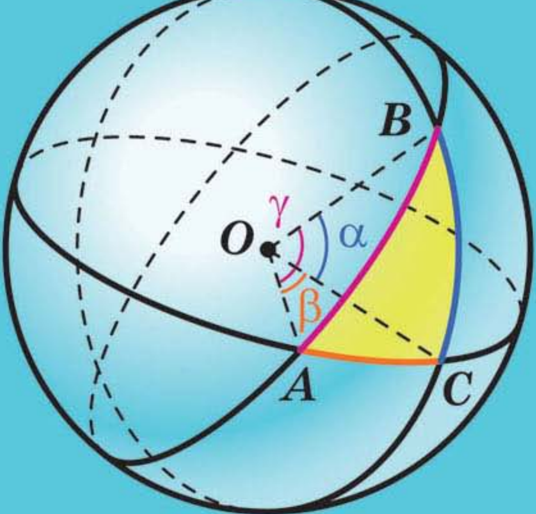
11

ГЕОМЕТРІЯ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

Форзац 1

«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам’ятника науковцеві.

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Форзац 2

Формули для обчислення площ поверхонь та об’ємів геометричних тіл

Площа бічної поверхні циліндра

$$S_б = 2\pi rh$$

Площа бічної поверхні конуса

$$S_б = \pi rl$$

Об’єм призми

$$V = Sh$$

Об’єм піраміди

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

Об’єм зрізаної піраміди

$$V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)h$$

Об’єм циліндра

$$V = \pi r^2 h$$

Об’єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Об’єм зрізаного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)h$$

Об’єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Площа сфери

$$S = 4\pi R^2$$

ГЕОМЕТРІЯ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Авторський колектив:
Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-327-0.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

ISBN 978-966-474-327-0

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом оволодіватимете новими знаннями, і цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

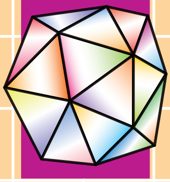
Дерзайте! Бажаємо успіху!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
◄	закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи

Синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



§ 1. МНОГОГРАННИКИ

1. Призма

2. Паралелепіпед

3. Піраміда

4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда

5. Тетраедр

- У цьому параграфі ви уточните й розширите свої знання про многогранники.
- Отримаєте нові відомості про призму, піраміду та їхні окремі види.
- Ознайомитеся з новим для вас многогранником — зрізаною пірамідою.

1. Призма

На рисунку 1.1 зображено знайомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

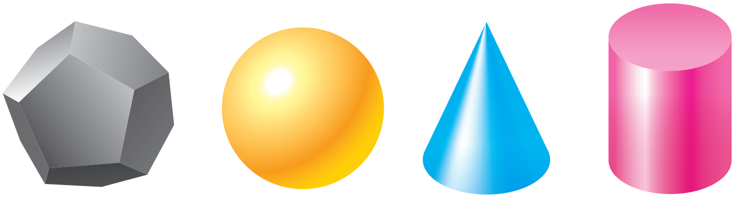
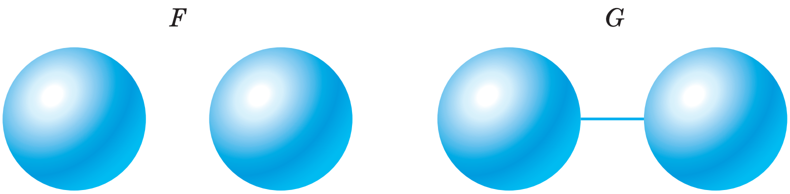


Рис. 1.1

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Тіло ж — обмежена фігура. Проте й не кожна обмежена фігура є тілом. На рисунку 1.2 зображено приклади обмежених фігур F і G, які не є тілами. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

Докладніше про тіло ви зможете прочитати в оповіданні на с. 53–59.



Фігура F — об'єднання двох куль

Фігура G — об'єднання двох куль і відрізка

Рис. 1.2

Означення. **Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.**

Такі елементи многогранника, як грані, ребра та вершини, вам уже відомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3) є сусідніми, оскільки ребро A_1B_1 у них спільне.

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині** M. Наприклад, на рисунку 1.3 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A.

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двогранний кут з ребром AB, грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 1.4).

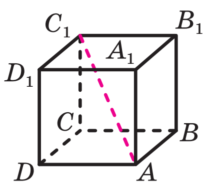


Рис. 1.3

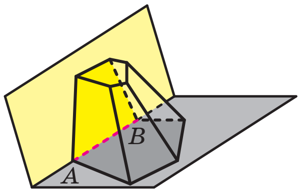


Рис. 1.4

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок AC_1 — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

Означення. Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 1.5 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. Однак навіть якщо кожна грань многогранника — опуклий многокутник, то цей многогранник не обов'язково є опуклим (рис. 1.6).

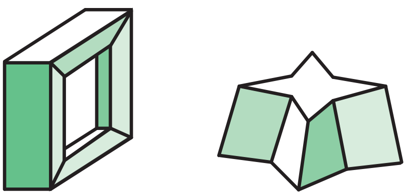


Рис. 1.5

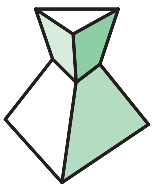
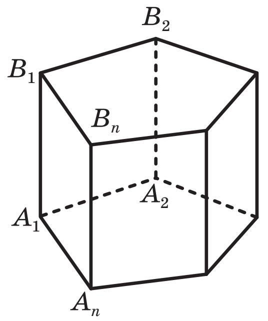
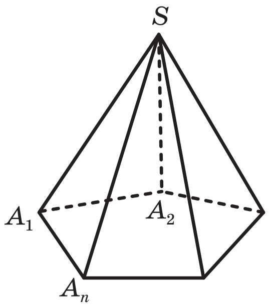


Рис. 1.6

Було підмічено, що кількості вершин $\boldsymbol{B}$, ребер $\boldsymbol{P}$ і граней $\boldsymbol{\Gamma}$ опуклих многогранників підпорядковуються дивовижній закономірності:

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\Gamma} = 2. \quad (1)$$

Справді, розглянемо відомі вам опуклі многогранники та підрахуємо кількості їхніх вершин, ребер і граней. Маємо:

Многогранник	Кількість вершин, $\boldsymbol{B}$	Кількість ребер, $\boldsymbol{P}$	Кількість граней, $\boldsymbol{\Gamma}$	$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\Gamma}$
	$2n$	$3n$	$n + 2$	2
	$n + 1$	$2n$	$n + 1$	2

У 1750 р. видатний математик, академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер довів, що рівність (1) виконується для довільного опуклого многогранника. З того часу це твердження називають теоремою Ейлера.

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Зупинимося докладніше на вже знайомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. **Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*.**

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n-кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 1.7).

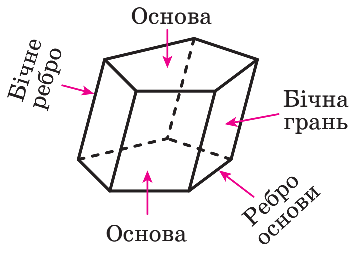


Рис. 1.7

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 1.8). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

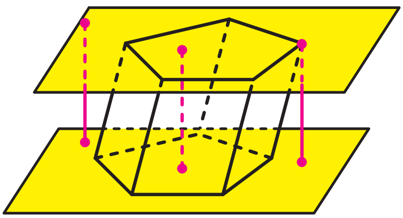


Рис. 1.8

Означення. Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

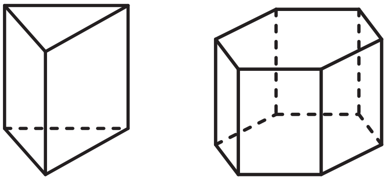


Рис. 1.9

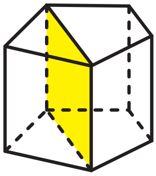


Рис. 1.10

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 1.9 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

Розглянемо опуклу n-кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 1.10). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми**.

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а діагональним перерізом прямої призми — прямокутник (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: «**площа повної поверхні призми**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$\boxed{S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}},}$$

де $S_{\text{п}}$ — площа поверхні призми, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні призми, $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми.

Теорема 1.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.***

Доведення. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довжини ребер основи призми, b — довжина бічного ребра. Тоді $S_{\text{б}} = a_1b + a_2b + \ldots + a_nb = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, b$. Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◄

Твердження теореми 1.1 зручно подати у вигляді однієї з формул:

$$\boxed{\begin{aligned} S_{\text{б}} &= P_{\text{осн}} \cdot b, \\ S_{\text{б}} &= P_{\text{осн}} \cdot h, \end{aligned}}$$

де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра, h — довжина висоти призми.

Зв'язок між многогранниками, вивченими в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 1.11.

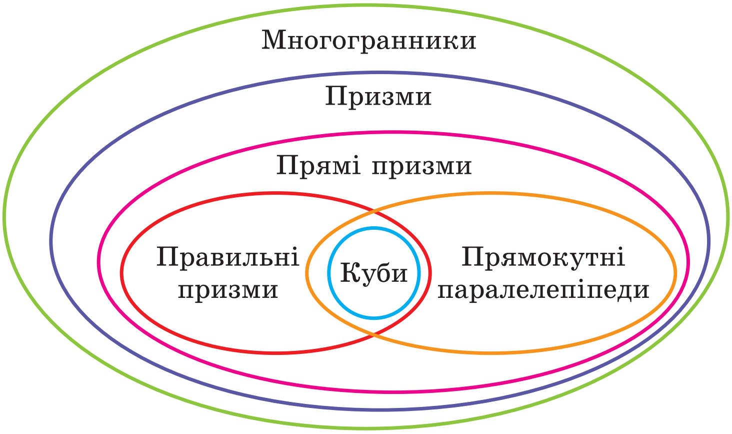


Рис. 1.11

Задача 1. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Доведіть, що площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перерізу та бічного ребра.

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших n-кутних призм, де $n > 3$, доведення буде аналогічним.

Нехай трикутник MNP — переріз, про який ідеться в умові задачі (рис. 1.12). Доведемо, що $S_б = P_{MNP} \cdot AA_1$. Маємо: $AA_1 \perp MPN$. Отже, $AA_1 \perp MP$. Тоді відрізок MP — висота паралелограма AA_1B_1B. Аналогічно можна довести, що відрізки PN і NM — відповідно висо́ти паралелограмів CC_1B_1B і CC_1A_1A.

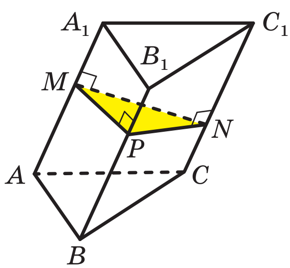


Рис. 1.12

Оскільки площа паралелограма дорівнює добутку висоти та сторони паралелограма, до якої проведено висоту, то можна записати:

$$S_б = MP \cdot AA_1 + PN \cdot BB_1 + NM \cdot CC_1.$$

Оскільки $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то

$$S_б = MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 =$$
$$= (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MPN} \cdot AA_1. ◄$$

Задача 2. Трикутник ABC, у якому $AB = 2\sqrt{19}$ см, $BC = 2$ см, $AC = 8$ см, є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.13). Знайдіть кут між прямими CB_1 і AC_1, якщо висота призми дорівнює 4 см.

Розв'язання. Перший спосіб. Розмістимо поруч з даною трикутною призмою рівну їй призму $ABDA_1B_1D_1$ так, щоб утворилася пряма чотирикутна призма, основа якої — паралелограм (рис. 1.14). Оскільки $AD = B_1C_1$ і $AD \parallel B_1C_1$, то чотирикутник ADB_1C_1 — паралелограм. Звідси $AC_1 \parallel DB_1$. Отже, кут між прямими CB_1 і AC_1 дорівнює куту між прямими CB_1 і DB_1.

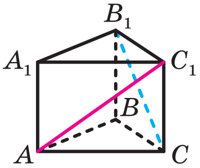


Рис. 1.13

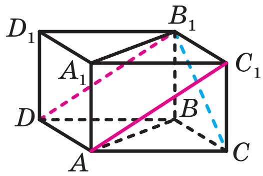


Рис. 1.14

За теоремою про властивість сторін і діагоналей паралелограма можна записати: $AB^2 + DC^2 = 2BC^2 + 2AC^2$.

Звідси $76 + DC^2 = 8 + 128$; $DC^2 = 60$.

Із трикутника DBB_1 маємо: $DB_1^2 = DB^2 + BB_1^2 = 64 + 16 = 80$.

Із трикутника CBB_1 маємо: $CB_1^2 = CB^2 + BB_1^2 = 4 + 16 = 20$.

До трикутника DB_1C застосуємо теорему косинусів: $DC^2 = DB_1^2 + CB_1^2 - 2DB_1 \cdot CB_1 \cos \angle DB_1C$.

Отримуємо: $60 = 80 + 20 - 2\sqrt{80}\sqrt{20} \cos \angle DB_1C$.

Звідси $\cos \angle DB_1C = \frac{1}{2}$. Таким чином, шуканий кут дорівнює $60°$.

Другий спосіб. «Поставимо» на дану призму рівну їй призму $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ (рис. 1.15). Оскільки $CB_1 \parallel C_1B_2$, то шуканий кут дорівнює куту між прямими C_1A і C_1B_2. Знайшовши сторони трикутника AC_1B_2, можна знайти косинус кута AC_1B_2. Завершіть розв'язання самостійно. ◄

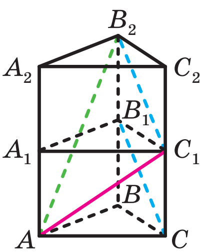


Рис. 1.15

Ви не раз бачили моделі многогранників, виготовлених із різних матеріалів — паперу, картону, фанери, пластмаси тощо (рис. 1.16).

Якщо таку модель розрізати по деяких ребрах і розгорнути на площину так, щоб утворилася модель многокутника, то цей многокутник називають **розгорткою многогранника**.

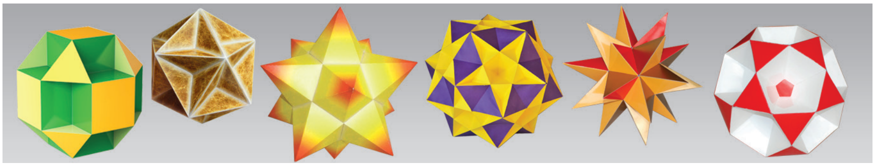
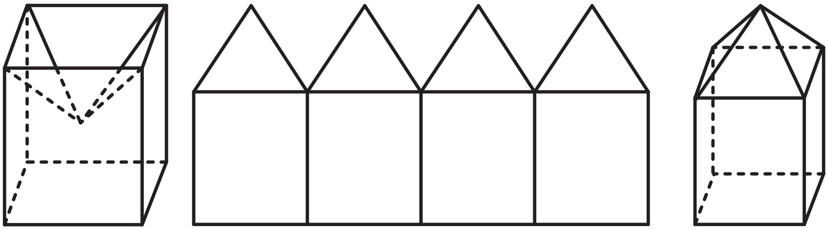


Рис. 1.16

У курсі математики 6 класу ви ознайомилися з розгортками прямокутного паралелепіпеда, зокрема куба.

На рисунку 1.17, *а* зображено многогранник, на рисунку 1.17, *б* — його розгортку. Зауважимо, що із цієї розгортки можна «склеїти», наприклад, і многогранник, зображений на рисунку 1.17, *в*. Тому якщо ми хочемо за розгорткою відновити многогранник, то потрібно мати схему її склеювання.



а *б* *в*

Рис. 1.17

Використання розгортки многогранника є ефективним методом розв'язування цілої низки задач, де потрібно знайти найменшу відстань по поверхні між двома точками многогранника.

Задача 3. На середині ребра B_1C_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили точку M. Відомо, що $AB = \sqrt{3}$ см, $AA_1 = 2$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками A і M по поверхні призми.

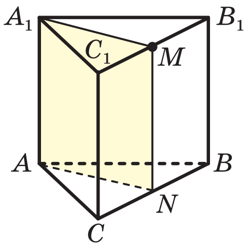


Рис. 1.18

Розв'язання. Зауважимо, що площина AA_1M є площиною симетрії правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.18).

Це зауваження дає змогу під час пошуку найменшої відстані між точками A і M по поверхні призми обмежитися розглядом ламаних трьох видів (рис. 1.19):

1) ламані AXM, де X — точка на відрізку CN, N — середина BC;

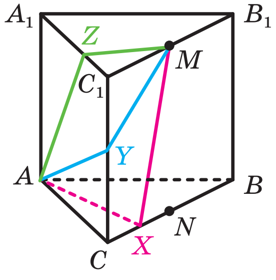


Рис. 1.19

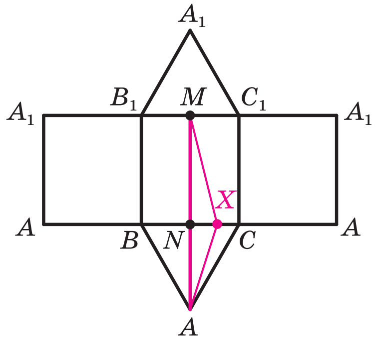


Рис. 1.20

2) ламані AYM, де Y — точка на ребрі CC_1;

3) ламані AZM, де Z — точка на ребрі A_1C_1.

Виходитимемо з таких міркувань. Нехай точки X_0, Y_0 і Z_0 такі, що ламані AX_0M, AY_0M і AZ_0M мають найменші довжини серед ламаних першого, другого та третього виду відповідно. Тоді найменша із цих трьох довжин і буде шуканою відстанню.

Знайти довжину ламаної AX_0M можна, розглянувши розгортку, зображену на рисунку 1.20.

Оскільки точки A, N і M лежать на одній прямій, то

$$AX + XM \geqslant AN + NM = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} \text{ см.}$$

Тут точка X_0 збігається з точкою N.

Для того щоб знайти довжини ламаних AY_0M і AZ_0M, розглянемо розгортки, зображені на рисунках 1.21 і 1.22.

Якщо точки A, Y_0, M лежать на одній прямій, то $AY + YM \geqslant$ $\geqslant AM = AY_0 + Y_0M$ (рис. 1.21).

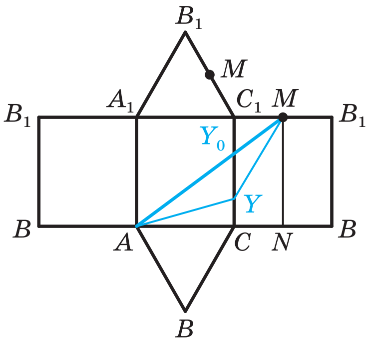


Рис. 1.21

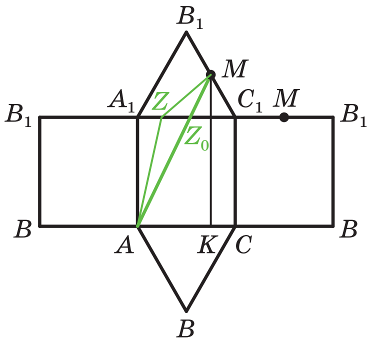


Рис. 1.22

Довжину ламаної AY_0M можна знайти, обчисливши гіпотенузу прямокутного трикутника ANM.

Оскільки $MN = 2$ см, $AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см, то $AM = \sqrt{4 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{43}}{2}$ см.

Якщо точки A, Z_0, M лежать на одній прямій, то $AZ + ZM \geqslant \geqslant AM = AZ_0 + Z_0M$ (рис. 1.22).

Довжину ламаної AZ_0M знайдемо, обчисливши гіпотенузу прямокутного трикутника AKM, де точка K — основа перпендикуляра, опущеного з точки M на відрізок AC. Нескладно визначити (зробіть це самостійно), що $AK = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ см, $MK = \frac{11}{4}$ см.

Тоді $AM = \sqrt{\frac{27}{16} + \frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ см.

Залишається вибрати найменше із чисел: $\frac{7}{2}$, $\frac{\sqrt{43}}{2}$, $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{37}}{2}$ см. ◄

Вивчаючи многогранники, неможливо не згадати прізвище видатного українського математика Георгія Феодосійовича Вороного. Досягнення Г. Ф. Вороного знайшли широке застосування практично в усіх природничих науках: фізиці, хімії, біології тощо. Наприклад, поліедри[1] Вороного—Діріхле (рис. 1.23) використовують для аналізу структури кристалів.

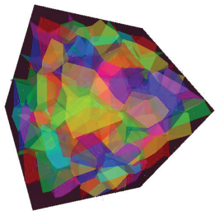


Рис. 1.23

Георгій Феодосійович Вороний
(1868–1908)

Народився в с. Журавка (нині Чернігівська область). Закінчив Петербурзький університет, був професором Варшавського університету. Г. Ф. Вороний зробив важливі відкриття в геометрії многогранників. Термін «діаграма Вороного» став настільки поширеним у дослідженнях у галузі геометричних алгоритмів, що деякі фахівці пов’язують народження обчислювальної геометрії саме із цим об’єктом.

[1] **Поліедром** називають об’єднання многогранників.

1. Що називають многогранником?
2. Які грані многогранника називають сусідніми?
3. Що називають двогранним кутом многогранника?
4. Який многогранник називають опуклим?
5. Що називають n-кутною призмою?
6. Що називають висотою призми?
7. Яку призму називають прямою? похилою?
8. Яку призму називають правильною?
9. Що називають діагональним перерізом призми?
10. Що називають площею поверхні призми? бічної поверхні призми?
11. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?

ВПРАВИ

1.1.° Призма має 12 граней. Який многокутник лежить в її основі?

1.2.° Доведіть твердження: якщо дві сусідні грані призми перпендикулярні до площини її основи, то дана призма є прямою. Чи буде дане твердження правильним, якщо з його формулювання вилучити слово «сусідні»?

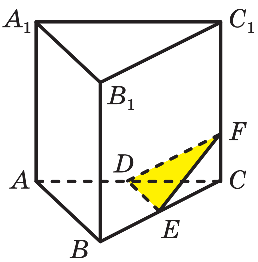


Рис. 1.24

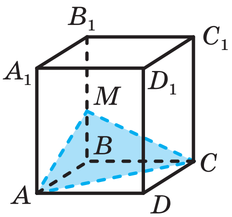


Рис. 1.25

1.3.° Доведіть, що в будь-якій призмі кількість вершин є парним числом, а кількість ребер — числом, кратним 3.

1.4.° Точки D і E — середини ребер AC і BC правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.24). Площина, яка проходить через пряму DE та утворює з площиною ABC кут $30°$, перетинає ребро CC_1 у точці F. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

1.5.° Через діагональ AC основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут $45°$ і перетинає ребро BB_1 у точці M (рис. 1.25). Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.

1.6.° У похилій чотирикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо даний переріз є ромбом зі стороною 5 см, а бічне ребро призми дорівнює 8 см.

1.7.° У похилій трикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть бічне ребро призми, якщо даний переріз є прямокутним трикутником з катетами 9 см і 12 см, а площа бічної поверхні призми дорівнює 288 см^2.

1.8.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a, а кут між діагоналлю призми та бічною гранню становить $30°$. Знайдіть:

1) висоту призми;
2) кут між діагоналлю призми та площиною основи.

1.9.° Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a.

1.10.° Основа прямої призми — ромб зі стороною a та гострим кутом α. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть діагоналі призми.

1.11.° Основою прямої призми, діагоналі якої дорівнюють 10 см і 16 см, є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо її висота дорівнює 4 см.

1.12.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Через пряму CC_1 проведено площину, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає ребро AB у точці D. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо $AD = 18$ см, $BD = 2$ см, а висота призми дорівнює 8 см.

1.13.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, відрізок CM — медіана трикутника ABC. Висота призми дорівнює гіпотенузі її основи. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через прямі CC_1 і CM, якщо $AC = 30$ см, $BC = 40$ см.

1.14.• Кожне ребро правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a. Знайдіть:

1) площу перерізу призми, який проходить через точки A, B і C_1;
2) кут між площиною даного перерізу та площиною основи призми.

1.15.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Площина, яка проходить через пряму AC, утворює з площиною основи призми кут β і перетинає ребро BB_1 у точці D. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.

1.16.• Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α, більша діагональ ромба дорівнює d. Через меншу діагональ нижньої основи та вершину гострого кута верхньої основи провели площину, яка утворює з площиною нижньої основи призми кут β. Знайдіть:
1) висоту призми;
2) площу утвореного перерізу призми.

1.17.• Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 2 см, а бічне ребро — 6 см. Діагоналі бічної грані AA_1B_1B перетинаються в точці D. Знайдіть кут між прямою CD і площиною ABC.

1.18.• Сторона основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см, а бічне ребро — $\sqrt{5}$ см. Діагоналі бічної грані CC_1D_1D перетинаються в точці M. Знайдіть кут між прямою AM і площиною ABC.

1.19.• Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?

1.20.• Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.21.• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, основи якої BC і AD відповідно дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні призми;
2) площу перерізу призми, який проходить через ребра AD і B_1C_1.

1.22.• Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 288 см^2. Знайдіть сторону основи та висоту призми.

1.23.• Площини граней AA_1B_1B і AA_1C_1C похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярні, $AA_1 = 9$ см. Відстань між прямими AA_1 і BB_1 дорівнює 8 см, а між прямими AA_1 і CC_1 — 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.24.• Двогранний кут при одному з бічних ребер похилої трикутної призми дорівнює 120°. Відстань від даного ребра до одного з решти бічних ребер дорівнює 16 см, а до другого — 14 см.

Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 840 см^2.

1.25.$^{\bullet}$ Площа основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює S. Площа трикутника ABC_1 дорівнює S_1. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.26.$^{\bullet}$ У правильній призмі $ABCA_1B_1C_1$ площа трикутника ABC_1 дорівнює S. Площина ABC_1 утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.27.$^{\bullet}$ Висота правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 6 см. Точки D і E — середини ребер A_1C_1 і B_1C_1 відповідно. Площина, яка проходить через прямі AB і DE, утворює кут $60°$ із площиною ABC. Знайдіть площу перерізу призми цією площиною.

1.28.$^{\bullet}$ Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а висота призми — 6 см. Через діагональ основи проведено переріз призми, паралельний діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу.

1.29.$^{\bullet}$ Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h. У двох сусідніх бічних гранях проведено дві діагоналі, які мають спільний кінець. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі, якщо кут між ними дорівнює α.

1.30.$^{\bullet}$ Висота правильної трикутної призми дорівнює h. Кут між діагоналями двох бічних граней, які мають спільний кінець, дорівнює α. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі.

1.31.$^{\bullet\bullet}$ Кожне ребро похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a. Ребро AA_1 утворює з кожним із ребер AB і AC кут $45°$.

1) Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.
2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.32.$^{\bullet\bullet}$ Кожне ребро похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a, проекцією точки A_1 на площину ABC є центр трикутника ABC.

1) Доведіть, що грань BB_1C_1C є прямокутником.
2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.33.$^{\bullet\bullet}$ Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, у якому $AB = BC = 10$ см і $AC = 12$ см. Бічне ребро призми дорівнює 4 см. Через ребро AC проведено переріз, що утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу цього перерізу.

1.34.$^{\bullet\bullet}$ Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 4 см, бічне ребро — 3 см. Через ребро AB проведено переріз, який утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу цього перерізу.

1.35.•• Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Проекцією вершини A_1 на площину ABC є середина ребра AC. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо $AA_1 = 2$ см, $\angle A_1AC = 75°$ і двогранний кут з ребром AA_1 дорівнює $60°$.

1.36.•• Висота правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює h. Знайдіть площу трикутника BA_1C, якщо $\angle BA_1C = \alpha$.

1.37.•• Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Проекцією вершини B_1 на площину ABC є вершина C. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо $BC = 1$ см, $\angle B_1BC = 45°$ і двогранний кут з ребром BB_1 дорівнює $60°$.

1.38.•• Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$), бічні грані призми, що містять ребра AC і BC, — квадрати. Знайдіть кут між прямими AC_1 і CB_1.

1.39.•• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть кут між прямими AB_1 і CD_1, якщо $AA_1 = AB = BC = CD = 0,5\ AD$.

1.40.•• Усі грані опуклого многогранника є чотирикутниками. Кількість ребер многогранника дорівнює 12. Знайдіть кількість вершин і граней.

1.41.* Точка M — середина ребра AB прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка X належить прямій CM. Знайдіть найменше значення площі трикутника BXC_1, якщо $AC = BC = 9$ см, $AB = 10$ см і $CC_1 = 12$ см.

1.42.* Точки D і K — середини відповідно ребер BC і AA_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка X належить прямій BK. Знайдіть найменше значення площі трикутника AXD, якщо $AB = 6$ см і $AA_1 = 8$ см.

1.43.* У правильній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основи та бічне ребро дорівнюють відповідно 1 см і $\sqrt{3}$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками A і C_1 по поверхні призми.

1.44.* У правильній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основи та бічне ребро дорівнюють відповідно 2 см і $\sqrt{3}$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками B і D_1 по поверхні призми.

1.45.* Точка M — середина ребра B_1C_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$. Відомо, що $AB = a$, $AA_1 = b$. Знайдіть найменшу відстань між точками A і M по поверхні призми.

1.46.* Усі грані опуклого многогранника є правильними п'ятикутниками або правильними шестикутниками. Знайдіть кількість граней, які є п'ятикутниками.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.47. Одне коло описане навколо рівностороннього трикутника ABC, а друге дотикається до прямих AB і AC і першого кола. Знайдіть відношення радіусів цих кіл.

1.48. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів CAD і CBD перетинаються в точці, яка належить стороні CD. Доведіть, що бісектриси кутів ACB і ADB перетинаються в точці, яка належить стороні AB.

2. Паралелепіпед

Означення. Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

На рисунку 2.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

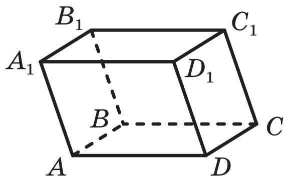


Рис. 2.1

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда**. Наприклад, на рисунку 2.1 грані AA_1B_1B і DD_1C_1C є протилежними.

Оскільки $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (рис. 2.1), то за ознакою паралельності площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

На рисунку 2.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

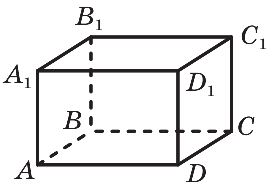


Рис. 2.2

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 2.2 довжини ребер AB, AD і AA_1 є вимірами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри є рівними. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 2.3.

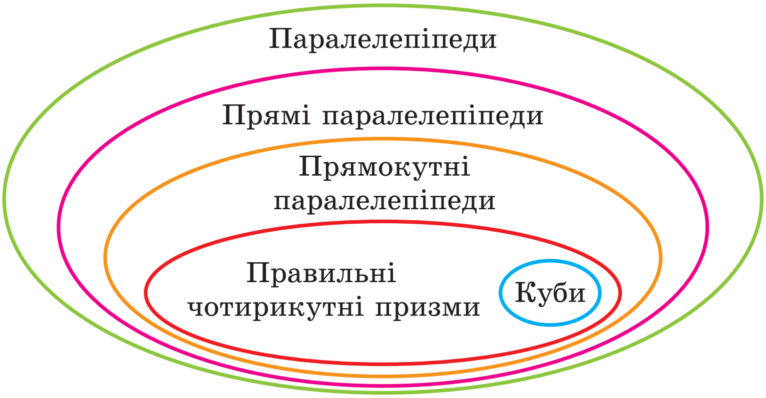


Рис. 2.3

Розглянемо деякі властивості паралелепіпеда.

Теорема 2.1. ***Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.***

Доведення. Розглянемо діагональний переріз AA_1C_1C паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.4). У паралелограмі AA_1C_1C проведемо діагоналі AC_1 і A_1C. Ці відрізки також є діагоналями даного паралелепіпеда. Нехай проведені діагоналі перетинаються в точці O. Ця точка є серединою кожної з діагоналей AC_1 і A_1C.

Доведемо, що точка O є також серединою кожної з двох інших діагоналей BD_1 і B_1D даного паралелепіпеда.

