КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛІННЯ ФІНАНСАМИ ТА БІЗНЕСУ

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні кафедри економічної кібернетики
протокол № 1 від “30” серпня 2017 р.

В.о. зав. кафедри ____________ Шевчук І.Б.
(підпис)

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Економіко-математичне моделювання

(назва навчальної дисципліни)

галузь знань: 07 «Управління та адміністрування», 05«Соціальні та поведінкові науки»

(шифр і назва галузі знань)

спеціальність:071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 074 «Публічне управління та адміністрування», 051 «Економіка»

(шифр і назва спеціальності)

спеціалізація: Бухгалтерський облік, аналіз та аудит; Фінанси, митна та податкова справа; Публічне управління та адміністрування; Інформаційні технології в бізнесі

освітній ступінь: бакалавр

(бакалавр/магістр)

форма навчання: ____________денна________________

Укладач:

Стадник Ю.А., доцент, к.е.н., доцент
(ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

ЛЬВІВ 2017

Конспект лекції №1

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Макроекономіка», «Мікроекономіка», «Інформатика», «Математика для економістів».

Мета лекції полягає у формуванні в студентів теоретичних знань з питань сутності економіко-математичного моделювання та його методологічних засад, поняття та процесу побудови економіко-математичних моделей.

План лекції

1. Предмет, об'єкт, завдання та методологічні засади математичного моделювання економіки.
2. Поняття економіко-математичної моделі.
3. Класифікація моделей та етапи їх побудови.

Опорні поняття: економіко-математичне моделювання, математична модель, економіко-математичні методи, етапи моделювання.

Інформаційні джерела:

Основна та допоміжна література:

1. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.

2. Колодницький М. М. Основи теорії математичного моделювання систем. –Житомир, 2001. – 718с.

3. Вітлінський В.В., Наконений СІ., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод, посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ,2001. – 248 с.

4. Клебанова Т. С. Математичні методи і моделі ринкової економіки: навч. посібн. / Т. С. Клебанова, М. О. Кизим, О. І. Черняктаін. –Х. : ВД "ІНЖЕК", 2009.–456 с.

5.Чемерис А., Юринець Р., Мищишин О. Методи оптимізації в економіці. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152с.

Інтернет сайти:

1. http://stud.com.ua/9254/ekonomika/ekonomiko-matematichni_metodi_i _ prikladni _modeli - Прикладні економіко-математичні моделі

2. http://www.uabs.edu.ua/images/stories/docs/K_F/Yepifanov_16.pdf – Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці. Монографія.

3. ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/9599 - Моделювання світо господарських процесів: Підручник.

4. Теоретичні основи кількісних методів моделювання та прогнозування економічних процесів // http://bookss.co.ua/book_medoti-ekonomyko-statestichnih-

doslidzhen_806/3_1.-teoretichn-osnovi-klksnih-metodv-modelyuvannya-ta-prognozuvannya-ekonomchnih-procesv.

Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо: ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

1. **Предмет, об'єкт, завдання та методологічні засади математичного моделювання економіки.**

В широкому розумінні моделювання – це метод пізнання (дослідження), що включає в себе побудову моделі, її подальший аналіз та інтерпретацію отриманих результатів. В вузькому розумінні – це лише метод складання моделі, а іноді навіть – лише її аналізу. Економіко-математичне моделювання є особливим шляхом дослідження об'єкта, при якому виконується опис об'єкта мовою математики і проводиться дослідження саме цього опису – економіко-математичної моделі – методами математики, тобто шляхом застосування певних математичних перетворень до математичної моделі реального об'єкта.

Об'єктом економіко-математичного моделювання є економічні системи.

Такий підхід до дослідження економічних об'єктів є досить універсальним в силу абстрактності мови математики. Універсальність дослідження реальних економічних систем за допомогою математичних моделей пов'язана, в першу чергу, з обмеженістю кількості видів базових математичних структур, що виникають при цьому як математичні моделі. Ця можливість багаторазового застосування одного й того ж самого математичного поняття до аналізу найрізноманітніших економічних задач робить надзвичайно цінним його абстрактне трактування.

Іноді про це говорять іншими словами: існують пряма та обернена задачі моделювання, тобто аналіз моделі та її синтез. Задача аналізу моделі зводиться до тієї чи іншої моделі, що характеризує даний клас математичних структур. Задача синтезу полягає в тому, що необхідно за відомими результатами аналізу або вимірювань побудувати модель, тобто визначити параметри моделі та її структуру.

Можливість застосування методу моделювання є надзвичайно важливою при дослідженні складних економічних об'єктів, оскільки безпосереднє дослідження реальних об'єктів часто неможливе, або вимагає багато часу та зусиль. Тут моделювання може дати результати, які неможливо отримати іншими засобами дослідження.

2. **Поняття економіко-математичної моделі.**

Економіко-математична модель - це виражена у формально-математичних термінах економічна абстракція, логічна структура якої визначається як об'єктивними властивостями предметами опису, так і суб'єктивним цільовим чинником дослідження, для якого цей опис робиться.

Між моделлю та її прототипом не може існувати взаємооднозначної відповідності, тому що модель - це абстракція, пов'язана з узагальненнями й втратами. Адекватність реальної дійсності - основна вимога, що ставиться до моделі.

Конструктивно кожна математична модель представляє собою сукупність взаємопов'язаних математичних залежностей, що відображають певні групи реальних економічних залежностей.

Моделювання включає побудову концептуальної основи економічної задачі і подання її в математичному вигляді. Практично всі математичні моделі включають три типи компонент – змінних: результуючі чи залежні змінні, незалежні змінні, неконтрольовані змінні (похибки). У випадку, коли модельована система чи об'єкт є керованими, в структуру моделі входять також керуючі змінні. Незалежні змінні описують ті елементи задачі, для яких може бути зроблено вибір (наприклад, обсяги розподілу коштів), вони контролюються особою, що приймає рішення і математично є невідомими величинами. Задача моделювання полягає у визначенні найкращих їх значень. Залежні змінні відображають ефективність роботи економічної системи, наскільки добре система задовольняє свої цілі (наприклад, загальний доход). Неконтрольовані змінні описують фактори, які впливають на результат діяльності системи, але не керуються в рамках цієї системи. Вони також є незалежними. Змінні моделі пов'язуються між собою математичними рівняннями та нерівностями. Розв'язування моделі полягає у визначенні множини значень незалежних змінних, які б забезпечили бажаний рівень ефективності системи.

Оскільки економічні системи є складними системами, часто постає проблема складності їх формалізації. Проблема складності моделювання економічних систем має два аспекти:

- коли складність пов'язана з великим розміром системи;
- коли система має невелику кількість компонентів, але описується складним законом функціонування.

У першому випадку початкова система чи її компоненти заміняються іншою, більш простою для аналізу системою. У другому випадку система розглядається як ієрархічна структура, яка може розділятися на частини, кожна з яких може надалі розглядатися певною мірою незалежно одна від одної. У випадку складної ієрархії системи формалізація повинна проводитись на кожному рівні деталізації такої системи.

3. Класифікація моделей та етапи їх побудови.

При дослідженні економічних систем застосовуються різні типи економіко-математичних моделей. Теоретико-аналітичні моделі використовуються при вивченні загальних властивостей та закономірностей економічних процесів, а прикладні при розв'язуванні конкретних економічних задач аналізу, прогнозування та управління.

Макроекономічні моделі відображають функціонування економіки як єдиного цілого, пов'язуючи між собою укрупнені матеріальні та фінансові показники, такі як ВВП, споживання, інвестування, зайнятість, інфляцію, ціноутворення та інші глобальні явища. Мікроекономічні моделі пов'язані, як правило, з такими ланками економіки, як підприємства, організації, установи. Вони описують взаємодію структурних і функціональних підрозділів економіки, їх автономну поведінку в перехідному, нестійкому чи стабільному ринковому середовищі, стратегію їх поведінки в умовах олігополії тощо.

По відношенню до фактора часу можна виділити статичні економіко-математичні моделі, в яких економічна система описується відносно певного фіксованого моменту часу; динамічні, що описують систему в розвитку; дискретні, в яких час ділиться на інтервали; неперервні, коли час рахується неперервним.

Економіко-математичні моделі в яких економічний процес чи об'єкт рахується керованим, вважаються класичними моделями, наприклад, задачі оптимального управління. До моделей які невраховують можливість управління об'єктом чи системою можна віднести балансові моделі.

По врахуванню фактора невизначеності вирізняють моделі детерміновані, коли результат на виході однозначно визначається керуючим впливом, та стохастичні, або ймовірнісні, коли при заданні на вході моделі певної сукупності значень на її виході можуть отримуватись різні результати, залежно від дії випадкового фактора.

При описуючому підході до дослідження економічних систем будуються дискриптивні моделі, призначені для опису та пояснення явищ і процесів, що практично спостерігаються, та для прогнозу цих явищ. Прикладом таких моделей можуть бути балансові та трендові моделі. При нормативному підході, коли цікавляться не тим, як будується та розвивається економічна система, а як вона повинна будуватись та діяти відповідно до визначених критеріїв, використовують нормативні моделі, наприклад, оптимізаційні моделі, нормативні моделі рівня життя.

Також наводиться поділ моделей по конкретному призначенню, тобто по цілі створення та застосування; виділяються балансові моделі, що розглядають необхідність відповідності наявних ресурсів та їх використання; трендові моделі, в яких розвиток модельованої економічної системи відображається через тренд, або тривалу тенденцію її основних показників; оптимізаційні моделі, призначені для вибору найкращого варіанту виробництва, розподілу чи споживання; імітаційні моделі, призначені для використання в процесі машинної імітації досліджуваних економічних систем чи процесів та інші типи моделей.

Опис процесів, що протікають в економічних системах, їх аналіз та прогнозування здійснюється за допомогою їх якісних та кількісних характеристик. Для успішного управління економічними системами потрібне розуміння явищ, що породжують наявні характеристики, наскільки ці характеристики відображають досліджувані економічні процеси. Серед методів вивчення кількісних закономірностей, що характеризують аналізовані економічні явища, особливе місце посідає сукупність методів обробки статистичних даних, що базується на застосуванні концепцій і процедур математичної статистики. Методи статистики в економіці є засобом для визначення характеристики динаміки економічних процесів, виявлення закономірностей минулого розвитку та оцінки можливості їх перенесення на майбутнє. Застосування методів математичної статистики важливе значення має також для виявлення параметрів економіко-математичних моделей, загальна структура яких вже вияснена на попередніх стадіях дослідження. Для успішного застосування математико-статистичних методів необхідно:

- мати достатній для виявлення статистичних закономірностей обсяг даних;
- забезпечити методологічну співставність даних;
- на основі змістовного аналізу досліджуваного показника обгрунтувати можливість переносу закономірностей минулого на вибраний період прогнозування;
- отримати адекватну математичну модель і на її основі побудувати прогнози.

Основною формою подання статистичної інформації є динамічні ряди послідовно розміщених в хронологічному порядку значень того чи іншого показника, який в своїх змінах відображає хід розвитку досліджуваного явища в економіці. Метою статистичного аналізу динамічних рядів є вивчення співвідношень між закономірністю та випадковістю формування значень рівнів ряду та оцінка кількісної міри їх впливу. Формування рівнів ряду визначається закономірностями трьох основних типів: інерцією тенденції, інерцією взаємозв’язку між послідовними рівнями ряду й інерцією взаємозв’язку між досліджуваним показником і показниками факторами, що впливають на нього. Відповідно вирішують завдання аналізу та моделювання тенденцій, взаємозв’язку між послідовними рівнями ряду та причинних взаємозв’язків між досліджуваним показником і показниками факторами. Перше завдання можна вирішувати за допомогою компонентного аналізу, друге – адаптивних методів, третє – економетричного моделювання, що базується на методах кореляційно-регресійного аналізу.

При формуванні цілі економіко-статистичного моделювання здійснюється змістовний аналіз досліджуваного процесу, вирішується питання про вибір показника, що його найповніше характеризує; визначаються показники, що впливають на процес його розвитку; визначається найраціональніший період прогнозу індивідуально для кожного показника з врахуванням його стабільності та статистичних коливань даних (переважно він не перевищує 1/3 обсягу даних).

