих в вузы / В К Егоров и др.; Под ред М И Сканова — Минск. Вышэйш шк, 1990 — 528 с
15 *Сборник* конкурсных задач по математике / В М Говоров, П Т Дыбов, Н. В Мирошин, С Ф. Смирнова — М · Наука, 1983 — 384 с
16. *Шкіль М І, Колесник Т В., Хмара Т М* Алгебра і початки аналізу· для учнів 10 кл. з поглибленим вивченням математики. — К. Освіта, 1994 — 300 с.
17. *Шкіль М І, Слепкань З. І, Дубинчук О. С* Алгебра і початки аналізу: Пробний підруч. для 10–11 кл. середньої школи — К. Зодіак, ЕКО, 1995. — 608 с.

ЗМІСТ

Educational manual contains theoretical material of the mathematics school course in the form of supporting summary, algorithmic description of basic methods of task solution with examples of their application The form of stating the material is easy for use, systematization and summarizing knowledge in mathematics

It is meant for higher educational establishments entrants, teachers of mathematics, students of lyceums, gymnasiums and mathematics specialties of pedagogical higher educational establishments

Навчальне видання

Жалдак Мирослав Іванович
Грохольська Алла Василівна
Жильцов Олексій Борисович

МАТЕМАТИКА
(АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ)
З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Навчальний посібник

Educational edition

Zhaldak, Myroslav I
Groholska, Alla V
Zhyltsov, Olexsi B

MATHEMATICS
(ALGEBRA AND THE ELEMENTS OF ANALYSIS)
WITH COMPUTER SUPPORT

Educational manual

Відповідальний редактор *С Г Рогузько*
Редактор *І В Хронюк*
Коректори *О І Масвська, Т К Валицька*
Комп'ютерне верстання *А В Цебренко*
Оформлення обкладинки *О О Стеценко*

Підп до друку 04 07 03 Формат $60\times84/_{16}$ Папір офсетний Друк офсетний
Ум друк арк 17,67 Обл вид арк 16,8 Тираж 8000 пр Зам № 3-0661

Міжрегіональна Академія управління персоналом (МАУП)
03039 Київ 39, вул Фрометівська, 2, МАУП

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 8 від 23 02 2000

ДП "Експрес Поліграф'
04080 Київ-80, вул Фрунзе, 47/2

Свідоцтво ДК № 247 від 16 11 2000