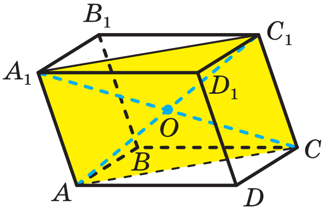


Рис. 2.4

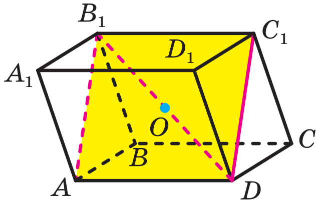


Рис. 2.5

Розглянемо чотирикутник AB_1C_1D (рис. 2.5). Він є паралелограмом (доведіть це самостійно) з діагоналями AC_1 і B_1D. Тоді точка O є серединою відрізка B_1D.

Розглянувши діагональний переріз BB_1D_1D, можна аналогічно довести, що точка O є серединою діагоналі BD_1. ◀

Наслідок 1. ***Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.***

Наслідок 2. ***Відрізки, які сполучають точки перетину діагоналей протилежних граней паралелепіпеда, перетинаються в одній точці*** (рис. 2.6).

Доведіть ці наслідки самостійно.

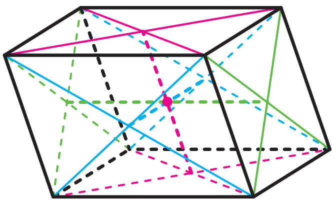


Рис. 2.6

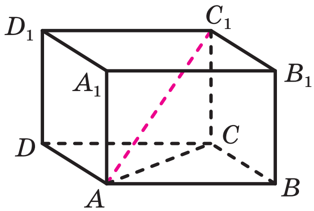


Рис. 2.7

Теорема 2.2. ***Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.***

Доведення. Розглянемо діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.7). Доведемо, що

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Оскільки трикутник ABC прямокутний ($\angle ABC = 90°$), то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Оскільки $BC = AD$, то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому $C_1C \perp ABC$. Отже, трикутник ACC_1 прямокутний ($\angle ACC_1 = 90°$). Тоді $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Оскільки $CC_1 = AA_1$, то

$$AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2.$$

Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◀

Задача 1. Доведіть, що діагональ A_1C паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинає площину DC_1B у точці перетину медіан трикутника DC_1B.

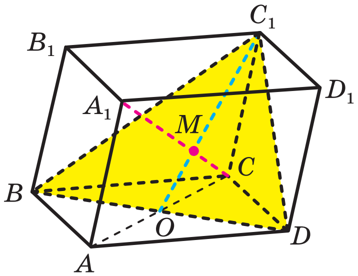


Рис. 2.8

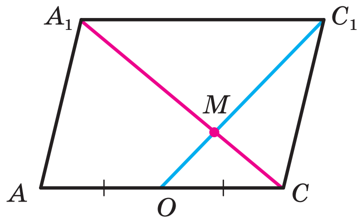


Рис. 2.9

Розв'язання. Нехай діагоналі нижньої основи паралелепіпеда перетинаються в точці O. Тоді відрізок C_1O є медіаною трикутника DC_1B (рис. 2.8). Нехай діагональ A_1C перетинає трикутник DC_1B у точці M.

Розглянемо паралелограм AA_1C_1C (рис. 2.9). Оскільки $OC = \frac{1}{2}A_1C_1$, то трикутники OMC і C_1MA_1 подібні з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. Звідси $C_1M = 2MO$. Отже, точка M є точкою перетину медіан трикутника DC_1B. ◄

У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведемо діагоналі його граней так, як показано на рисунку 2.10. Проведені відрізки є ребрами тетраедра A_1BC_1D. Кожне з ребер цього тетраедра лежить в одній із шести граней паралелепіпеда, причому мимобіжні ребра лежать у паралельних гранях. Говоритимемо, що паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **описано навколо тетраедра** A_1BC_1D.

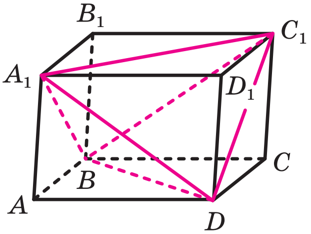


Рис. 2.10

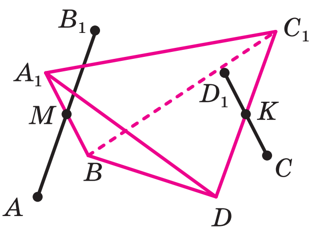


Рис. 2.11

Покажемо, як навколо довільного тетраедра можна описати паралелепіпед.

Розглянемо тетраедр A_1BC_1D. Через середини M і K мимобіжних ребер A_1B і C_1D проведемо відрізки AB_1 і CD_1 так, що $AB_1 \parallel C_1D$ і $AB_1 = C_1D$, а також $CD_1 \parallel A_1B$ і $CD_1 = A_1B$, причому $AM = MB_1$ і $CK = KD_1$ (рис. 2.11). Тоді точки A, B, C, D, A_1, B_1, C_1 і D_1 є вершинами паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, описаного навколо даного тетраедра A_1BC_1D (рис. 2.10).

Задача 2. У тетраедрі $ABCD$ відомо, що $AB = CD = 6$ см, $AD = CB = 8$ см, $AC = 7$ см, $BD = \sqrt{30}$ см. Знайдіть відстань між прямими AC і BD.

Розв'язання. Опишемо навколо даного тетраедра паралелепіпед $MDKBCEAP$ (рис. 2.12). Оскільки $AB = CD$, то в паралелограмах $MCED$ і $BPAK$ діагоналі є рівними. Отже, ці паралелограми є прямокутниками. Аналогічно можна довести, що прямокутниками є також паралелограми $MCPB$ і $DEAK$. Отже, описаний паралелепіпед є прямим. Тому шукана відстань дорівнює його бічному ребру.

Нехай $AK = x$, $AP = y$, $AE = z$.

Маємо: $x^2 + y^2 = AB^2 = 36$, $x^2 + z^2 = BC^2 = 64$.

Чотирикутник $CEAP$ — паралелограм. Тоді можна записати: $CA^2 + PE^2 = 2AP^2 + 2AE^2$, звідки маємо: $2y^2 + 2z^2 = 79$.

Отримали систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x^2 + z^2 = 64, \\ 2y^2 + 2z^2 = 79. \end{cases}$

Звідси встановлюємо, що $x = \dfrac{11}{2}$.

Відповідь: 5,5 см. ◄

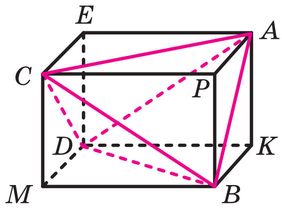


Рис. 2.12

?

1. Що називають паралелепіпедом?
2. Які грані паралелепіпеда називають протилежними?
3. Який паралелепіпед називають прямим?
4. Який паралелепіпед називають прямокутним?
5. Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
6. Яку властивість мають діагоналі паралелепіпеда?
7. Сформулюйте теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.

ВПРАВИ

2.1.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.2.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота — 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

2.3.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.13), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою DC_1 і площиною BCC_1;
2) між прямою B_1D і площиною ABB_1.

2.4.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.13), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою DC_1 і площиною $A_1B_1C_1$;
2) між прямою B_1D і площиною ABC.

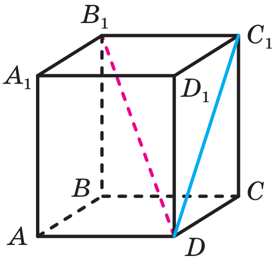


Рис. 2.13

2.5.° Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

2.6.° Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як 1 : 2 : 2, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 6 см.

2.7.• Із чотирьох рівних кубів, ребро яких дорівнює 1 см, склали прямокутний паралелепіпед. Чому дорівнює площа повної поверхні цього паралелепіпеда?

2.8.• Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом α і меншою діагоналлю d. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.9.• Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною 6 см і кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі його основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.10.• Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 4 см, а один із кутів основи дорівнює 45°. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.11.$^{\bullet}$ Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см, а один із кутів основи дорівнює $30°$. Площа діагонального перерізу паралелепіпеда, який проходить через меншу діагональ основи, дорівнює 8 см². Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.12.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли діагоналі прямого паралелепіпеда рівні, то даний паралелепіпед є прямокутним.

2.13.$^{\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$ зі стороною 6 см, $\angle BAD = 45°$. Через пряму AD і вершину B_1 проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут $60°$. Знайдіть:
1) бічне ребро паралелепіпеда;
2) площу перерізу паралелепіпеда площиною AB_1D.

2.14.$^{\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є паралелограм $ABCD$, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 30°$. Кут між площинами ABC і A_1CD дорівнює $45°$. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

2.15.$^{\bullet}$ Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α, а з однією з бічних граней — кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.16.$^{\bullet}$ Одна зі сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює a. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α, а з даною стороною основи — кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.17.$^{\bullet}$ Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворює з площинами ABC, ABB_1 і ADD_1 відповідно кути α, β і γ. Доведіть, що $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

2.18.$^{\bullet}$ Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворює з ребрами AB, AD і AA_1 відповідно кути α, β і γ. Доведіть, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2.19.$^{\bullet}$ Перерізом паралелепіпеда є n-кутник ($n > 3$). Доведіть, що у цього n-кутника є паралельні сторони.

2.20.$^{\bullet}$ Чи може перерізом паралелепіпеда бути правильний п'ятикутник?

2.21.$^{\bullet\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.22.$^{\bullet\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S. Площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

2.23.•• Через діагональ BD основи $ABCD$ і вершину C_1 прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює кут $30°$ із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо $BC = 8$ см, $CD = 4$ см, $\angle BCD = 60°$.

2.24.•• Основа $ABCD$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом. Вершина A_1 рівновіддалена від усіх вершин основи $ABCD$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро паралелепіпеда — 6 см.

2.25.•• Основа $ABCD$ похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом, а площини граней AA_1B_1B і CC_1D_1D перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані AA_1D_1D, якщо кожне ребро паралелепіпеда дорівнює 8 см.

2.26.•• Усі грані паралелепіпеда є ромбами з гострими кутами, що дорівнюють $60°$. Знайдіть відстань між паралельними гранями паралелепіпеда, якщо ребро паралелепіпеда дорівнює a.

2.27.•• Основою паралелепіпеда є ромб, сторона якого дорівнює a, а гострий кут — $60°$. Бічні грані паралелепіпеда — ромби з гострими кутами, що дорівнюють $45°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.28.•• Основою паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$. Відомо, що $AA_1 = a$, $\angle A_1AB = \alpha$, $\angle A_1AD = \beta$. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.29.•• Ребро куба дорівнює 1 см. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки простору до вершин куба не менша ніж $4\sqrt{3}$ см.

2.30.* У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AD = BC = 9$ см, $AC = BD = 10$ см, $AB = \sqrt{57}$ см і $CD = 7$ см. Знайдіть відстань між прямими AB і CD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.31. Дано квадрат $ABCD$. Побудовано коло із центром у вершині D, що проходить через вершини A і C. Через середину M сторони AB проведено дотичну до цього кола, яка перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відношення $BK : KC$.

2.32. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона — 30 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

3. Піраміда

Означення. Многогранник, одна грань якого — n-кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають *n-кутною пірамідою* (рис. 3.1).

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди; n-кутник, про який ідеться в означенні, називають основою піраміди; його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 3.1).

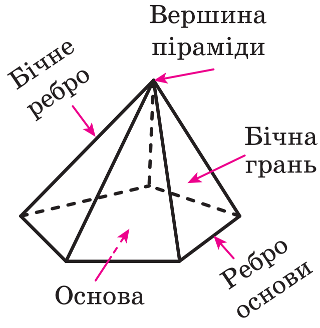


Рис. 3.1

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи (рис. 3.2).

Розглянемо опуклу n-кутну піраміду ($n > 3$). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає площину основи піраміди по діагоналі (рис. 3.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

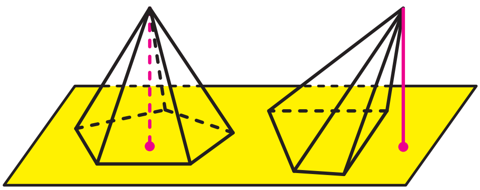


Рис. 3.2

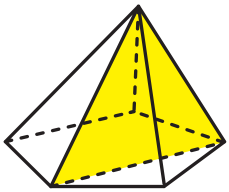


Рис. 3.3

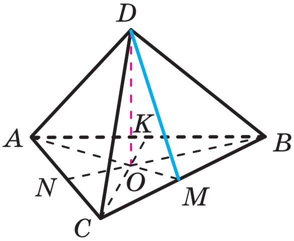


Рис. 3.4

Означення. Піраміду називають *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

На рисунку 3.4 зображено правильну трикутну піраміду $DABC$ з основою ABC. Трикутник ABC є рівностороннім. Проекцією вершини D на площину ABC є центр трикутника — точка O.

Щоб знайти зображення точки O, треба побудувати точку перетину медіан AM, BN і CK трикутника ABC.

На рисунку 3.5 зображено правильну чотирикутну піраміду $EABCD$. Чотирикутник $ABCD$ є квадратом, точка O — його центр, відрізок EO — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проекцією вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи є точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

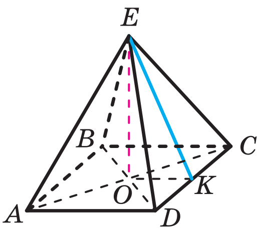


Рис. 3.5

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром.**

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники (доведіть це самостійно).

Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 3.4 проведено відрізок DM, де M — середина ребра BC. Оскільки трикутник BCD — рівнобедрений з основою BC, то відрізок DM — його висота. Отже, відрізок DM — апофема правильної трикутної піраміди $DABC$.

На рисунку 3.5 відрізок EK, де точка K — середина ребра DC, є апофемою правильної чотирикутної піраміди $EABCD$.

Усі апофеми правильної піраміди рівні (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}},$$

де $S_{\text{п}}$ — площа поверхні піраміди, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди.

Теорема 3.1. ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.***

Доведення. Розглянемо правильну n-кутну піраміду з ребром основи, що дорівнює a, та апофемою, що дорівнює d. Тоді площа бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}ad$. Оскільки всі n бічних граней правильної n-кутної піраміди — рівні трикутники, то площа бічної поверхні дорівнює $\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n$, тобто $S_б = \left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n = \frac{1}{2}(an)\cdot d$. Оскільки добуток an дорівнює периметру основи, то теорему доведено. ◄

Твердження теореми 3.1 зручно подати у вигляді формули

$$\boxed{\boldsymbol{S_б = \frac{1}{2}P_{осн}\cdot d,}}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи піраміди, d — довжина апофеми правильної піраміди.

Із доведеного в ключових задачах пп. 11–13 підручника «Геометрія-10»[1] випливають такі властивості піраміди:

1) *якщо бічні ребра піраміди рівні або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди*;
2) *якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою піраміди.*

Доведіть ці властивості самостійно.

Задача 1. Доведіть, що коли всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи дорівнюють α, то площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою $S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$.

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної піраміди. Для інших n-кутних пірамід доведення буде аналогічним.

На рисунку 3.6 відрізок DO — висота піраміди $DABC$. Трикутники AOB, BOC і COA є відповідно ортогональними проекціями на площину основи піраміди трикутників ADB, BDC і CDA.

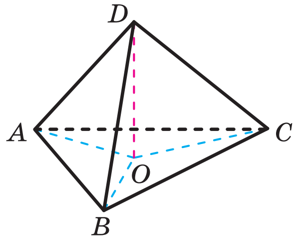


Рис. 3.6

[1] Тут і далі посилання на підручник: «А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2018».

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати: $S_{AOB} = S_{ADB}\cos\alpha$, $S_{BOC} = S_{BDC}\cos\alpha$ і $S_{COA} = S_{CDA}\cos\alpha$. Додавши почленно ліві та праві частини записаних рівностей, отримаємо: $S_б = S_{осн}\cos\alpha$.

Звідси $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. ◄

Чи збережеться сформульована вище властивість (2), якщо умову рівності двогранних кутів при ребрах основи піраміди замінити умовою рівності кутів, що утворюють бічні грані піраміди з її основою[1]?

Щоб відповісти на це запитання, звернемося до рисунка 3.7. Точка O є центром зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до прямих AB, BC і CA відповідно в точках M, K і N (рис. 3.8). Вершина D піраміди $DABC$ проектується в точку O. Оскільки $OM \perp AB$, то за теоремою про три перпендикуляри отримуємо, що $DM \perp AB$. Отже, кут між гранню DAB і основою ABC дорівнює величині кута DMO. Аналогічно доводимо, що величини кутів DNO і DKO дорівнюють відповідно кутам, які утворюють грані DBC і DAC з основою ABC.

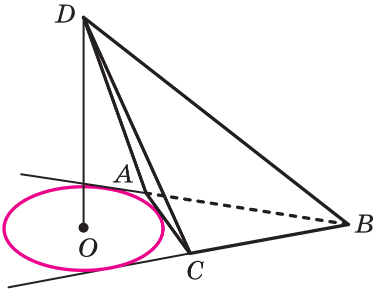


Рис. 3.7

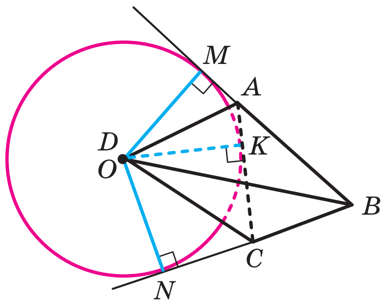


Рис. 3.8

Трикутники DMO, DNO і DKO є рівними за двома катетами. Звідси $\angle DMO = \angle DNO = \angle DKO$. Таким чином, на рисунку 3.7 зображено піраміду, бічні грані якої утворюють рівні кути з основою, але при цьому її вершина не проектується в центр вписаного кола основи.

Отже, відповідь на поставлене вище запитання є заперечною.

[1] Нагадаємо, що кутом між двома многокутниками називають кут між площинами, які містять ці многокутники.

Насправді має місце такий факт:

якщо бічні грані піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, то проекція вершини піраміди на площину основи є точкою, рівновіддаленою від усіх прямих, що містять ребра основи.

Задача 2. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною, що дорівнює a. Кожна бічна грань утворює з основою кут α. Знайдіть висоту піраміди.

Вказівка. Розгляньте два випадки: проекція вершини піраміди на площину основи належить основі або їй не належить.

Відповідь: $\frac{a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{6}$ або $\frac{a\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$. ◄

?

1. Що називають пірамідою?
2. Що називають висотою піраміди?
3. Який переріз називають діагональним перерізом піраміди?
4. Яку піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної піраміди?
6. Що називають площею поверхні піраміди? бічної поверхні піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?

ВПРАВИ

3.1.° Основою піраміди $MABCD$ є паралелограм $ABCD$, діагональ BD якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро MA, що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть ребро MD.

3.2.° Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей — 24 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 16 см.

3.3.° Бічне ребро правильної шестикутної піраміди, що дорівнює b, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через більшу діагональ основи.

3.4.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.

3.5.° Доведіть, що в правильній піраміді:
1) бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи;
2) двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними.

3.6.° Доведіть, що коли вершина піраміди проектується в центр вписаного кола основи, то всі двогранні кути при ребрах основи піраміди є рівними.

3.7.° Доведіть, що коли вершина піраміди проектується в центр описаного кола основи, то всі бічні ребра піраміди утворюють рівні кути з площиною основи.

3.8.° Бічне ребро правильної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.9.° Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть кут між бічним ребром піраміди та площиною її основи.

3.10.• Точки D, E і F — середини ребер AB, AM і MC правильної піраміди $MABC$ відповідно, $AB = 8$ см, $AM = 12$ см.
1) Побудуйте переріз піраміди, який проходить через точки D, E і F.
2) Знайдіть площу перерізу.

3.11.• Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через основу її висоти паралельно мимобіжним ребрам піраміди. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро — 12 см.

3.12.• Кут між двома апофемами правильної трикутної піраміди дорівнює $60°$. Доведіть, що бічні грані піраміди є рівнобедреними прямокутними трикутниками.

3.13.• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.14.• Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює d, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.15.• Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 32 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи.

3.16.• Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.17.$^{\bullet}$ Основою піраміди $DABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 45° і дорівнює 8 см. Знайдіть площу основи піраміди.

3.18.$^{\bullet}$ Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює $3\sqrt{10}$ см, а основа — 6 см. Висота піраміди дорівнює 5 см, а її бічні ребра є рівними. Знайдіть бічне ребро піраміди.

3.19.$^{\bullet}$ Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 30°. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

3.20.$^{\bullet}$ Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 60°. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

3.21.$^{\bullet}$ Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи, площина ще однієї грані, яка проходить через більшу сторону основи, утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) площу бічної поверхні піраміди.

3.22.$^{\bullet}$ Основою піраміди є квадрат зі стороною 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

3.23.$^{\bullet}$ Площини бічних граней ABM і CBM піраміди $MABC$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см, $MB = 20$ см.

3.24.$^{\bullet}$ Площини бічних граней MAB і MAC піраміди $MABC$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані MBC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $MA = 9$ см.

3.25.$^{\bullet}$ Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ дорівнює 8 см, а висота піраміди — 12 см.
1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середини бічних ребер MA і MD паралельно висоті піраміди.
2) Знайдіть площу перерізу.

3.26.• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює 60°.
1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через центр основи паралельно бічній грані піраміди.
2) Знайдіть площу перерізу.

3.27.•• Точки M і K — середини ребер BC і BD правильного тетраедра $DABC$. Знайдіть кут між прямими AK і DM.

3.28.•• Усі ребра правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ є рівними. Точки K і P — середини ребер AD і BC відповідно. Знайдіть кут між прямими AP і KM.

3.29.•• Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює α. Знайдіть двогранний кут піраміди при бічному ребрі.

3.30.•• Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при бічному ребрі дорівнює α. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

3.31.•• Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до площини її бічної грані дорівнює d, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.32.•• Відстань від центра основи правильної чотирикутної піраміди до площини бічної грані дорівнює m, а кут між висотою піраміди та площиною бічної грані становить β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.33.•• Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 2 см і 18 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота однієї з бічних граней, проведена до ребра основи піраміди, — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.34.•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 8 см і 15 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота піраміди дорівнює $3\sqrt{15}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.35.•• Основою піраміди $MABC$ є трикутник ABC такий, що $AB = BC = 2$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Площини бічних граней MAB і MAC перпендикулярні до площини основи, а кут між площиною MBC і площиною основи дорівнює 45°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.36.•• Основою піраміди $MABCD$ є ромб зі стороною a. Площини бічних граней ABM і CBM перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі MB є тупим і дорівнює α. Кут між площиною AMD і площиною основи дорівнює β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.37.•• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Площина однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней утворюють із площиною основи кут $45°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.38.•• Основою піраміди $MABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$, $AC = 4\sqrt{3}$ см. Площина грані BMC перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней нахилені до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть ребро MC.

3.39.•• У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює α, а двогранний кут при бічному ребрі дорівнює β. Доведіть, що $3\cos^2\alpha + 2\cos\beta = 1$.

3.40.•• Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до бічної грані дорівнює d, а двогранний кут при бічному ребрі дорівнює 2α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.41.•• Сторона AB і висота MO правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ відповідно дорівнюють 8 см і 4 см. Точка K — середина ребра DC. Знайдіть відстань між прямими MK і AC.

3.42.•• Сторона AB і висота MO правильної шестикутної піраміди $MABCDEF$ відповідно дорівнюють 4 см і $3\sqrt{2}$ см. Точка K — середина ребра EF. Знайдіть відстань між прямими MK і BE.

3.43.•• Сторона основи правильної трикутної піраміди $DABC$ дорівнює a. Пряма AB утворює з площиною DAC кут α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.44.•• Площа бічної поверхні правильної шестикутної піраміди $MABCDEF$ дорівнює S. Кут між прямою AB і площиною BMC дорівнює α. Знайдіть площу основи піраміди.

3.45.•• Основою піраміди є трикутник, сторони якого дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут, що дорівнює $45°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.46.•• Основою піраміди є рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює $10\sqrt{3}$ см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Бічні грані піраміди є рівновеликими трикутниками. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.47.•• Основою піраміди є рівносторонній трикутник. Висота піраміди дорівнює 6 см. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут, що дорівнює 60°. Знайдіть площу основи піраміди.

3.48.•• Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює α. Усі вершини піраміди рівновіддалені від деякої площини π. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною π.

3.49.•• Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює α. Усі вершини піраміди рівновіддалені від деякої площини π. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною π.

3.50.* Кожне ребро тетраедра дорівнює 1 см. Знайдіть найбільше значення площі перерізу даного тетраедра площиною, паралельною двом його мимобіжним ребрам.

3.51.* Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 1 см. На ребрах AB і AC відповідно позначили точки K і M. Доведіть, що периметр трикутника DKM більший за 2 см.

3.52.* Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 1 см. Знайдіть довжину найкоротшого шляху по поверхні тетраедра між серединами ребер AB і CD.

3.53.* На сторонах BA і BC рівностороннього трикутника ABC позначили відповідно точки C_1 і A_1. Доведіть, що відрізки AA_1, CC_1 і A_1C_1 можуть слугувати сторонами деякого трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.54. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 1 см, а кут між діагоналями дорівнює 45°. Знайдіть площу паралелограма.

3.55. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 25$ см, $AC = 14$ см. До кола, вписаного в даний трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі AC і перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Знайдіть площу трикутника MBK.

4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда

Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди (рис. 4.1). Ця площина розбиває дану піраміду на два многогранники.

Один із цих многогранників — піраміда, яку можна розглядати як образ даної піраміди, отриманої в результаті гомотетії із центром у точці M. Відповідні грані цих пірамід є гомотетичними многокутниками, а отже, відношення площ цих граней дорівнює квадрату коефіцієнта гомотетії. Із сказаного випливає, що *відношення площ поверхонь гомотетичних пірамід дорівнює квадрату коефіцієнта гомотетії*.

Наведене твердження є окремим випадком такої властивості многогранників: ***відношення площ поверхонь двох подібних многогранників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності***.

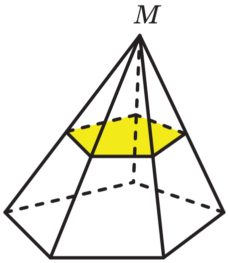


Рис. 4.1

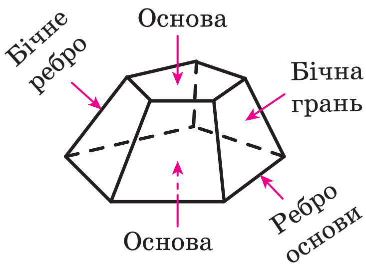


Рис. 4.2

Повернемося до рисунка 4.1. Другий із многогранників, на які розбиває піраміду січна площина, називають **зрізаною пірамідою**.

У зрізаній піраміді (рис. 4.2) дві грані — n-кутники, що лежать у паралельних площинах. Їх називають **основами зрізаної піраміди**. Решта n граней зрізаної піраміди — трапеції. Їх називають **бічними гранями зрізаної піраміди**. Сторони основ називають **ребрами основ зрізаної піраміди**. Ребра, які не належать основам, називають **бічними ребрами зрізаної піраміди**.

Зауважимо, що основи зрізаної піраміди є подібними фігурами. Цей факт було доведено в курсі геометрії 10 класу.

Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Довжина висоти зрізаної піраміди дорівнює відстані між площинами її основ.

Якщо правильну n-кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то утворену зрізану піраміду називають **правильною n-кутною зрізаною пірамідою.**

Основами правильної зрізаної n-кутної піраміди є правильні n-кутники, а бічними гранями — рівнобічні трапеції.

Апофемою правильної зрізаної піраміди називають відрізок, який сполучає середини ребер основ, що належать одній грані.

Усі апофеми правильної зрізаної піраміди є рівними (доведіть це самостійно).

На рисунку 4.3 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Її основами є квадрати $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Точки O і O_1 — їхні центри. Відрізок OO_1 — висота зрізаної піраміди.

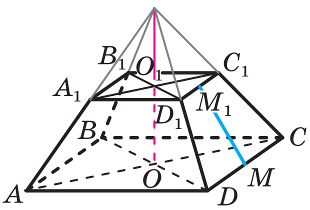


Рис. 4.3

Сполучимо середини M і M_1 ребер CD і C_1D_1 відповідно. Оскільки чотирикутник CC_1D_1D — рівнобічна трапеція, то відрізок MM_1 — її висота, а отже, й апофема правильної чотирикутної зрізаної піраміди.

Площею бічної поверхні зрізаної піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні зрізаної піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні зрізаної піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Теорема 4.1. ***Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофеми.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Твердження теореми 4.1 зручно подати у вигляді формули

$$\boxed{S_б = \frac{1}{2}(P_{осн} + p_{осн}) \cdot d,}$$

де $P_{осн}$ і $p_{осн}$ — периметри основ, d — довжина апофеми правильної зрізаної піраміди.

?

1. Чому дорівнює відношення площ поверхонь подібних многогранників?
2. Опишіть, який многогранник називають зрізаною пірамідою.
3. Опишіть елементи зрізаної піраміди.
4. Яку зрізану піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної зрізаної піраміди?
6. Що називають площею поверхні зрізаної піраміди? бічної поверхні зрізаної піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди?

ВПРАВИ

4.1.° Площа бічної поверхні правильної зрізаної шестикутної піраміди дорівнює 540 см^2. Знайдіть сторони основ піраміди, якщо вони відносяться як 2 : 3, а апофема дорівнює 9 см.

4.2.° Знайдіть апофему правильної зрізаної п'ятикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 6 см і 10 см, а площа бічної поверхні — 280 см^2.

4.3.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 12 см і 18 см, а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює 45°. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.4.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 9 см, а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює 60°. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.5.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 10 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:
1) діагональ зрізаної піраміди;
2) площу перерізу, який проходить через бічні ребра, що не належать одній грані;
3) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.6.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 15 см і 27 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 30°. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.7.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 24 см і 30 см, а бічні ребра — 4 см. Знайдіть висоту піраміди.

4.8.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см, а площа бічної поверхні — 54 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

4.9.•• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють 8 см і 5 см, а висота піраміди — 3 см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму AB і точку C_1.

4.10.•• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 8 см і 6 см, а висота піраміди — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму AC і точку B_1.

4.11.•• Бічне ребро BB_1 зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярне до площини основи, $BB_1 = 4$ см, $AB = BC = 16$ см, $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4.12.•• Основи зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратами, $AD = 4$ см, $A_1D_1 = 2$ см. Грань AA_1B_1B є рівнобічною трапецією, а її площина перпендикулярна до площини основи. Кут між площиною грані CC_1D_1D і площиною основи дорівнює $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4.13.•• Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює H. Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α, а діагональ піраміди — кут β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4.14.•• Сторона більшої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює a, а сторона меншої основи — b. Знайдіть висоту зрізаної піраміди, якщо гострий кут її бічної грані дорівнює α.

4.15.•• Площа бічної поверхні правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнює площі її меншої основи. Двогранний кут зрізаної піраміди при ребрі більшої основи дорівнює α. Знайдіть відношення площі більшої основи до площі бічної поверхні.

4.16.•• Площа бічної поверхні правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнює площі більшої основи та у два рази більша за площу меншої основи. Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі її більшої основи.

4.17.* У правильній чотирикутній зрізаній піраміді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кут між площинами BDD_1 і CDB_1 дорівнює α. Знайдіть відношення площ чотирикутників BB_1D_1D і DA_1B_1C.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.18. Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, віддалений від кінців гіпотенузи на $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см. Знайдіть катети.

4.19. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $BD : DC = 2 : 1$. У якому відношенні, рахуючи від вершини A, медіана CE ділить цю бісектрису?

5. Тетраедр

Трикутна піраміда має чотири грані. Із цією властивістю пов'язана друга назва трикутної піраміди — **тетраедр** (від грец. «чотиригранник»).