Вихідний набір моделей для дослідження формується на основі інтуїтивних прийомів, наприклад, аналізу графіку динамічного ряду, формалізованих статистичних процедур, таких як, дослідження приростів рівнів. При цьому перевага надається простішим, змістовно інтерпретованим моделям, що вирішуються програмним шляхом, але обчислення проводиться для всіх доступних моделей і методів.

При застосуванні екстраполяційних методів прогнозування будують моделі кривих зростання та адаптивні моделі, що використовують тільки фактор часу, який є умовним представником всієї сукупності причинних факторів, що впливають на досліджуваний показник. Криві зростання базуються на рівноцінності всіх даних і відображають загальну тенденцію певного економічного процесу. Оцінку параметрів моделей кривих зростання, основною метою якої є максимальне наближення моделі до вихідних даних, проводять методом найменших квадратів.

При короткостроковому прогнозуванні часто важливішою є динаміка розвитку досліджуваного показника в кінці терміну спостереження, а не тенденції його розвитку, що склалась на всьому періоді передісторії. Властивість динамічності розвитку фінансово-економічних процесів часто переважає над властивістю інерційності. Тому більш ефективними можуть бути адаптивні методи, що враховують інформаційну нерівнозначність даних. Адаптивні моделі та методи мають механізм автоматичного налаштування на зміну досліджуваного показника. Інструментом прогнозу є модель, початкова оцінка якої проводиться по кількох перших спостереженнях. На її основі робиться прогноз, який порівнюється з фактичними спостереженнями. Потім модель коректується відповідно до величини всіх моментів спостережень. Так, модель просто «втягує» нову інформацію, пристосовується до неї та до закінчення періоду спостереження, відображає тенденцію, що склалась на цей момент. Прогноз характеризується як екстраполяція останньої тенденції.

Виявити кількісні зв’язки між досліджуваними фінансово-економічними показниками та факторами, що впливають на них дозволяють економетричні моделі. Економетрія, на думку відомого українського економіста Павла Чомпи, батька економетрії, допомагає проникнути у внутрішній зміст економічних процесів і дій, що складаються з двох елементів: акції та реакції.

В економічній системі при вивченні взаємодії та взаємозв’язку економічних об’єктів виявляються, в першу чергу за допомогою логічного аналізу, впливаючі ознаки та ознаки, що піддаються впливу, проводиться їх ретельний аналіз.

Залежності між економічними величинами можуть бути функціональними, якщо значення впливаючої ознаки визначає єдине значення результуючої ознаки. При стохастичній залежності ознака, що піддається впливу може приймати різні значення з певними ймовірностями. При вивченні зв’язку між явищами стохастична залежність частково вказує на відповідний причинний зв’язок, при наявності стохастичної залежності між явищами може і не бути причинного зв’язку, оскільки обидва явища можуть окремо залежати від загальних факторів. Окремим випадком стохастичної форми зв’язку між економічними величинами є кореляційний зв’язок, коли математичне сподівання певної величини залежить від значень впливаючої ознаки.

Процес побудови та використання економетричних моделей є достатньо складним і включає кілька основних етапів:

1) Якісний аналіз: постановка цілі аналізу, визначення результуючих та факторних ознак, вибір періоду за який проводиться аналіз, вибір методу аналізу.

2) Попередній аналіз модельованої сукупності даних, перевірка однорідності сукупності, виключення аномальних спостережень, уточнення необхідного обсягу ознак, визначення законів розподілу ознак.

3) Побудова економетричної моделі: встановлення набору факторів, розрахунок оцінок параметрів економетричної моделі, перебір конкуруючих варіантів моделі.
4) Оцінка адекватності моделі досліджуваному економічному процесу.
5) Економічна інтерпретація та практичне використання моделі.

При практичній реалізації етапів економетричного моделювання важливе значення має побудова системи показників досліджуваного економетричного процесу і визначення переліку факторів, які впливають на кожен показник. Фактори, що включаються в економетричну модель, повинні відповідати таким вимогам: мати кількісне вираження, між фактором та результуючим показником повинен бути причинний та статистичний зв'язок.

Процес опису економічних систем і процесів у вигляді економіко-математичних моделей має свої особливості пов'язані з об'єктом моделювання та з застосовуваним апаратом та засобами моделювання. В процесі економіко-математичного моделювання можна виділити такі етапи: постановка економічної проблеми, її якісний аналіз; побудова математичної моделі; математичний аналіз моделі; підготовка вихідної інформації; числове розв'язування; аналіз числових результатів та їх застосування.

На етапі постановки економічної проблеми формулюється суть проблеми, визначаються певні припущення та передумови. Виявляються найважливіші риси та властивості модельованого об'єкта, вивчається його структура та взаємозв'язки його елементів, формулюються попередні гіпотези, що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

Етап побудови математичної моделі можна назвати етапом формалізації економічної проблеми, її відображення в конкретних математичних залежностях. В процесі побудови моделі можна також виділити кілька стадій. Спочатку визначається тип економіко-математичної моделі, визначаються можливості її застосування до даного завдання, уточнюється конкретний перелік змінних і параметрів та форма зв'язків. Для деяких складних об'єктів будується кілька різноаспектних моделей, кожна модель характеризує тільки окремі сторони об'єкта, а інші сторони враховуються агреговано та наближено. Простішою є ситуація коли можна побудувати модель, що належить до добре вивченого класу математичних задач, при цьому потрібно зробити певне спрощення вихідних передумов моделі, що не спотворюють основних рис об'єкта. Але можлива і така ситуація, коли формалізація проблеми приводить до невідомої раніше математичної структури.

В процесі математичного аналізу моделі чисто математичними засобами дослідження виявляються загальні властивості моделі та її розв'язків. Найбільш важливим моментом при цьому є доведення існування розв'язку сформульованої задачі. При аналітичному дослідженні виявляється чи природнім є розв'язок задачі, які змінні входять в розв'язок, в яких межах вони змінюються, які тенденції їх зміни і т. д. Моделі складних економічних об'єктів важко досліджувати аналітично, в таких випадках переходять до числових методів дослідження.

Підготовка вихідної інформації в економічних задачах, як правило, є найтрудомісткішим етапом моделювання, оскільки часто недостатньо просто зібрати дані. Математичне моделювання ставить жорсткі вимоги до системи інформації, при цьому береться до уваги не тільки принципова можливість підготовки інформації необхідної якості, але і затрати на підготовку інформаційних масивів. В процесі підготовки інформації використовуються методи теорії ймовірностей, теоретичної та математичної статистики для організації вибіркових обстежень, оцінки достовірності даних. При системному економіко-математичному моделюванні результати функціонування одних моделей служать вихідною інформацією для інших.

Етап числового розв'язування задачі передбачає розробку алгоритмів числового розв'язування задачі, підготовку відповідного програмного забезпечення і безпосереднє здійснення розрахунків. При цьому значна складність може бути спричинена великою розмірністю економічних задач. Переважно розрахунки на основі економіко-математичних моделей мають багатоваріантний характер. Потрібно проводити багаторазові модельні експерименти, здійснювати вивчення поведінки моделі при різних умовах. Числовий розв'язок суттєво доповнює результат аналітичного дослідження, а для багатьох моделей є єдиним можливим способом.

При здійсненні аналізу числових результатів вирішується важливе питання про правильність та повноту результатів моделювання і можливості їх застосування в практичній діяльності, та з метою вдосконалення моделі. Тому повинна бути здійснена перевірка моделі по тих властивостях, які обрані як суттєві. Застосування числових результатів моделювання в економіці спрямоване на вирішення практичних задач. Практичним завданням економіко-математичного моделювання є:

- аналіз економічних об'єктів та процесів;
- економічне прогнозування, передбачення розвитку економічних процесів;
- вироблення управлінських рішень на всіх рівнях господарської ієрархії;
- оцінка ефективності прийнятих управлінських рішень.

Не у всіх випадках дані, отримані в результаті економіко-математичного моделювання можуть використовуватися безпосередньо як готові управлінські рішення. Вони можуть бути розглянуті як «консультаційні» засоби, а прийняття управлінських рішень залишається за людиною.

Етапи економіко-математичного моделювання перебувають у тісному взаємозв'язку та можуть бути присутні зворотні зв'язки етапів. Наприклад, на етапі побудови моделі може з'ясуватись, що постановка задачі суперечлива, чи призводить до надто складної математичної моделі, в цьому випадку вихідна постановка повинна бути відкоректована. Особливо часто необхідність повернення до попередніх етапів моделювання виникає на етапі підготовки вихідної інформації. Якщо необхідна інформація відсутня, чи затрати на її підготовку занадто великі, потрібно повертатись до етапів постановки задачі та її формалізації, щоб пристосуватись до доступної для дослідження інформації.

Оскільки процес моделювання має циклічний характер, недоліки, які не вдається виправити на тих чи інших етапах моделювання, усуваються в наступних циклах. Однак результати кожного циклу мають і самостійне значення. Почавши дослідження з побудови простої моделі, можна отримати корисні результати, а потім перейти до створення більш складної та більш досконалої моделі, що включатиме нові умови та більш точні математичні залежності.

Загальний висновок за темою лекції:

Економіко-математичне моделювання є особливим шляхом дослідження об'єкта, при якому виконується опис об'єкта мовою математики і проводиться дослідження саме цього опису – економіко-математичної моделі – методами математики, тобто шляхом застосування певних математичних перетворень до математичної моделі реального об'єкта.

В процесі економіко-математичного моделювання можна виділити такі етапи: постановка економічної проблеми, її якісний аналіз; побудова математичної моделі; математичний аналіз моделі; підготовка вихідної інформації; числове розв'язування; аналіз числових результатів та їх застосування.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте визначення економіко-математичного моделювання.
2. Дайте визначення економіко-математичної моделі?
3. Що є об'єктом економіко-математичного моделювання?
4. Як класифікують економіко-математичні моделі?
5. Які етапи побудови економіко-математичних моделей?
6. Які етапи побудови економетричних моделей?
7. Яке практичне завдання економіко-математичного моделювання?

Укладачі: ____________ Стадник Ю.А., доцент, Мищишин О.Я., доцент
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

Конспект лекції №2

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі. Задачі лінійного програмування.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Макроекономіка», «Мікроекономіка», «Інформатика», «Математика для економістів».

Мета лекції полягає у формуванні в студентів теоретичних знань та практичних навичок з питань економічної постановки оптимізаційних задач та побудови математичних моделей задач лінійного програмування.

План лекції

1. Задачі економічного вибору. Сутність звичайної (однокритеріальної) оптимізації.
2. Економічна та математична постановка оптимізаційних задач.
3. Види оптимізаційних моделей.
4. Приклади економічних задач, які доцільно розв'язувати, використовуючи методи та моделі математичного програмування.

Опорні поняття: математичні методи, однокритеріальна оптимізація, оптимізаційна задача, задача лінійного програмування.

Інформаційні джерела:

Основна та допоміжна література:

1. Чемерис А., Юринець Р., Мищишин О. Методи оптимізації в економіці. Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152с.

2. Сингаевская Г. И. Функции в Excel. Решение практических задач. М.: Издательский дом «Вильямс», 2009. – 880 с.

3. Вітлінський В.В., Наконений СІ., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод, посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ,2001. – 248 с.

4. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці / Харківський національний аграрний університетім. В. В. Донугаєва. – Харків: Гриф, 2002. – 580с.

5. Колодницький М. М. Основи теорії математичного моделювання систем. –Житомир, 2001. – 718с.

6. Вітлінський В. В. Моделювання економіки. Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.

Інтернет сайти:

1. http://stud.com.ua/9254/ekonomika/ekonomiko-matematichni_metodi_i _ prikladni _modeli - Прикладні економіко-математичні моделі

2. http://www.uabs.edu.ua/images/stories/docs/K_F/Yepifanov_16.pdf – Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці. Монографія.

3. ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/9599 - Моделювання світо господарських процесів: Підручник.