Ви знаєте, що трикутник відіграє в планіметрії особливу роль. У багатьох випадках властивості трикутника допомагають вивчати властивості інших, складніших фігур. У стереометрії аналогом трикутника є тетраедр. Розглянемо деякі властивості цього многогранника.

Вам відомо, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці. Виникає природне запитання: чи завжди перетинаються в одній точці прямі, які містять висоти довільного тетраедра? Відповідь на це запитання заперечна.

Розглянемо прямокутні трикутники ABC і ABD, що лежать у перпендикулярних площинах, такі, що $\angle ABC = \angle DAB = 90°$ (рис. 5.1). Тоді відрізки CB і DA, що лежать на мимобіжних прямих, є висотами тетраедра $ABCD$.

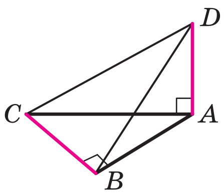


Рис. 5.1

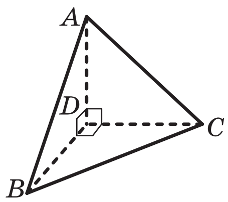


Рис. 5.2

Означення. Якщо прямі, які містять висоти тетраедра, перетинаються в одній точці, то такий тетраедр називають ортоцентричним.

Наведемо приклад ортоцентричного тетраедра. На рисунку 5.2 зображено тетраедр $DABC$, у якого всі плоскі кути при вершині D є прямими. Тому кожний із відрізків AD, BD і CD є його висотою. Зрозуміло, що й четверта висота цього тетраедра проходить через точку D.

Доведемо дві леми, які допомагають вивчати властивості ортоцентричного тетраедра.

Лема 1. ***Якщо тетраедр має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер, то решта два ребра також перпендикулярні.***

Доведення. Розглянемо тетраедр $DABC$, у якому $DB \perp AC$ і $DC \perp AB$. Доведемо, що $DA \perp BC$.

Опишемо навколо даного тетраедра паралелепіпед (рис. 5.3). Оскільки $MK \parallel AC$, то $MK \perp DB$. Отже, грані $MDKB$ і $CEAP$ є ромбами. Аналогічно можна довести, що грані $MCED$ і $BPAK$ також є ромбами. Тоді всі грані цього паралелепіпеда — ромби. Звідси випливає, що $DA \perp BC$. ◀

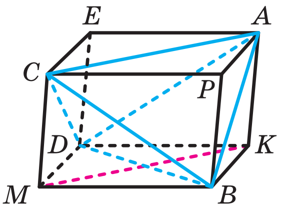


Рис. 5.3

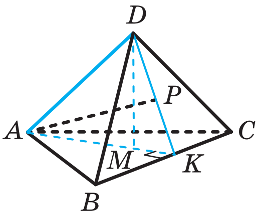


Рис. 5.4

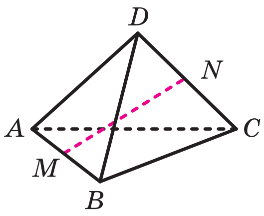


Рис. 5.5

Лема 2. ***Якщо тетраедр має пару перпендикулярних мимобіжних ребер, то прямі, що містять висоти тетраедра, проведені з кінців одного із цих ребер, перетинаються.***

Доведення. Розглянемо тетраедр $DABC$, у якому $DA \perp BC$. Проведемо висоту AK трикутника ABC (рис. 5.4). Сполучимо точки D і K. Проведемо висоти AP і DM трикутника ADK. Зауважимо, що прямі AP і DM перетинаються.

Оскільки $BC \perp ADK$ і $DM \subset ADK$, то $BC \perp DM$. Отже, пряма DM перпендикулярна до двох прямих площини ABC, що перетинаються. Звідси $DM \perp ABC$. Аналогічно можна довести, що $AP \perp BDC$. ◀

Теорема 5.1. ***Якщо тетраедр має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер, то він є ортоцентричним.***

Доведення. Згідно з лемою 1 кожні два мимобіжних ребра даного тетраедра перпендикулярні. Тоді за лемою 2 кожні дві прямі, що містять висоти тетраедра, перетинаються. Чотири прямі, які містять висоти даного тетраедра, не лежать в одній площині. Тоді з урахуванням доведеного в ключовій задачі 2.17 підручника «Геометрія-10» отримуємо, що ці прямі проходять через одну точку. ◀

Ви знаєте, що в трикутнику вводять такі елементи, як середні лінії та медіани. Відрізки з такими самими найменуваннями означають і для тетраедра.

Означення. Відрізок, який сполучає середини мимобіжних ребер тетраедра, називають *середньою лінією* тетраедра.

На рисунку 5.5 відрізок MN — середня лінія тетраедра $DABC$. Тетраедр має три середні лінії.

Теорема 5.2. ***Середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці та точкою перетину діляться навпіл.***

Доведення. Розглянемо середні лінії MN і EF тетраедра $DABC$ (рис. 5.6). Відрізок ME є середньою лінією трикутника ABC. Звідси $ME \parallel BC$ і $ME = \frac{1}{2}BC$. Аналогічно можна довести, що $FN \parallel BC$ і $FN = \frac{1}{2}BC$. Отже, $FN \parallel ME$ і $FN = ME$. Тоді чотирикутник $MFNE$ — паралелограм. Отже, середні лінії MN і EF тетраедра $DABC$ перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

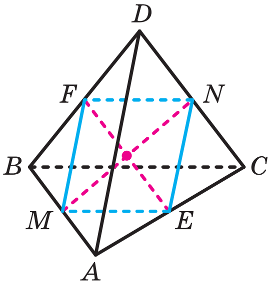


Рис. 5.6

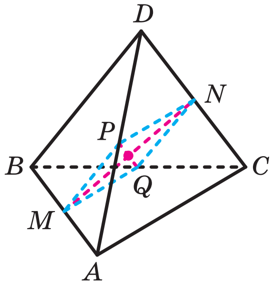


Рис. 5.7

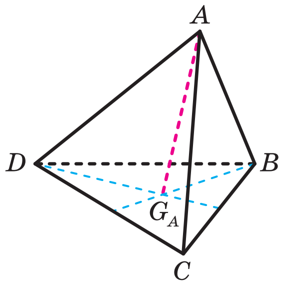


Рис. 5.8

Розглянемо середні лінії MN і PQ тетраедра $DABC$ (рис. 5.7). Аналогічно можна довести, що ці середні лінії перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

Отримуємо, що кожна із середніх ліній FE і PQ перетинає середню лінію MN в її середині. Отже, усі три середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці. ◄

Означення. Відрізок, який сполучає вершину тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані, називають медіаною тетраедра.

На рисунку 5.8 G_A — точка перетину медіан грані BCD. Тоді відрізок AG_A є медіаною тетраедра.

Тетраедр має чотири медіани.

Теорема 5.3. ***Медіани тетраедра перетинаються в одній точці та точкою перетину діляться у відношенні* 3 : 1, *рахуючи від вершини тетраедра.***

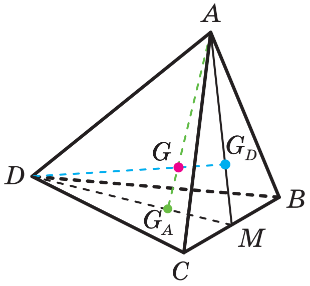


Рис. 5.9

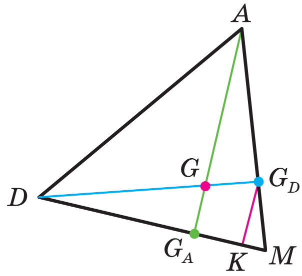


Рис. 5.10

Доведення. На рисунку 5.9 відрізки AG_A і DG_D — медіани тетраедра. Тоді відрізки AM і DM — медіани відповідно трикутників ABC і DBC. Отримуємо, що медіани AG_A і DG_D тетраедра належать трикутнику AMD. Нехай ці медіани перетинаються в точці G.

У трикутнику ADM проведемо $G_DK \parallel AG_A$ (рис. 5.10). За властивістю медіан трикутника отримуємо, що $\frac{MG_D}{G_DA} = \frac{MG_A}{G_AD} = \frac{1}{2}$. За теоремою про пропорційні відрізки отримуємо, що $\frac{MG_D}{G_DA} = \frac{MK}{KG_A} = \frac{1}{2}$. Тоді $\frac{DG_A}{G_AK} = \frac{3}{1}$. Маємо: $\frac{DG}{GG_D} = \frac{DG_A}{G_AK} = \frac{3}{1}$.

Аналогічно можна довести, що будь-які дві медіани тетраедра перетинаються та точкою перетину діляться у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини тетраедра.

Отримуємо, що кожна з медіан AG_A, BG_B і CG_C перетинає медіану DG_D в одній і тій самій точці. Отже, медіани тетраедра перетинаються в одній точці. ◄

Запропонуємо іншу схему доведення теореми 5.2. За доведеним у ключовій задачі 1 п. 2 діагоналі паралелепіпеда, описаного навколо тетраедра, містять медіани даного тетраедра (рис. 5.11). Оскільки діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці, то звідси й випливає твердження теореми.

Точку перетину медіан тетраедра називають **центроїдом** тетраедра. Зазначимо, що точка перетину середніх ліній тетраедра збігається з його центроїдом. Скориставшись наслідком 2 з теореми 2.1, доведіть цей факт самостійно.

Розглянемо правильну трикутну піраміду, у якої всі ребра рівні. Усі грані такої піраміди — рівні трикутники. Нагадаємо, що таку піраміду називають **правильним тетраедром**.

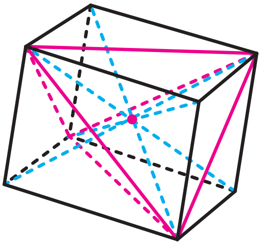


Рис. 5.11

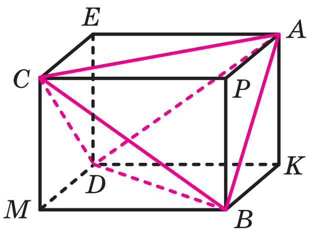


Рис. 5.12

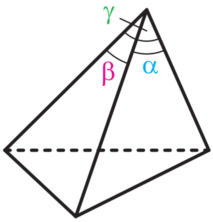


Рис. 5.13

Виникає природне запитання: чи існує тетраедр, відмінний від правильного, усі грані якого є рівними?

Розглянемо прямокутний паралелепіпед $MDKBCEAP$. Проведемо діагоналі його граней так, як показано на рисунку 5.12. Оскільки діагоналі прямокутника є рівними, то $AB = CD$, $AC = DB$ і $BC = AD$. Отже, усі грані тетраедра $DABC$ є рівними за третьою ознакою рівності трикутників. Тому відповідь на поставлене вище запитання є ствердною.

Означення. Тетраедр, усі грані якого — рівні трикутники, називають рівногранним.

Розглянемо тригранний кут при вершині рівногранного тетраедра. Позначимо його плоскі кути α, β і γ (рис. 5.13). Вони дорівнюють кутам трикутника, який є гранню тетраедра. Отже, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Оскільки кожний плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів, то кожний із кутів α, β і γ є гострим.

Таким чином, у рівногранному тетраедрі всі грані — гострокутні трикутники.

Розгортка рівногранного тетраедра являє собою многокутник, поділений на чотири рівних трикутники. Оскільки сума плоских кутів тригранного кута при вершині рівногранного тетраедра дорівнює $180°$, то цю розгортку можна зобразити у вигляді трикутника, поділеного на чотири рівних трикутники (рис. 5.14). Таким чином, якщо в гострокутному трикутнику провести всі середні лінії, то отриманий рисунок можна розглядати як розгортку рівногранного тетраедра.

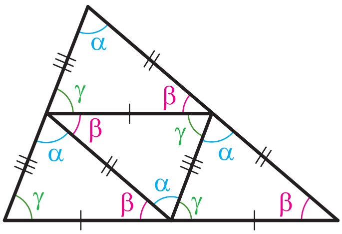


Рис. 5.14

Нескладно довести (зробіть це самостійно), що мимобіжні ребра рівногранного тетраедра є рівними. Це дає змогу зробити такий висновок: *паралелепіпед, описаний навколо рівногранного тетраедра, є прямокутним.*

Цей факт допомагає довести цілу низку властивостей рівногранного тетраедра. Наприклад, описавши паралелепіпед навколо тетраедра, ви легко доведете, що *середня лінія рівногранного тетраедра перпендикулярна до двох інших середніх ліній та до кожного з мимобіжних ребер, які вона сполучає.* Переконайтеся в цьому самостійно.

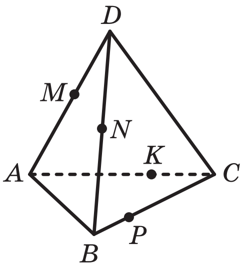


Рис. 5.15

На ребрах DA, AC, CB і BD тетраедра $DABC$ позначимо відповідно точки M, K, P і N (рис. 5.15).

Будь-які три з указаних точок, наприклад M, K і P, однозначно визначають січну площину.

Для того щоб з'ясувати, чи належить цій площині точка N, можна виконати побудову, аналогічну тій, яку було описано в розв'язанні задачі 2 п. 3 підручника «Геометрія-10».

Розглянемо теорему, що вказує спільний критерій належності одній площині чотирьох точок, які лежать на ребрах тетраедра.

Теорема Менелая для тетраедра. Точки M, K, P і N, позначені відповідно на ребрах DA, AC, CB і BD тетраедра $DABC$, належать одній площині тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BN}{ND}=1. \qquad (*)$$

Доведення. Нехай точки M, K, P і N належать площині α (рис. 5.16). Позначимо через A_1, B_1, C_1 і D_1 проекції точок A, B, C і D на площину α (рис. 5.17).

Розглянемо прямокутні трикутники DD_1M і AA_1M. Кути DMD_1 і AMA_1 є вертикальними, а отже, $\angle DMD_1 = \angle AMA_1$. Тому трикутники DMD_1 і AMA_1 є подібними. Аналогічно можна довести, що подібними є трикутники AA_1K і CC_1K, CC_1P і BB_1P, BB_1N і DD_1N.

Тоді можна записати:

$$\frac{DM}{MA}=\frac{DD_1}{AA_1},\quad \frac{AK}{KC}=\frac{AA_1}{CC_1},\quad \frac{CP}{PB}=\frac{CC_1}{BB_1},\quad \frac{BN}{ND}=\frac{BB_1}{DD_1}.$$

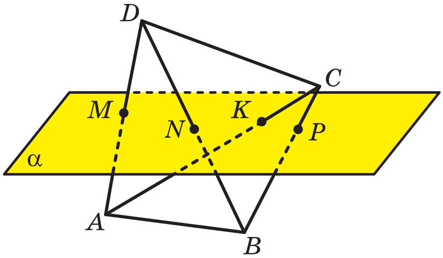


Рис. 5.16

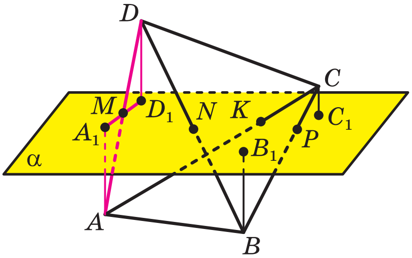


Рис. 5.17

Перемноживши отримані рівності, матимемо:

$$\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BN}{ND}=1.$$

Тепер доведемо, що в разі виконання рівності (*) точки M, K, P і N належать одній площині.

Нехай площина MKN перетинає ребро CB у точці P_1. Тоді виконується рівність $\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP_1}{P_1B}\cdot\frac{BN}{ND}=1.$

Таким чином, $\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP_1}{P_1B}\cdot\frac{BN}{ND}=\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BN}{ND}.$

Звідси $\frac{CP_1}{P_1B}=\frac{CP}{PB}.$

Остання рівність означає, що точки P і P_1 збігаються. ◄

Задача 1. Точки K і N належать відповідно ребрам BA і BC призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка M належить відрізку AB_1. Відомо, що $B_1M : MA = 3 : 2$, $BN : NC = 1 : 2$, $AK = KB$. У якому відношенні, рахуючи від вершини C, площина MNK ділить відрізок CB_1?

Розв'язання. Нехай площина MKN перетинає відрізок CB_1 у точці P (рис. 5.18).

Зауважимо, що відрізки BA, BC, AB_1 і CB_1 є ребрами тетраедра B_1ABC, а точки K, N, M і P відповідно належать цим ребрам.

Тоді, скориставшись теоремою Менелая, можна записати: $\frac{B_1M}{MA}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PB_1}=1.$

Звідси $\frac{CP}{PB_1}=\frac{4}{3}.$

Відповідь: $\frac{4}{3}$. ◄

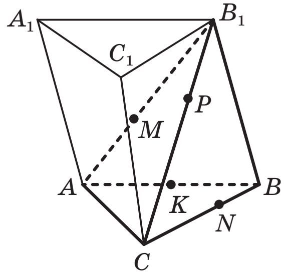


Рис. 5.18

Задача 2. Основою піраміди $SABCD$ є чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого перпендикулярні та перетинаються в точці O. Відрізок SO є висотою піраміди. Із точки O на бічні грані ASB, BSC, CSD і DSA опущено перпендикуляри OM, ON, OK і OP відповідно. Доведіть, що точки M, N, K і P належать одній площині.

Розв'язання. Через пряму BD проведемо площини, перпендикулярні до ребер SA і SC. Ці площини перетинають ребра SA і SC у точках F і E відповідно (рис. 5.19). Можна довести (зробіть це самостійно), що перпендикуляри OM і OP лежать в одній із цих площин, а ON і OK — у другій.

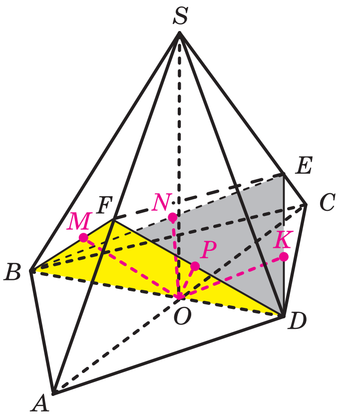


Рис. 5.19

Розглянемо тетраедр $DFBE$. Оскільки точки M, N, K і P належать його ребрам BF, BE, DE і DF відповідно, то для розв'язання задачі достатньо довести, що $\frac{DK}{KE} \cdot \frac{EN}{NB} \cdot \frac{BM}{MF} \cdot \frac{FP}{PD} = 1$.

Відрізок OE є проекцією відрізка OC на площину BED. Оскільки $OC \perp OD$, то за теоремою про три перпендикуляри $OE \perp OD$.

У прямокутному трикутнику DOE відрізок OK — висота, проведена до гіпотенузи DE. Тепер, скориставшись метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику, можна записати: $DK \cdot DE = OD^2$, $KE \cdot DE = OE^2$. Звідси $\frac{DK}{KE} = \frac{OD^2}{OE^2}$.

Міркуючи аналогічно, можна довести, що $\frac{EN}{NB} = \frac{OE^2}{OB^2}$, $\frac{BM}{MF} = \frac{OB^2}{OF^2}$, $\frac{FP}{PD} = \frac{OF^2}{OD^2}$.

Маємо: $\frac{DK}{KE} \cdot \frac{EN}{NB} \cdot \frac{BM}{MF} \cdot \frac{FP}{PD} = \frac{OD^2}{OE^2} \cdot \frac{OE^2}{OB^2} \cdot \frac{OB^2}{OF^2} \cdot \frac{OF^2}{OD^2} = 1.$ ◄

?

1. Який тетраедр називають ортоцентричним?
2. Сформулюйте достатню умову того, що даний тетраедр є ортоцентричним.
3. Що називають середньою лінією тетраедра?

4. Яку властивість мають середні лінії тетраедра?
5. Що називають медіаною тетраедра?
6. Яку властивість мають медіани тетраедра?
7. Який тетраедр називають рівногранним?
8. Сформулюйте властивості рівногранного тетраедра.
9. Сформулюйте теорему Менелая для тетраедра.

ВПРАВИ

5.1.• Доведіть, що правильна трикутна піраміда є ортоцентричним тетраедром.

5.2.• Доведіть, що коли в ортоцентричному тетраедрі точка перетину висот збігається із центроїдом тетраедра, то такий тетраедр є правильним.

5.3.• Висоти тетраедра $DABC$, проведені з вершин A і D, перетинаються. Доведіть, що ребра AD і BC перпендикулярні.

5.4.• Висоти тетраедра $DABC$, проведені з вершин A і D, перетинаються. Доведіть, що висоти, проведені з вершин B і C, також перетинаються.

5.5.• Доведіть, що в ортоцентричному тетраедрі мимобіжні ребра попарно перпендикулярні.

5.6.• В ортоцентричному тетраедрі $DABC$ проведено висоту DH. Доведіть, що точка H — ортоцентр трикутника ABC.

5.7.• У тетраедрі основою однієї з висот є ортоцентр грані, до якої її проведено. Доведіть, що даний тетраедр є ортоцентричним.

5.8.• Доведіть, що в ортоцентричному тетраедрі середні лінії є рівними.

5.9.• Доведіть, що коли в тетраедрі середні лінії є рівними, то такий тетраедр є ортоцентричним.

5.10.• Чи існує тетраедр $DABC$ такий, що $AB = CD = 3$ см, $BC = AD = 4$ см, $AC = BD = 5$ см?

5.11.• Доведіть, що в рівногранному тетраедрі мимобіжні ребра є попарно рівними.

5.12.• Периметри всіх граней тетраедра є рівними. Доведіть, що такий тетраедр є рівногранним.

5.13.• На ребрах AC, AD, BD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M, N, K і F так, що $CM : MA = 4 : 1$, $AN : ND = 3 : 5$, $BK : KD = 6 : 1$ і $BF : FC = 5 : 2$. Доведіть, що точки M, N, K і F належать одній площині.

5.14.$^{\bullet}$ Площина перетинає ребра AB, BD, DC і AC тетраедра $DABC$ у точках F, M, N і P відповідно. Відомо, що $AF : FB = 1 : 3$, $DN : NC = 1 : 2$, $CP : PA = 5 : 1$. Знайдіть відношення $BM : MD$.

5.15.$^{\bullet\bullet}$ Усі грані описаного навколо тетраедра паралелепіпеда є ромбами. Доведіть, що цей тетраедр є ортоцентричним.

5.16.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що в ортоцентричному тетраедрі $DABC$ виконуються рівності $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$.

5.17.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли в тетраедрі $DABC$ виконуються рівності $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$, то такий тетраедр є ортоцентричним.

5.18.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що в рівногранному тетраедрі середні лінії попарно перпендикулярні.

5.19.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що в рівногранному тетраедрі середні лінії перпендикулярні до мимобіжних ребер, середини яких вони сполучають.

5.20.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що медіани рівногранного тетраедра є рівними.

5.21.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що центроїд рівногранного тетраедра рівновіддалений від усіх його вершин.

5.22.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли тетраедр і рівногранний, і ортоцентричний, то він є правильним тетраедром.

5.23.$^{\bullet\bullet}$ У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$. Знайдіть кут і відстань між прямими AB і CD.

5.24.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що сума косинусів двогранних кутів рівногранного тетраедра при його ребрах дорівнює 2.

5.25.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли суми плоских кутів при кожній із трьох вершин тетраедра дорівнюють по $180°$, то такий тетраедр є рівногранним.

5.26.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N належать відповідно ребрам AB і AC трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка F належить відрізку BA_1. Відомо, що $AM : MB = 1 : 2$, $AN : NC = 4 : 1$, $BF : FA_1 = 3 : 2$. У якому відношенні, рахуючи від вершини C, площина MNF ділить відрізок CA_1?

5.27.$^{\bullet\bullet}$ Точки D і P належать відповідно ребрам B_1C_1 і A_1C_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Точки K і M належать відрізкам CB_1 і CA_1 відповідно. Відомо, що $C_1D : DB_1 = 1 : 4$, $A_1P : PC_1 = 5 : 2$, $A_1M : MC = 3 : 4$, $B_1K : KC = 6 : 5$. Доведіть, що точки D, P, K і M належать одній площині.

5.28.* Тетраедр $DABC$ перерізано площиною так, що в перерізі утворився чотирикутник. Якого найменшого значення може набувати периметр цього чотирикутника, якщо $AD = BC = a$, $BD = AC = b$, $AB = CD = c$?

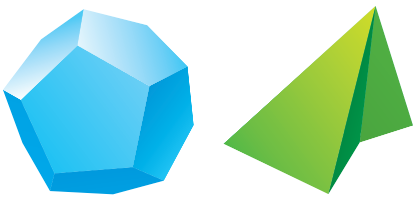
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.29. У трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. У якому відношенні, рахуючи від вершини C, центр вписаного кола трикутника ділить бісектрису CD?

5.30. У трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$ і $\angle ABC = 120°$. Знайдіть відстань між основами висот трикутника, проведених із вершин A і C.

ПЛАТОНОВІ ТІЛА

Вивчаючи навколишній світ, ви, напевно, звертали увагу, що деяким просторовим тілам притаманна природна краса та навіть досконалість. Наприклад, із двох многогранників, зображених на рисунку 5.20, перший (A) ви, скоріш за все, назвете красивим і гармонійним, а другий ($Б$) — ні. Що ж змушує нас сприймати многогранник A «з більшою симпатією», ніж многогранник $Б$? Які геометричні властивості многогранників формують у нас таке ставлення? Звернемо увагу, що всі грані опуклого многогранника A є *рівними правильними* многокутниками (п'ятикутниками) і в кожній вершині сходиться *однакова* кількість ребер (по три ребра). Многогранники з такими властивостями виокремлюють у спеціальний клас — клас правильних многогранників.



A $Б$

Рис. 5.20

Рис. 5.21

Означення. **Опуклий многогранник називають правильним, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.**

Многогранник A, зображений на рисунку 5.20, — правильний многогранник, який має 12 граней. Його називають **додекаедром**, що в перекладі з грецької означає «дванадцятигранник». Многогранник $Б$ не є правильним.

З дитинства кожну людину оточували правильні многогранники. Кубики та пірамідки — одні з перших наших іграшок (рис. 5.21). Справді, куб — правильний многогранник, адже всі шість граней куба — рівні квадрати (правильні чотирикутники) і в кожній вершині сходиться однакова кількість ребер (по три ребра). Куб також називають **гексаедром** (від грец. «шестигранник»). Трикутна піраміда (тетраедр, від грец. «чотиригранник»), усі грані якої — правильні трикутники, також є правильним многогранником (подумайте чому).

Правильні многогранники в стереометрії є в деякому роді аналогами правильних многокутників у планіметрії. Як ви знаєте, на площині існують правильні трикутники, чотирикутники, п'ятикутники тощо. Узагалі, для кожного натурального значення n ($n \geqslant 3$) існує правильний n-кутник. З правильними многогранниками справа інакша.

Окрім правильного тетраедра, куба й додекаедра, із часів Стародавньої Греції відомо ще два правильних многогранники: **октаедр** (від грец. «восьмигранник») та **ікосаедр** (від грец. «двадцятигранник») (рис. 5.22).

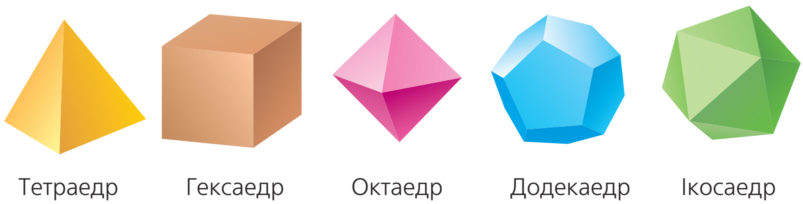


Рис. 5.22

Усі вісім граней октаедра є правильними трикутниками, і в кожній вершині сходиться чотири ребра. Октаедр зручно уявляти як об'єднання двох чотирикутних пірамід, склеєних своїми основами. Якщо бічні грані цих пірамід — рівні правильні трикутники, то отриманий після склеювання многогранник є октаедром (рис. 5.23). Гранями ікосаедра є рівні правильні трикутники, і в кожній вершині ікосаедра сходиться п'ять ребер.

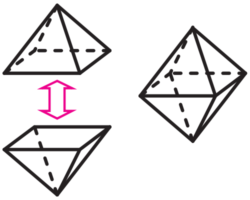


Рис. 5.23

Вивчення правильних многогранників було однією з основних задач геометрів Стародавньої Греції. Багато грецьких філософів того часу вважали, що правильні многогранники лежать в основі всієї світобудови. Наприклад, Платон (427–347 рр. до н. е.) вважав, що правильні многогранники символізують природні стихії. Правильні многогранники іноді ще називають платоновими тілами.

Геометрам Стародавньої Греції вдалося описати всі можливі правильні многогранники. Виявилося, що існує тільки п'ять правильних многогранників (тетраедр, куб, додекаедр, октаедр та ікосаедр). Цей факт можна довести, спираючись на те, що сума всіх плоских кутів опуклого многогранного кута менша від $360°$.

У правильному многограннику кожна грань є правильним n-кутником. Оскільки сума всіх кутів n-кутника дорівнює $180°(n-2)$, то кожний плоский кут такого n-кутника дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$. Якщо до вершини правильного многогранника прилягає k таких плоских кутів, то їхня сума дорівнює $k \cdot \frac{180°(n-2)}{n}$, тому

$$k \cdot \frac{180°(n-2)}{n} < 360°;$$

$$k < \frac{2n}{n-2}.$$

Останню нерівність перепишемо так:

$$k < 2 + \frac{4}{n-2}. \qquad (1)$$

З одного боку, оскільки кожна грань многогранника містить не менше ніж три ребра, то $n \geqslant 3$. З другого боку, якщо $n \geqslant 6$, то з нерівності (1) випливає, що $k < 3$. Проте до вершини многогранника не може прилягати менше ніж три плоских кути, тому при $n \geqslant 6$ правильних многогранників не існує. Залишається розглянути такі можливості: $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

Якщо $n = 3$, то гранями правильного многогранника будуть правильні трикутники. З нерівності (1) випливає, що $k < 6$. Цьому випадку відповідають: тетраедр ($k = 3$), октаедр ($k = 4$) та ікосаедр ($k = 5$).

Якщо $n = 4$, то гранями правильного многогранника будуть квадрати. З нерівності (1) випливає, що $k < 4$. Цьому випадку відповідає куб ($k = 3$).

Якщо $n = 5$, то гранями правильного многогранника будуть правильні п'ятикутники. З нерівності (1) випливає, що $k < 3\frac{1}{3}$. Цьому випадку відповідає додекаедр ($k = 3$).

Об'єкти, які за формою нагадують правильні многогранники, нерідко трапляються в природі. Наприклад, форму куба мають кристали кам'яної солі (рис. 5.24); кристали алмазів мають форму октаедра (рис. 5.25); кристали піриту нагадують додекаедр (рис. 5.26). Біологи виявили, що частини деяких вірусів мають форму ікосаедра. Елементи багатьох архітектурних об'єктів сконструйовані у вигляді правильних многогранників (рис. 5.27).

Кам'яна сіль

Рис. 5.24

Алмаз

Рис. 5.25

Пірит

Рис. 5.26

Рис. 5.27

ГЕОМЕТРИЧНЕ ТІЛО

У п. 1 ви ознайомилися з поняттям геометричного тіла (або просто тіла). Нагадаємо, що многогранник, куля, конус є тілами, а, наприклад, площина, двогранний кут або фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами. У цьому оповіданні ми глибше ознайомимося із цим непростим поняттям.

Опишемо властивості, які виокремлюють тіла з усіх геометричних фігур.

Означення. **Фігуру (множину точок простору) називають *відкритою*, якщо кожна її точка належить фігурі разом з деякою кулею із центром у цій точці.**

Прикладом відкритої множини може слугувати весь простір.

Ще один приклад відкритої множини можна отримати, розглянувши «кулю без своєї сфери», тобто множину B точок, відстань від яких до центра O менша від радіуса R. Справді, виберемо в цій множині B довільну точку X. Тоді $OX < R$ (рис. 5.28). Якщо розглянути маленьку кулю радіуса $r = \frac{R - OX}{2}$ із центром у точці X, то вона повністю належить даній множині B, а тому B — відкрита множина.