4.Теоретичні основи кількісних методів моделювання та прогнозування економічних процесів // http://booksss.co.ua/book_medoti-ekonomyko-statestichnih-doslidzhen_806/3_1.-teoretichn-osnovi-klksnih-metodv-modelyuvannya-ta-prognozuvannya-ekonomchnih-procesv.

5. Державний комітет статистики України – www. ukrstat. gov.ua

Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо: ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

1. Задачі економічного вибору. Сутність звичайної (однокритеріальної) оптимізації.

Задачі однокритеріальної оптимізації називають ще задачами математичного програмування. При їх розв'язку оперують з детермінованими математичними моделями. що відображають поведінку об'єкту з позицій повної визначеності в сьогоденні і майбутньому.

Ці моделі в дослідженні операцій займають одне з головних місць. Це обумовлено тим, що в них відображені різноманітні проблеми розподілу обмежених ресурсів в економіці, військовій справі, створенні нової техніки і т.д. Шляхи вирішення цих проблем так чи інакше пов'язані з плануванням цілеспрямованої діяльності, тобто з розробкою певних установок на майбутнє.

Термін «програмування» (від англійського «programming» - складання плану або програми дій) тут слід розуміти в сенсі «пошук найкращих планів» (на відміну від того тлумачення, яке прийняте фахівцями з програмного забезпечення).

Задача математичного програмування формулюється таким чином: знайти значення змінних, при якому цільова функція F(x) буде приймати максимальне (мінімальне) значення за умов:

$$g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le (\ge, =) b_j, \; j = 1...m \qquad (1)$$

2. Економічна та математична постановка оптимізаційних задач.

Процес оптимізації пов'язаний із визначенням значень економічних показників, за яких досягається оптимум, тобто найкращий стан системи. Найчастіше оптимуму відповідає досягнення найкращого результату при даних витратах ресурсів або досягнення заданого результату при мінімальних ресурсних витратах. Такі економічні показники виступають у ролі змінних задачі, а стан системи та ресурсні обмеження задаються параметрами задачі.

Пошук реальних оптимальних норм чи показників ефективності господарської діяльності є, як правило, складною задачею і відноситься до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції при визначених обмеженнях. Розв'язування екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, отримання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку та функціонування F. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично $F = f(x_1, x_2, ..., x_n; c_1, c_2, ..., c_l)$.

В загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція F набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення:

$$max\ (min)\ F = f\,(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами економічної системи і т. ін.

Обсяг діяльності обмежений наявністю торговельних площ, продавців, купівельною спроможністю населення, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду

$$g\,(x_1, x_2, ..., x_n)\ \{\le, =, \ge\}\mathrm{b} \qquad (3)$$
$$x_{1,\dots,n} \ge 0.$$

Задача лінійного програмування у загальному випадку буде мати вигляд:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ ,\ i = 1,..., s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ,\ i = s+1,..., s+t, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i\ ,\ i = s+t+1,..., m,$$

$$x_j \ge 0, (j = 1,..., n)$$

Система (3) називається системою обмежень, або системою умов задачі. Вона описує внутрішні економічні процеси функціонування й розвитку торговельно-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними.

Вектор $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, який задовольняє обмеження задачі лінійного програмування називають її *розв'язком* або *оптимальним планом*.

Залежності (2)-(3) становлять економіко-математичну модель економічної системи, розробляючи яку необхідно дотримуватися наступних правил: модель має адекватно описувати реальні економічні процеси; у моделі потрібно враховувати лише все істотне в досліджуваному процесі; модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на комп'ютері.

В класичній постановці задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від реалізованих товарів у вартісному виразі чи максимум рентабельності, мінімум собівартості реалізованих товарів або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатокритеріальної оптимізації. Багатокритеріальні задачі математичного програмування не мають універсального способу розв’язування. Отже, вибір та коректне застосування будь-якого з них залишається за суб’єктом прийняття рішень.

3.**Види оптимізаційних моделей**

Перш за все треба розділяти задачі параметричної та структурної оптимізації.

Параметрична оптимізація є предметом, що розглядається в цій темі, де попередньо наведена постановка такої задачі. Структурна оптимізація – це задача синтезу оптимальної структури системи, причому зміна структур та перетворення однієї структури в іншу здійснюється за спеціальним алгоритмом синтезу.

Параметрична оптимізація об’єднує багато різних задач, що мають свої власні особливості та методи розв’язання.

1. Якщо існує декілька цільових функцій, то має місце задача векторної оптимізації.

2. Якщо кількість параметрів X, що керуються, більше ніж один, то розв’язується задача багатопараметричної оптимізації.

3. Якщо існують обмеження та умови, що зв’язують параметри X, то виникає задача оптимізації з умовами, яка в кібернетиці дістала назву математичного програмування.

4. Математичне програмування об’єднує задачі нелінійного програмування (цільова функція в загальному випадку нелінійна), стохастичного програмування (параметри X – випадкова величина, або цільова функція – випадкова функція), динамічного програмування (оптимізація багатокрокових процесів пошуку рішення).

5. Якщо параметри, що керуються, приймають тільки дискретні значення, то виникає задача дискретної оптимізації, а якщо X – цілі числа, то – задача цілочислового програмування.

6. У випадку, коли цільова функція опукла, та область, де задані X, теж опукла, то має місце задача опуклого програмування. Якщо цільова функція та умови лінійні-лінійного (кусково-лінійного) програмування; цільова функція квадратична, а умови лінійні-квадратичного програмування; цільова функція та умови – лінійні комбінації функцій однієї змінної – сепарабельного програмування; цільова функція та умови подані у вигляді поліномів – геометричного програмування.

4. Приклади задач лінійного програмування.

Лінійне програмування (ЛП) – це розділ математики, в якому розглядаються методи розв’язування екстремальних задач з лінійним функціоналом і лінійними обмеженнями, яким повинні задовольняти шукані змінні.

Розглянемо декілька простих прикладів постановки задач лінійного програмування і побудуємо математичні моделі цих задач.

Задача використання сировини

Припустимо, що деяке підприємство має запаси сировини трьох видів - S_1, S_2, S_3 відповідно в кількостях b_1, b_2, b_3 умовних одиниць. З цієї сировини може бути виготовлено два види продукції: P_1, P_2.

Відомо: a_{ij} - кількість одиниць S_i-го виду сировини, яка йде на виготовлення одиниці P_j-го виду продукції;

c_j - прибуток від реалізації одиниці кожного виду продукції.

Всі вказані величини покажемо в наступній таблиці:

Вид сировини	Кількість сировини	Витрати сировини на продукцію	
		P_1	P_2
S_1	20	$5(a_{11})$	$1(a_{12})$
S_2	40	$2(a_{21})$	$1(a_{22})$
S_3	15	$0(a_{31})$	$1(a_{32})$

Задача зводиться до того, щоб скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації всієї продукції буде максимальним.

Для побудови математичної моделі даної задачі введемо такі позначення:

x_1 - кількість одиниць продукції виду P_1,

x_2- кількість одиниць продукції виду P_2, які може виготовляти підприємство.

Знаючи кількість сировини кожного виду, яка йде на виготовлення одиниці продукції, і запаси сировини, можна скласти систему обмежень, яка визначає область можливих значень x_1 і x_2:

$$5x_1 + x_2 \leq 20$$

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_2 \leq 15.$$

Отримана система обмежень означає, що кількість сировини, яка йде на виготовлення всіх видів продукції, не може перевищувати запасів, які є в наявності на підприємстві. Виходячи з економічного змісту задачі, на змінні накладаються додаткові обмеження, які вимагають невід'ємності їх значень: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (x_1 і x_2 будуть дорівнювати нулю, якщо відповідний вид продукції не випускається). Тоді прибуток, який підприємство отримує від реалізації x_1 одиниць продукції P_1 і x_2- одиниць продукції P_2 складе

$F = 3x_1 + 2x_2$, якщо вважати, що прибуток від реалізації одиниці продукції P_1 дорівнює $3(c_1)$, а від реалізації одиниці продукції P_2 - $2(c_2)$.

Остаточно задача формулюється так.

Знайти такий вектор $X = (x_1, x_2)$, при якому цільова функція $F = 3x_1 + 2x_2$ досягає максимуму і виконуються наступні обмеження:

$$5x_1 + x_2 \le 20$$

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_2 \le 15.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

В загальному випадку математична модель такої задачі має вигляд:

знайти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який максимізує функцію

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n,$$

при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2,$$

$$.........\ ....\ ....\ ....\ ......$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \le b_n,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,..., n.$$

Задача про рюкзак. Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме задачею лише з одним обмеженням, є задача про рюкзак (або ранець). Така задача має багато прикладів практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов'язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови гіпотетичної проблеми туриста щодо вибору для походу оптимальної кількості речей.

Турист може вибирати потрібні речі із списку з *n* предметів. Відома вага кожного *j*-го предмета $m_j (j = \overline{1,n})$. Визначена також цінність кожного виду предметів w_j. Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати зазначеного обсягу *M*. Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб загальна цінність спорядження була максимальною за умови виконання обмеження на вагу рюкзака.

Позначимо через x_j – кількість предметів *j*-го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \le M\ ;$$

$x_j \geq 0$, x_j — цілі числа, $(j = \overline{1,n})$.

Приклад задачі. Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

Розв'язання. Позначимо кількість упаковок вагою 35 кг та вагою 24 кг відповідно змінними x_1 та x_2. Маємо модель цієї задачі:

$$\min F = 14x_1 + 12x_2$$

$$35x_1 + 24x_2 \geq 107;$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, x_1, x_2 — цілі числа.

У результаті розв'язування задачі: $X^*(x_1 = 1, x_2 = 3)$, $F_{\min} = 50$. Отже, за оптимальним планом найменші витрати, що дорівнюють 50 ум. од., можливі у разі закупівлі однієї упаковки добрив вагою 35 кг та трьох вагою по 24 кг.

Задача складання раціону

Для відгодівлі худоби використовують деякі корми, що містять у певній кількості поживні речовини. Відомо, скільки одиниць кожної поживної речовини міститься в одиниці кожного корму, мінімальна добова потреба у кожній поживній речовині при відгодівлі худоби, а також вартість одиниці кожного корму.

З економічної точки зору задача полягає в наступному: треба так скласти добовий раціон для відгодівлі худоби, щоб задовольнялась мінімальна добова потреба в поживних речовинах і загальна вартість раціону була б мінімальною.

Складемо математичну модель задачі.

Нехай m - кількість поживних речовин, що містяться в кормах;

n - кількість кормів, які використовуються для відгодівлі худоби;

a_{ij} - кількість одиниць *i*- ї поживної речовини, що міститься в одиниці *j*-го корму;

b_i - мінімальна добова потреба в *i*-й поживній речовині при відгодівлі худоби;

c_j - вартість одиниці *j*-го корму;

x_j - кількість одиниць *j*-го корму, що планується використати в добовому раціоні (шукані величини).

Загальна кількість *i*-ї поживної речовини, яка міститься в кормах раціону, становить $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, i = 1,..., m.$

Оскільки ця кількість одиниць не може бути меншою, ніж добова потреба в *i*-й поживній речовині, то

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i, i = 1,..., m.$$

Очевидно, $x_j \geq 0, (j = 1,..., n).$

Вартість одиниць *j*-го корму становить $c_j x_j$, а загальна вартість добового раціону $L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Таким чином, математична модель задачі є такою:

знайти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який мінімізує функцію $L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ за умов $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, (i = 1,..., m), x_j \ge 0, (j = 1,..., n)$.

Задача оптимального розкрою матеріалів.

У цеху розрізують прути завдовжки 6 м на заготівки довжиною 1,4, 2 і 2,5 м. Цех обслуговує замовника, для якого необхідно знайти як розрізати 200 прутів, щоб отримати не менше як 40, 60 і 50 заготівок завдовжки відповідно 1,4; 2 і 2,5 м. Критерій оптимізації — мінімум відходів.

Розв'язання.

1) розв'яжемо задачу за умовами першого замовника. Маємо партію прутів у кількості $b = 200$ штук. Відома нижня межа кількості заготівок кожного виду. Введемо такі позначення:

$r(r = 1,2,3)$ — вид заготівки;

$j(j = \overline{1,n})$ — спосіб розрізання прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута *j*-им способом заготівок *r*-го виду;

cj — відходи в разі розрізування прута *j*-им способом;

b — кількість наявних прутів;

Dr — нижня межа потреби в *r*-ій заготівці;

xj — кількість прутів, які розрізані за *j*-им способом.

Запишемо математичну модель для розв'язування першого пункту задачі оптимального розкрою.

Критерієм оптимальності є мінімальна кількість відходів: $\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Кількість отриманих заготівок кожного виду має бути не меншою від зазначених потреб:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jr} x_j \ge D_r \ (r = \overline{1,p}).$$

Сумарна кількість прутів, які розрізані різними способами не може бути більшою від кількості наявних прутів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b.$$

Змінні задачі x_j — невід'ємні і цілі числа. Отже, маємо математичну модель:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge D_r, \ (r = \overline{1,p}); \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le b; \end{cases}$$

$x_j \ge 0 (j = \overline{1,n})$,

x_j — цілі числа $(j = \overline{1,n})$.

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізування прутів, розглянувши можливі варіанти їх розрізування:

Довжина заготівки, м	Варіант розрізування прутів						
	*x*1	*x*2	*x*3	*x*4	*x*5	*x*6	*x*7
1,4	4	—	—	1	1	2	2
2	—	3	—	1	2	1	—
2,5	—	—	2	1	—	—	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано, щоб у множину ввійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад, *X*6.

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізування прутів:

$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$

за умов:

а) кількість заготівок завдовжки 1,4 м:

$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \ge 40$;

б) кількість заготівок завдовжки 2 м:

$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 60$;

в) кількість заготівок завдовжки 2,5 м:

$2x_3 + x_4 + x_7 \ge 50$;

г) кількість наявних прутів:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200$;

д) невід'ємність змінних:

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6,7)$;

є) цілочисловість змінних:

x_j — цілі числа $(j = 1,2,3,4,5,6,7)$.

Отже, загалом маємо математичну модель виду:

$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \ge 40; \\ 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 60; \\ 2x_3 + x_4 + x_7 \ge 50; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6,7)$,

x_j — цілі числа $(j = 1,2,3,4,5,6,7)$.

Розв’язуючи задачу одним із методів цілочислового програмування, отримуємо набір альтернативних оптимальних планів (загальною кількістю 146). Наприклад, такий план забезпечує виготовлення всіх видів заготівок у мінімально можливій кількості за найменшого загального обсягу відходів, причому для цього використовуються лише 54 прути: $X_1^* = (x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 50, \ x_5 = x_6 = x_7 = 0)$, $Z_{\min} = 5$, тобто 4 прути необхідно розрізати другим способом (по три заготівки довжиною 2 м) та 50 прутів четвертим способом (по одній заготівці кожного виду). Сумарна довжина залишків дорівнює п’яти метрам. Аналогічне значення цільової функції ($Z_{\min} = 5$) дає оптимальний план, за яким виготовляється більша кількість кінцевої продукції та витрачається весь наявний матеріал:

$X_2^* = (x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0)$.

Отримані оптимальні плани дають набір альтернативних варіантів для прийняття управлінських рішень за конкретних виробничих умов.

Задача комівояжера. Розглядається n міст $A1, A2, ..., An$, що пов’язані між собою транспортною мережею. Відома матриця відстаней від кожного міста до усіх інших:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

причому в загальному випадку не завжди $c_{ij} = c_{ji}$. Комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися в те місто, з якого почав рухатися. Необхідно відшукати такий замкнений маршрут, що проходить через кожне місто лише один раз і довжина якого мінімальна.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} може набувати лише двох значень: одиниці або нуля. Такі змінні мають назву бульових змінних. Очевидно, що вони є цілочисловими. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

де cij — відстань між містами i та j.

Обмеження щодо одноразового в’їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(j = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = \overline{1,n} j \neq j\right).$$

Зазначені обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо невід’ємні цілочислові змінні $u_i(u_j)$ $\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ i\neq j\right)$, які в процесі розв’язування задачі набуватимуть значень порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом прямування комівояжера. Запишемо обмеження, які усувають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1\ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ i\neq j\right).$$

Доведемо, що для довільного маршруту, який починається в пункті *A*1, можна знайти такі $u_i(u_j)$, що задовольняють наведену нерівність. Нехай комівояжер переїжджає з міста *Ai* до міста *Aj* на *p*-му кроці і допустимо також, що $u_i=p$, тоді з міста *Aj* комівояжер вирушить на наступному, (*p* + 1)-му кроці і $u_j=p+1$. Звідси випливає, що:

$$u_i-u_j+nx_{ij}=p-(p+1)+nx_{ij}=-1+nx_{ij}\le n-1.$$

Така нерівність виконується для будь-яких значень *i* та *j* у разі, коли $x_{ij}=0$, а при $x_{ij}=1$ нерівність виконується як строге рівняння. Отже, якщо вибрано маршрут пересування з *i*-го міста до *j*-го, то згадана нерівність фіксує два підряд порядкових номери цих міст.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1\ (j=\overline{1,n};\ i\neq j);\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (i=\overline{1,n};\ i\neq j);\\ u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1\ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ i\neq j),\end{cases}$$

$$x_{ij}\in\{0;1\}\ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}).$$

Приклад. В економічному регіоні розміщено 6 пунктів (міст). Комівояжер, який виїжджає з міста 1, має побувати в кожному місті один раз і повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут, якщо відстані між містами відомі (наведені в км на рис. 1).

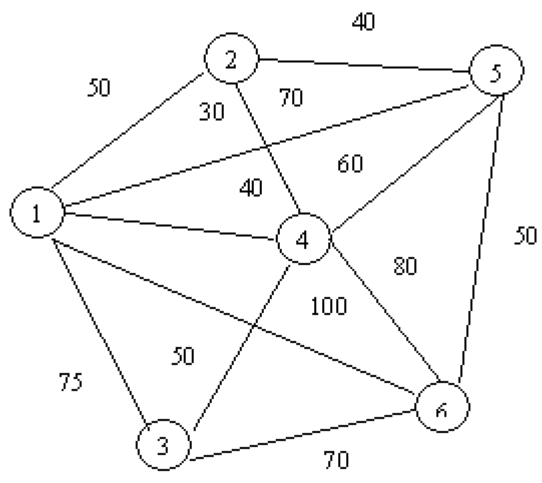


Рис. 1.

Розв’язання. Маємо 6 пунктів, де має побувати комівояжер.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, *xij* — бульові (цілочислові) змінні. Запишемо числову економіко-математичну модель задачі комівояжера за даних умов.

Виходячи з рис. 6.5, висновуємо, що всіх можливих маршрутів є 12. З першого міста можна потрапити до кожного з інших п'яти, відповідні маршрути позначимо змінними x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}. Друге місто пов'язане лише з трьома іншими, а саме, з першим, четвертим та п'ятим, отже, маємо такі три змінні: x_{21}, x_{24}, x_{25}. Аналогічно позначаємо змінні, що відповідають можливим маршрутам пересувань з третього, четвертого, п'ятого та шостого міст:

з третього — x_{31}, x_{34}, x_{36},

з четвертого — x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{45}, x_{46},

з п'ятого — x_{51}, x_{52}, x_{54}, x_{56},

з шостого — x_{61}, x_{63}, x_{64}, x_{65}.

Загалом отримали 24 змінні. Однак деякі змінні, наприклад, x_{12} та x_{21}, x_{13} та x_{31} описують один маршрут, довжина якого за умовою задачі не змінюється залежно від напрямку пересування (у разі переїзду з першого міста до другого чи з другого до першого необхідно подолати 50 км). Отже, коефіцієнт у цільовій функції при таких змінних буде однаковим.

Критерій оптимальності — мінімізація довжини всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = 50x_{12} + 75x_{13} + 40x_{14} + 70x_{15} + 100x_{16} + 30x_{24} + 40x_{25} + 50x_{34} +$$
$$+70x_{36} + 60x_{45} + 80x_{46} + 50x_{56};$$

а) обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1;$

$x_{12} + x_{42} + x_{52} = 1;$

$x_{13} + x_{43} + x_{63} = 1;$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{64} = 1;$

$x_{15} + x_{25} + x_{45} + x_{65} = 1;$

$x_{16} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1;$

б) обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1;$

$x_{21} + x_{24} + x_{25} = 1;$

$x_{31} + x_{34} + x_{36} = 1;$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} = 1;$

$x_{51} + x_{52} + x_{54} + x_{56} = 1;$

$x_{61} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1;$

в) обмеження щодо усунення підмаршрутів:

$u_2 - u_4 + 6x_{24} \le 5;$

$u_2 - u_5 + 6x_{25} \le 5;$

$u_3 - u_4 + 6x_{34} \le 5$;

$u_3 - u_6 + 6x_{36} \le 5$;

$u_4 - u_2 + 6x_{42} \le 5$;

$u_4 - u_3 + 6x_{43} \le 5$;

$u_4 - u_5 + 6x_{45} \le 5$;

$u_4 - u_6 + 6x_{46} \le 5$;

$u_5 - u_2 + 6x_{52} \le 5$;

$u_5 - u_4 + 6x_{54} \le 5$;

$u_5 - u_6 + 6x_{56} \le 5$;

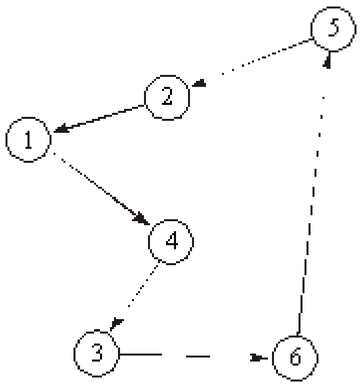
$u_6 - u_3 + 6x_{63} \le 5$;

$u_6 - u_4 + 6x_{64} \le 5$;

$u_6 - u_5 + 6x_{65} \le 5$;

$x_{ij} \in \{0;1\}\ (i = \overline{1,6};\ j = \overline{1,6})$;

$ui(uj)$ — цілі числа $\left(i = \overline{2,6};\ j = \overline{2,6};\ i \ne j\right)$.



Такі задачі розв'язуються спеціальними методами.

У результаті отримуємо оптимальний варіант пересування таким маршрутом (рис. 2).

Тобто з першого міста за оптимальним планом необхідно переїжджати до четвертого, з четвертого — до третього, з третього — до шостого, з шостого — до п'ятого, з п'ятого — до другого, а з другого — до першого. Довжина цього маршруту, яка є мінімальною, дорівнює 300 км.

Аналогічні задачі нерідко виникають на практиці, особливо у дрібному бізнесі. Типовим може бути, наприклад, таке завдання: «Фірма у місті має 25 кіосків, які торгують безалкогольними напоями. Щоденно з бази автомобілем розвозять до них товар. Як оптимально організувати розвезення певного обсягу товару?».

Транспортна задача

У пунктах постачання $A_1, A_2, ..., A_m$ міститься однорідний товар, який треба перевезти в пункти споживання $B_1, B_2, ..., B_n$. Відомо, скільки одиниць товару є в кожному пункті постачання, скільки одиниць товару потребує кожний пункт споживання, а також вартість перевезення одиниці товару з кожного пункту постачання у кожний пункт споживання.

Припустимо, що виконується умова балансу, тобто загальна кількість одиниць товару, який є в пунктах постачання, збігається з загальною кількістю одиниць товару, що потребують пункти споживання. Тоді з економічної точки зору задача формулюється таким чином: треба так запланувати перевезення товару, щоб весь товар з пунктів постачання був вивезений, потреби всіх пунктів споживання були задоволені і водночас загальна вартість усіх перевезень була мінімальною.

Складемо математичну модель задачі.

Нехай a_{ij} - кількість одиниць товару, що міститься в *i*-му пункті постачання A_i;

b_i - кількість одиниць товару, що потребує *j*- й пункт споживання B_j;

c_{ij} - вартість перевезення одиниці товару з *i*-го пункту постачання в *j*- й пункт споживання;

x_{ij} - кількість одиниць товару, що планується перевезти з *i*-го пункту постачання в *j*- й пункт споживання (шукані величини).