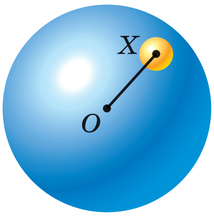


Рис. 5.28

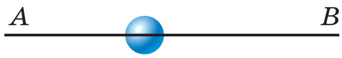


Рис. 5.29

Наприклад, пряма AB не є відкритою множиною, оскільки куля із центром у будь-якій її точці не належить цій прямій (рис. 5.29). Узагалі, будь-яка плоска фігура не є відкритою.

Означення. **Фігуру називають *обмеженою*, якщо вона повністю міститься в деякій кулі.**

Наприклад, відрізок, піраміда, куля — обмежені фігури, а пряма, площина, двогранний кут — необмежені фігури.

Означення. **Точку називають *точкою дотикання фігури*, якщо будь-яка куля із центром у цій точці містить щонайменше одну точку цієї фігури.**

Наприклад, кожна точка кулі є точкою дотикання цієї кулі, кожна точка відрізка є точкою дотикання цього відрізка. Узагалі, кожна точка фігури є її точкою дотикання. Однак не треба думати, що точка дотикання обов'язково належить фігурі. Приміром, розглянемо відрізок AB, з якого видалили його кінці — точки A і B. Окрім точок, що лежать між A і B, точками дотикання цієї фігури будуть також точки A і B. Справді, довільна куля із центром у будь-якій із цих точок міститиме внутрішні точки відрізка AB.

Наведемо приклад точки, яка не є точкою дотикання. Розглянемо кулю радіуса R із центром у точці O та точку A, яка не належить даній кулі. Це означає, що довжина відрізка OA більша за радіус R кулі. Тоді точка A не є точкою дотикання цієї кулі. Справді, якщо розглянути ще одну кулю із центром у точці A і радіусом $r = \frac{OA - R}{2}$, то ця куля не перетинатиметься з даною кулею (рис. 5.30).

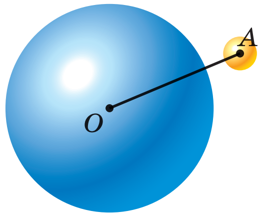


Рис. 5.30

Означення. **Фігуру називають зв'язною, якщо при будь-якому її розбитті на дві частини хоча б одна із цих частин містить точки дотикання другої частини.**

Розглянемо, наприклад, фігуру F на рисунку 1.2. Фігура F — це об'єднання двох куль. Зрозуміло, що фігура F не є зв'язною, оскільки її можна розбити на дві частини (дві кулі, з яких вона складається), причому кожна з них не містить точок дотикання другої частини. Тоді як пряма, площина, конус — приклади зв'язних фігур.

Означення. Поверхнею фігури Φ називають множину точок, що є точками дотикання як для самої фігури, так і для фігури, яка складається з точок простору, що не належать фігурі Φ.

Наприклад, поверхнею кулі є її сфера. Об'єднання всіх граней многогранника є поверхнею многогранника.

Тепер ми можемо дати означення тіла.

Означення. Тілом називають обмежену фігуру, яка є об'єднанням непорожньої зв'язної відкритої фігури та її поверхні.

Після наведеного означення ви можете самі обґрунтувати, чому пряма, площина, двогранний кут, а також фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами.

Поняття відкритої множини, точки дотикання, зв'язності є одними з фундаментальних у *топології* — важливому розділі сучасної математики.

Щедра на таланти українська земля подарувала світу цілу плеяду видатних топологів — І. М. Гельфанда, О. А. Олійник, П. С. Урисона та багатьох інших.

Ізраїль Мойсейович Гельфанд
(1913–2009)

Народився в с. Окни (нині Одеська область). Не маючи закінченої середньої освіти й не пройшовши курсу навчання в університеті, завдяки блискучим здібностям і наполегливій праці зумів стати видатним ученим. Основні результати здобув у таких галузях математики, як функціональний аналіз, математична фізика, прикладна математика, теорія топологічних лінійних просторів. Опублікував понад 800 наукових праць. Іноземний член Національної академії наук США, Паризької академії наук, Шведського та Ірландського королівських товариств, почесний доктор Оксфордського, Паризького (Сорбонна), Гарвардського, Упсальського, Ліонського, Пізанського університетів.

Ольга Арсенівна Олійник
(1925–2001)

Народилася в с. Матусів Черкаської області. Перша жінка в СРСР, яка у 29 років стала доктором фізико-математичних наук. Основні досягнення пов’язані з дослідженнями в галузі диференціальних рівнянь і топології. Підготувала 58 кандидатів і 14 докторів фізико-математичних наук. Член Італійської академії наук у Палермо, Саксонської академії наук, Единбурзького королівського товариства. Нагороджена іменною медаллю Коллеж де Франс.

Павло Самуїлович Урисон
(1898–1924)

Народився в м. Одеса. Разом з П. С. Александровим заснував всесвітньо відому топологічну школу. Створив новий напрямок у топології — теорію розмірностей. Основні досягнення пов’язані з такими розділами математики, як топологія, диференціальні рівняння та геометрія.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Многогранник

Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Призма

Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають n-кутною призмою.

Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

Площа бічної поверхні прямої призми

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.

Паралелепіпед

Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

Паралелепіпед називають прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Прямий паралелепіпед називають прямокутним, якщо його основами є прямокутники.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають вимірами прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед називають кубом, якщо його виміри є рівними.

Властивості паралелепіпеда

Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.

Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

Піраміда

Многогранник, одна грань якого — n-кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають n-кутною пірамідою.

Піраміду називають правильною, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники.

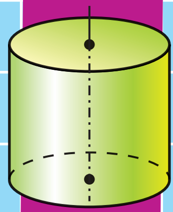
Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

Площа бічної поверхні піраміди

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.

Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофеми.



§ 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

- У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомими вам тілами — циліндром, конусом, кулею, вивчите їхні властивості.
- Дізнаєтеся, яким буває взаємне розміщення цих тіл і многогранників.

6. Циліндр

Нехай вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до площини α. Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$ кола, яке належить площині α. Образом цього кола є рівне йому коло, яке лежить у площині, паралельній площині α (рис. 6.1). Нехай X — довільна точка кола із центром O, а точка X_1 — образ точки X при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Тоді $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$ і точка X_1 належить колу із центром O_1. Отже, усі відрізки, які паралельні вектору $\vec{a}$ і кінці яких лежать на розглядуваних колах, рівні між собою та перпендикулярні до площини α. Ці відрізки утворюють деяку фігуру F.

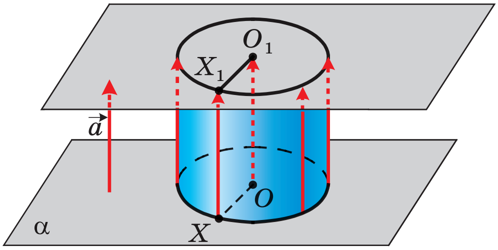


Рис. 6.1

Кола із центрами O і O_1 обмежують два рівних круги. Тіло, обмежене цими кругами та фігурою F, називають **циліндром**. Фігуру F називають **бічною поверхнею циліндра**, круги — **основами циліндра**, відрізки, що утворюють фігуру F, — **твірними циліндра** (рис. 6.2).

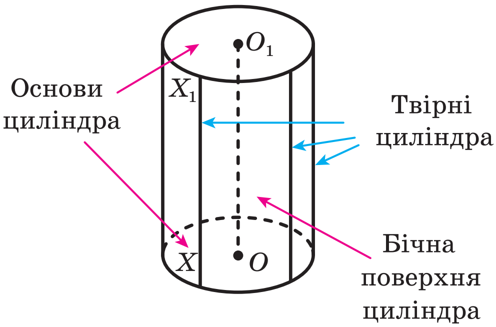


Рис. 6.2

Очевидно, що всі твірні циліндра рівні та перпендикулярні до площини основи.

Пряму, яка проходить через центри основ циліндра, називають **віссю циліндра**. На рисунку 6.1 пряма OO_1 — вісь циліндра. Відрізок осі циліндра, що міститься між його основами, перпендикулярний до основ і дорівнює твірній циліндра. На рисунку 6.1 $OO_1 = XX_1$.

Висотою циліндра називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Будь-яка твірна циліндра є його висотою. На рисунку 6.2 відрізки OO_1 і XX_1 — висоти циліндра.

Із курсу планіметрії вам знайоме таке перетворення фігури, як поворот навколо точки. Аналогом такого перетворення в просторі є поворот фігури навколо прямої. Ми не даватимемо строгого означення цього перетворення, а розповімо про нього, спираючись на наочність та інтуїцію.

Розглянемо в просторі пряму a і точку A, що їй не належить. Проведемо через точку A площину α, перпендикулярну до прямої a. Нехай ця площина перетинає пряму a в точці O (рис. 6.3). У площині α розглянемо точку A_1, яка є образом точки A при повороті навколо точки O на кут φ. У цьому разі говорять, що точку A_1 отримано в результаті **повороту** точки A **навколо прямої** a **на кут** φ. Пара точок A і A_1 визначає **напрям** повороту навколо прямої a на кут φ.

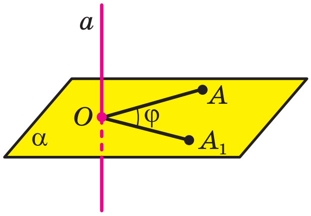


Рис. 6.3

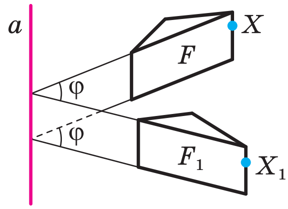


Рис. 6.4

Нехай у просторі дано фігуру F і пряму a. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при повороті в одному напрямі навколо прямої a на кут φ (якщо $X \in a$, то образом точки X вважатимемо саму точку X). У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 6.4). Таке перетворення фігури F називають **поворотом навколо прямої** a. Пряму a називають **віссю обертання**.

Рис. 6.5

З процесами та явищами, що ілюструють подібні перетворення, ми часто стикаємося в повсякденному житті. Наприклад, обертання флюгера, рух гвинта гелікоптера, відкривання та закривання двері тощо (рис. 6.5).

Нехай дано фігуру F і пряму a, які лежать в одній площині. Розглянемо всі точки, отримані в результаті повороту точок фігури F навколо прямої a на довільні кути. Якщо множина отриманих точок є тілом, то його називають **тілом обертання.**

Наприклад, якщо обертати навколо осі ординат фігуру, яка лежить у площині xy та обмежена віссю ординат, прямими $y = a$ і $y = -a$ та графіком функції $y = x^3$ (рис. 6.6), то отримаємо тіло, форма якого нагадує пісочний годинник (рис. 6.7).

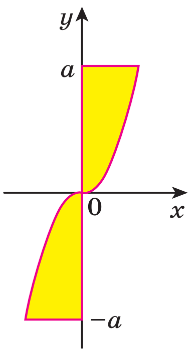


Рис. 6.6

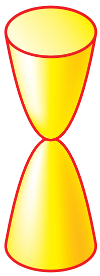


Рис. 6.7

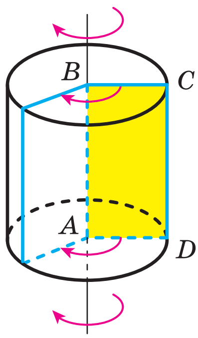


Рис. 6.8

Будь-яке тіло обертання має вісь симетрії. Нею є вісь обертання.

Циліндр можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутника навколо прямої, що містить його сторону.

На рисунку 6.8 зображено циліндр, отриманий обертанням прямокутника $ABCD$ навколо прямої AB. У результаті обертання сторін BC і AD утворюються основи циліндра. У результаті обертання сторони CD утворюється бічна поверхня циліндра. Бічна поверхня циліндра — це приклад **поверхні обертання**.

Будь-які дві твірні AA_1 і BB_1 циліндра є паралельними. Отже, через прямі AA_1 і BB_1 можна провести площину. Розглянемо чотирикутник AA_1B_1B, який є перерізом циліндра цією площиною (рис. 6.9). Оскільки $AA_1 \parallel BB_1$ і $AA_1 = BB_1$, то чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Оскільки твірна циліндра перпендикулярна до площини основи, то $AA_1 \perp AB$. Таким чином, перерізом циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, є прямокутник.

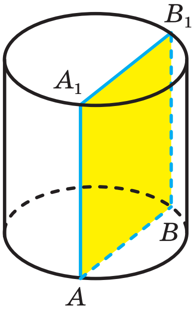


Рис. 6.9

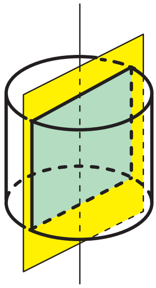


Рис. 6.10

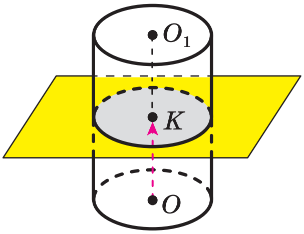


Рис. 6.11

Якщо перетнути циліндр площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утворюється прямокутник, дві сторони якого — діаметри основ циліндра, а дві інші — твірні циліндра (рис. 6.10). Такий переріз називають **осьовим перерізом циліндра**. Площина, яка містить осьовий переріз циліндра, є його площиною симетрії.

Перетнемо циліндр площиною, паралельною основам циліндра. Нехай ця площина перетинає вісь OO_1 циліндра в точці K (рис. 6.11). Утворена в перерізі фігура — це образ основи із центром O при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{OK}$. Отже, перерізом циліндра площиною, паралельною основам (або перпендикулярною до осі циліндра), є круг, що дорівнює основі.

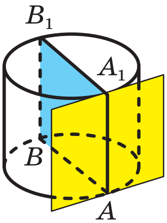


Рис. 6.12

Розглянемо осьовий переріз AA_1B_1B циліндра (рис. 6.12). Через твірну AA_1 проведемо площину α перпендикулярно до площини AA_1B_1. Площину α називають **дотичною площиною до циліндра**. Також говорять, що площина α дотикається до циліндра по твірній AA_1.

Уявимо собі, що поверхню циліндра розрізали по колах основ і деякій твірній (рис. 6.13), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою циліндра на площину** або просто **розгорткою циліндра**. Вона складається з двох кругів, що дорівнюють основам циліндра, і прямокутника, який називають **розгорткою бічної поверхні циліндра** (рис. 6.14).

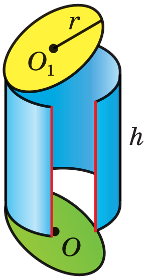


Рис. 6.13

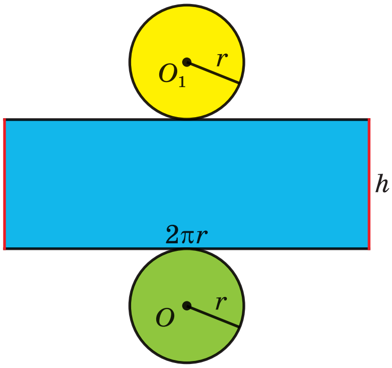


Рис. 6.14

Якщо твірна циліндра дорівнює h, а радіус основи циліндра — r, то сторони розгортки бічної поверхні циліндра дорівнюють h і $2\pi r$.

За площу бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні. Отже,

$$\boxed{S_б = 2\pi rh,}$$

де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, r — радіус основи циліндра, h — довжина висоти циліндра.

Площею повної поверхні циліндра називають суму площ бічної поверхні циліндра та двох його основ. Маємо:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа повної поверхні циліндра, $S_{осн}$ — площа основи циліндра.

Площа основи циліндра дорівнює πr^2. Тоді отримуємо формулу

$$\boxed{S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

Із курсу геометрії 10 класу ви знаєте, що паралельною проекцією кола є фігура, яку називають еліпсом. Тому, зображаючи циліндр,

Рис. 6.15

його основи рисують у вигляді еліпсів. На практиці для зображення еліпсів зручно користуватися лекалами (рис. 6.15).

Задача 1. Точки A і B лежать на колах різних основ циліндра так, що пряма AB утворює з площиною основи кут $60°$. Через точку A провели осьовий переріз AA_1D_1D (рис. 6.16). Знайдіть відстань між прямими AB і DD_1, якщо радіус основи циліндра дорівнює 5 см і $AB = 16$ см.

Розв'язання. Проведемо твірну BK циліндра. Оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основи, то вони паралельні. Отже, точки A, A_1, B і K належать одній площині.

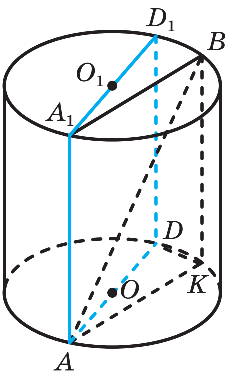


Рис. 6.16

Маємо: $DD_1 \parallel BK$. Отже, $DD_1 \parallel AA_1B$. Тоді відстань між мимобіжними прямими AB і DD_1 дорівнює відстані між прямою DD_1 і площиною AA_1B. Тому достатньо знайти довжину перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої DD_1 на площину AA_1B.

Сполучимо точки D і K. Вписаний кут DKA спирається на діаметр AD, тому $DK \perp AK$. Оскільки $BK \perp ADK$, то $BK \perp DK$. Отримали, що пряма DK перпендикулярна до двох прямих площини AA_1B, що перетинаються. Таким чином, $DK \perp AA_1B$, тому довжина відрізка DK — шукана відстань.

Пряма AK є проекцією прямої AB на площину основи циліндра. Отже, кут BAK — кут між прямою AB і площиною основи. За умовою $\angle BAK = 60°$.

Із трикутника ABK ($\angle BKA = 90°$): $AK = AB \cos 60° = 8$ (см).

Із трикутника ADK ($\angle AKD = 90°$):

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 6 см. ◀

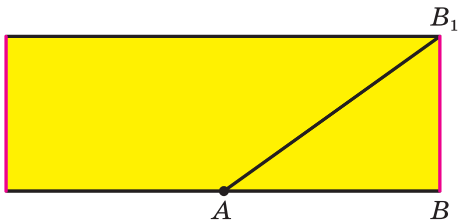


Рис. 6.17

Задача 2. Відрізок AB — діаметр однієї з основ циліндра. Відрізок BB_1 є твірною циліндра. Знайдіть довжину найкоротшого шляху по бічній поверхні циліндра, який сполучає точки A і B_1, якщо діаметр основи дорівнює 4 см, а твірна циліндра — 3 см.

Розв'язання. Розріжемо бічну поверхню циліндра по твірній BB_1 і розглянемо розгортку бічної поверхні циліндра. Точка A є серединою сторони отриманого прямокутника (рис. 6.17).

Тоді шукана найкоротша відстань дорівнює довжині відрізка AB_1, зображеного на розгортці циліндра.

Зауважимо, що відрізок AB, зображений на розгортці, дорівнює половині довжини кола основи циліндра, тобто на рисунку 6.17 $AB = 2\pi$ см.

За умовою $BB_1 = 3$ см.

Із трикутника ABB_1 ($\angle B = 90^\circ$):

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{4\pi^2 + 9} \text{ (см).}$$

Відповідь: $\sqrt{4\pi^2 + 9}$ см. ◄

?

1. Яке тіло називають циліндром?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею циліндра.
3. Що називають основами циліндра? віссю циліндра? висотою циліндра?
4. Яке тіло називають тілом обертання?
5. Яку пряму називають віссю обертання?
6. Що називають осьовим перерізом циліндра?
7. З яких фігур складається розгортка циліндра?
8. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
9. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні циліндра?

ВПРАВИ

6.1.° Прямокутник зі сторонами 1 см і 3 см обертають навколо більшої сторони. Знайдіть:
1) діагональ осьового перерізу утвореного циліндра;
2) площу повної поверхні цього циліндра.

6.2.° Квадрат зі стороною 8 см обертають навколо однієї з його сторін. Знайдіть:
1) площу осьового перерізу утвореного циліндра;
2) площу повної поверхні цього циліндра.

6.3.° Точки O і O_1 — центри нижньої та верхньої основ циліндра відповідно (рис. 6.18). Точка A — довільна точка кола, яке обмежує нижню основу циліндра. Відрізок O_1A дорівнює 6 см і утворює з площиною основи циліндра кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

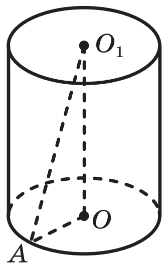


Рис. 6.18

6.4.° Висота циліндра дорівнює 5 см, а діаметр основи — 24 см. Знайдіть відстань від центра однієї основи циліндра до точки кола другої основи.

6.5.° Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d і утворює з однією зі сторін розгортки кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

6.6.° Квадрат, діагональ якого дорівнює 4π см, є розгорткою бічної поверхні циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

6.7.° Як зміниться — збільшиться або зменшиться — та в скільки разів площа бічної поверхні циліндра, якщо:
1) радіус його основи збільшити в k разів;
2) висоту циліндра зменшити в k разів;
3) висоту циліндра збільшити в k разів, а радіус основи зменшити в k разів?

6.8.° Діаметр основи циліндра більший за його висоту, а кут між діагоналями осьового перерізу дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

6.9.° Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо площа його бічної поверхні дорівнює S.

6.10.• У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $120°$, а із центра верхньої основи — під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина даної хорди дорівнює 6 см.

6.11.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом 90°, а із центра верхньої основи — під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 8 см.

6.12.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює a.

6.13.° У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом β. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи й середину даної хорди, дорівнює m та утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

6.14.° Навколо якої зі сторін прямокутника, більшої чи меншої, треба його обертати, щоб отримати циліндр з більшою площею:
1) бічної поверхні; 2) повної поверхні?

6.15.° Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 10 см, а висота — 12 см, проведено переріз, що є квадратом. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.

6.16.° Паралельно осі циліндра проведено переріз, що відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут β, а радіус основи дорівнює R. Знайдіть площу цього перерізу.

6.17.° Паралельно осі циліндра проведено переріз, що віддалений від неї на $\sqrt{3}$ см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 120°. Знайдіть площу цього перерізу, якщо його діагональ дорівнює 10 см.

6.18.° Точки O і O_1 — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, точка A належить нижній основі циліндра (рис. 6.19). На відрізку OO_1 позначено точку B так, що пряма AB перетинає бічну поверхню циліндра. Побудуйте точку перетину прямої AB з бічною поверхнею циліндра.

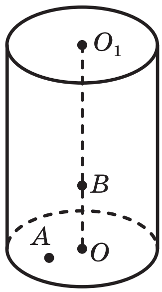


Рис. 6.19

6.19.$^{\bullet}$ Радіус основи циліндра дорівнює 9 см. Із середини відрізка OO_1, де точки O і O_1 — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, проведено промінь, який перетинає площину нижньої основи в точці, віддаленій від центра цієї основи на 12 см. Цей промінь перетинає твірну циліндра в точці, віддаленій від площини нижньої основи на 2 см. Знайдіть висоту циліндра.

6.20.$^{\bullet}$ Висота циліндра дорівнює 20 см. Через середину твірної циліндра проведено пряму, яка перетинає відрізок, що сполучає центри основ, у точці, віддаленій на 6 см від площини нижньої основи, а саму цю площину — у точці, віддаленій на 15 см від центра нижньої основи. Знайдіть радіус основи циліндра.

6.21.$^{\bullet}$ Розгортка бічної поверхні циліндра є квадратом. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра.

6.22.$^{\bullet}$ Кут між діагоналлю розгортки бічної поверхні циліндра та стороною розгортки, що дорівнює довжині кола основи циліндра, дорівнює α. Знайдіть кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра та площиною основи.

6.23.$^{\bullet\bullet}$ Кінці відрізка AB, що дорівнює 15 см, належать колам різних основ циліндра. Знайдіть відстань між прямою AB і віссю циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 9 см, а радіус його основи — 8 см.

6.24.$^{\bullet\bullet}$ Кінці відрізка AB, що дорівнює $\sqrt{2}$ см, належать колам різних основ циліндра. Радіус основи циліндра дорівнює 1 см. Пряма AB утворює з площиною основи циліндра кут $45°$. Знайдіть відстань між прямою AB і віссю циліндра.

6.25.$^{\bullet\bullet}$ Точки O і O_1 — відповідно центри нижньої та верхньої основ циліндра, точка A належить колу нижньої основи циліндра, а точка B — колу верхньої основи. Кут між прямими OA і O_1B дорівнює $60°$. Знайдіть кут між прямими AB і OO_1, якщо діаметр основи циліндра дорівнює його висоті.

6.26.$^{\bullet\bullet}$ Прямокутник MM_1N_1N — переріз циліндра, паралельний його осі (рис. 6.20). Точки A і B лежать на основах циліндра по різні боки від даного перерізу. Побудуйте точку перетину прямої AB із площиною MM_1N_1.

6.27.$^{\bullet\bullet}$ Прямокутник MM_1N_1N — переріз циліндра, паралельний його осі. На колах основ циліндра по різні боки від даного перерізу позначено точки A і B (рис. 6.21). Побудуйте точку перетину прямої AB із площиною MM_1N_1.

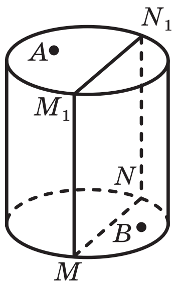


Рис. 6.20

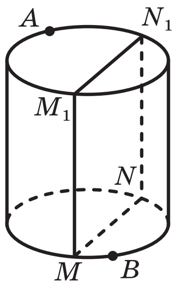


Рис. 6.21

6.28.•• Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює α ($0° < \alpha < 180°$). Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

6.29.•• Площина, паралельна осі циліндра, перетинає основу циліндра по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S.

6.30.•• Радіус основи циліндра дорівнює 13 см, а висота — 32 см. Прямокутник $ABCD$ розміщений так, що його вершини A і D лежать на колі нижньої основи циліндра, а вершини B і C — на колі верхньої основи. Сторона AD у 4 рази менша від сторони AB. Знайдіть площу прямокутника $ABCD$.

6.31.•• Радіус основи циліндра дорівнює 8 см. Дві вершини квадрата зі стороною 12 см належать колу однієї основи циліндра, а дві — колу другої основи. Знайдіть висоту циліндра, якщо площина даного квадрата перетинає відрізок, який сполучає центри основ циліндра.

6.32.•• Радіус основи та висота циліндра відповідно дорівнюють 1 см і $\sqrt{2}$ см. Вершини A і B рівностороннього трикутника ABC належать колу однієї з основ циліндра, а вершина C — колу другої основи. Знайдіть сторону трикутника ABC.

6.33.•• Точки A, B і C належать колу однієї з основ циліндра. Відомо, що $\angle ACB = 90°$ і $AC = CB = 2$ см. Відрізки AK і BD — твірні циліндра. Точка M — середина відрізка BD, причому $CM \perp KB$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

6.34.•• Точки A, C і D належать колу однієї з основ циліндра. Відомо, що $\angle DAC = 90^\circ$, $\angle ADC = 30^\circ$ і $AC = 1$ см. Відрізки CK і DM — твірні циліндра. Точка B ділить відрізок DM у відношенні 3 : 1, рахуючи від точки D, причому $AB \perp KB$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

6.35.* Навколо циліндричної колони заввишки 5 м і діаметром 1 м обвито вузьку стрічку, яка піднімається від підніжжя до верху колони трьома повними витками. Знайдіть мінімальну довжину стрічки.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.36. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює h, а кут між його рівними сторонами дорівнює α. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

6.37. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 27 см, а одна з бічних сторін — 13 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в дану трапецію.

7. Комбінації циліндра та призми

Означення. **Призму називають *вписаною в циліндр*, якщо її основи вписано в основи циліндра. При цьому циліндр називають *описаним навколо призми*.**

Доведемо, що коли призму вписано в циліндр, то вона є прямою. Іншими словами, похилу призму вписати в циліндр неможливо. Для цього покажемо, що бічні ребра призми, вписаної в циліндр, є твірними циліндра.

Нехай відрізок AA_1 — бічне ребро призми, а точки O і O_1 — центри описаних кіл основ призми (рис. 7.1). При паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ образом нижньої основи призми є верхня основа, а отже, образом точки O є точка O_1, тобто $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OO_1}$. Пряма OO_1 — вісь циліндра. Отже, відрізок AA_1 перпендикулярний до основ циліндра. Оскільки точки A і A_1 належать основам циліндра, то відрізок AA_1 — твірна циліндра.

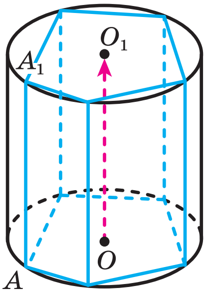


Рис. 7.1

Таким чином, *вписати в циліндр можна таку пряму призму, основи якої є вписаними многокутниками*.

Наприклад, правильну призму та пряму трикутну призму можна вписати в циліндр.

Означення. Призму називають описаною навколо циліндра, якщо її основи описано навколо основ циліндра. При цьому циліндр називають вписаним у призму.

Площини, що містять бічні грані призми, описаної навколо циліндра, є дотичними площинами до циліндра (рис. 7.2). Покажемо це. Розглянемо грань AA_1B_1B призми. Ребра AB і A_1B_1 дотикаються до кіл основ циліндра в точках M і M_1 відповідно (рис. 7.3). Нехай точки O і O_1 — центри основ циліндра. При паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ образом точки O є точка O_1, а образом точки M — точка M_1.

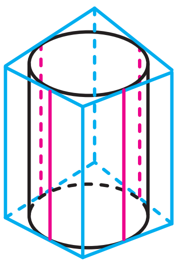


Рис. 7.2

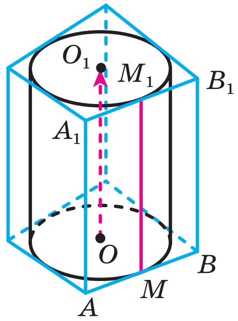


Рис. 7.3

Маємо: $AB \perp OM$ і $AB \perp OO_1$. Отже, $AB \perp OO_1M_1$. Тоді за ознакою перпендикулярності площин площина AA_1B_1 перпендикулярна до площини осьового перерізу, яка проходить через твірну MM_1. Звідси випливає, що площина AA_1B_1 є дотичною до циліндра.

Доведіть самостійно, що коли призму описано навколо циліндра, то вона є прямою.

Описати навколо циліндра можна таку пряму призму, основи якої є описаними многокутниками.

Наприклад, правильну призму та пряму трикутну призму можна описати навколо циліндра.

У попередньому пункті ми означили площу бічної поверхні циліндра як площу розгортки його бічної поверхні. Існують і інші підходи до введення цього поняття.

Матеріал даного пункту дає змогу ввести поняття площі бічної поверхні циліндра, використовуючи міркування, аналогічні тим, які було застосовано під час введення поняття довжини кола.

Із курсу планіметрії ви знаєте, що довжиною кола називають границю послідовності периметрів правильних многокутників, вписаних в дане коло, при необмеженому збільшенні кількості їхніх сторін, тобто $C = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, де C — довжина кола, P_n — периметр правильного n-кутника.

На рисунку 7.4 зображено правильні призми, вписані в даний циліндр. При необмеженому збільшенні кількості сторін основ призм площі їхніх бічних поверхонь як завгодно мало відрізнятимуться від площі бічної поверхні циліндра.

Наведені міркування показують, що площу $S_б$ бічної поверхні циліндра можна означити як границю послідовності S_n площ бічних поверхонь правильних n-кутних призм, вписаних в даний циліндр, тобто $S_б = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

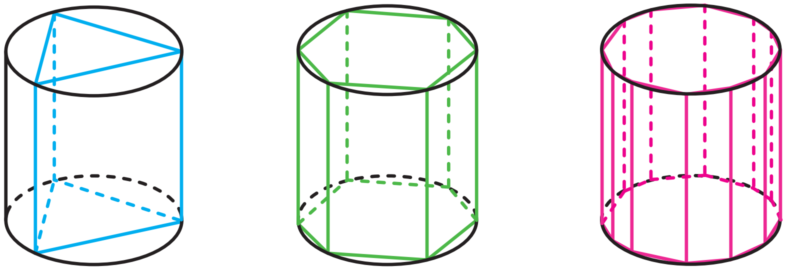


Рис. 7.4

Якщо твірна циліндра дорівнює h, а радіус основи циліндра — r, то можна записати: $S_б = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n h = h \lim\limits_{n\to\infty} P_n = h \cdot 2\pi r = 2\pi rh$.

Задача 1. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 13 см, а висота — 17 см, вписано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основа призми, чотирикутник $ABCD$, є трапецією, у якій $BC \parallel AD$ і $BC = 10$ см, $AD = 24$ см. Знайдіть площу чотирикутника AB_1C_1D.

Розв'язання. Чотирикутник, площу якого треба знайти, зображено на рисунку 7.5. Нехай точки O і O_1 — центри основ циліндра. Проведемо через точку O висоту MN трапеції $ABCD$ (рис. 7.6). Оскільки трапеція вписана в коло, то вона є рівнобічною. Тому пряма MN — вісь симетрії трапеції, а точки M і N — середини основ трапеції.

Проведемо радіуси OA і OB основи циліндра (рис. 7.6).

Із прямокутних трикутників AOM і BON знайдемо відрізки OM і ON.

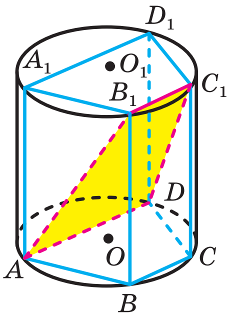


Рис. 7.5

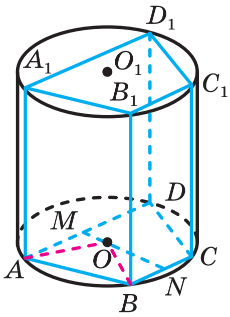


Рис. 7.6

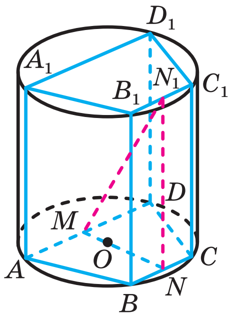


Рис. 7.7

Маємо:

$$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ (см)};$$

$$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см)}.$$

Тоді $MN = 17$ см.

Нехай точка N_1 — середина ребра B_1C_1 (рис. 7.7). Тоді $NN_1 \parallel BB_1$. Оскільки призма пряма, то відрізок NN_1 є висотою призми, а отже, і висотою циліндра. За умовою $NN_1 = 17$ см. Отримали, що в прямокутному трикутнику MNN_1 катети є рівними. Отже, $\angle NMN_1 = 45°$.

Оскільки $MN \perp AD$ і пряма MN — проекція прямої MN_1 на площину основи призми, то $MN_1 \perp AD$. Отже, кут NMN_1 — кут між площинами ABC і AB_1C_1.

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати: $S_{AB_1C_1D} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45°}$.

Маємо: $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MN = 289$ см^2.

Тоді $S_{AB_1C_1D} = 289\sqrt{2}$ см^2.

Здавалося б, розв'язування закінчено. Проте ми розглянули тільки той випадок, коли центри основ циліндра належать основам призми. Але центр описаного кола може й не належати трапеції. Цей випадок проілюстровано на рисунку 7.8. Закінчіть розв'язування самостійно.

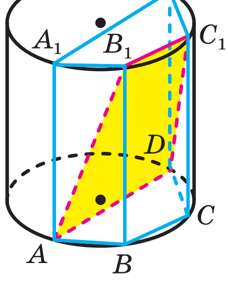


Рис. 7.8

Відповідь: $289\sqrt{2}$ см^2 або $221\sqrt{2}$ см^2. ◄

Задача 2. Вершини A і B призми $ABCA_1B_1C_1$ належать відрізку, що сполучає центри основ циліндра, а вершини C, A_1, B_1 і C_1 — бічній поверхні циліндра. Знайдіть двогранний кут призми при ребрі AB.

Розв'язання. Спроектуємо вершини призми на площину основи (рис. 7.9). Проекцією вершин A і B є точка O — центр основи циліндра. Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то проекцією вершин A_1 і B_1 є деяка точка M, що належить колу основи циліндра. Проекцією вершин C і C_1 є відповідно точки E і K, що належать тому самому колу.

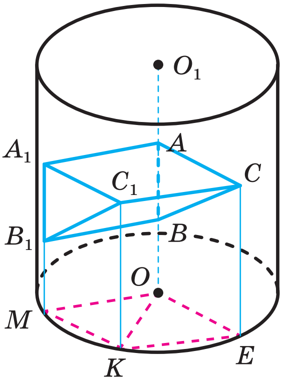


Рис. 7.9

Оскільки $AA_1 \parallel CC_1$ і $AA_1 = CC_1$, то $OM \parallel EK$ і $OM = EK$. Тоді чотирикутник $OMKE$ — паралелограм. Оскільки $OM = OE$, то чотирикутник $OMKE$ — ромб, у якому кожна сторона, а також діагональ OK дорівнюють радіусу кола. Тоді легко встановити, що $\angle EOM = 120°$.

Прямі OM і OE перпендикулярні до ребра AB і належать відповідно площинам граней ABB_1 і ABC. Таким чином, шуканий кут дорівнює куту EOM.

Відповідь: 120°. ◄

1. Яку призму називають вписаною в циліндр?
2. Чим для циліндра є бічні ребра призми, вписаної в циліндр?
3. Яку призму можна вписати в циліндр?
4. Яку призму називають описаною навколо циліндра?
5. У якому разі говорять, що бічна грань призми дотикається до циліндра?
6. Яку призму можна описати навколо циліндра?

ВПРАВИ

7.1.° Основою прямої призми є чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 36°$, $\angle B = 123°$, $\angle C = 144°$, $\angle D = 57°$. Чи можна описати циліндр навколо цієї призми?

7.2.° Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює меншій основі. Чи можна вписати циліндр у цю призму?

7.3.° Сума бічних сторін трапеції, яка є основою прямої призми, дорівнює 16 см, а середня лінія трапеції — 7 см. Чи можна вписати циліндр у цю призму?

7.4.° Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо куба, ребро якого дорівнює a.

7.5.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 8 см, а його висота дорівнює 12 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо даного паралелепіпеда.

7.6.° Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної в циліндр.

7.7.° Висота циліндра дорівнює 6 см, а діагональ його осьового перерізу утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, вписаної в циліндр.

7.8.° Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює a, а діагональ бічної грані утворює з бічним ребром призми кут α. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.

7.9.° Висота основи правильної трикутної призми дорівнює 9 см, а бічне ребро призми — 4 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.

7.10.° Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а висота — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

7.11.° Ребро куба дорівнює a. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, вписаного в даний куб.

7.12.• У призму, основою якої є рівнобічна трапеція з основами 8 см і 18 см, вписано циліндр. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо висота призми дорівнює 10 см.

7.13.• У призму, основою якої є ромб зі стороною $10\sqrt{2}$ см і кутом $45°$, вписано циліндр. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо висота призми дорівнює 4 см.

7.14.• Знайдіть відношення площі бічної поверхні циліндра, описаного навколо правильної шестикутної призми, до площі бічної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.

7.15.° Знайдіть відношення площі осьового перерізу циліндра, описаного навколо правильної трикутної призми, до площі осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму.

7.16.° Основою призми є прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α. Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу основи, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.

7.17.° Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює S. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо даної призми.

7.18.° Основою призми є рівнобедрений прямокутний трикутник. Висота призми дорівнює h, а площа бічної поверхні — S. Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо даної призми.

7.19.° Основа призми — рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ грані, яка проходить через бічну сторону основи, дорівнює m і нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

7.20.° Основа призми — рівнобедрений трикутник з кутом α між рівними сторонами. Діагональ грані, яка проходить через основу трикутника, дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

7.21.° Площа бічної поверхні призми, основою якої є ромб з кутом α, дорівнює S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

7.22.° Площа бічної поверхні правильної шестикутної призми дорівнює S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

7.23.°° У правильну призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ вписано циліндр, який дотикається до бічних граней AA_1B_1B і BB_1C_1C по твірних MM_1 і KK_1 відповідно. Діагональ осьового перерізу цього циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу чотирикутника MM_1K_1K.

7.24.°° У правильну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписано циліндр, який дотикається до бічних граней AA_1B_1B і BB_1C_1C по твірних EE_1 і FF_1 відповідно. Чотирикутник EE_1F_1F є квадратом. Знайдіть площу цього квадрата, якщо радіус основи циліндра дорівнює R.

7.25.•• Ребро AD паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Діагональ B_1D утворює з гранями $ABCD$ і AA_1D_1D кути α і β відповідно. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даного паралелепіпеда (грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ належать основам циліндра).

7.26.•• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, гострий кут A якого дорівнює α, а діагональ BD дорівнює d. Площина BC_1D утворює з площиною основи призми кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

7.27.•• У циліндр, радіус основи якого дорівнює 5 см, вписано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основою призми є трапеція $ABCD$, у якій $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Відстань між прямими BC і A_1D_1 дорівнює 25 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

7.28.•• У циліндр, радіус основи якого дорівнює 13 см, вписано призму $ABCA_1B_1C_1$. Основою призми є рівнобедрений трикутник ABC, основа AB якого дорівнює 24 см. Відстань від точки C_1 до середини відрізка AB дорівнює 30 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

7.29.* Усі ребра правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють a. Вершини A і A_1 лежать на бічній поверхні циліндра. Площина BCC_1 дотикається до бічної поверхні циліндра. Вісь циліндра паралельна прямій B_1C. Знайдіть радіус основи циліндра.

7.30.* Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Вершини A, B і D_1 належать бічній поверхні циліндра, вісь якого паралельна прямій DC_1. Знайдіть радіус основи циліндра.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.31. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців більшої бічної сторони на 1 см і на 2 см. Знайдіть площу трапеції.

7.32. Відрізок CD — висота трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$, $AC = 15$ см, $CD = 12$ см. Знайдіть довжину кола, вписаного в трикутник BCD.

КРАСА ТА РОЗУМ УКРАЇНИ

Роксолана, Соломія Крушельницька, Леся Українка — відомі в усьому світі українки минулого.

Сучасні українські дівчата стають найкращими не тільки в політиці та мистецтві, а й на аренах математичних змагань. У найпрестижнішій Європейській математичній олімпіаді для дівчат (EGMO) українські школярки Софія Дубова (2014 рік), Ольга Шевченко (2017 рік) та Аліна Гарбузова (2018 рік) тричі виборювали першість серед усіх учасниць, розв'язавши абсолютно всі запропоновані задачі. Узагалі, українська команда дівчат досі залишається єдиною командою Європи, яка тричі ставала першою в офіційному командному заліку. Такі досягнення переконали європейську спільноту обрати місцем проведення EGMO у 2019 р. місто Київ. Упевнені, що в черговий раз побачимо наших розумниць на вершині п'єдесталу пошани.

Команда України на першій олімпіаді EGMO (Кембридж, Велика Британія, 2012 рік)

Склад команди (*зліва направо*): Харитонова Олена (срібло); Кравченко Юлія (срібло); Павлюк Марія (срібло); Сердюк Ярослава (срібло)

8. Конус

Розглянемо на площині α коло із центром O. Проведемо відрізок OK перпендикулярно до площини α (рис. 8.1). Сполучимо точку K з усіма точками кола. Усі проведені відрізки утворюють деяку фігуру F.

Коло із центром O обмежує круг. Тіло, обмежене цим кругом і фігурою F, називають **конусом**.

Фігуру F називають **бічною поверхнею конуса**, круг — **основою конуса**, відрізки, які утворюють фігуру F, — **твірними конуса**. На рисунку 8.1 відрізки KX і KY — твірні конуса. Усі твірні конуса є рівними й утворюють рівні кути з площиною основи.

Спільний кінець усіх твірних конуса називають **вершиною конуса**. На рисунку 8.1 точка K — вершина конуса.

Пряму, яка проходить через вершину конуса та центр його основи, називають **віссю конуса**. На рисунку 8.1 пряма KO — вісь конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини його основи.

На рисунку 8.1 кожний із відрізків OX і OY є радіусом основи конуса.

Висотою конуса називають відрізок, який сполучає вершину конуса із центром його основи. На рисунку 8.1 відрізок KO — висота конуса.

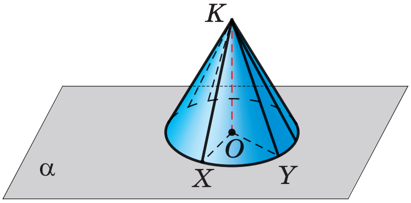


Рис. 8.1

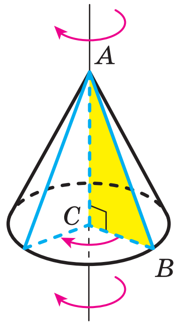


Рис. 8.2

Конус можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить його катет. На рисунку 8.2 зображено конус, отриманий обертанням прямокутного трикутника ABC навколо прямої AC. У результаті обертання катета CB утворюється основа конуса, у результаті обертання гіпотенузи AB — його бічна поверхня. Бічна поверхня конуса є поверхнею обертання.

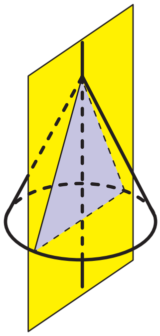


Рис. 8.3

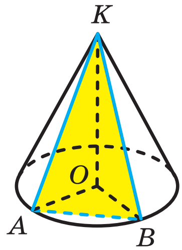


Рис. 8.4

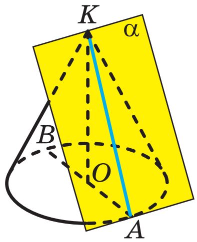


Рис. 8.5

Якщо конус перетнути площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утвориться рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого — твірні конуса, основа — діаметр основи конуса (рис. 8.3). Такий переріз називають **осьовим перерізом конуса**.

Площина, яка містить осьовий переріз конуса, є його площиною симетрії.

Через будь-які дві твірні KA і KB конуса можна провести площину (рис. 8.4). Розглянемо трикутник AKB, який є перерізом конуса цією площиною. Оскільки $KA = KB$, то перерізом конуса площиною, яка проходить через дві його твірні, є рівнобедрений трикутник.

Розглянемо осьовий переріз AKB конуса (рис. 8.5). Через твірну AK проведемо площину α перпендикулярно до площини AKB. Площину α називають **дотичною площиною до конуса**. Також говорять, що площина α дотикається до конуса по твірній KA.

Уявимо собі, що поверхню конуса розрізали по колу основи та деякій твірній (рис. 8.6), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою конуса на площину** або просто **розгорткою конуса** (рис. 8.7).

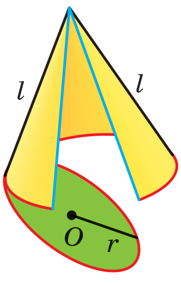


Рис. 8.6

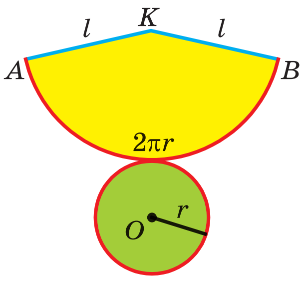


Рис. 8.7

Вона складається з круга, що дорівнює основі конуса, і кругового сектора, який називають **розгорткою бічної поверхні конуса**.

Якщо твірна конуса дорівнює l, а радіус основи конуса — r, то радіус кругового сектора дорівнює l, а довжина дуги сектора — $2\pi r$. Нехай градусна міра кута AKB дорівнює α. Тоді довжина дуги AB дорівнює $\frac{\pi l \alpha}{180}$. Маємо: $2\pi r = \frac{\pi l \alpha}{180}$. Звідси

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \qquad (*)$$

За площу $S_б$ бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні. Скориставшись формулою площі сектора, маємо: $S_б = \frac{\pi l^2 \alpha}{360}$. З урахуванням рівності (*) отримуємо: $S_б = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi r l$.

Отже, площу бічної поверхні конуса обчислюють за формулою

$$\boxed{S_б = \pi r l,}$$

де r — радіус основи конуса, l — довжина твірної конуса.

Площею повної поверхні конуса називають суму площ бічної поверхні та основи конуса. Маємо:

$$\boxed{S_п = S_б + S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа повної поверхні конуса, $S_{осн}$ — площа основи конуса.

Площа основи конуса дорівнює πr^2. Тоді отримуємо формулу

$$\boxed{S_п = \pi r l + \pi r^2}$$

Задача 1. В основі конуса з вершиною K проведено хорду AB і діаметр AD. Знайдіть кут між твірною KD і хордою AB, якщо $AB = KD$.

Розв'язання. Проведемо діаметр BM основи конуса (рис. 8.8). Діагоналі чотирикутника $ABDM$ точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси $AB = MD$. Оскільки $AB \parallel MD$, то шуканий кут дорівнює куту MDK.

Розглянемо трикутник MKD. Оскільки $AB = KD$ і $AB = MD$, то трикутник MKD рівносторонній. Отже, шуканий кут дорівнює $60°$.

Відповідь: $60°$. ◄

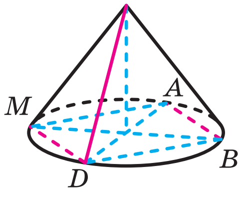


Рис. 8.8

Задача 2. Точка M є серединою твірної KA конуса (точка K — вершина конуса). Знайдіть довжину найкоротшого шляху по бічній поверхні конуса, який сполучає точки A і M та перетинає всі твірні конуса, якщо радіус основи дорівнює 1 см, а твірна — 4 см.

Розв'язання. Розріжемо бічну поверхню конуса по твірній KA та розглянемо розгортку бічної поверхні конуса. Ця розгортка являє собою сектор радіуса 4 см з довжиною дуги 2π см (рис. 8.9). Точці M відповідає середина радіуса KA сектора. Довжина шуканого шляху дорівнює відрізку MA, виділеному на рисунку 8.9 червоним кольором.

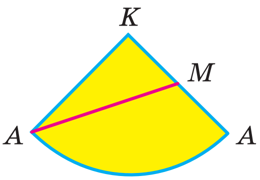


Рис. 8.9

Зауважимо, що довжина кола радіуса 4 см дорівнює 8π см. Отже, дуга розглядуваного сектора становить чверть кола. Тому кут K дорівнює $90°$. Скориставшись теоремою Піфагора, запишемо:

$$AM = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ см}.$$

Відповідь: $2\sqrt{5}$ см. ◄

1. Яке тіло називають конусом?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею конуса.
3. Що називають основою конуса? віссю конуса? висотою конуса?
4. Що називають осьовим перерізом конуса?
5. З яких фігур складається розгортка конуса?
6. Що приймають за площу бічної поверхні конуса?
7. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні конуса?
8. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні конуса?

ВПРАВИ

8.1.° Радіус основи конуса дорівнює 9 см, а кут між твірною та площиною основи дорівнює $30°$. Знайдіть площу:
1) бічної поверхні конуса;
2) осьового перерізу конуса.

8.2.° Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а висота — 8 см. Знайдіть площу:
1) бічної поверхні конуса;
2) повної поверхні конуса.

8.3.° Висота конуса дорівнює H, а кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює α. Знайдіть площу:
1) осьового перерізу конуса;
2) бічної поверхні конуса.

8.4.° Твірна конуса дорівнює a, а кут у його осьовому перерізі при вершині конуса дорівнює α. Знайдіть площу:
1) осьового перерізу конуса;
2) бічної поверхні конуса.

8.5.° Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 8 см, а один із кутів дорівнює $30°$, обертається навколо більшого катета. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного конуса.

8.6.° Знайдіть площу осьового перерізу конуса, який утворився в результаті обертання прямокутного трикутника з гіпотенузою 17 см і катетом 15 см навколо другого катета.

8.7.° Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а відстань від центра основи до твірної конуса — 12 см. Знайдіть твірну та висоту конуса.

8.8.° Висота конуса дорівнює $4\sqrt{5}$ см, а відстань від центра основи до середини твірної конуса — 6 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

8.9.• Точка M — вершина конуса, точка O — центр його основи, точка A належить основі конуса, точка B належить відрізку MO (рис. 8.10). Побудуйте точку перетину прямої AB з бічною поверхнею конуса.

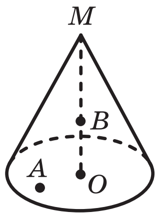


Рис. 8.10

8.10.• В основі конуса проведено хорду завдовжки a, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює α $(0° < \alpha < 180°)$. Кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює β. Знайдіть висоту конуса.

8.11.• В основі конуса проведено хорду, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює α $(0° < \alpha < 180°)$. Кут між висотою конуса та його твірною дорівнює β, а довжина твірної дорівнює m. Знайдіть дану хорду.

8.12.• Площина, проведена через дві твірні конуса, перетинає основу по хорді, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює β $(0° < \beta < 180°)$. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо висота конуса дорівнює H, а кут між площиною перерізу та площиною основи конуса дорівнює α.

8.13.$^{\bullet}$ Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює 60°, проведено площину. Ця площина перетинає основу конуса по хорді завдовжки 8 см, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 90°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

8.14.$^{\bullet}$ Прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см обертається навколо прямої, яка містить його гіпотенузу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.15.$^{\bullet}$ Рівнобедрений гострокутний трикутник з основою a і кутом α при основі обертається навколо прямої, яка містить його бічну сторону. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.16.$^{\bullet}$ Рівнобедрений трикутник з основою a і протилежним їй кутом α обертається навколо прямої, яка містить його основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.17.$^{\bullet}$ Прямокутна трапеція з основами 6 см і 9 см та висотою 4 см обертається навколо прямої, яка містить її більшу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.18.$^{\bullet}$ Прямокутна трапеція з основами 3 см і 4 см та гострим кутом 45° обертається навколо прямої, яка містить її меншу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.19.$^{\bullet}$ Ромб зі стороною 10 см і кутом 60° обертається навколо прямої, яка містить одну зі сторін ромба. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.20.$^{\bullet}$ Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 26 см, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Трапеція обертається навколо прямої, яка містить її більшу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.21.$^{\bullet}$ Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 12 см, а градусна міра дуги — 240°. Знайдіть радіус основи конуса.

8.22.$^{\bullet}$ Розгорткою бічної поверхні конуса є півкруг. Якою є величина кута при вершині осьового перерізу конуса?

8.23.$^{\bullet}$ Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 5 см. Знайдіть центральний кут цього сектора, якщо висота конуса дорівнює 4 см.

8.24.$^{\bullet\bullet}$ Із круга вирізали сектор, який являє собою чверть круга. Із цього сектора та з решти круга виготовили бічні поверхні двох конусів. Знайдіть відношення висот конусів до цих бічних поверхонь.

8.25.•• Через дві твірні конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи конуса кут α. Відстань від центра основи конуса до цієї площини дорівнює a, а кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює β. Знайдіть радіус основи конуса.

8.26.•• Відрізок MO — висота конуса, відрізки MA і MB — його твірні, $MO = 4\sqrt{2}$ см. Відстань від точки O до прямої AB дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки O до площини AMB.

8.27.•• Через дві твірні конуса проведено переріз, кут між площиною перерізу та площиною основи конуса дорівнює α. Кут між твірною та площиною основи дорівнює β, а радіус основи конуса дорівнює R. Знайдіть площу цього перерізу.

8.28.•• Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α, проведено переріз. Кут між площиною цього перерізу та площиною основи конуса дорівнює β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H.

8.29.•• Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо відомо, що на його поверхні можна провести три попарно перпендикулярні твірні.

8.30.•• Відрізки MA, MB і MC — твірні конуса, причому $MA \perp MB$, $MB \perp MC$, $MA \perp MC$, $MA = 3$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

8.31.•• Відрізок MK — середня лінія трикутника ABC, паралельна стороні AC, $AB = 15$ см, $AC = 14$ см, $BC = 13$ см. Трикутник ABC обертається навколо прямої MK. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.32.•• Відрізок EF — середня лінія трапеції $ABCD$, у якій $BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Дана трапеція обертається навколо прямої EF. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

8.33.•• В основі конуса проведено хорди AB і BC так, що $AB = BC = 20$ см, $\cos\angle ABC = \frac{1}{4}$. Знайдіть кут між прямою AB і прямою, яка містить твірну SC, якщо $SC = 30$ см.

8.34.•• В основі конуса проведено хорди AB і BC так, що $AB = 10$ см, $BC = 18$ см, $\angle ABC = 60°$. Кут між твірною KC і хордою AB дорівнює $\arccos\frac{1}{3}$. Знайдіть твірну конуса.

8.35.•• Висота конуса дорівнює 20 см. На колі основи позначили точку C, віддалену від діаметра AB основи на 15 см. Знайдіть відстань між прямою AB і прямою, яка містить твірну SC конуса.

8.36.•• Через вершину конуса проведено переріз найбільшої можливої площі. Виявилося, що ця площа у два рази більша за площу осьового перерізу. Знайдіть кут між твірними в осьовому перерізі конуса.

8.37.* Радіус основи конуса та його твірна дорівнюють відповідно $\frac{2}{3}$ см і 2 см. Знайдіть довжину найкоротшого замкненого шляху по бічній поверхні конуса, початок і кінець якого збігаються з деякою точкою кола основи.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.38. Відрізки AD і CE — медіани трикутника ABC. Знайдіть сторону AC, якщо $AB = 8\sqrt{5}$ см, $BC = 6\sqrt{5}$ см і $AD \perp CE$.

8.39. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $32\sqrt{3}$ см^2, а гострий кут — $60°$. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо відомо, що в трапецію можна вписати коло.

9. Зрізаний конус

Перетнемо конус площиною, паралельною площині основи. Фігура, отримана в перерізі, — це образ основи конуса при гомотетії із центром у вершині конуса. Тому перерізом конуса площиною, паралельною основі (або перпендикулярною до осі конуса), є круг.

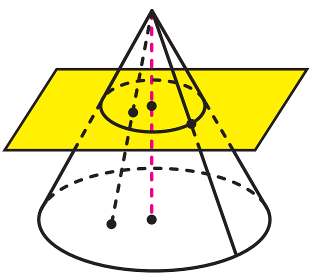


Рис. 9.1

Січна площина, паралельна основі конуса, ділить конус на два тіла. Одне з них є конусом, друге називають **зрізаним конусом** (рис. 9.1).

Основу даного конуса, з якого утворено зрізаний конус, і круг, отриманий у перерізі, називають **основами зрізаного конуса**. Частину бічної поверхні даного конуса та частину його твірної, які містяться між основами зрізаного конуса, називають відповідно **бічною поверхнею** та **твірною зрізаного конуса** (рис. 9.2). Пряму, яка проходить через центри O і O_1 основ, називають **віссю зрізаного конуса**.

Висотою зрізаного конуса називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки площини однієї основи до площини другої основи. На рисунку 9.2 відрізок OO_1 є висотою зрізаного конуса.

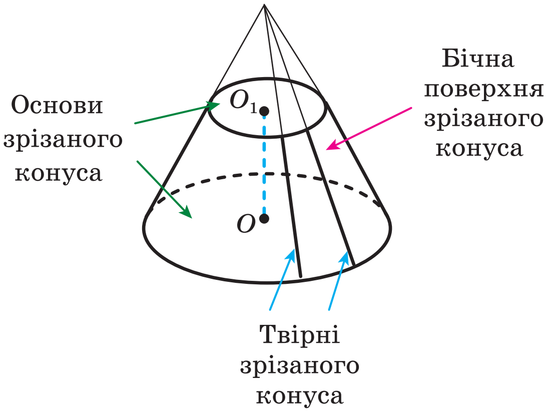


Рис. 9.2

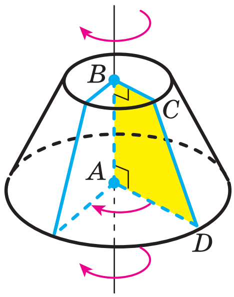


Рис. 9.3

Зрізаний конус можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутної трапеції навколо прямої, що містить меншу бічну сторону. На рисунку 9.3 зображено зрізаний конус, отриманий обертанням прямокутної трапеції $ABCD$ навколо прямої AB. У результаті обертання основ AD і BC трапеції утворюються основи зрізаного конуса. У результаті обертання бічної сторони CD трапеції утворюється бічна поверхня зрізаного конуса. Бічна поверхня зрізаного конуса є поверхнею обертання.

Якщо перетнути зрізаний конус площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утворюється рівнобічна трапеція, бічні сторони якої — твірні зрізаного конуса, основи — діаметри основ зрізаного конуса (рис. 9.4). Такий переріз називають **осьовим перерізом зрізаного конуса**.

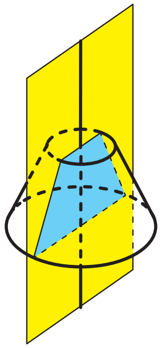


Рис. 9.4

Площина, яка містить осьовий переріз зрізаного конуса, є його площиною симетрії.

Будь-які дві твірні AA_1 і BB_1 зрізаного конуса належать прямим AK і BK, що перетинаються (рис. 9.5). Отже, через прямі AA_1 і BB_1 можна провести площину. Розглянемо чотирикутник AA_1B_1B, який є перерізом зрізаного конуса цією площиною. Маємо: $AA_1 = BB_1$ і $A_1B_1 \parallel AB$. Таким чином, перерізом зрізаного конуса площиною, яка проходить через дві його твірні, є рівнобічна трапеція.

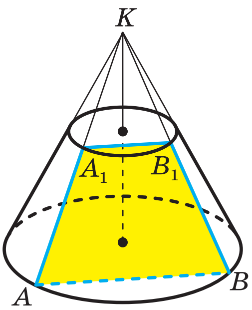


Рис. 9.5

Уявимо собі, що поверхню зрізаного конуса розрізали по колах основ і деякій твірній (рис. 9.6), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою зрізаного конуса на площину** або просто **розгорткою зрізаного конуса** (рис. 9.7). Вона складається з двох кругів, що дорівнюють основам зрізаного конуса, і частини кільця, утвореного двома концентричними колами. Цю частину кільця називають **розгорткою бічної поверхні зрізаного конуса**.

За площу $S_б$ бічної поверхні зрізаного конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні.

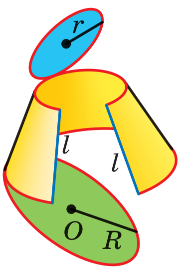


Рис. 9.6

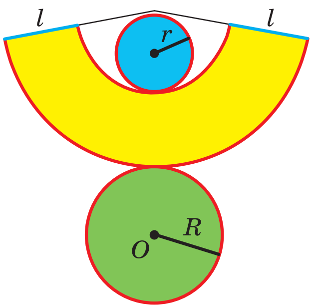


Рис. 9.7

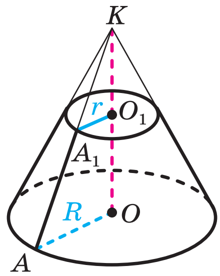


Рис. 9.8

На рисунку 9.8 зображено три тіла: конус із вершиною в точці K, твірною KA та основою із центром O і радіусом R («великий» конус); конус із вершиною в точці K, твірною KA_1 та основою із центром O_1 і радіусом r («малий» конус); зрізаний конус із твірною AA_1 та основами із центрами O і O_1.