Запишемо умову задачі у вигляді таблиці.

Таблиця 1

	B_1	B_2	$\dots$	B_n	Запас
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

З таблиці видно: об’єми товару, що планується перевезти з першого, другого, …, *m*-го пунктів постачання, задовольняють умови

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+...+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+...+x_{2n}=a_2, \\ .... \\ x_{m1}+x_{m2}+...+x_{mn}=a_m, \end{cases}$$

А для об’ємів товару, що планується ввезти в перший, другий,…, *n*-й пункти споживання, повинні виконуватись умови

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+...+x_{m2}=b_2, \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{mn}=b_n. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \left(j=1,...,n\right), \left(i=1,...,m\right).$$

Очевидно, що вартість перевезення x_{ij} одиниць товару становить $c_{ij}\ x_{ij}$. Тоді загальна вартість усіх перевезень обчислюється за формулою

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots +$$
$$+ c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}.$$

Отже, математична модель задачі є такою: знайти вектор X, який мінімізує функцію $L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\ ,\ i = 1,\ldots, m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ ,\ (j = 1,\ldots, n),$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ldots, m, (j = 1,\ldots, n).$$

Загальний висновок за темою лекції:

Процес оптимізації пов'язаний із визначенням значень економічних показників, за яких досягається оптимум, тобто найкращий стан системи. Найчастіше оптимуму відповідає досягнення найкращого результату при даних витратах ресурсів або досягнення заданого результату при мінімальних ресурсних витратах.

Поширеними задачами лінійного математичного програмування є задача використання сировини, задача оптимального рюкзака, задача на розкрій матеріалів, задача складання раціону, задача комівояжера.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте визначення оптимізаційної моделі.
2. Якою є економічна постановка оптимізаційної задачі?
3. Як записується класична лінійна задача математичного програмування?
4. В чому полягає суть задачі використання сировини?
5. В чому полягає суть задачі на розкрій матеріалів?
6. В чому полягає суть задачі складання раціону?
7. В чому полягає суть задачі комівояжера?

Укладачі: ____________ Стадник Ю.А., доцент, Мищишин О.Я., доцент
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

Конспект лекції №4

Тема 4. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Макроекономіка», «Мікроекономіка», «Інформатика», «Математика для економістів».

Мета лекції полягає у формуванні полягає у формуванні в студентів системи теоретичних знань та практичних навичок з питань побудови економетричних моделей та оцінки параметрів парної лінійної регресії

План лекції

1. Економетрична модель, її види.
2. Побудова та аналіз економетричної моделі з двома змінними.
3. Сутність методу найменших квадратів.
4. Особливості та етапи економетричного моделювання.

Опорні поняття: математичні методи, модель, економетрика, регресія, метод найменших квадратів, лінійна регресія.

Інформаційні джерела:

Основна та допоміжна література:

1. Васильків І. М., Карпінський Б. А., Максимук О. В., Шкулка С. К. Вступ до економетрики: Навч. посіб. – Львів: Львівський національний університет ім. І. Франка, 2015. – 280 с.

2. Сингаевская Г. И. Функции в Excel. Решение практических задач. М.: Издательский дом «Вильямс», 2009. – 880 с.

3. Наконечний С. І.. Терещенко Т.О. Економетрія: Навч.-метод, посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ. 2001. – 192 с.

4. Мороз В. С., Мороз В. В. Економетрія: Навч. посібник. – Хмельницький: ТУП, 2000. – 166с.

5. Корольов О.А. Економетрія: Лекції, питання, тести, залачі, ситуації, проблеми: Навч. посіб. – К.: КДТЕУ. 2000.

6. Кулинич О.І. Економетрія. Навчальний посібник. – Хм.: Видавництво «Поділля», 1997. – 115 с.

7. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Товариство «Знання», КОО. 1998. – 494 с.

8. Марюта А. Н., Бойцун Н. Е. Статистические методы и модели в экономике. Монография. – Дніпропетровськ: Пороги, 2002. – 384с.

Інтернет сайти:

1. http://stud.com.ua/9254/ekonomika/ekonomiko-matematichni_metodi_i _ prikladni _modeli - Прикладні економіко-математичні моделі

2. http://www.uabs.edu.ua/images/stories/docs/K_F/Yepifanov_16.pdf – Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці. Монографія.

3. ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/9599 - Моделювання світо господарських процесів: Підручник.

4.Теоретичні основи кількісних методів моделювання та прогнозування економічних процесів // http://bookss.co.ua/book_medoti-ekonomyko-statestichnih-doslidzhen_806/3_1.-teoretichn-osnovi-klksnih-metodv-modelyuvannya-ta-prognozuvannya-ekonomchnih-procesv.

5. Державний комітет статистики України – www. ukrstat. gov.ua

Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо: ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

1. Економетрична модель та її види.

При аналізі економічних явищ на основі економіко-математичних методів особливе місце займають моделі, що виявляють кількісні зв'язки між досліджуваними показниками і впливаючими на них чинниками. Науковою дисципліною, предметом якої є вивчення цієї кількісної сторони економічних явищ і процесів засобами математичного і статистичного аналізу, економетрика, в якій результати теоретичного аналізу економіки синтезуються з висновками математики і статистики. Основне завдання економетрики - перевірка економічних теорій на фактичному (емпіричному) матеріалі за допомогою методів математичної статистики.

Головним інструментом економетрики служить ***економетрична модель,*** тобто економіко-математична модель факторного аналізу, параметри якої оцінюються засобами математичної статистики. Ця модель виступає в якості засобу аналізу і прогнозування конкретних економічних процесів на основі реальної статистичної інформації.

Економетричні моделі включають достатньо широкий клас різноманітних економіко-математичних моделей. Приведемо одну із класифікацій економетричних моделей.

За засобом математичної формалізації економетричні моделі можна умовно розділити на прості та складні.

Прості економетричні моделі зображені одним рівнянням, однією залежністю, складні – декільками рівняннями, залежностями:

$$У = ax^{в} + \varepsilon; \quad (1)$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \varepsilon_{1,} \; (2)$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_{2.}$$

За кількістю факторів, що включаються в модель, прості економетричні моделі можна розділити на однофакторні та багатофакторні. Однофакторні моделі містять одну незалежну змінну, багатофакторні моделі – ряд незалежних змінних.

Однофакторні і багатофакторні моделі можуть бути зображені лінійними та нелінійними функціями.

Приклад нелінійної функції. Виробнича функція Кобба-Дугласа:

$$У = AK^{\alpha}L^{\beta} + \varepsilon,$$

де У – об'єм виробництва, K – витрати капіталу, L – витрати праці.

Складні економетричні моделі можуть бути зображені трьома видами систем одночасних рівнянь у залежності від форми включення у праву частину ендогенних змінних. Зазвичай виділяють три типи систем :

- системи, що розв'язуються відносно ендогенних змінних;
- рекурсивні системи;
- системи, що не розв'язуються відносно ендогенних змінних.

Особливістю систем одночасних рівнянь є те, що кожне з рівнянь системи, окрім «своїх» пояснюючих змінних, може включати пояснюючі змінні із інших рівнянь. Класичним прикладом такої системи являється модель попиту Q^d та пропозиції Q^l, відколи попит на товар визначається його ціною P та доходом споживача I, пропозиція товару - його ціною P, і досягається рівновага між попитом та пропозицією:

$$\begin{aligned} &Q^d = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 I + \varepsilon_1; \\ &Q^l = \beta_4 + \beta_5 I + \varepsilon_2; \\ &Q^d = Q^l \end{aligned} \qquad (3)$$

У цьому випадку спостережуване значення P – це ціна рівноваги, яка формується одночасно із попитом та пропозицією. Таким чином, Q^d, Q^l,P – пояснювані змінні, I – пояснююча змінна.

Перші три змінні формують свої значення відповідно рівнянням (3), тобто усередині моделі. Такі змінні звуться ендогенними. Між тим змінна I вважається у рівняннях (3) заданою зовні, її значення формуються поза моделлю. Такі змінні звуться екзогенними.

У залежності від наявності (відмінності) у моделі фактору часу розрізняють динамічні та статичні моделі. Динамічні моделі: трендові моделі; моделі улагоджування нових рядів; моделі декомпозиції часового ряду і авторегресійні моделі, моделі ковзної середньої, лагові та регресійні динамічні моделі.

2. Побудова та аналіз економетричної моделі з двома змінними.

З курсу математики ви знайомі з функціональною залежністю, коли кожному значенню однієї змінної відповідає визначене значення іншої.

В економіці у багатьох випадках між змінними існують залежності, коли кожному значенню однієї змінної відповідає не деяке певне, а множина можливих значень іншої змінної. Інакше кажучи, кожному значенню однієї змінної відповідає певний (умовний) розподіл іншої змінної. Така залежність отримала назву статистичної (або імовірної).

Виникнення поняття статистичної залежності обумовлюється тим, що залежна змінна підпадає під вплив неконтрольованих або неврахованих факторів, а також тим, що вимірювання значень змінних неминуче супроводжується певними випадковими похибками. В силу невизначеності статистичної залежності між ***X*** та ***Y*** для дослідження представляє інтерес усереднена по ***X*** схема залежності. Тобто закономірність у вимірюванні умовного математичного сподівання $M_x(y)$.

Якщо залежність між двома змінними така, що кожному значенню однієї змінної відповідає певне умовне математичне сподівання іншої, то така статистична залежність називається кореляційною:

$$M_x(y)=F(x).$$

У регресійному аналізі розглядаються залежність випадкової змінної ***Y*** від однієї (або декількох) невипадкової незалежної змінної ***X***. Така залежність може виникнути у випадку, коли при кожному значенні змінної ***X*** відповідні значення ***Y*** підпадають під вплив неконтрольованих факторів. Така залежність ***Y*** від ***X*** (іноді її називають регресійною) також може бути представлена у вигляді модельного рівняння рівняння регресії або економетричної моделі.

Y - функція відгуку, пояснювальна, ендогенна, результативна ознака, вихідна ознака; ***X*** - пояснююча, екзогенна, предикторна, фактор, регресор, факторна ознака.

Найпростішою у використанні є парна регресія. Передумови застосування парної регресійної моделі є наступними. По-перше, її застосовують для вивчення, опису, формалізованого уявлення і оцінки такої залежності, яка виникає в процесі взаємодії всього ***двох ознак*** , або двох змінних.

По-друге, кожна з ознак грає цілком визначену роль у формуванні досліджуваної залежності, тобто розглядається процес, в якому можна точно вказати, яка з ознак є причиною виникнення інші, а яка - результатом зазначеного впливу. Ознака-причина (фактор), змінюючись, викликає зміни ознаки-результату, впливає на нього і формує його значення. Традиційно ознаку-причину позначають через ***x,*** а сформований нею зв'язок розглядають як причинно-наслідковий. Ознака-результат відчуває на собі вплив факторного чинника, залежить від цього впливу, її значення формуються під впливом фактора. Ознаку-результат; його, як правило, позначають ***y.***

По-третє, парну регресійну модель застосовують в тому випадку, коли вивчають залежності, які проявляються лише в масі однорідних подій, явищ, носять імовірнісний характер і мають форму не строго, однозначно сформульованої, яка завжди спостерігається, закономірності, а простежуються в формі найбільш імовірної паралельності змін фактора і результату. Подібні залежності визначаються як стохастичні, ймовірнісні, а для їх вивчення використовують методи теорії ймовірностей і математичної статистики.