Зрозуміло, що площа $S_б$ бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює різниці площ бічних поверхонь «великого» і «малого» конусів. Маємо:

$$S_б = \pi R \cdot KA - \pi r \cdot KA_1 = \pi R\,(KA_1 + AA_1) - \pi r KA_1 =$$
$$= \pi R \cdot AA_1 + \pi\,(R - r)\,KA_1.$$

Оскільки прямокутні трикутники AOK і A_1O_1K мають спільний гострий кут AKO, то ці трикутники подібні. Звідси $\dfrac{KA}{KA_1}=\dfrac{OA}{O_1A_1}$, тобто $\dfrac{KA}{KA_1}=\dfrac{R}{r}$. Маємо:

$$\frac{KA}{KA_1}-1=\frac{R}{r}-1;\quad \frac{KA-KA_1}{KA_1}=\frac{R-r}{r};$$

$$\frac{AA_1}{KA_1}=\frac{R-r}{r};\quad KA_1=\frac{r\cdot AA_1}{R-r}.$$

Тоді

$$S_б=\pi R\cdot AA_1+\pi(R-r)\cdot\frac{r\cdot AA_1}{R-r}=$$

$$=\pi R\cdot AA_1+\pi r\cdot AA_1=\pi(R+r)\cdot AA_1.$$

Отже, площу бічної поверхні зрізаного конуса обчислюють за формулою

$$\boxed{S_б=\pi(R+r)l,}$$

де R і r — радіуси основ, l — довжина твірної зрізаного конуса.

Задача. Осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція з перпендикулярними діагоналями, кожна з яких дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Відомо, що твірна зрізаного конуса нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

Розв'язання. На рисунку 9.9 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$, яка є осьовим перерізом зрізаного конуса. Відрізки AB і CD — твірні, відрізки BC і AD — діаметри основ зрізаного конуса. Оскільки трапеція рівнобічна, то трикутник AKD (K — точка перетину діагоналей) рівнобедрений. Оскільки $\angle AKD=90°$, то $\angle BDA=45°$.

Проведемо висоту BM трапеції.

Із прямокутного трикутника BMD отримуємо, що $MD=BD\cos 45°=6$ (см). Маємо: $BM=MD=6$ (см).

У рівнобічній трапеції відрізок MD дорівнює півсумі основ, тобто

$$MD=\frac{BC+AD}{2}.$$

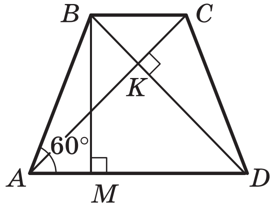


Рис. 9.9

Звідси $MD = R + r = 6$ (см), де R і r — радіуси основ зрізаного конуса.

Оскільки за умовою твірна зрізаного конуса нахилена до площини основи під кутом $60°$, то $\angle BAM = 60°$.

Із прямокутного трикутника BAM отримуємо, що

$$AB = \frac{BM}{\sin 60°} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Таким чином, $S_б = \pi\,(R + r) \cdot AB = 24\sqrt{3}\pi$ (см).

Відповідь: $24\sqrt{3}\pi$ (см). ◄

Зауважимо, що під час розв'язування цієї задачі ми обмежилися розглядом тільки осьового перерізу зрізаного конуса, а не будували зображення самого зрізаного конуса. Такий підхід характерний для цілої низки задач на тіла обертання. Його доцільно застосовувати в тих випадках, коли елементи, необхідні для розв'язування, належать площині осьового перерізу.

1. Що називають бічною поверхнею зрізаного конуса? твірною зрізаного конуса? віссю зрізаного конуса? висотою зрізаного конуса?
2. Що називають осьовим перерізом зрізаного конуса?
3. Що приймають за площу бічної поверхні зрізаного конуса?
4. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні зрізаного конуса?

ВПРАВИ

9.1.° Точка M — вершина конуса, точка O — центр його основи. Радіус основи конуса дорівнює 18 см. На відрізку MO позначено точку K так, що $MK : KO = 4 : 5$. Через точку K проведено площину, паралельну основі конуса. Знайдіть площу утвореного перерізу конуса.

9.2.° Площа перерізу конуса площиною, перпендикулярною до його висоти, дорівнює 12π см^2. У якому відношенні площина перерізу ділить висоту конуса, рахуючи від його вершини, якщо радіус основи дорівнює $3\sqrt{3}$ см?

9.3.° Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 1 см і 2 см, а твірна — 5 см.

9.4.$^\circ$ Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 4 см і 6 см, а твірна — 3 см.

9.5.$^\circ$ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 8 см, а твірна — 13 см. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

9.6.$^\circ$ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 12 см, а висота — 15 см. Знайдіть твірну зрізаного конуса.

9.7.$^\circ$ У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $\angle D = 45°$, $AD = 7$ см, $CD = 2\sqrt{2}$ см. Трапеція обертається навколо прямої AB. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного зрізаного конуса.

9.8.$^\circ$ Дано трапецію $ABCD$ таку, що $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BC = 2$ см, $\angle D = 60°$. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, отриманого в результаті обертання даної трапеції навколо прямої AB.

9.9.$^\bullet$ Висоту конуса поділили на 4 рівних відрізки та через точки поділу провели площини, паралельні основі конуса. Знайдіть площу найбільшого з утворених перерізів конуса, якщо площа його основи дорівнює S.

9.10.$^\bullet$ Висота конуса дорівнює h. На якій відстані від вершини конуса треба провести площину, перпендикулярну до висоти конуса, щоб площа утвореного перерізу конуса була в 3 рази меншою від площі його основи?

9.11.$^\bullet$ Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см^2 і 16 см^2. Через середину висоти зрізаного конуса проведено площину, паралельну його основам. Знайдіть площу утвореного перерізу зрізаного конуса.

9.12.$^\bullet$ Точка O — центр більшої основи зрізаного конуса, точка O_1 — центр його меншої основи, точка O_2 — середина відрізка OO_1. Площа більшої основи дорівнює 4π см^2, а меншої — π см^2. Через точку O_2 проведено площину, перпендикулярну до прямої OO_1. Знайдіть відношення площі бічної поверхні зрізаного конуса з висотою O_1O_2 до площі бічної поверхні зрізаного конуса з висотою O_2O.

9.13.$^\bullet$ Радіус більшої основи зрізаного конуса дорівнює R, радіус меншої основи — r, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює α. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса.

9.14.$^\bullet$ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 5 см і 15 см, а діагональ осьового перерізу — $4\sqrt{61}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

9.15.•• У зрізаному конусі проведено осьовий переріз CC_1D_1D і по різні боки від нього на основах конуса позначено точки A і B (рис. 9.10). Побудуйте точку перетину прямої AB із площиною CC_1D_1.

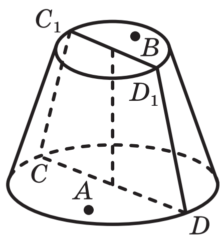


Рис. 9.10

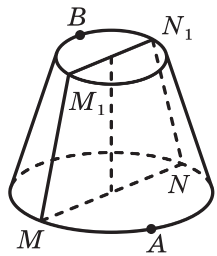


Рис. 9.11

9.16.•• У зрізаному конусі проведено осьовий переріз MM_1N_1N і по різні боки від нього на колах основ позначено точки A і B (рис. 9.11). Побудуйте точку перетину прямої AB із площиною MM_1N_1.

9.17.•• Висота зрізаного конуса дорівнює 6 см, а кут між його твірною та площиною більшої основи становить $60°$. Діагоналі осьового перерізу зрізаного конуса перпендикулярні. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

9.18.•• Твірна зрізаного конуса дорівнює m і утворює з площиною більшої основи кут α, а діагональ осьового перерізу перпендикулярна до твірної. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса.

9.19.•• Кут між твірною зрізаного конуса та площиною більшої основи дорівнює α, а кут між діагоналлю осьового перерізу та цією площиною дорівнює β. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо його висота дорівнює h.

9.20.•• Через дві твірні зрізаного конуса, кут між якими дорівнює $90°$, проведено площину, що перетинає більшу основу по хорді завдовжки a, а меншу — по хорді завдовжки b і відтинає від кола кожної основи дугу, градусна міра якої $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

9.21.•• Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, $R > r$. Через дві твірні проведено площину, яка перетинає основи зрізаного конуса по хордах, що стягують дуги α $(0° < \alpha < 180°)$, і яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу утвореного перерізу зрізаного конуса.

9.22.•• Ромб зі стороною a і гострим кутом α обертається навколо прямої, що проходить через вершину гострого кута ромба перпендикулярно до його сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

9.23.•• Рівнобедрений гострокутний трикутник з основою a і протилежним їй кутом α обертається навколо прямої, що проходить через вершину даного кута перпендикулярно до бічної сторони трикутника. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

9.24.•• Площа рівнобедреного трикутника дорівнює S, а кут між його бічними сторонами дорівнює α. Трикутник обертається навколо прямої, що проходить через вершину кута при його основі перпендикулярно до основи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.25. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 5 см. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 8 см, а кут між діагоналями дорівнює $60°$. Знайдіть периметр трапеції.

9.26. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його меншого кута.

10. Комбінації конуса та піраміди

Означення. **Піраміду називають вписаною в конус, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають описаним навколо піраміди.**

Ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса, а висоти піраміди й конуса збігаються (рис. 10.1).

Піраміду можна вписати в конус, якщо навколо основи цієї піраміди можна описати коло, а вершина цієї піраміди проектується в центр описаного кола основи.

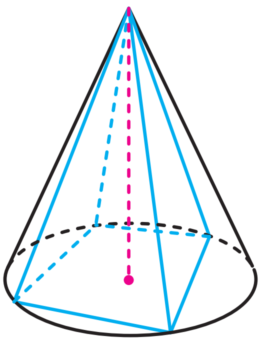


Рис. 10.1

Означення. Піраміду називають описаною навколо конуса, якщо її основу описано навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса (рис. 10.2). **При цьому конус називають вписаним у піраміду.**

Площини, які містять бічні грані піраміди, описаної навколо конуса, є дотичними площинами до конуса. Покажемо це. Розглянемо грань AKB піраміди, описаної навколо конуса (рис. 10.3). Нехай ребро AB дотикається до кола основи конуса в точці M. Відрізок KM — твірна конуса.

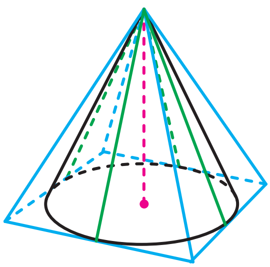


Рис. 10.2

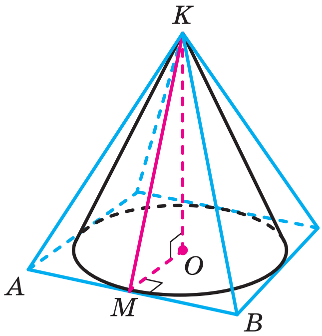


Рис. 10.3

Нехай точка O — центр основи конуса. Маємо: $AB \perp OM$ і $AB \perp KO$. Отже, $AB \perp OKM$. Тоді за ознакою перпендикулярності площин площина AKB перпендикулярна до площини осьового перерізу, що проходить через твірну KM. Звідси випливає, що площина AKB є дотичною до конуса.

Бічна грань піраміди, описаної навколо конуса, проходить через твірну конуса й інших спільних точок з конусом не має (на рис. 10.2 ці твірні виділено блакитним кольором). У такому разі говорять, що бічна грань піраміди **дотикається до** конуса.

Висота піраміди, описаної навколо конуса, і висота конуса збігаються.

Піраміду можна описати навколо конуса, якщо в основу цієї піраміди можна вписати коло, а вершина цієї піраміди проектується в центр вписаного кола основи.

На рисунку 10.4 зображено піраміду, вписану в конус, яку перетнули площиною, паралельною основі. У результаті утворилися дві комбінації тіл: піраміда, вписана в конус, і **зрізана піраміда, вписана в зрізаний конус**. При цьому зрізаний конус називають **описаним навколо зрізаної піраміди**.

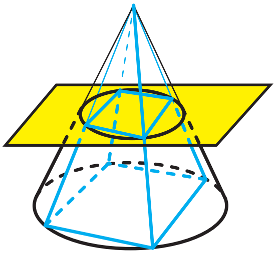


Рис. 10.4

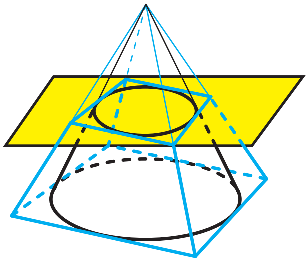


Рис. 10.5

Основи зрізаної піраміди, вписаної в зрізаний конус, є многокутниками, вписаними в основи зрізаного конуса. Бічні ребра зрізаної піраміди є твірними зрізаного конуса.

На рисунку 10.5 зображено піраміду, описану навколо конуса, яку перетнули площиною, паралельною основі. У результаті утворилися дві комбінації тіл: піраміда, описана навколо конуса, і **зрізана піраміда, описана навколо зрізаного конуса**. При цьому зрізаний конус називають **вписаним у зрізану піраміду**.

Основи зрізаної піраміди, описаної навколо зрізаного конуса, є многокутниками, описаними навколо основ зрізаного конуса. Бічні грані цієї зрізаної піраміди проходять через твірні зрізаного конуса й інших спільних точок зі зрізаним конусом не мають.

У пп. 8, 9 ми дали означення площ бічних поверхонь конуса та зрізаного конуса як площ їхніх розгорток.

Матеріал цього пункту дає змогу ввести ці поняття аналогічно тому, як у п. 6 було введено поняття площі бічної поверхні циліндра.

На рисунку 10.6 зображено правильні піраміди, вписані в даний конус. При необмеженому збільшенні кількості сторін основ пірамід площі їхніх бічних поверхонь як завгодно мало відрізнятимуться від площі бічної поверхні конуса.

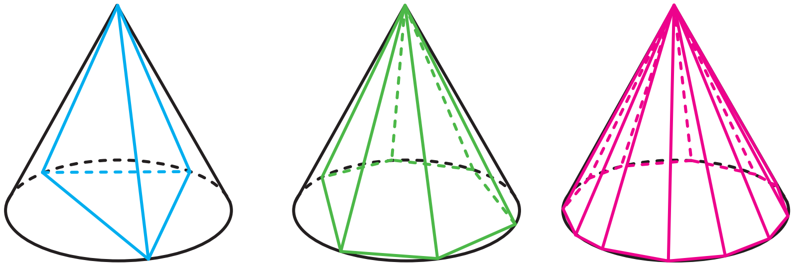


Рис. 10.6

Наведені міркування показують, що площу $S_б$ бічної поверхні конуса можна означити як границю послідовності S_n площ бічних поверхонь правильних n-кутних пірамід, вписаних у даний конус, тобто $S_б = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Нехай P_n — периметр основи правильної n-кутної піраміди, a_n — її апофема. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ і } \lim_{n\to\infty} P_n = 2\pi r,$$

де l і r — відповідно довжина твірної та радіус основи конуса.

Тоді $S_б = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} P_n a_n = \pi r l.$

Для того щоб аналогічним чином означити площу бічної поверхні зрізаного конуса, треба розглянути послідовність площ бічних поверхонь правильних n-кутних зрізаних пірамід, вписаних у цей зрізаний конус. Зробіть це самостійно.

Задача 1. Конус, радіус основи якого дорівнює 3 см, а твірна — 5 см, вписано в чотирикутну піраміду $KABCD$. Основою піраміди є рівнобічна трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), бічна сторона якої дорівнює 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. Вершина даної піраміди проектується в центр вписаного кола основи. Як ви знаєте, у такій піраміді двогранні кути при ребрах основи є рівними. Проведемо радіус OM у точку дотику ребра AD до основи конуса, сполучимо точки M і K (рис. 10.7). Оскільки $OM \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $KM \perp AD$. Отже, кут KMO — лінійний кут двогранного кута при ребрі AD. Нехай $\angle KMO = \alpha$. Маємо:

$$\cos\alpha = \frac{OM}{KM} = \frac{3}{5}.$$

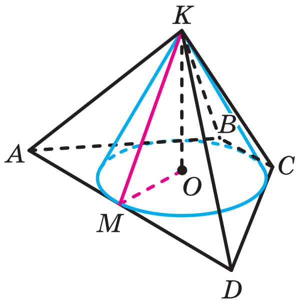


Рис. 10.7

Згідно з твердженням, доведеним у ключовій задачі 1 п. 3, можна записати: $S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. Знайдемо площу основи піраміди, тобто площу трапеції $ABCD$.

Висота даної трапеції дорівнює діаметру вписаного кола, тобто 6 см. Оскільки в дану трапецію можна вписати коло, то $AD + BC = AB + DC = 2AB = 20$ см. Маємо: $S_{осн} = \frac{AD + BC}{2} \cdot 2OM = 60$ см^2.

Таким чином, $S_б = \dfrac{60}{\cos\alpha} = 100$ (см²).

Відповідь: 100 см². ◄

Інше розв'язання цієї задачі можна отримати, знайшовши периметр основи піраміди та використавши той факт, що всі бічні грані є трикутниками з рівними висотами.

Задача 2. У конус із вершиною K вписано трикутну піраміду $KABC$. Двогранні кути при ребрах KA, KB і KC дорівнюють відповідно 60°, 90° і 120°. Знайдіть кут між площиною AKC і площиною, що дотикається до конуса по твірній KA (рис. 10.8).

Розв'язання. Проведемо висоту конуса KO. Розглянемо піраміду $KAOC$. Легко показати (зробіть це самостійно), що двогранні кути при ребрах KA і KC є рівними. Нехай кожний із них дорівнює α. Аналогічно можна показати, що є рівними двогранні кути при ребрах KA і KB піраміди $KAOB$ (позначимо величини цих кутів β) і двогранні кути при ребрах KB і KC піраміди $KBOC$ (позначимо величини цих кутів γ). Тоді з урахуванням величин двогранних кутів при ребрах KA, KB і KC піраміди $KABC$ можна записати таку систему:

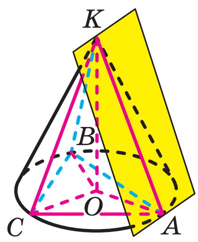


Рис. 10.8

$$\begin{cases}\alpha+\beta=60^\circ,\\ \beta+\gamma=90^\circ,\\ \gamma+\alpha=120^\circ.\end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$ і $\gamma = 75^\circ$.

Оскільки дотична площина перпендикулярна до площини KAO, то шуканий кут дорівнює: $90^\circ - \alpha = 45^\circ$.

Відповідь: 45°. ◄

1. Яку піраміду називають вписаною в конус?
2. Чим для конуса є бічні ребра піраміди, вписаної в конус?
3. Яку піраміду можна вписати в конус?
4. Яку піраміду називають описаною навколо конуса?
5. У якому разі говорять, що бічна грань піраміди дотикається до конуса?
6. Яку піраміду можна описати навколо конуса?
7. Що називають зрізаною пірамідою, вписаною в зрізаний конус?
8. Чим для зрізаного конуса є бічні ребра зрізаної піраміди, вписаної в зрізаний конус?
9. Що називають зрізаною пірамідою, описаною навколо зрізаного конуса?

ВПРАВИ

10.1.• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро — 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.2.• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а висота — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.3.• Основою піраміди є трикутник зі стороною a та протилежним їй кутом α, а кут між кожним бічним ребром і площиною основи дорівнює β. Знайдіть висоту та твірну конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.4.• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а висота піраміди дорівнює 12 см. Вершина піраміди проектується в середину гіпотенузи. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.5.• Основою піраміди є прямокутник зі сторонами $4\sqrt{7}$ см і 12 см, а кожне бічне ребро піраміди дорівнює 17 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.6.• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а висота — 6 см. Знайдіть твірну конуса, вписаного в дану піраміду.

10.7.• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 18 см, а апофема — 9 см. Знайдіть висоту конуса, вписаного в дану піраміду.

10.8.• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.

10.9.• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.

10.10.• Навколо конуса описано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

10.11.• Навколо конуса описано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

10.12.$^{\bullet}$ Основа піраміди — прямокутник, менша зі сторін якого дорівнює a, а кут між діагоналями дорівнює α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.13.$^{\bullet}$ Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетом b і прилеглим до нього гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.14.$^{\bullet}$ Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і прилеглим до неї кутом α. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.15.$^{\bullet}$ Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, а висота піраміди дорівнює $\frac{5\sqrt{87}}{8}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо даної піраміди.

10.16.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли в піраміду $MABCD$ можна вписати конус, то сума площ граней AMB і CMD дорівнює сумі площ граней AMD і BMC.

10.17.$^{\bullet\bullet}$ Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α, а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює m. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.

10.18.$^{\bullet\bullet}$ Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює β, а відстань від центра основи до бічної грані дорівнює d. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в дану піраміду.

10.19.$^{\bullet\bullet}$ Навколо конуса описано піраміду, основою якої є ромб зі стороною a і кутом α, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть площу осьового перерізу даного конуса.

10.20.$^{\bullet\bullet}$ Навколо конуса описано піраміду, основою якої є рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α при основі. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.

10.21.$^{\bullet\bullet}$ Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.

10.22.•• Навколо конуса описано піраміду, основою якої є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, а висота піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні даного конуса.

10.23.•• У зрізаний конус вписано правильну зрізану трикутну піраміду. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 6 см і 18 см, а висота — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

10.24.•• Навколо правильної зрізаної чотирикутної піраміди описано зрізаний конус. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса, якщо сторони основ зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а її висота — $2\sqrt{7}$ см.

10.25.•• У правильну зрізану чотирикутну піраміду вписано зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 5 см і 7 см, а кут між твірною та площиною більшої основи дорівнює $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

10.26.•• Навколо зрізаного конуса описано правильну зрізану трикутну піраміду, сторони основ якої дорівнюють 18 см і 24 см, а бічне ребро — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

10.27.•• Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. У піраміду вписано конус. Через вершину конуса проведено площину. Знайдіть площу перерізу конуса цією площиною, якщо відомо, що ця площа набуває найбільшого значення.

10.28.•• Висота правильної трикутної піраміди дорівнює h, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. У піраміду вписано конус. Через вершину конуса проведено площину. Знайдіть площу перерізу конуса цією площиною, якщо відомо, що ця площа набуває найбільшого значення.

10.29.•• У конус, радіус основи та висота якого відповідно дорівнюють 10 см і 15 см, вписано піраміду $MABCD$. Основою піраміди є трапеція $ABCD$, основи якої BC і AD відповідно дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть відстань між прямими AD і MC.

10.30.•• У конус, радіус основи та висота якого відповідно дорівнюють 13 см і 15 см, вписано піраміду $DABC$. Основою піраміди є трикутник ABC, у якому $AB = 24$ см, а висота CK дорівнює 10 см. Знайдіть відстань між прямими AB і CD.

10.31.* У правильній піраміді $DABC$ сторона основи ABC дорівнює a, а бічне ребро дорівнює $2a$. Точки D, B і C належать бічній поверхні конуса з вершиною в точці A. Знайдіть кут між твірними в осьовому перерізі конуса.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.32. У трикутнику ABC проведено бісектриси AM і CN. Відомо, що $AC = 6$ см, $AN = 2$ см, $CM = 3$ см. Знайдіть відрізок MN.

10.33. Перпендикуляр, опущений із точки кола на діаметр, ділить його на два відрізки, один з яких на 27 см більший за другий. Знайдіть довжину даного кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 18 см.

11. Сфера та куля. Рівняння сфери

Означення. Сферою називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу.

Задану точку називають **центром сфери**. На рисунку 11.1 точка O — центр сфери.

Будь-який відрізок, який сполучає точку сфери з її центром, називають **радіусом сфери**. Довжину цього відрізка також прийнято називати радіусом сфери. На рисунку 11.1 відрізок OX — радіус. З означення випливає, що всі радіуси сфери є рівними.

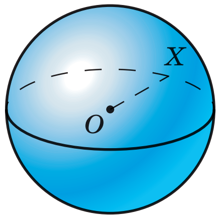


Рис. 11.1

Відрізок, який сполучає дві точки сфери та проходить через її центр, називають **діаметром сфери**. Якщо радіус сфери дорівнює r, то діаметр дорівнює $2r$.

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що сфера обмежує тіло, яке називають **кулею**.

Означення. Кулею називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

Задану точку називають **центром кулі**. Сферу, яка обмежує кулю, називають **поверхнею кулі**. **Радіусом кулі** називають радіус її поверхні.

Діаметр кулі — це діаметр поверхні кулі.

Якщо X — довільна точка кулі радіуса r із центром O, то $OX \leqslant r$.

Кулю можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр.

На рисунку 11.2 зображено кулю, отриману обертанням півкруга навколо прямої, яка містить його діаметр AB. При обертанні півкола AB утворюється сфера — поверхня отриманої кулі. Сфера є поверхнею обертання.

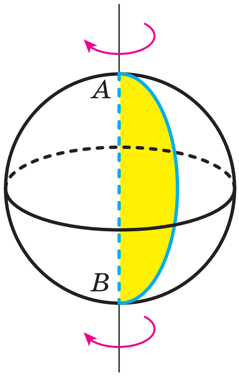


Рис. 11.2

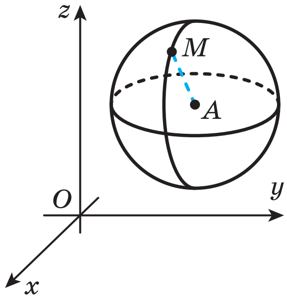


Рис. 11.3

Теорема 11.1. ***Рівняння сфери із центром $A(a; b; c)$ і радіусом r має вигляд***

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

Доведення. Покажемо, що координати кожної точки даної сфери задовольняють дане рівняння, і навпаки, кожна точка, координати якої задовольняють дане рівняння, належить даній сфері.

Нехай $M(x; y; z)$ — довільна точка сфери радіуса r із центром $A(a; b; c)$ (рис. 11.3). Тоді $AM = r$, або $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$. Звідси

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати $(x; y; z)$ довільної точки M сфери є розв'язком рівняння (*).

Нехай $(x_0; y_0; z_0)$ — довільний розв'язок рівняння (*). Маємо: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$. Оскільки r — радіус сфери, то $r > 0$. Звідси отримуємо: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$. Ця рівність означає, що точка $N(x_0; y_0; z_0)$ віддалена від точки $A(a; b; c)$ на відстань, яка дорівнює радіусу сфери. Тому точка N належить сфері.

Отже, рівняння (*) є рівнянням сфери. ◄

Зазначимо, що рівняння сфери радіуса r із центром у початку координат має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 11.1, легко довести таке твердження: *нерівність* $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant r^2$, *де* $r > 0$, *задовольняють координати тих і тільки тих точок* $M(x; y; z)$ *простору, які належать кулі радіуса* r *із центром у точці* $A(a; b; c)$.

Тому нерівність виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant r^2$, де $r > 0$, задає кулю радіуса r із центром $A(a; b; c)$.

Задача. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X простору таких, що в трикутнику AXB медіана AM дорівнює стороні XB.

Розв'язання. Уведемо систему координат xyz так, щоб початок координат збігався з точкою A, а точка B належала осі абсцис і мала координати $(1; 0; 0)$ (рис. 11.4).

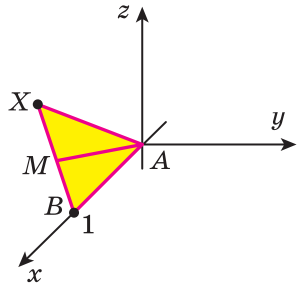


Рис. 11.4

Нехай точка X має координати $(x; y; z)$. Тоді координати точки M дорівнюють

$$\left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}; \frac{z}{2}\right).$$

З умови випливає, що $AM^2 = XB^2$. Тоді можна записати:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = (x-1)^2 + y^2 + z^2.$$

Звідси $x^2 - \frac{10}{3}x + 1 + y^2 + z^2 = 0$. Останню рівність можна переписати так: $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{9}$. Отримали рівняння сфери радіуса $\frac{4}{3}$ із центром у точці $O\left(\frac{5}{3}; 0; 0\right)$. Цій сфері належать шукані точки X.

Пряма AB перетинає сферу в точках $K\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$ і $E(3; 0; 0)$. Оскільки точки A, X і B не лежать на одній прямій, то точки K і E не належать шуканому ГМТ. Зрозуміло, що будь-яка інша точка X сфери не лежить на одній прямій з точками A і B та задовольняє рівність $AM^2 = XB^2$.

Відповідь: сфера радіуса $\frac{4}{3}AB$ із центром у точці O, яка належить променю AB і задовольняє умову $AO = \frac{5}{3}AB$, за винятком точок перетину сфери з прямою AB. ◄

1. Що називають сферою?
2. Що називають радіусом сфери? діаметром сфери?
3. Чому дорівнює діаметр сфери, якщо її радіус дорівнює r?
4. Що називають кулею?
5. Що називають діаметром кулі?
6. Яке рівняння є рівнянням сфери із центром у точці $A(a; b; c)$ і радіусом r?
7. Яка нерівність задає кулю із центром у точці $A(a; b; c)$ і радіусом r?

ВПРАВИ

11.1.° Відрізок AB — діаметр сфери, M — довільна точка сфери. Доведіть, що $\angle AMB = 90°$.

11.2.° Доведіть, що центр сфери є її центром симетрії.

11.3.° На сфері із центром O позначили точки A і B такі, що $AB = 18$ см. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від точки O до прямої AB дорівнює 12 см.

11.4.° Визначте за рівнянням сфери координати її центра та радіус:
1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9$;
2) $x^2 + (y+5)^2 + (z-6)^2 = 25$;
3) $(x+3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 11$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

11.5.° Як відносно сфери $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 100$ розміщена точка:
1) $A(-6; 9; -4\sqrt{3})$; 2) $B(5; 8; -5)$; 3) $C(-10; -4; 1)$?

11.6.° Складіть рівняння сфери, якщо відомо координати її центра K і радіус r:
1) $K(2; 5; -12)$, $r = 2$; 2) $K(0; 5; 11)$, $r = 2\sqrt{5}$.

11.7.° Складіть рівняння сфери, якщо відомо координати її центра M і радіус r:
1) $M(-3; 1; -8)$, $r = 9$; 2) $M(9; -10; 0)$, $r = 4\sqrt{2}$.

11.8.° Складіть рівняння сфери із центром у точці $P(3;\ -1;\ 16)$, якщо ця сфера проходить через точку $M(-2;\ -4;\ 13)$.

11.9.° Складіть рівняння сфери, діаметром якої є відрізок CD, якщо $C(-3;\ 6;\ 5)$, $D(1;\ -4;\ -5)$.

11.10.° Знайдіть координати точок перетину сфери $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=49$ з осями координат.

11.11.° Сфера із центром $A(-1;\ 3;\ 2)$ перетинається з віссю ординат у точках $B(0;\ -1;\ 0)$ і C. Знайдіть координати точки C.

11.12.• Складіть рівняння сфери, якщо вона проходить через точку $M(-6;\ 2;\ -3)$, центр сфери належить осі абсцис, а радіус сфери дорівнює 7.

11.13.• Складіть рівняння сфери, якщо вона проходить через точку $N(-1;\ 2;\ -2)$, центр сфери належить осі аплікат, а радіус сфери дорівнює 3.

11.14.• Доведіть, що рівняння $x^2+y^2+z^2-10x+14y+2z+70=0$ є рівнянням сфери, укажіть координати центра та радіус цієї сфери.

11.15.• Знайдіть координати центра та радіус сфери $x^2+y^2+z^2-16y+6z=0$.

11.16.• Складіть рівняння сфери, якщо вона проходить через точки $A(1;\ -1;\ 2)$ і $B(\sqrt{17};\ 1;\ 6)$, центр сфери належить координатній площині yz, а радіус сфери дорівнює $\sqrt{46}$.

11.17.• Складіть рівняння сфери, якщо вона проходить через точку $C(4;\ -2\sqrt{10};\ -2)$ і початок координат, центр сфери належить координатній площині xz, а радіус сфери дорівнює $3\sqrt{10}$.

11.18.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 4 см. Знайдіть радіус сфери, яка проходить через точки A, B, C_1 і середину ребра B_1C_1.

11.19.•• Сфера радіуса $\sqrt{41}$ см проходить через вершини B, C, C_1 і середину ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть ребро куба.

11.20.•• Знайдіть геометричне місце точок, віддалених на відстань d від даної сфери радіуса r.

11.21.•• Доведіть, що для заданого тетраедра $ABCD$ і довільної точки X простору виконується рівність $XA^2+XB^2+XC^2+XD^2=4XM^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$, де точка M — центроїд тетраедра.