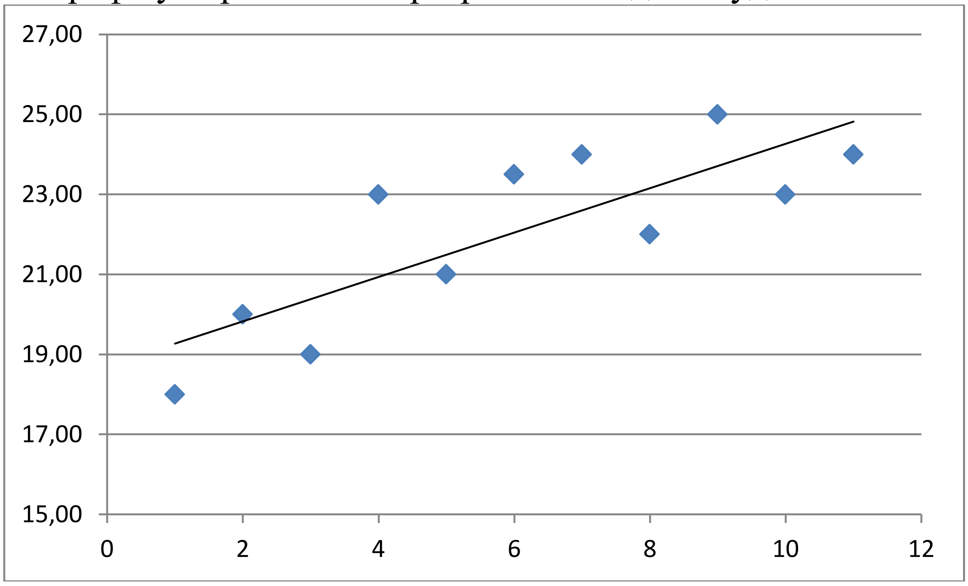
Найбільш простою і поширеною є парна лінійна регресія. Якщо за розташуванням точок даних, що характеризують певний економічний процес чи явище, можна припустити наявність лінійної регресіїної моделі, то рівняння регресії може бути записане у вигляді:

$$Y=\beta_0+\beta_1X+\varepsilon, \qquad (4)$$

або

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\varepsilon_i, i=\overline{1,n},$$

На графіку парна лінійна регресійна модель буде мати вигляд:



Рівняння регресії шукається у вигляді лінійного рівняння

$\hat{y}=b_0+b_1x,$ (5)

де $\hat{y}$ - це оцінка $M_x(y)$, b_0 - оцінка β_0, b_1 - оцінка β_1.

3.Сутність методу найменших квадратів

Для знаходження параметрів економетричної моделі, може бути використаний метод найменших квадратів.

Згідно методу найменших квадратів (1МНК) невідомі параметри b_0 та b_1 обираються таким чином, щоб сума квадратів відхилень емпіричних значень y_i від теоретичних значень $\hat{y}_i$ була найменшою:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(b_0+b_1x_i-y_i)\to\min$$

За необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial b_0}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(b_0+b_1x_i-y_i)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial s}{\partial b_1}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(b_0+b_1x_i-y_i)x_i=0.\end{cases}$$

Звідси після перетворень отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \overline{x} = \overline{y}, \\ b_0 \overline{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy}; \end{cases}$$

де

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}, \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}$$

Після розв'язання останньої системи отримуємо коефіцієнт регресії ***Y*** по ***X***:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \qquad (5)$$

Коефіцієнт регресії ***Y*** по ***X*** показує, наскільки одиниць у середньому змінюються змінна ***Y*** при збільшені змінної ***X*** на одну одиницю.

Формула обчислення параметру b_0 (вільного члена):

$$b_0 = \overline{y} - \overline{b_1}\overline{x}. \qquad (6)$$

Для оцінки щільності кореляційного зв'язку використовується **коефіцієнт кореляції**:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{S_x S_y},$$

$$S_x = \sqrt{\overline{x}^2 - \overline{x}^2}, S_y = \sqrt{\overline{y}^2 - \overline{y}^2}, \qquad (7)$$

де S_x, S_y - середньоквадратичні відхилення.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції приймає значення на відрізку ***[-1;1]***, тобто $-1 \le r \le 1$. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок.

Дві кореляційні залежності наведені на рис. 1. Очевидно, що у випадку ***а*** залежність між змінними менш щільна, і коефіцієнт кореляції повинен бути менший, ніж у випадку ***б***, так як точки кореляційного поля ***а*** подальш відстоять від лінії регресії, ніж точки поля ***б***.

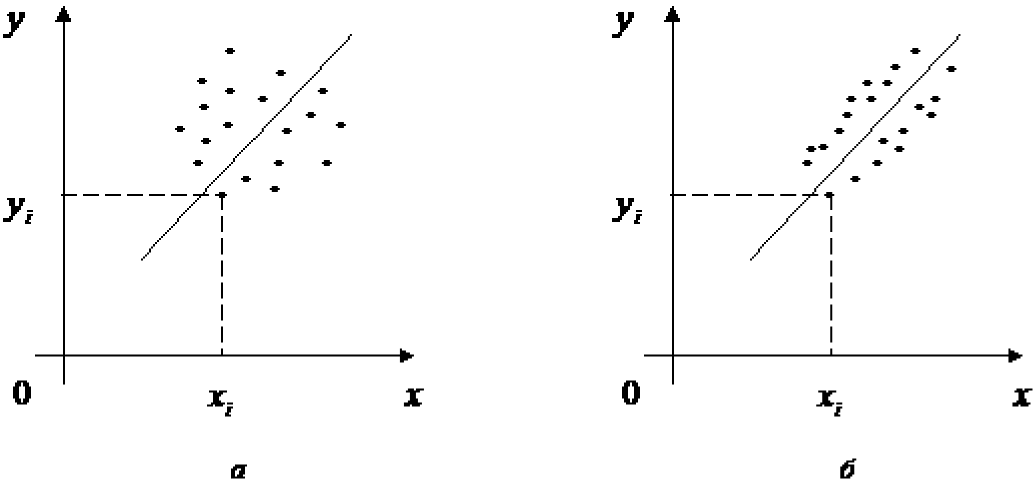


Рис. 1.

2. Якщо $r > 0 (b_1 > 0)$ то кореляційний зв'язок прямий (рис. 2.а), якщо $r < 0 (b_1 < 0)$, - обернений (рис. 2.б).

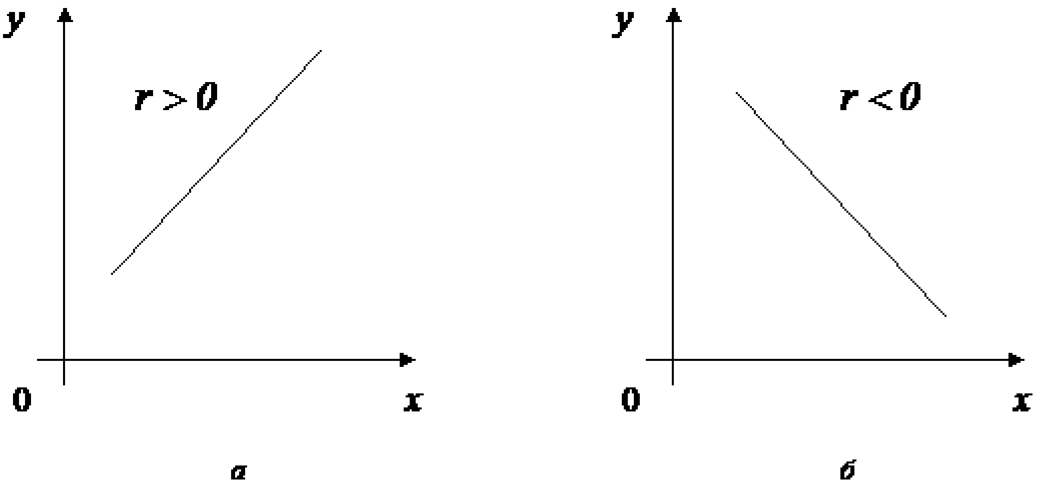


Рис. 2.

3. При $r = \pm 1$ кореляційна залежність являється лінійною функціональною залежністю. При цьому усі значення, що спостерігаються, розташовані на прямій лінії (рис. 3).

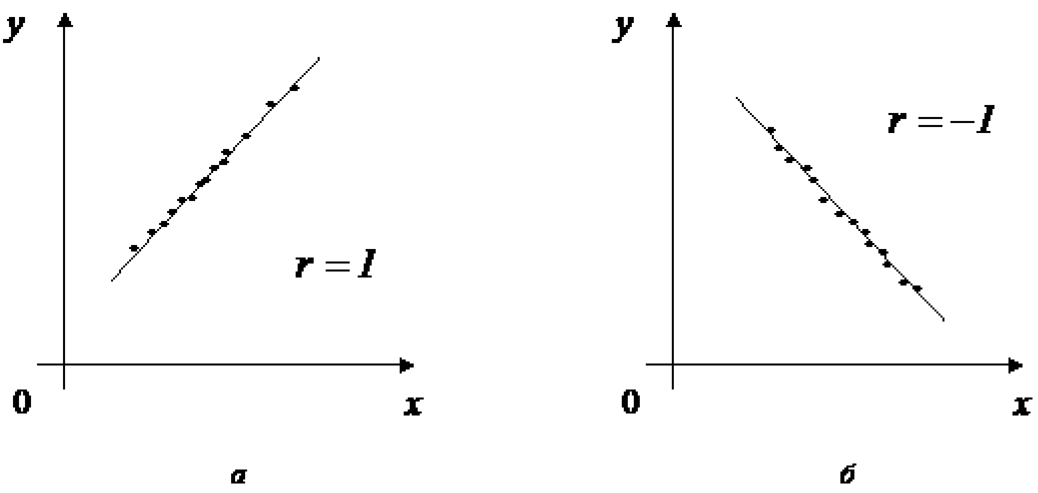


Рис. 3.

4. При $r=0$ лінійна кореляційна залежність відсутня. Це означає або відсутність будь-якої залежності між змінними x та y (рис. 4.а), або належність до певної нелінійної залежності (рис. 4.б).

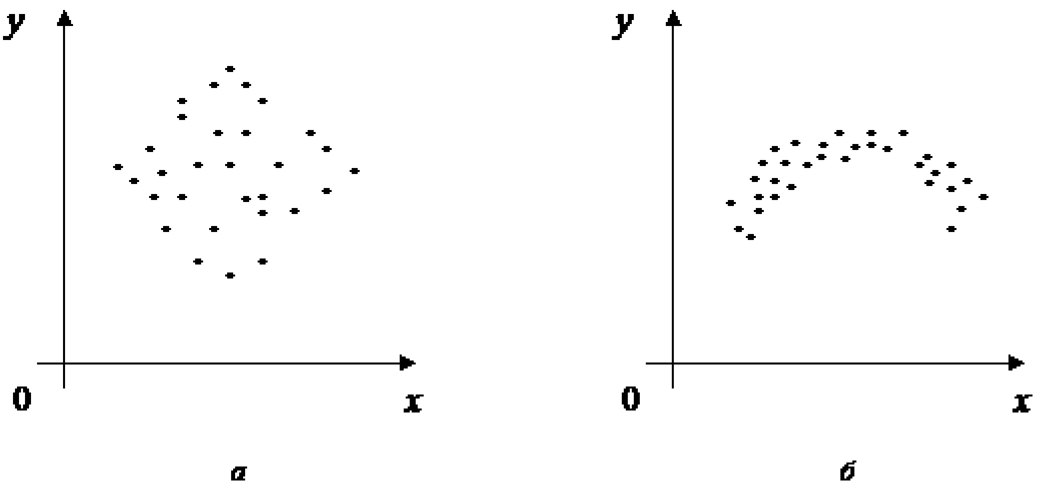


Рис. 4.

На практиці для оцінки ступені взаємозв'язку можна керуватись наступними емпіричними правилами:

1) $|r|>0{,}95$ - існує практично лінійна залежність;

2) $0{,}8<|r|<0{,}95$ - сильна ступінь лінійної залежності;

3) $0{,}6<|r|<0{,}8$ - належність лінійного зв'язку;

4) $|r|<0{,}4$ - лінійний зв'язок виявити не вдалося.

Оцінка адекватності регресійної моделі. Коефіцієнт детермінації.

Оцінка адекватності регресійної моделі робиться на підставі коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} \quad (8)$$

Величина R^2 показує, яка частка варіації залежної змінної обумовлена варіацією фактора.

Властивості коефіцієнта детермінації:

1. Для ЛПР $R^2=r^2$.
2. Коефіцієнт детермінації приймає значення на відрізку *[0;1]*, тобто $0 \le R^2 \le 1$. Чим ближче R^2 до одиниці, тим краще регресія апроксимує емпіричні дані.
3. Якщо $R^2=1$, між змінними x та y існує лінійна функціональна залежність.
4. Якщо $R^2=0$, то варіація залежної змінної повністю обумовлена впливом випадкових та неврахованих у моделі змінних.

На практиці **для оцінки ступені апроксимації рівнянням регресії вихідних даних** використовують наступні емпіричні правила:

1). $R^2>0,95$ - висока точність апроксимації.
2). $0,8<R^2<0,95$ - задовільна апроксимація.
3). $R^2<0,6$ - незадовільна апроксимація.

Обчислення коефіцієнта еластичності:

Коефіцієнт еластичності E показує - наскільки відсотків (від середньої) змінюється у середньому y при зміненні x на *1%* та обчислюється за формулою:

$$E = b_1 \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Перевірити значущість рівняння регресії - означає встановити, чи відповідає математична модель, що виражає залежність між змінними, експериментальним даним, чи достатньо залучених у рівняння факторів (одного або декількох) для опису залежної змінної.

Для оцінки значущості рівняння регресії використовується **F-тест**. Для цього виконується зрівняння фактичного $F_{факт}$ та критичного (табличного) $F_{табл}$ значення **F-критерію Фішера**.

$$F_{факт} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}(n-2) = \frac{r^2}{1-r^2}(n-2). \quad (9)$$

$F_{табл}=F_{\alpha,k1,k2}$ - це максимально можливе значення критерію під впливом випадкових факторів при даних ступенях свободи $k_1=m-1$ і $k_1=m-n$ і рівні значущості α, де m - кількість параметрів, що оцінюються (для ЛПР $m=2$, так як оцінюються параметри b_0 та b_1), n - кількість спостережень, α - зазвичай приймається 0,05 (в економіці) або 0,01.

Знайти $F_{табл}$ можна у таблицях **F-розподілу Фішера-Снедекора** або за функцією **"FРАСП"** в MS Excel.

F-тест. Якщо $\mathbf{F_{факт}}>\mathbf{F_{табл}}$, рівняння регресії статистично значуще на рівні значущості $\boldsymbol{\alpha}$. Якщо $\mathbf{F_{факт}}<\mathbf{F_{табл}}$, то признається статистична незначущість рівняння регресії.

Для оцінки значущості коефіцієнтів регресії $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_1}$ використовується **t-тест**. Для цього зрівнюються фактичне $\mathbf{t_{факт}}$ та критичне (табличне)$\mathbf{t_{табл}}$ значення **t-критерія** Стьюдента. $\mathbf{t_{факт}}$ для коефіцієнтів $\mathbf{b_0}$, $\mathbf{b_1}$ визначається за наступними формулами:

$$t_{b_0} = \frac{|b_0|}{S}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\overline{x^2}}} . \qquad (10)$$

$\mathbf{t_{табл}}=\mathbf{t_{1-\alpha;n-2}}$ - це максимально можливе значення критерію під впливом випадкових факторів при **n-2** ступенях свободи і рівні значущості $\boldsymbol{\alpha}$. Значення $\mathbf{t_{табл}}$ міститься у таблицях **t-розподілу** Стьюдента або визначається за функцією **"СТЬЮДРАСПОБР»** в MS Excel.

Якщо $\mathbf{t_{bi}}>\mathbf{t_{1-\alpha;n-2}}$, коефіцієнт $\mathbf{b_i}$ – статистично значущий на рівні значущості $\boldsymbol{\alpha}$. Якщо $t_{bi}<t_{1-\alpha;n-2}$, то признається статистична незначущість.

3. Основні етапи економетричного дослідження

Можна виділити наступні основні етапи економетричного дослідження:

1) постановка проблеми;
2) отримання даних та аналіз їх якості;
3) специфікація моделі;
4) оцінка параметрів (ідентифікація) моделі;
5) перевірка адекватності (верифікація) моделі;
6) інтерпретація результатів.

1-й етап: формується мета дослідження, сукупність економічних змінних. За вибором економічних змінних необхідне обґрунтування кожної змінної (при цьому, рекомендується, щоб їх кількість не була великою).

2-й етап: здійснюється збір необхідної статистичної інформації – спостережливі значення економічних змінних:

$(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ip}; y_{i1},y_{i2},\ldots,y_{iq})$, i = 1,n, та їх аналіз.

3-й етап: здійснюється вибір загального типу моделі: вираз у математичній формі виявлених зв’язків та співвідношень; встановлення складу екзогенних та ендогенних змінних; формулювання вихідних посилань та обмежень моделі.

4-й етап: здійснюється статистичний аналіз моделі та оцінка її параметрів.

5-й етап: проводиться перевірка істинності, адекватності моделі. З’ясовується, наскільки відповідає побудована модель реальному економічному об’єкту або процесу.

6-й етап: економічна інтерпретація та практичне використання моделі.

Загальний висновок за темою лекції:

У лекції розглянуто концептуальні аспекти економетричного моделювання економічних процесів, особливості та принципи парної лінійної регресійної моделі, застосування методу найменших квадратів для оцінки параметрів лінійної регресії, етапи економетричного моделювання.

Питання для самоконтролю:
1. Дайте визначення економетричної моделі.
2. Назвіть основні види економетричних моделей.
3. Визначте відмінність між функціональною та кореляційною залежністю.
4. Опишіть характерні можливості використання парної регресії в економічних дослідженнях.
5. Охарактеризуйте зміст параметрів лінійної регресійної моделі.
6. Охарактеризуйте суть методу найменших квадратів.
7. Назвіть етапи екнометричного моделювання.

Укладачі: ____________ Стадник Ю.А., доцент, Мищишин О.Я., доцент
(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)

Конспект лекції №5

Тема 5. Моделі множинної регресії. Застосування нелінійних функцій.

Міжпредметні зв'язки: Зв'язок із елементами знань і умінь таких навчальних дисциплін як «Макроекономіка», «Мікроекономіка», «Інформатика», «Математика для економістів».

Мета лекції полягає у формуванні полягає у формуванні в студентів системи теоретичних знань та практичних навичок з питань побудови множинної лінійної регресійної моделі, нелінійних економетричних моделей та їх застосування для прогнозування.

План лекції
1. Класична лінійна модель множинної регресії, основні припущення.
2. Оцінка параметрів множинної моделі та перевірка її на адекватність.
3. Прогнозування на основі множинної лінійної регресійної моделі.
4. Побудова нелінійних економетричних моделей.

Опорні поняття: математичні методи, модель, множинна регресія, адекватність регресійної моделі, метод найменших квадратів, прогноз, нелінійна регресійна модель.

Інформаційні джерела:

Основна та допоміжна література:

1. Васильків І. М., Карпінський Б. А., Максимук О. В., Шкулка С. К. Вступ до економетрики: Навч. посіб. – Львів: Львівський національний університет ім. І. Франка, 2015. – 280 с.

2. Сингаевская Г. И. Функции в Excel. Решение практических задач. М.: Издательский дом «Вильямс», 2009. – 880 с.

3. Наконечний С. І.. Терещенко Т.О. Економетрія: Навч.-метод, посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ. 2001. – 192 с.

4. Мороз В. С., Мороз В. В. Економетрія: Навч. посібник. – Хмельницький: ТУП, 2000. – 166с.

5. Корольов О.А. Економетрія: Лекції, питання, тести, залачі, ситуації, проблеми: Навч. посіб. – К.: КДТЕУ. 2000.

6. Кулинич О.І. Економетрія. Навчальний посібник. – Хм.: Видавництво «Поділля», 1997. – 115 с.

7. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Товариство «Знання», КОО. 1998. – 494 с.

8. Марюта А. Н., Бойцун Н. Е. Статистические методы и модели в экономике. Монография. – Дніпропетровськ: Пороги, 2002. – 384с.

Інтернет сайти:

1. http://stud.com.ua/9254/ekonomika/ekonomiko-matematichni_metodi_i _ prikladni _modeli - Прикладні економіко-математичні моделі

2. http://www.uabs.edu.ua/images/stories/docs/K_F/Yepifanov_16.pdf – Сучасні та перспективні методи і моделі управління в економіці. Монографія.

3. ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/9599 - Моделювання світо господарських процесів: Підручник.

4.Теоретичні основи кількісних методів моделювання та прогнозування економічних процесів // http://bookss.co.ua/book_medoti-ekonomyko-statestichnih-doslidzhen_806/3_1.-teoretichn-osnovi-klksnih-metodv-modelyuvannya-ta-prognozuvannya-ekonomchnih-procesv.

5.Державний комітет статистики України – www. ukrstat. gov.ua

Навчальне обладнання, ТЗН, презентація тощо: ноутбук, проектор, мультимедійна презентація.

ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЇ

1. Класична нормальна лінійна модель множинної регресії, основні припущення.

Економічні явища, як правило, визначаються більш ніж одним з одночасно та сукупно діючих факторів. У зв'язку з цим виникає задача дослідження залежності однієї залежної змінної У від декількох пояснюючих змінних $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Ця задача вирішується за допомогою множинного регресійного аналізу. Множинна регресія широко використовується при рішенні питань попиту, доходності акцій, при вивченні витрат виробництва, у макроекономічних розрахунках тощо.

Загальна множинна регресійна модель має наступний вигляд:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p) + \varepsilon, \qquad (1)$$

де y - залежна змінна;

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ - фактори (незалежні змінні).

Якщо множинна регресійна модель є лінійною (ЛМР), то вона подається у вигляді:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon. \qquad (2)$$

Позначимо i-е спостереження змінної y через y_i, а факторів – $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$. Відтоді модель (2) можна подати у вигляді:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \; i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

або у матричній формі:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

де $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$ - вектор (матриця-стовпець) значень залежної змінної;

$\beta = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p]^T$ - вектор (матриця-стовпець) коефіцієнтів регресійної моделі;

$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n]^T$ - вектор (матриця-стовпець) похибок;

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ - & - & - & \ldots & - \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{np} \end{bmatrix}$$ - матриця значень факторів.

Відмітимо основні припущення регресійного аналізу:

1. В моделі (3) похибка ε_i (або залежна змінна y_i) є випадковою величиною, а фактори x_{ip} невипадкові величини ($i = \overline{1,n}$).

2. Математичне сподівання похибки ε_i дорівнює нулю:

$$M[\varepsilon_i] = 0, \; i = \overline{1,n}.$$

3. Дисперсія похибки ε_i (або залежної змінної y_i) постійна дія будь-якої i:

$$D[\varepsilon_i] = \sigma^2,$$

тобто виконується умова гомоскедастичності.

4. Похибки ε_i та ε_j не корельовані:

$$M[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0, \; i \neq j.$$

5. Похибка ε_i (або залежна змінна y_i) є нормально розподіленою випадковою величиною.

6. Матриця значень факторів невироджена, тобто її ранг дорівнює $p+1$:

$$rangX = p + 1 < n.$$

Модель, для якої виконуються припущення 1-6, називається класичною нормальною лінійною моделлю множинної регресії (*CNLMR*-model).

2. Оцінка параметрів множинної моделі та перевірка її на адекватність.

Оцінкою цієї моделі за вибіркою є рівняння регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p, \qquad (4)$$

де $\hat{y}$ - оцінка математичного сподівання залежної змінної $M_x[y]$;

$b_i \left(i = \overline{0,p}\right)$ - оцінка коефіцієнтів $\beta_i \left(i = \overline{0,p}\right)$ регресійної моделі (або коефіцієнти регресії).

Як і раніше, для оцінки коефіцієнтів *CNLMR*-model використовують МНК:

$$S(b_0, b_1, \ldots, b_p) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2} - \ldots - b_p x_{ip}\right)^2 \to \min.$$

Після розв'язання системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \ldots - b_p x_{ip}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\left(y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \ldots - b_p x_{ip}\right) = 0, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_p} = -2\sum_{i=1}^{n} x_{ip}\left(y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \ldots - b_p x_{ip}\right) = 0, \end{cases}$$

отримаємо значення коефіцієнтів рівняння регресії, які в матричній формі мають вигляд:

$$b = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y, \qquad (5)$$

де $b = \left[b_1, b_2, \ldots, b_p\right]^T$ - вектор (матриця-стовпець) коефіцієнтів рівняння регресії.