11.22.•• Дано тетраедр і деяке додатне число. Знайдіть геометричне місце точок, для кожної з яких сума квадратів відстаней від точки до вершин даного тетраедра дорівнює заданому числу.

11.23.•• Центром сфери є точка перетину діагоналей куба. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин куба до точки сфери не залежить від вибору цієї точки.

11.24.•• Для даного тетраедра укажіть точку, сума квадратів відстаней від якої до вершин даного тетраедра є найменшою.

11.25.•• Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $XA = 2XB$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.26. Два кола, радіуси яких дорівнюють 9 см і 3 см, мають зовнішній дотик. Знайдіть відстань від точки дотику кіл до їхньої спільної зовнішньої дотичної.

11.27. Знайдіть довжину кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами 6 см і 8 см та висотою 7 см.

12. Взаємне розміщення сфери та площини

У курсі планіметрії ви досліджували взаємне розміщення кола та прямої і з'ясували, що воно залежить від двох параметрів: радіуса кола та відстані від центра кола до прямої. Просторовим аналогом цієї задачі є дослідження взаємного розміщення сфери та площини.

Нехай радіус даної сфери дорівнює r, а відстань від центра O сфери до даної площини α дорівнює d.

І випадок. Нехай $d > r$. У цьому разі сфера та площина не мають спільних точок (рис. 12.1).

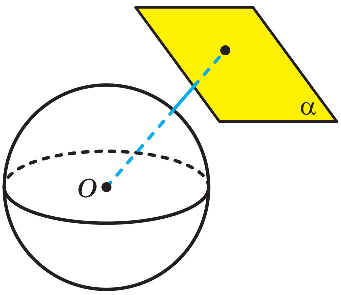


Рис. 12.1

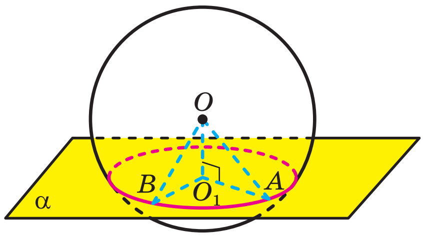


Рис. 12.2

II випадок. Нехай $d < r$. Доведемо, що в цьому випадку перерізом сфери та площини є коло.

Розглянемо випадок, коли січна площина не проходить через центр сфери, тобто $d \neq 0$. Із центра O сфери опустимо перпендикуляр OO_1 на площину α. Нехай A — довільна спільна точка сфери та площини α (рис. 12.2). Із прямокутного трикутника OO_1A, у якому $OO_1 = d$, $OA = r$, отримуємо: $O_1A = \sqrt{r^2 - d^2}$. Отже, усі спільні точки сфери та площини α належать колу радіуса $\sqrt{r^2 - d^2}$ із центром O_1. Залишилося показати, що будь-яка точка цього кола є спільною точкою сфери та площини α.

Нехай B — довільна точка цього кола. Тоді $O_1B = \sqrt{r^2 - d^2}$. Оскільки точка B належить площині α, то з прямокутного трикутника OO_1B отримуємо:

$$OB = \sqrt{O_1B^2 + OO_1^2},$$

тобто $OB = \sqrt{(\sqrt{r^2 - d^2})^2 + d^2} = \sqrt{r^2} = r$. Отже, точка B належить сфері.

Нехай січна площина проходить через центр сфери, тобто $d = 0$. Тоді в перерізі отримаємо фігуру, що складається з тих і тільки тих точок площини α, які віддалені від точки O на відстань r. Такою фігурою є коло радіуса r із центром O. Це коло називають **великим колом сфери** (рис. 12.3).

Отже, *якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса, то перерізом сфери площиною є коло.*

Спираючись на це твердження, можна зробити такий висновок: якщо відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то перерізом кулі площиною є круг.

Якщо площина проходить через центр кулі, то круг, утворений у перерізі, називають **великим кругом кулі**.

Розглянемо кулю та довільну площину α. Через центр кулі проведемо площину β, паралельну площині α. Ця площина перетинає кулю по великому кругу (рис. 12.4). Зрозуміло, що ортогональною проекцією кулі (сфери) на площину β є великий круг.

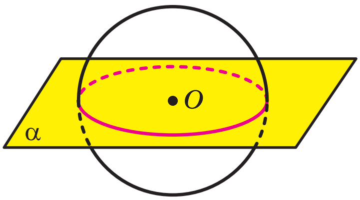


Рис. 12.3

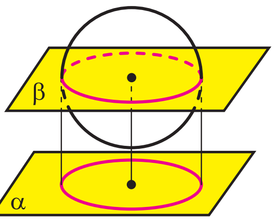


Рис. 12.4

Оскільки при паралельному проектуванні образ і прообраз, що лежать у паралельних площинах, є рівними фігурами, то можна дійти такого висновку: *ортогональною проекцією кулі* (*сфери*) *на будь-яку площину є круг, радіус якого дорівнює радіусу кулі.*

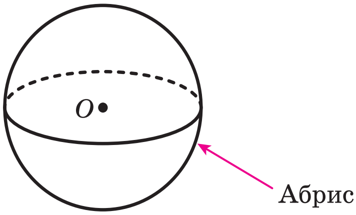


Рис. 12.5

Цю властивість використовують під час зображення сфери, а отже, і кулі.

На площині креслення будують коло, яке обмежує круг, що є ортогональною проекцією даної сфери (рис. 12.5). Це коло називають **абрисом**. Його центр O — зображення центра сфери. Для більшої наочності будують зображення ще одного великого кола, яке не лежить у площині, перпендикулярній до площини креслення. Це велике коло зображують у вигляді еліпса (див. рис. 12.5).

Площина, яка проходить через центр кулі, є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

III випадок. Нехай $d = r$. У цьому разі сфера та площина мають тільки одну спільну точку (рис. 12.6).

Означення. Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною до сфери.

Цю спільну точку називають **точкою дотику**. На рисунку 12.6 точка A — точка дотику.

Якщо фігура належить дотичній площині та має зі сферою (з поверхнею кулі) спільну точку, то говорять, що ця фігура **дотикається** до сфери. Якщо такою фігурою є пряма, то говорять, що така пряма є **дотичною** до сфери. Наприклад, прямі a, b і c на рисунку 12.7 є дотичними до сфери. Вони дотикаються до сфери в точці A.

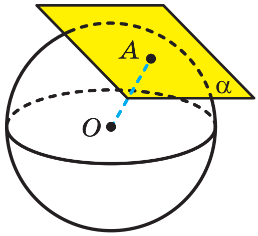


Рис. 12.6

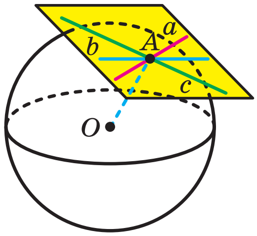


Рис. 12.7

Якщо фігура дотикається до сфери, то також говорять, що фігура дотикається до кулі, обмеженої цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунку 12.6 зображено площину α, яка дотикається до кулі.

Теорема 12.1. ***Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

Доведення. Нехай площина α дотикається до сфери із центром O в точці A. Доведемо, що $OA \perp \alpha$.

Припустимо, що відрізок OA є похилою до площини α. Тоді відстань від точки O до площини α менша від радіуса. Отже, сфера та площина α перетинаються по колу, тобто мають більше ніж одну спільну точку. А це суперечить тому, що площина α дотикається до сфери. Таким чином, наше припущення є хибним, і радіус OA не є похилою до площини α, тобто $OA \perp \alpha$. ◄

Наслідок. ***Пряма, дотична до сфери, перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

Теорема 12.2. ***Якщо площина, яка проходить через кінець радіуса, відмінного від центра сфери, перпендикулярна до цього радіуса, то вона є дотичною площиною до даної сфери.***

Доведення. Нехай площина α проходить через точку A і перпендикулярна до радіуса OA, де точка O — центр сфери. Доведемо, що α — дотична площина до сфери.

Нехай α не є дотичною площиною до сфери, а має зі сферою ще одну спільну точку B (рис. 12.8). Оскільки $OA \perp \alpha$, то $OA \perp AB$. Оскільки $OA = OB$, то $\angle OAB = \angle OBA$. Виявилося, що в трикутнику OAB є два прямих кути. Отримана суперечність доводить дану теорему. ◄

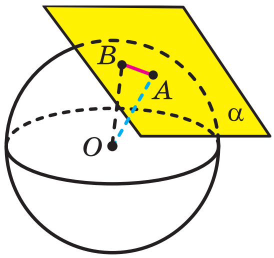


Рис. 12.8

Наслідок. ***Через будь-яку точку сфери можна провести дотичну площину до сфери, і до того ж тільки одну.***

Теорема 12.3. ***Якщо пряма має зі сферою тільки одну спільну точку, то ця пряма є дотичною до даної сфери.***

Доведення. Нехай пряма a має зі сферою із центром O єдину спільну точку A. Доведемо, що пряма a — дотична до сфери.

Проведемо через пряму a і точку O площину. Ця площина перетинає сферу по великому колу (рис. 12.9). Оскільки пряма a належить площині кола та має з колом єдину спільну точку, то пряма a є дотичною до кола. Отже, $OA \perp a$.

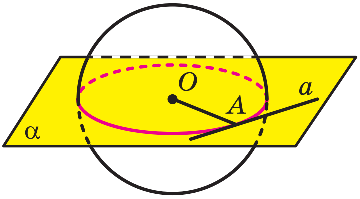


Рис. 12.9

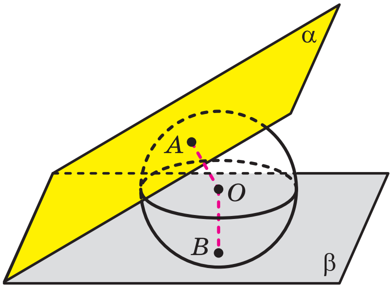


Рис. 12.10

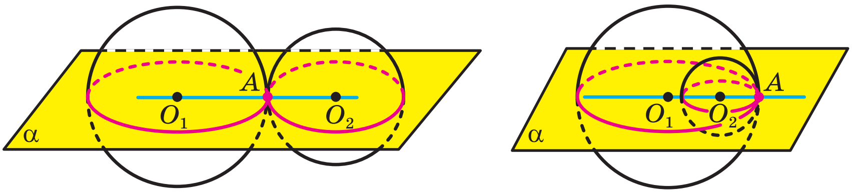
Проведемо через точку A дотичну площину β до сфери. За теоремою 12.1 отримуємо, що $OA \perp \beta$. Тоді пряма a належить дотичній площині β, проходить через точку дотику, точку A, отже, пряма a є дотичною до сфери. ◄

Розглянемо сферу із центром O, яка дотикається до граней двогранного кута в точках A і B (рис. 12.10). Тоді за теоремою 12.1 $OA \perp \alpha$ і $OB \perp \beta$. Оскільки $OA = OB$, то точка O рівновіддалена від граней двогранного кута. Таким чином, точка O належить бісектору даного двогранного кута.

Отже, *якщо сфера дотикається до граней двогранного кута, то центр сфери належить бісектору двогранного кута*.

На рисунку 12.11, *а* зображено сфери із центрами O_1 і O_2, які мають тільки одну спільну точку A. У таких випадках говорять, що сфери **мають у точці A зовнішній дотик**. Точку A називають **точкою дотику**.

Рисунок 12.11, *б* ілюструє випадок, коли сфери із центрами O_1 і O_2 **мають внутрішній дотик у точці A**.



а *б*

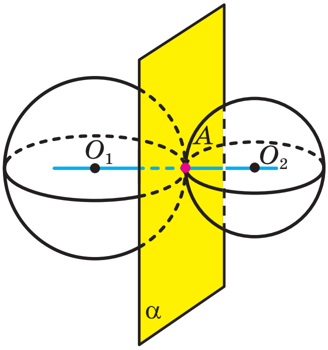
Рис. 12.11

Доведемо, що точки O_1, A і O_2 лежать на одній прямій. Проведемо через ці точки площину. Вона перетне дані сфери по великих колах (рис. 12.11). Зрозуміло, що ці кола дотикаються в точці A. Із курсу планіметрії ви знаєте, що в такому випадку точки O_1, A і O_2 лежать на одній прямій.

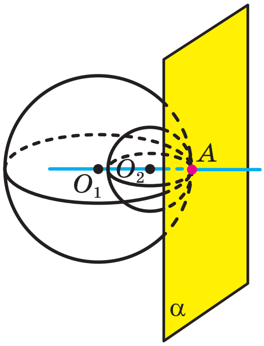
Отже, *якщо сфери дотикаються, то центри сфер і точка дотику лежать на одній прямій*.

Через точку A проведемо площину α, перпендикулярну до прямої O_1O_2 (рис. 12.12). За теоремою 12.2 площина α буде дотичною площиною як до сфери із центром O_1, так і до сфери із центром O_2.

Таким чином, *якщо сфери дотикаються, то вони мають спільну дотичну площину, яка проходить через точку дотику сфер.*



а



б

Рис. 12.12

Задача 1. Доведіть, що коли через дану точку до сфери проведено дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, є рівними.

Розв'язання. Нехай прямі AB і AC — довільні дотичні, проведені до сфери, B і C — точки дотику (рис. 12.13). Доведемо, що $AB = AC$.

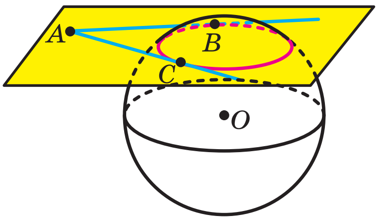


Рис. 12.13

Розглянемо площину ABC. Вона має зі сферою щонайменше дві спільні точки. Отже, площина ABC перетинає сферу по колу. Прямі AB і AC лежать в одній площині з колом та мають із ним тільки по одній спільній точці, тобто вони є дотичними до нього. Звідси $AB = AC$. ◄

Задача 2. Для тетраедра $DABC$ існує сфера, яка дотикається до всіх його ребер.[1] Доведіть, що $AB + DC = BC + DA = CA + DB$.

Скориставшись доведеним у ключовій задачі 1, розв'яжіть цю задачу самостійно.

Задача 3. Сфера радіуса 1 см дотикається до граней $ABCD$, AA_1D_1D і AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 4 см. Точки M і K є серединами ребер AD і DC відповідно. Дотична площина сфери, паралельна площині MD_1K, перетинає пряму AA_1 у точці E. Знайдіть довжину відрізка AE.

Розв'язання. Уведемо систему координат xyz з одиничним відрізком на осях, що дорівнює 1 см, так, як показано на рисунку 12.14. Тоді точки M, D_1 і K матимуть відповідно такі координати: (2; 0; 0), (0; 0; 4) і (0; 2; 0).

Легко встановити (зробіть це самостійно), що рівняння площини MD_1K має вигляд $2x + 2y + z - 4 = 0$. Тоді рівняння площини, паралельної площині MD_1K, має такий вигляд: $2x + 2y + z + d = 0$.

Центр сфери має координати O (3; 1; 1). Точка O віддалена від дотичної площини на 1 см. Тоді, скориставшись формулою відстані від точки до площини, можна записати:

$$\frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 1. \quad \text{Звідси} \quad |9 + d| = 3.$$

Отримуємо: $d = -6$ або $d = -12$.

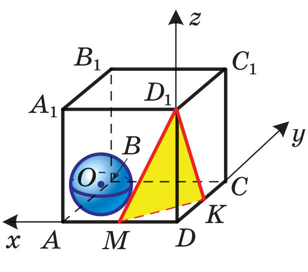


Рис. 12.14

Таким чином, існують дві дотичні площини до даної сфери, паралельні площині MD_1K. Їхні рівняння мають вигляд $2x + 2y + z - 6 = 0$ і $2x + 2y + z - 12 = 0$.

Знайдемо координати точок перетину цих площин із прямою AA_1. Координати точок прямої AA_1 мають вигляд (4; 0; z_0). Підставляючи ці координати в рівняння площини, отримуємо: $8 + z_0 - 6 = 0$ або $8 + z_0 - 12 = 0$. Звідси $z_0 = -2$ або $z_0 = 4$. Отже, шуканий відрізок AE дорівнює 2 см або 4 см.

Відповідь: 2 см або 4 см. ◄

[1] Якщо для тетраедра існує сфера, що дотикається до всіх його ребер, то такий тетраедр називають **каркасним**.

?

1. Опишіть усі можливі випадки взаємного розміщення сфери та площини.
2. Що є перерізом сфери площиною, якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери?
3. Що називають великим кругом кулі?
4. Яку площину називають дотичною площиною до сфери?
5. Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику площини до сфери?
6. Яку пряму називають дотичною до сфери?
7. Яку властивість повинна мати площина, щоб вона була дотичною площиною до сфери?

ВПРАВИ

12.1.° Дано сферу радіуса 6 см і площину α. Якою має бути відстань від центра сфери до площини α, щоб:
1) сфера та площина не мали спільних точок;
2) сфера та площина мали одну спільну точку;
3) перетином сфери та площини було коло;
4) перетином сфери та площини було коло найбільш можливої довжини?

12.2.° Діаметр сфери дорівнює 20 см, а відстань від її центра до площини α — 12 см. Чи мають дана сфера та площина α спільні точки?

12.3.° 1) Яка географічна паралель є найбільшим колом земної кулі?
2) Знайдіть довжину полярного кола Землі, прийнявши, що радіус Землі дорівнює 6400 км. Відповідь округліть до тисяч кілометрів.
3) Обчисліть шлях, який проходить за добу внаслідок обертання Землі навколо її осі населений пункт, у якому ви живете.

12.4.° Скільки площин, що дотикаються до сфери, можна провести через точку:
1) яка належить цій сфері;
2) яка розміщена поза сферою?

12.5.° Скільки прямих, що дотикаються до сфери, можна провести через точку:
1) яка належить цій сфері;
2) яка розміщена поза сферою?

12.6.° Доведіть, що коли площина α перетинає сферу із центром O по колу із центром O_1, то $OO_1 \perp \alpha$.

12.7.° Сфера перетинається площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 6 см. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює 16π см. Знайдіть радіус сфери.

12.8.° Перерізом кулі радіуса 13 см площиною є круг, площа якого дорівнює 25π см^2. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

12.9.° Через кінець діаметра кулі радіуса R проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут α, $\alpha \neq 90°$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.

12.10.° Знайдіть довжину лінії перетину сфери з площиною, віддаленою від центра сфери на 2 см, якщо радіус сфери, проведений в одну з точок цієї лінії, утворює з даною площиною кут 30°.

12.11.° Доведіть, що перерізи сфери площинами, які рівновіддалені від її центра, мають рівні радіуси.

12.12.° Доведіть, що з двох перерізів сфери площинами більший радіус має переріз, площина якого віддалена на меншу відстань від центра сфери.

12.13.° Чому дорівнює радіус сфери, яка дотикається до площин $y = -4$ і $y = 10$?

12.14.° Сфера, радіус якої дорівнює R, дотикається до граней двогранного кута, що дорівнює α. Знайдіть відстань від центра сфери до ребра двогранного кута.

12.15.° Куля дотикається до граней двогранного кута, відстань від ребра якого до центра кулі дорівнює 8 см. Знайдіть площу великого круга кулі, якщо величина двогранного кута дорівнює 120°.

12.16.• Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 16 см.

12.17.• На поверхні кулі позначено точки A, B і C такі, що $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ABC, якщо радіус кулі дорівнює 17 см.

12.18.• Вершини трикутника зі сторонами 1 см, $\sqrt{3}$ см і 2 см лежать на сфері. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від її центра до площини цього трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

12.19.$^{\bullet}$ Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої 15 см, дорівнює 18 см. Знайдіть площу кожного із цих перерізів.

12.20.$^{\bullet}$ На радіусі OA сфери із центром O позначено точки B і C, причому точка B лежить між точками O і C. Через кожну з точок B і C проведено площину, перпендикулярну до прямої OA. Кола, що утворилися внаслідок перетину сфери площинами, мають довжини 24π см і 18π см, а відстань між цими площинами дорівнює 3 см. Знайдіть радіус сфери.

12.21.$^{\bullet}$ Через точку $A(-12; 3; -4)$, яка належить сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведено площину, перпендикулярну до осі абсцис. Знайдіть довжину кола, утвореного в перерізі.

12.22.$^{\bullet}$ Через точку $B(2; -3; 6)$, яка належить сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, проведено площину, перпендикулярну до осі аплікат. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі, обмеженої даною сферою.

12.23.$^{\bullet}$ Яка фігура є геометричним місцем центрів сфер, які:
1) дотикаються до даної площини в даній точці;
2) мають даний радіус і дотикаються до даної площини?

12.24.$^{\bullet}$ Радіус сфери дорівнює 40 см. Точка A, яка належить площині, що дотикається до цієї сфери, віддалена від точки дотику на 9 см. Знайдіть відстань від точки A до найближчої до неї точки сфери.

12.25.$^{\bullet}$ Через точку M сфери радіуса 112 см проведено дотичну площину. На цій площині позначено точку K, відстань від якої до найбільш віддаленої від неї точки сфери дорівнює 225 см. Знайдіть відстань між точками M і K.

12.26.$^{\bullet}$ Дві кулі, радіуси яких дорівнюють 7 см і 9 см, мають спільний центр. Площина α дотикається до меншої кулі. Знайдіть площу перерізу більшої кулі площиною α.

12.27.$^{\bullet}$ Складіть рівняння сфери, яка дотикається до кожної з координатних площин і проходить через точку $M(10; -10; 8)$.

12.28.$^{\bullet}$ Складіть рівняння сфери радіуса 4, яка дотикається до кожної з координатних площин, якщо абсциса та ордината центра сфери — від'ємні числа, а апліката — додатне.

12.29.$^{\bullet}$ Складіть рівняння площини, яка дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ у точці $A(-2; 1; 2)$.

12.30.• Точки A, B, C, D, E і F належать сфері. Доведіть, що прямі, які перпендикулярні до площин ABC і DEF та проходять через центри описаних кіл трикутників ABC і DEF, перетинаються або збігаються.

12.31.• Через деяку точку до сфери проведено дотичні. Знайдіть геометричне місце точок дотику.

12.32.• Через точку A проведено дотичні до сфери. Відстань від точки A до кожної з точок дотику дорівнює 40 см, а до найближчої до неї точки сфери — 20 см. Знайдіть довжину лінії, яка є геометричним місцем точок дотику.

12.33.• Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 28 см і 39 см та дотикаються до даної сфери. Відстань від центра сфери до площини цього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус сфери.

12.34.• Сторони ромба дотикаються до сфери, діаметр якої дорівнює a. Знайдіть відстань від центра сфери до площини ромба, якщо його сторона дорівнює a, а гострий кут дорівнює α.

12.35.• Дві сфери, радіуси яких дорівнюють R і r, мають зовнішній дотик. Пряма a дотикається до цих сфер у точках A і B. Доведіть, що $AB = 2\sqrt{Rr}$.

12.36.•• Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють 64π см^2 і 100π см^2.

12.37.•• Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду. Відстань від центра кулі до площини одного з даних перерізів дорівнює 4 см, а до площини другого — 5 см. Знайдіть довжину спільної хорди цих перерізів, якщо радіус кулі дорівнює $5\sqrt{2}$ см.

12.38.•• У кулі радіуса R проведено два рівних перерізи, які мають спільну хорду завдовжки a. Кут між площинами перерізів дорівнює α. Знайдіть площу кожного з даних перерізів.

12.39.•• Через точку A проведено дві прямі, які дотикаються до сфери із центром O в точках B і C. Площини AOB і AOC перпендикулярні, $AO = 9$ см, радіус сфери дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між точками B і C.

12.40.•• Через точку M проведено дві прямі, які дотикаються до сфери із центром O в точках A і B. Двогранний кут із гранями AMO і BMO дорівнює $120°$, $AB = 6$ см, $AM = 4\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус сфери.

12.41.•• Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ основ перпендикулярів, опущених із точки A на всі площини, що проходять через точку B.

12.42.•• Знайдіть ГМТ центрів сфер, які дотикаються до двох даних площин.

12.43.•• Дано сферу радіуса r із центром O. Знайдіть ГМТ, через які можна провести три попарно перпендикулярні прямі, що дотикаються до даної сфери.

12.44.•• Пряма m перетинає площину α. Точки A і B належать прямій m і лежать в одному півпросторі відносно площини α. Розглядаються всі сфери, які проходять через точки A і B та дотикаються до площини α. Доведіть, що точки дотику сфер до площини α належать одному колу.

12.45.•• Дано тригранний кут $SABC$, кожний плоский кут якого дорівнює $90°$. Точка M належить тригранному куту та віддалена від його граней на 1 см, 2 см і 5 см. Сфера проходить через точку M і дотикається до всіх граней двогранного кута. Знайдіть радіус сфери.

12.46.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AB = BC = 2$ см, $AA_1 = 1$ см. Площина α проходить через точки D і B_1 і паралельна прямій AC. Знайдіть радіус сфери, яка дотикається до площини α та трьох граней паралелепіпеда зі спільною вершиною B.

12.47.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AB = BC = 1$ см, $AA_1 = 2$ см. Площина α проходить через точки A і C_1 та паралельна прямій BD. Знайдіть радіус сфери, яка дотикається до площини α та трьох граней паралелепіпеда зі спільною вершиною C.

12.48.•• Через центр сфери радіуса R проведено три попарно перпендикулярні площини. Знайдіть радіус сфери, яка дотикається до всіх цих площин і даної сфери.

12.49.•• Дві сфери, що дотикаються, розміщено в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, що одна з них дотикається до трьох граней куба зі спільною вершиною A, а друга — до трьох граней зі спільною вершиною C_1. Знайдіть відстань між центрами сфер, якщо ребро куба дорівнює a.

12.50.•• Три сфери попарно мають зовнішній дотик, а також дотикаються до деякої площини в точках, які є вершинами прямокутного трикутника з катетом 1 см і протилежним кутом $30°$. Знайдіть радіуси сфер.

12.51.•• Три сфери попарно мають зовнішній дотик, а також дотикаються до деякої площини в точках, які є вершинами трикутника зі сторонами a, b і c. Знайдіть радіуси сфер.

12.52.* Доведіть, що існує сфера, яка проходить через початок координат і не містить інших точок, усі координати яких є раціональними числами.

12.53.* Доведіть, що в просторі знайдуться такі п'ять точок, попарні відстані між якими різні, а всі замкнені ламані з п'яти ланок без самоперетинів з вершинами в цих точках мають однакову довжину.

12.54.* Сфера радіуса 1 см дотикається до всіх ребер правильного тетраедра. Знайдіть ребро тетраедра.

12.55.* Сфера дотикається до ребер AB, BC, CA, DA, DB і DC каркасного тетраедра $DABC$ відповідно в точках M, N, K, P, F і E. Доведіть, що відрізки ME, NP і KF перетинаються в одній точці.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.56. Відрізок BD — висота рівнобедреного трикутника ABC, проведена до його основи. Точка M — середина відрізка BD. Пряма AM перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть, у якому відношенні точка K ділить сторону BC, рахуючи від точки B.

12.57. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 32 см, а радіус вписаного кола — 12 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

ЕЛЕМЕНТИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Геометрія — прикладна наука. Ви, звісно, знаєте, що сама назва складається з двох грецьких слів: *гео* — «земля» і *метрео* — «вимірювати». Багато перших геометричних фактів було встановлено під час розв'язування важливої прикладної задачі — розмежування землі. Серед знайдених письмових документів стародавніх цивілізацій збереглися плани земельних угідь, поділених на прямокутники, трапеції, трикутники тощо. Властивості таких фігур ви вивчали у шкільному курсі планіметрії.

Однак буває, що вивчені в планіметрії властивості не справджуються на практиці. Наприклад, вам відомо, що сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°. Проте вже стародавні мандрівники добре знали, що ця властивість трикутника виконується далеко не завжди. Дивно, але це так! Наприклад, рухаючись уздовж екватора, можна в будь-якій точці повернути на 90° і, прямуючи точно на північ, потрапити на Північний полюс. Таким чином, якщо розглянути точки A і B, що лежать на екваторі, і точку C — Північний полюс, то утворюється трикутник ABC, два кути ($\angle CAB$ і $\angle CBA$) якого — прямі, тобто сума кутів трикутника ABC напевно більша за 180° (рис. 12.15).

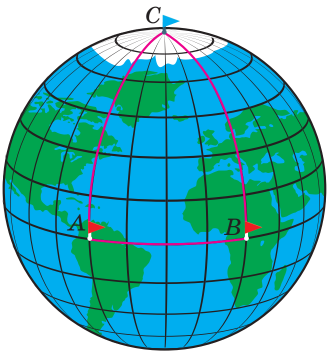


Рис. 12.15

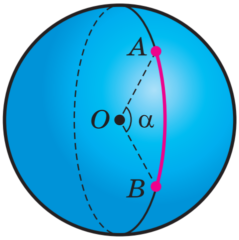


Рис. 12.16

Таким чином, фігури, розташовані на поверхні Землі, неможливо описати, користуючись знаннями шкільного курсу планіметрії. Властивості геометричних фігур на сфері вивчає спеціальний розділ геометрії — сферична геометрія.

Пропонуємо ознайомитися з деякими поняттями та фактами сферичної геометрії.

Розглянемо сферу радіуса $R = 1$. Нагадаємо, що площина, яка проходить через центр сфери, перетинає сферу по великому колу.

Великі кола у сферичній геометрії відіграють роль прямих. Наприклад, через будь-які дві точки сфери, крім діаметрально протилежних, проходить тільки одне велике коло. Якщо розглядати лінії, що лежать на сфері, то найкоротша лінія, яка сполучає будь-які дві точки сфери, є дугою великого кола (рис. 12.16).

Оскільки радіус сфери дорівнює 1, то довжину дуги великого кола можна знайти як кут між радіусами сфери. Тому відстань між двома точками у сферичній геометрії дорівнює величині відповідного центрального кута.

Проте сферична геометрія істотно відрізняється від планіметрії. Наприклад, на відміну від геометрії Евкліда, де дві прямі можуть перетинатися тільки в одній точці, два великих кола завжди перетинаються у двох діаметрально протилежних точках (рис. 12.17).

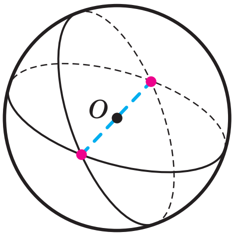


Рис. 12.17

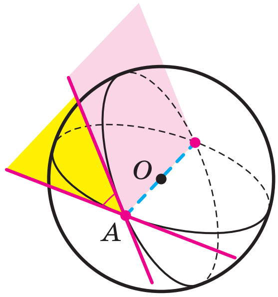


Рис. 12.18

Якщо в точці A сфери перетинаються два великих кола, то **кутом** між цими колами називають кут між дотичними до цих кіл, проведеними в точці A. Зверніть увагу, що цей кут дорівнює величині кута між площинами, у яких лежать ці кола (рис. 12.18).

Якщо розглянути три великих кола, які не проходять через одну точку, то вони перетинаються в шести різних точках (рис. 12.19) і розбивають сферу на вісім так званих **сферичних трикутників**. Два сферичних трикутники називають **рівними**, якщо в них рівні всі відповідні сторони та кути. Наприклад, на рисунку 12.19 сферичні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні, оскільки їхні вершини попарно діаметрально протилежні.

Розглянемо сферичний трикутник ABC і тригранний кут $OABC$, де O — центр сфери (рис. 12.20). Тоді сторони BC, AC і AB цього трикутника дорівнюють відповідно плоским кутам $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$ і $\gamma = \angle AOB$ тригранного кута, а кути A, B і C сферичного трикутника ABC — відповідним двогранним кутам тригранного кута.