Оцінки b_j є незміщеними, обґрунтованими та ефективними.

Оцінка дисперсії похибок

$$S^2 = \frac{\sum_{i}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n - p - 1} \qquad (6)$$

є незміщеною та обґрунтованою.

<u>Коефіцієнт (індекс) множинної кореляції *R*</u> використовується для оцінки тісноти спільного впливу факторів на залежну змінну:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}. \qquad (7)$$

<u>Властивості коефіцієнта множинної кореляції *R*</u>:

1. Коефіцієнт множинної кореляції приймає значення на відрізку $[0;1]$, тобто $0 \le R \le 1$.

Чим ближче R до одиниці, тим тісніше зв’язок між залежною y та факторами $x_1, x_2, \dots, x_p$.

2. При $R=1$ кореляційний зв’язок є лінійною функціональною залежністю.

3. При $R=0$ лінійний кореляційний зв’язок відсутній.

Щодо оцінки ступеня взаємозв’язку, можна керуватись аналогічними емпіричними правилами, як і для випадку ЛПР (лекція 3.1).

<u>Коефіцієнт (індекс) множинної детермінації R^2</u>

Для оцінки адекватності регресії моделі, мірою якості рівняння регресії використовують коефіцієнт детермінації, який визначається, як і раніше, за формулою:

$$R^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}. \qquad (12)$$

Нагадаємо, що R^2 характеризує частку варіації залежної змінної, що обумовлена варіаціями факторів.

<u>Властивості коефіцієнта множинної детермінації R^2</u>:

1. Коефіцієнт множинної детермінації приймає значення на відрізку $[0;1]$, тобто $0 \le R^2 \le 1$.

Чим ближче R^2 до одиниці, тим краще регресія апроксимує емпіричні дані.

2. Якщо $R^2=1$, між змінними y та $x_1, x_2, \dots, x_p$ існує лінійна функціональна залежність.

3. Якщо $R^2=0$, то варіація залежної змінної повністю обумовлена виливом випадкових та неврахованих факторів.

Для оцінки ступеня апроксимації емпіричних даних рівнянням ЛМР можна керуватись аналогічними емпіричними правилами, як і для випадку ЛПР (лекція 3.1).

<u>Зауваження</u>

Недоліком коефіцієнта множинної детермінації R^2 являється те, що він, взагалі, збільшується при додаванні нових факторів, хоча це не обов’язково означає поліпшення якості регресійної моделі. Тому має сенс використовувати скоригований (адаптований, виправлений) коефіцієнт детермінації $\mathbf{R}^2$, який визначається за формулою:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}\left(1 - R^2\right). \qquad (13)$$

На відміну від R^2 скоригований коефіцієнт $\mathbf{R}^2$ може зменшуватись при введенні у модель нових факторів, які не чинять істотного впливу на залежну змінну.

Оцінка значущості ЛМР.

Значущість рівня ЛМР у цілому оцінюється за допомогою *F*-критерія Фішера

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-p-1}{p} \qquad (8)$$

порівнянням його з табличним значенням

$$F_{табл} = F_{\alpha,p,n-p-1}. \qquad (9)$$

F-тест.

Якщо $F_{факт} > F_{\alpha,p,n-p-1}$, то рівняння ЛМР признається статистично значущим на рівні значущості α (зазвичай, $\alpha = 0,05$).

Якщо $F_{факт} < F_{\alpha,p,n-p-1}$, то рівняння ЛМР признається статистична незначущість ЛМР на рівні значущості α.

Другий варіант *F*- тесту: якщо рівень значущості фактичного *F*-критерію $\alpha_F < \alpha$, то рівняння ЛМР – статистичного значуще на рівні значущості α.

Якщо $\alpha_F > \alpha$, то ЛМР – статистичного незначуще на рівні значущості α.

Оцінка значущості коефіцієнтів рівняння ЛМР.

Оцінка значущості коефіцієнтів рівняння ЛМР здійснюються за допомогою *t*-критерію Ст'юдента:

$$t_{b_j} = \frac{|b_j|}{S_{b_j}} \qquad (10)$$

із зрівнянням його з табличним значенням

$$t_{табл} = t_{1-\alpha,n-p-1}, \qquad (11)$$

де $S_{b_j} = S\sqrt{\left(X^T X\right)^{-1}_{jj}} \left(j = \overline{0,p}\right)$ - середньоквадратичне відхилення (стандартна похибка) коефіцієнт а регресії b_j;

$S = \frac{\sum_i^n \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-p-1}$ - оцінка середньоквадратичного відхилення похибок;

$\left(X^T X\right)^{-1}_{jj} \left(j = \overline{0,p}\right)$ - відповідний діагональний елемент матриці $\left(X^T X\right)^{-1}$.

t-тест.

Якщо $t_{b_j} > t_{1-\alpha,n-p-1}$, то коефіцієнт b_j признається статистично значущим; якщо $t_{b_j} < t_{1-\alpha,n-p-1}$, то b_j – статистично незначущий на рівні значущості α.

3.Прогнозування на основі множинної лінійної регресійної моделі.

Прогнозне значення $\hat{y}_H$ визначається за шляхом підстановки у рівняння регресії (4) відповідних значень факторів $x_{H1}, x_{H2}, \ldots, x_{Hp}$:

$$\hat{y}_H = \hat{y}(x_{H1}, x_{H2}, \ldots, x_{Hp}) = b_0 + b_1 x_{H1} + b_2 x_{H2} + \ldots + b_p x_{Hp}. \qquad (14)$$

Довірчий інтервал прогнозу обчислюється за слідуючими формулами:

$$M_{x_{H1}-x_{Hp}}[y] = \hat{y}_H \pm t_{1-\alpha;n-p-1} \cdot S_{\hat{y}}, \qquad (15)$$

де $M_{x_{H1}-x_{Hp}}[y]$ - умовне математичне сподівання залежної змінної в точці прогнозу;

$S_{\hat{y}}$ - оцінка стандартної похибки прогнозу, яка обчислюється за формулою

$$S_{\hat{y}} = S\sqrt{X_H^T (X^T X)^{-1} X_H}; \qquad (16)$$

X - матриця значень факторів;

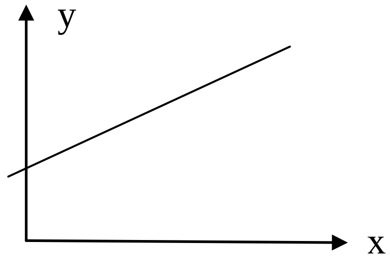
$X_H = [1\, x_{H1}\, x_{H2} \ldots x_{Hp}]^T$ - вектор (матриця-стовпець) значень факторів для прогнозу.

Довірчі інтервали для коефіцієнтів регресійної моделі:

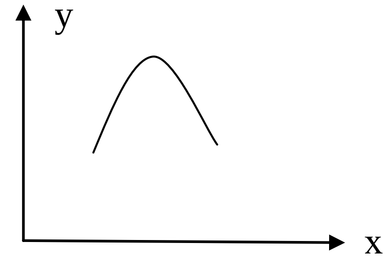
$$\beta_j = b_j \pm t_{1-\alpha;n-p-1} \cdot S_{b_j}, \quad j = \overline{0,p}. \qquad (17)$$

4.Побудова нелінійних економетричних моделей.

Окрім, лінійної при побудові одно факторних регресійних моделей використовуються і інші складніші типи функцій. Розглянемо основні типи кривих, що використовуються при кількісній оцінці в однофакторних моделях:



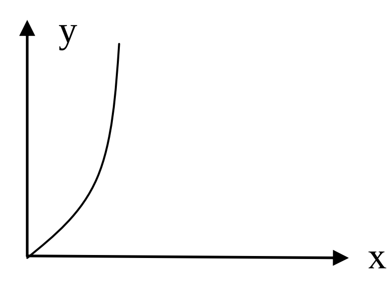
а



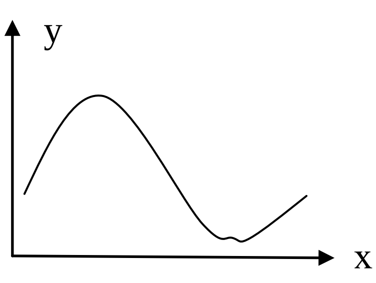
б

а)лінійна $y = \alpha+\beta x+\varepsilon$;

б)поліноміальна $y = \alpha+\beta x+\gamma x^2 +\varepsilon$;

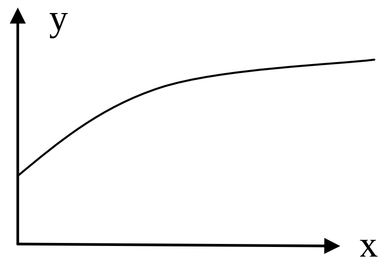


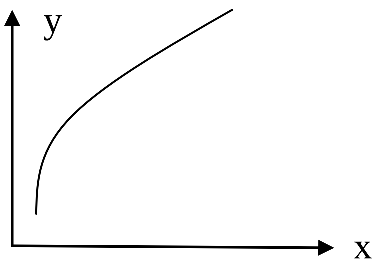
в



г

в)гіпербола $y = \alpha + \beta/x + \varepsilon$; г) $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon$;





д е

д)степенева $y = \alpha x^{\beta}\, \varepsilon$; е)експоненціальна $y = \alpha \beta^{x}\, \varepsilon$.

Окрім розглянутих використовуються й інші типи кривих:

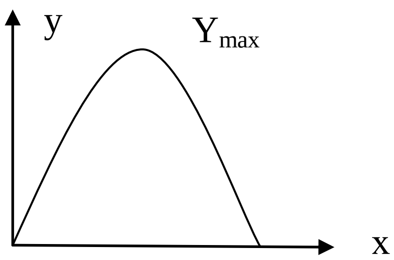
ж)$y = 1/(\alpha+\beta x)+\varepsilon$; з)$y = \alpha+\beta x+\gamma/x +\varepsilon$;

і)$y = \alpha+\beta \ell g x+\varepsilon$ – напівлогарифмічна;

ї)$y = 1 /(\alpha+\beta x+\gamma x^2)$;

к)$y = \gamma /[1+\alpha EXP(- \beta x)]$ – логістична(використовується для опису виробництва нових товарів, росту чисельності населення);

л)$\ell g y = \alpha+\beta x+\gamma x^2$



м

м)Крива Лаффера ($y = a + вx + cx^2$, $c<0$) показує нелінійний зв'язок між податковою ставкою (на прибуток та заробітну плату) та надходжень від податків у бюджет.

Деякі з цих моделей можуть бути лінеаризовані (зведені до лінійних) і для знаходження їх параметрів застосовується метод найменших квадратів. Для інших моделей застосовуються складніші методи оцінки їх параметрів, наприклад метод трьох точок.

Основні типи багатофакторних економетричних моделей:

а)лінійна: $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$;

б)гіпербола $y = 1 /(a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_p x_p) + \varepsilon$;

в)степенева $y = a x_1^{в1} x_2^{в2} \ldots x_p^{вp}\, \varepsilon$;

г)експоненціальна y = a EXP($b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_p x_p$) .

Загальний висновок за темою лекції:

У лекції розглянуто класичну лінійну модель множинної регресії та методику оцінки її параметрів, показники, що використовуються для перевірки моделі на адекватність. Названі основні види нелінійних економетричних моделей, що використовуються у регресійному аналізі.

Питання для самоконтролю:

1. Дайте визначення класичної лінійної моделі множинної регресії.
2. Назвіть основні припущення регресійного аналізу.
3. Охарактеризуйте зміст параметрів лінійної моделі множинної регресії.
4. Дайте визначення коефіцієнта множинної кореляції.
5. Дайте визначення коефіцієнта множинної детермінації.
6. Для чого використовується *F*-критерій Фішера.
7. Для чого використовується *t*-критерій Стьюдента.
8. Що таке довірчі інтервали прогнозу?
9. Які нелінійні види функцій використовуються у регресійному аналізі?

Укладачі: ____________ Стадник Ю.А., доцент, Мищишин О.Я., доцент

(підпис) (ПІБ, посада, науковий ступінь, вчене звання)