Із теорем косинусів і синусів для тригранного кута (див. п. 17 підручника «Геометрия-10») випливають такі співвідношення для сторін і кутів сферичного трикутника:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A \quad \text{(перша теорема косинусів);}$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha \quad \text{(друга теорема косинусів);}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} \quad \text{(теорема синусів).}$$

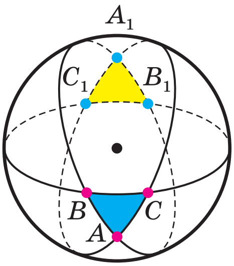


Рис. 12.19

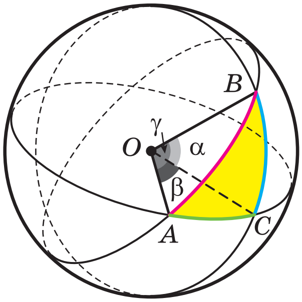


Рис. 12.20

Використовуючи ці твердження, можна довести ознаки рівності сферичних трикутників. Наприклад, справедлива така теорема.

Теорема (перша ознака рівності сферичних трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). ***Якщо дві сторони та кут між ними одного сферичного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого сферичного трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай сторони сферичних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнюють відповідно α, β, γ і α_1, β_1, γ_1, а кути відповідно — A, B, C і A_1, B_1, C_1. За умовою теореми $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Тоді за першою теоремою косинусів маємо:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C,$$

$$\cos\gamma_1 = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos C_1.$$

Отримуємо, що $\cos\gamma = \cos\gamma_1$, а отже, і $\gamma = \gamma_1$.

Рівність кутів $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ також випливає з першої теореми косинусів. ◄

Для сферичних трикутників виконуються також ознаки рівності «за стороною та двома прилеглими до неї кутами», «за трьома сторонами». Крім цього, на відміну від планіметрії, у сферичній геометрії справедлива ознака рівності трикутників «за трьома кутами». Доведіть її самостійно.

Задача. На сфері радіуса R задано сферичний трикутник ABC. Доведіть, що його площу можна обчислити за формулою $R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$.

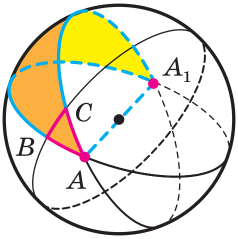


Рис. 12.21

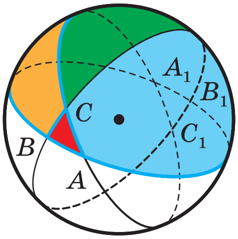


Рис. 12.22

Розв'язання. Розглянемо спочатку два великих кола, на яких лежать сторони AB і AC даного сферичного трикутника, і частину сфери, що лежить усередині кута A сферичного трикутника ABC (рис. 12.21). Оскільки центр сфери лежить на відрізку AA_1, то площа S_A розглядуваної частини сфери пропорційна величині кута A. Ураховуючи, що площа півсфери дорівнює $2\pi R^2$ (цей факт буде доведено в п. 20), можна записати: $\frac{S_A}{2\pi R^2} = \frac{\angle A}{\pi}$, звідки

$$S_A = 2R^2 \angle A. \quad (1)$$

Тепер розглянемо сферичний трикутник ABC. Верхня половина сфери розбивається великими колами на чотири сферичних трикутники: ABC, A_1BC, AB_1C і A_1B_1C (рис. 12.22). Тому сума площ цих трикутників дорівнює $2\pi R^2$. Якщо позначити через S площу сферичного трикутника ABC, то, використовуючи формулу (1), можна записати: $S_A = S + S_{A_1BC} = 2R^2 \angle A$.

Звідси $S_{A_1BC} = 2R^2 \angle A - S$.

Міркуючи аналогічно, знаходимо, що

$$S_{AB_1C} = 2R^2 \angle B - S \text{ і } S_{A_1B_1C} = 2R^2 \angle C - S.$$

Додамо знайдені площі сферичних трикутників ABC, A_1BC, AB_1C і A_1B_1C. Отримуємо:

$$S + (2R^2 \angle A - S) + (2R^2 \angle B - S) + (2R^2 \angle C - S) = 2\pi R^2.$$

Звідси

$$S = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi).$$

Відповідь: $R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$. ◄

Історично розвиток сферичної геометрії стимулювали задачі навігації та небесної механіки. У XX ст. авіація та космонавтика надали цій галузі особливої актуальності: саме сферичну геометрію покладено в основу розрахунків руху космічних тіл.

У наш час українські вчені та інженери займають провідні позиції в розв'язуванні задач навігації та керування космічними апаратами, а такі високотехнологічні підприємства, як «Південмаш» (Дніпро), «Мотор Січ» (Запоріжжя), «Арсенал» (Київ) та ін., широко відомі в усьому світі.

13. Многогранники, вписані у сферу

Означення. Многогранник називають *вписаним у сферу*, якщо всі його вершини належать сфері. При цьому сферу називають *описаною навколо многогранника*.

З означення випливає, що коли многогранник вписаний у сферу, то центр сфери рівновіддалений від усіх його вершин. Є правильним і обернене твердження: *якщо для даного многогранника існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин, то навколо цього многогранника можна описати сферу*.

Наприклад, усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда є рівними, перетинаються в одній точці та цією точкою діляться навпіл. Отже, точка перетину діагоналей прямокутного паралелепіпеда рівновіддалена від усіх його вершин. Тому навколо цього многогранника можна описати сферу (рис. 13.1).

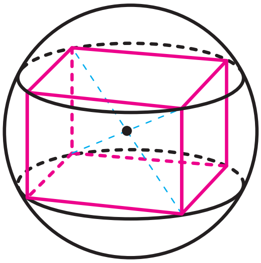


Рис. 13.1

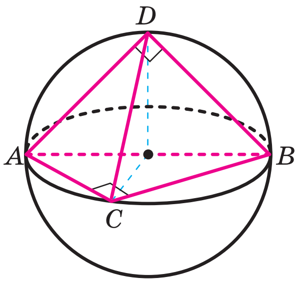


Рис. 13.2

На рисунку 13.2 зображено тетраедр $DABC$, у якому $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Оскільки середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин, то середина ребра AB є точкою, рівновіддаленою від усіх вершин тетраедра $DABC$, тобто є центром сфери, описаної навколо даного тетраедра.

Якщо многогранник є вписаним у сферу, то також говорять, що многогранник є вписаним у кулю, обмежену цією сферою.

Наприклад, можна сказати, що на рисунках 13.1 і 13.2 зображено відповідно прямокутний паралелепіпед і тетраедр, вписані в кулю, або кулю, описану навколо кожного з указаних многогранників.

Якщо многогранник є вписаним у сферу, то площини його граней перетинають сферу по колах. Отже, *кожна грань многогранника, вписаного у сферу, є многокутником, вписаним у коло*.

Отже, якщо навколо якоїсь грані многогранника не можна описати коло, то навколо цього многогранника не можна описати сферу. Наприклад, навколо паралелограма, відмінного від прямокутника, описати коло не можна. Отже, не можна описати сферу навколо похилої призми.

Задача 1. Доведіть, що коли навколо основи прямої призми можна описати коло, то таку призму можна вписати у сферу, а центр сфери, описаної навколо призми, є серединою відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

Розв'язання. Ви знаєте, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин даного многокутника, вписаного в коло, є пряма (рис. 13.3), яка перпендикулярна до площини многокутника та проходить через центр цього кола. Отже, якщо точка, рівновіддалена від усіх вершин розглядуваної призми, існує, то вона лежить на прямій O_1O_2, де O_1 і O_2 — центри описаних кіл основ призми (рис. 13.4). Нескладно показати (зробіть це самостійно), що середина O відрізка O_1O_2 — шукана точка, тобто точка O — центр сфери, описаної навколо прямої призми. ◄

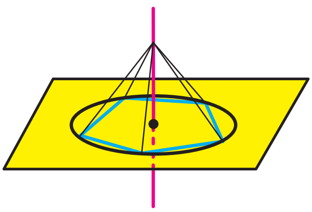


Рис. 13.3

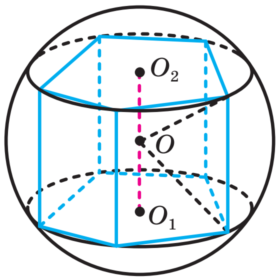


Рис. 13.4

Зі сказаного випливає, що *навколо правильної призми можна описати сферу*.

Задача 2. Доведіть, що коли навколо основи піраміди можна описати коло, то таку піраміду можна вписати у сферу.

Розв'язання. Ви знаєте, що коли існує точка, рівновіддалена від усіх вершин основи піраміди, то ця точка належить прямій a (рис. 13.5), яка перпендикулярна до основи піраміди та проходить через центр O_1 описаного кола основи (див. ключову задачу 1 п. 11 підручника «Геометрія-10»).

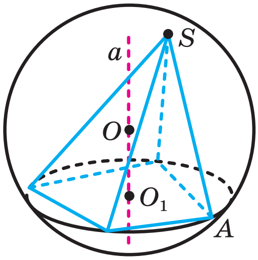


Рис. 13.5

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є площина, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину. Розглянемо площину α, яка перпендикулярна до бічного ребра SA та проходить через його середину. Очевидно, що ця площина не паралельна прямій a та не містить її. Нехай $a \cap \alpha = O$. Оскільки точка O рівновіддалена від усіх вершин основи та $OS = OA$, то точка O рівновіддалена від усіх вершин піраміди, а отже, вона є центром описаної сфери розглядуваної піраміди. ◄

Із доведеного випливає, що *навколо будь-якого тетраедра можна описати сферу*.

Також *сферу можна описати навколо правильної піраміди. Центр описаної сфери належить прямій, яка містить висоту правильної піраміди*.

Задача 3. Доведіть, що: 1) коли навколо основ зрізаної піраміди можна описати кола та пряма, яка проходить через центри цих кіл, перпендикулярна до основ, то таку зрізану піраміду можна вписати у сферу; 2) центр сфери, описаної навколо зрізаної піраміди, належить прямій, що проходить через центри кіл, описаних навколо основ зрізаної піраміди.

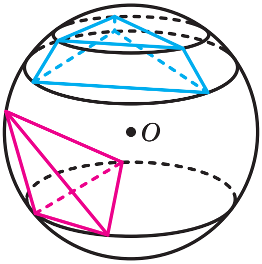


Рис. 13.6

Доведіть ці твердження самостійно.

Центр кола, описаного навколо многокутника, може належати многокутнику, зокрема лежати на стороні, а може й не належати многокутнику. Аналогічна ситуація виникає і в просторі: центр сфери, описаної навколо многогранника, може йому належати (рис. 13.5), зокрема лежати на грані (рис. 13.2), і може знаходитися поза многогранником (рис. 13.6).

Задача 4. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює b, а висота дорівнює h. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

Розв'язання. Нехай $DABC$ — дана трикутна піраміда, точка O_1 — центр основи ABC. За умовою $DB = b$, $DO_1 = h$.

Існують три випадки (рис. 13.7): центр сфери, описаної навколо піраміди, може або належати внутрішній області піраміди, або належати її грані, або не належати піраміді.

Зрозуміло, що в усіх трьох випадках центр O сфери, описаної навколо даної піраміди, належить прямій DO_1 (рис. 13.7). Відрізки OD і OB — радіуси сфери.

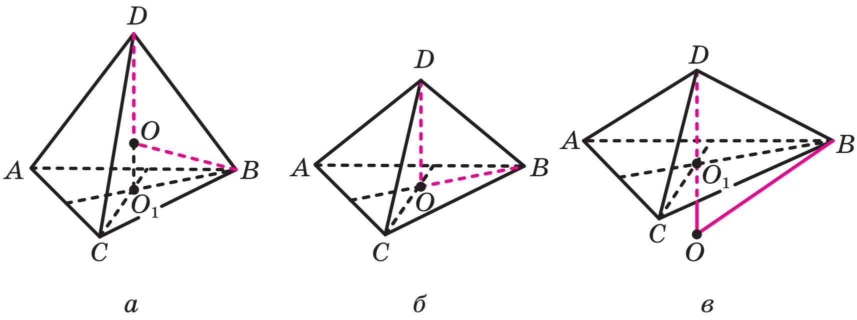


Рис. 13.7

Розглянемо випадок, коли центр O сфери лежить між точками D і O_1 (рис. 13.7, *а*).

Із прямокутного трикутника DO_1B отримуємо: $O_1B^2 = DB^2 - DO_1^2$. Звідси $O_1B^2 = b^2 - h^2$.

Нехай радіус сфери дорівнює R. Тоді $OO_1 = h - R$. Із прямокутного трикутника OO_1B отримуємо: $OB^2 = OO_1^2 + O_1B^2$. Маємо: $R^2 = (h-R)^2 + b^2 - h^2$. Звідси $R = \frac{b^2}{2h}$.

Залишилося розглянути ще два випадки: центр O сфери збігається з точкою O_1 (рис. 13.7, *б*); центр O сфери лежить поза пірамідою (рис. 13.7, *в*). Розглянувши ці випадки самостійно, ви зможете переконатися, що відповідь не зміниться: $R = \frac{b^2}{2h}$.

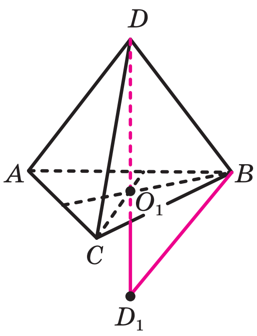


Рис. 13.8

Наведемо ще одне розв'язання цієї задачі, у якому немає потреби розглядати три випадки розміщення центра описаної сфери.

Пряма DO_1 проходить через центр сфери та перетинає її у двох точках: у точці D і в деякій точці D_1 (рис. 13.8). Тоді відрізок DD_1 — діаметр сфери. Площина DD_1B, проходячи через центр сфери, перетинає її по великому колу. Тоді трикутник DD_1B є вписаним у велике коло сфери з діаметром DD_1. Отже, $\angle DBD_1 = 90°$. Використовуючи метричні співвідношення в прямокутному трикутнику, можна записати: $DB^2 = DO_1 \cdot DD_1$. Звідси $b^2 = h \cdot 2R$; $R = \frac{b^2}{2h}$.

Відповідь: $\frac{b^2}{2h}$. ◄

Зауважимо, що, розв'язуючи цю задачу, ми не зображали сферу, а обмежилися лише зображенням її центра та радіусів. Такий підхід є доцільним під час розв'язування багатьох задач на комбінацію сфери з іншими тілами. Часто достатньо зобразити лише деякі потрібні для розв'язування елементи сфери (центр, радіус, діаметр, переріз тощо).

Задача 5. Квадрат $ABCD$ є основою піраміди $KABCD$. Бічна грань ABK перпендикулярна до площини основи. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди, якщо $KA = KB = 5$ см і $AB = 8$ см.

Розв'язання. Нехай точка O — центр описаної кулі. Тоді точка O належить прямій, яка перпендикулярна до площини квадрата і проходить через його центр — точку O_1. Точка O належить також прямій, яка перпендикулярна до площини AKB і проходить через центр описаного кола трикутника AKB — точку O_2.

Зазначимо, що $AB^2 > KA^2 + KB^2$. Отже, трикутник AKB тупокутний, а отже, точка O_2 не належить трикутнику AKB (рис. 13.9).

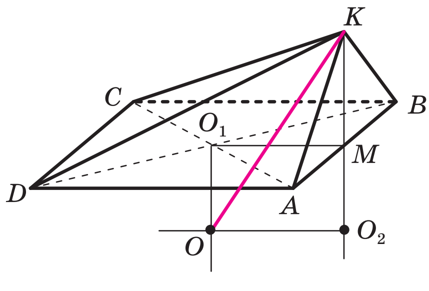


Рис. 13.9

Знайдемо радіус описаного кола трикутника AKB. Для цього можна, наприклад, скористатися відомою вам з курсу планіметрії формулою $R = \frac{abc}{4S}$. Після проведення відповідних обчислень (зробіть це самостійно) отримаємо, що $O_2K = R = \frac{25}{6}$ см.

Нехай точка M — середина ребра AB. Тоді чотирикутник O_2MO_1O — прямокутник. Звідси $OO_2 = 4$ см.

Із прямокутного трикутника OKO_2 отримуємо, що

$$OK = \sqrt{OO_2^2 + O_2K^2} = \sqrt{\frac{625}{36} + 16} = \frac{\sqrt{1201}}{6} \text{ см.}$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{1201}}{6}$ см. ◄

Задача 6. У трикутній піраміді всі плоскі кути при одній із вершин є прямими, а довжини ребер, що виходять із цієї вершини, дорівнюють a, b і c. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

Розв'язання. Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому $AB = a$, $AD = b$ і $AA_1 = c$ (рис. 13.10). Тоді $ABDA_1$ є даним в умові задачі тетраедром.

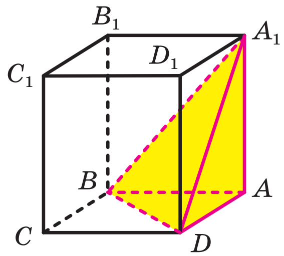


Рис. 13.10

Сфера, описана навколо прямокутного паралелепіпеда, є також сферою, описаною навколо даного тетраедра. Радіус R цієї сфери дорівнює половині діагоналі прямокутного паралелепіпеда, тобто $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. ◄

1. Який многогранник називають вписаним у сферу?
2. У якому разі навколо многогранника можна описати сферу?
3. У якому разі призму можна вписати у сферу?
4. Де розміщений центр сфери, описаної навколо правильної призми?
5. У якому разі піраміду можна вписати у сферу?
6. Де розміщений центр сфери, описаної навколо правильної піраміди?

ВПРАВИ

13.1.° Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 12 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного паралелепіпеда.

13.2.° У сферу радіуса R вписано куб. Знайдіть площу поверхні цього куба.

13.3.° Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює 2 см, а сторона основи — 12 см. Знайдіть радіус кулі, у яку вписано дану призму.

13.4.° У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну призму, сторона основи якої дорівнює a. Знайдіть площу бічної поверхні даної призми.

13.5.° Бічне ребро правильної шестикутної призми дорівнює 8 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної призми.

13.6.° Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Радіус кулі, описаної навколо даної призми, дорівнює 13 см. Знайдіть бічне ребро призми.

13.7.° Основою прямої призми є трикутник з кутом $150°$ і протилежною йому стороною, що дорівнює 15 см. Бічне ребро призми дорівнює 16 см. Знайдіть радіус сфери, у яку вписано дану призму.

13.8.• У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 2 см, а висота — 4 см. Знайдіть радіус кулі.

13.9.• У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої утворює з площиною основи кут α. Знайдіть висоту піраміди.

13.10.• Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α, а сторона основи дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даної піраміди.

13.11.• Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α, а сторона основи дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даної піраміди.

13.12.• У кулю вписано правильну трикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть радіус кулі.

13.13.• Центр кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, ділить її висоту на відрізки завдовжки 6 см і 3 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

13.14.• Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α, а радіус сфери, описаної навколо даної піраміди, дорівнює R. Знайдіть висоту піраміди.

13.15.• Знайдіть радіус кулі, описаної навколо правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

13.16.• У трикутній піраміді $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $\angle ACB = \angle ADB = 90°$. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

13.17.•• Доведіть, що коли бічні ребра піраміди є рівними, то навколо неї можна описати сферу, причому центр цієї сфери належить прямій, яка містить висоту піраміди.

13.18.•• У трикутній піраміді кожне бічне ребро дорівнює b, а висота дорівнює h. Скориставшись результатами задач 3 і 4 п. 13, визначте, при якому співвідношенні між бічним ребром b і висотою h центр описаної навколо піраміди сфери належить піраміді, а при якому співвідношенні — не належить піраміді.

13.19.•• Основою піраміди є прямокутник з кутом α між діагоналями, а кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут β. Радіус кулі, описаної навколо даної піраміди, дорівнює R. Знайдіть площу основи піраміди.

13.20.•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 10 см і 24 см, а бічні ребра піраміди рівні. Знайдіть висоту піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо цієї піраміди, дорівнює 13 см.

13.21.•• Основою піраміди є трикутник, один із кутів якого дорівнює $60°$, а протилежна йому сторона — $4\sqrt{3}$ см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від центра кулі, описаної навколо даної піраміди, до площини її основи.

13.22.•• Радіус кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, дорівнює 25 см, а відстань від її центра до площини основи піраміди — 7 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

13.23.•• Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 6 см, а одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи. Знайдіть висоту піраміди, якщо радіус описаної навколо неї кулі дорівнює 4 см.

13.24.•• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 3 см. Одне з бічних ребер піраміди дорівнює 2 см і перпендикулярне до площини основи. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.

13.25.•• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя грань утворює з основою кут α. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.

13.26.•• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють $5\sqrt{3}$ см і $12\sqrt{3}$ см, а її висота — 17 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної зрізаної піраміди.

13.27.•• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 см і 14 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної зрізаної піраміди.

13.28.•• Знайдіть радіус кулі, описаної навколо зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$, якщо $\angle ABC = 90°$, $AB = 8$ см, $BC = 16\sqrt{2}$ см, $B_1C_1 = 12\sqrt{2}$ см, а висота піраміди дорівнює 3 см.

13.29.•• У трикутній піраміді $SABC$ бічні грані ASB і CSB є рівними та перпендикулярними до площини основи, а грань ASC утворює з площиною основи кут β. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює r, а кут ABC дорівнює α. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

13.30.•• Основою тетраедра $DABC$ є трикутник ABC, у якому $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $AB = 4\sqrt{2}$ см. Грані ADC і ADB перпендикулярні до площини основи, а грань BDC утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо тетраедра.

13.31.•• Основою піраміди є квадрат, сторона якого дорівнює $2a$. Висота піраміди дорівнює $a\sqrt{3}$. Основою висоти піраміди є середина одного з ребер основи. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

13.32.•• Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють a і $2a$. Основою висоти піраміди є середина меншого ребра основи. Висота піраміди дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

13.33.•• У сферу радіуса R вписано правильну трикутну призму зі стороною основи a. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що проходить через центр сфери та сторону основи призми.

13.34.•• У сферу вписано правильну трикутну призму зі стороною основи a та бічним ребром b. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що проходить через центр сфери та сторону основи призми.

13.35.* Дано тетраедр $DABC$. У грані ADB проведено висоти AA_1 і BB_1, у грані BDC — висоти BB_2 і CC_1, а в грані CDA — висоти CC_2 і AA_2. Доведіть, що прямі A_1B_1, C_1B_2 і A_2C_2 паралельні тій самій площині.

13.36.* Дано рівногранний тетраедр, у якому ребра дорівнюють a, b і c. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо цього тетраедра.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.37. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а менша бічна сторона — $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює $120°$.

13.30. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 24 см. Знайдіть площу даного трикутника.

14. Многогранники, описані навколо сфери

Означення. **Многогранник називають *описаним навколо сфери*, якщо всі його грані дотикаються до сфери. При цьому сферу називають *вписаною в многогранник*.**

З означення випливає, що коли многогранник описано навколо сфери, то центр сфери рівновіддалений від усіх площин, які містять його грані. Є правильним і таке твердження: *якщо для даного опуклого многогранника існує точка, яка йому належить і рівновіддалена від усіх площин, що містять його грані, то в цей многогранник можна вписати сферу.*

Наприклад, точка перетину діагоналей куба рівновіддалена від усіх площин граней куба. Отже, у куб можна вписати сферу (рис. 14.1).

Якщо многогранник описано навколо сфери, то також говорять, що многогранник описано навколо кулі, обмеженої цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунку 14.1 зображено куб, описаний навколо кулі, або кулю, вписану в куб.

Якщо сфера дотикається до граней двогранного кута, то її центр належить бісектору цього кута. Отже, якщо сферу вписано в многогранник, то її центр належить бісекторам усіх двогранних кутів многогранника при його ребрах. Є правильним і таке твердження: *якщо всі бісектори двогранних кутів опуклого многогранника при його ребрах мають спільну точку, то в цей многогранник можна вписати сферу*.

Використовуючи це твердження, можна довести (зробіть це самостійно), що в будь-якому тетраедрі існує точка, рівновіддалена від усіх площин, які містять його грані. Отже, *у будь-який тетраедр можна вписати сферу*.

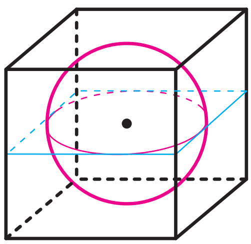


Рис. 14.1

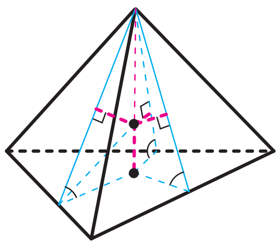


Рис. 14.2

Задача 1. Доведіть, що коли двогранні кути піраміди при ребрах її основи рівні, то в таку піраміду можна вписати сферу.

Розв'язання. Легко довести (зробіть це самостійно), що коли двогранні кути піраміди при ребрах її основи рівні, то кожна точка висоти піраміди рівновіддалена від площин її бічних граней (рис. 14.2). Тоді точка перетину бісектора двогранного кута при ребрі основи з висотою піраміди рівновіддалена від площин усіх граней піраміди. ◄

З доведеного випливає, що *в будь-яку правильну піраміду можна вписати сферу. Центр вписаної сфери належить висоті піраміди*.

Зауважимо, що рівність двогранних кутів при ребрах основи піраміди не є необхідною умовою для того, щоб у піраміду можна було вписати сферу. Наприклад, можна вписати сферу в тетраедр, у якого двогранні кути при ребрах якоїсь грані не є рівними.

Задача 2. Доведіть, що коли в основу прямої призми можна вписати коло й висота призми дорівнює діаметру цього кола, то в таку призму можна вписати сферу.

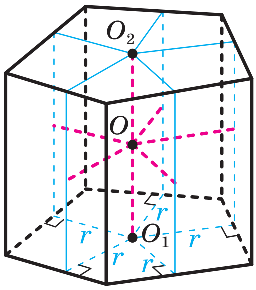


Рис. 14.3

Розв'язання. Нехай точки O_1 і O_2 — центри кіл радіуса r, вписаних в основи прямої призми (рис. 14.3). Пряма O_1O_2 паралельна площині кожної бічної грані призми. Точка O_1 віддалена від площини кожної бічної грані призми на відстань r. Отже, будь-яка точка прямої O_1O_2 віддалена від площини кожної бічної грані призми на відстань r. Оскільки $O_1O_2 = 2r$, то середина O відрізка O_1O_2 рівновіддалена від площин усіх граней призми. ◄

З доведеного випливає, що *в правильну призму, висота якої дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми, можна вписати сферу. Центр сфери є серединою відрізка, який сполучає центри основ призми.*

Справедливе й таке твердження: *якщо в пряму призму можна вписати сферу, то в основу призми можна вписати коло з радіусом, який дорівнює радіусу сфери, а висота призми дорівнює діаметру сфери*. Доведіть це твердження самостійно.

Задача 2 має таке узагальнення.

Задача 3. Доведіть, що коли в переріз призми площиною, перпендикулярною до її бічних ребер, можна вписати коло, а діаметр цього кола дорівнює висоті призми, то в таку призму можна вписати сферу (рис. 14.4).

Доведіть це твердження самостійно. ◄

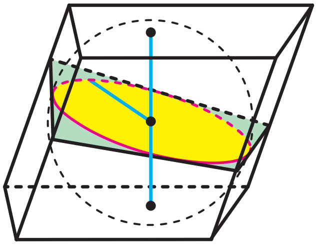


Рис. 14.4

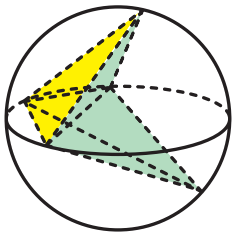


Рис. 14.5

Зазначимо, що коли в многогранник можна вписати сферу, то цей многогранник є опуклим. Це випливає з того очевидного факту, що сфера не може дотикатися до граней двогранного кута, величина якого більша за $180°$. Проте якщо многогранник вписано у сферу, то це не означає, що він є опуклим. Наприклад, на рисунку 14.5 зображено неопуклий многогранник, вписаний у сферу.

Задача 4. У пряму чотирикутну призму, основою якої є рівнобічна трапеція з основами 16 см і 4 см, вписано сферу. Знайдіть бічне ребро призми.

Розв'язання. Оскільки в пряму призму вписано сферу, то в основу призми можна вписати коло, діаметр якого дорівнює діаметру вписаної сфери, тобто бічному ребру призми.

Основою призми є трапеція, а отже, діаметр вписаного кола дорівнює висоті цієї трапеції. Знайдемо висоту трапеції.

Трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — основа призми (рис. 14.6). Оскільки в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, то $AD + BC = AB + CD$.

З урахуванням умови отримуємо, що $AB + CD = 20$ см. Оскільки $AB = CD$, то $AB = 10$ см.

Проведемо висоту BM трапеції.

Ураховуючи, що трапеція $ABCD$ є рівнобічною, маємо: $AM = \frac{AD - BC}{2}$, тобто $AM = 6$ см. Із прямокутного трикутника ABM отримуємо:

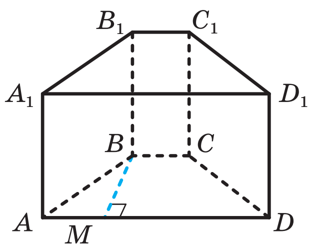


Рис. 14.6

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (см).}$$

Тоді діаметр вписаної сфери дорівнює 8 см, а отже, і бічне ребро дорівнює 8 см.

Відповідь: 8 см. ◄

Задача 5. Знайдіть радіус сфери, вписаної в правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, у якої ребро основи AB дорівнює a, а висота — h.

Розв'язання. Оскільки дана піраміда є правильною, то центр O вписаної сфери належить висоті SH піраміди, де H — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$ (рис. 14.7). Тоді відрізок OH — радіус вписаної сфери. Нехай $OH = r$.

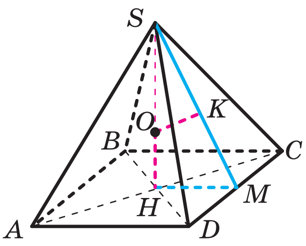


Рис. 14.7

У грані DSC проведемо апофему SM. Маємо: $SH \perp DC$, $SM \perp DC$. Отже, $DC \perp HSM$. У площині HSM проведемо $OK \perp SM$, точка K належить апофемі SM. Оскільки $DC \perp HSM$ і $OK \subset HSM$, то $DC \perp OK$. Маємо: $OK \perp SM$, $OK \perp DC$. Тоді $OK \perp DSC$, тому відрізок OK — радіус вписаної сфери, $OK = r$.

Прямокутні трикутники KSO і HSM мають спільний гострий кут. Отже, ці трикутники подібні. Тоді можна записати:

$$\frac{OK}{HM} = \frac{SO}{SM}.$$

Маємо: $SO = h - r$, $HM = \frac{a}{2}$, $SM = \sqrt{HM^2 + SH^2}$, тобто

$$SM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}.$$

Отримуємо: $\dfrac{r}{\frac{a}{2}} = \dfrac{h - r}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4h^2}}.$

Звідси $r\sqrt{a^2 + 4h^2} = ah - ar$; $r = \dfrac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}.$

Відповідь: $\dfrac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}.$ ◄

З іншим способом розв'язування цієї задачі ви ознайомитеся в п. 18 підручника.

Задача 6. У правильній n-кутній піраміді центри вписаної та описаної куль збігаються. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

Розв'язання. Розглянемо фрагмент правильної n-кутної піраміди (рис. 14.8). Точка S — вершина піраміди, SAB — бічна грань, відрізок SO_1 — висота піраміди, точка O — спільний центр вписаної та описаної куль.

Опустимо з точки O на грань SAB перпендикуляр OK. Відрізки OA, OB, OS рівні як радіуси кулі, описаної навколо піраміди. Тоді прямокутні трикутники OAK, OBK і OSK є рівними за катетом і гіпотенузою. Звідси $KA = KB = KS$. Отже, точка K — центр описаного кола трикутника ASB. Звідси $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AKB$.

Відрізки OK, OO_1 рівні як радіуси кулі, вписаної в піраміду. Тоді прямокутні трикутники OAK і OAO_1 є рівними за катетом і гіпотенузою. Звідси $AK = AO_1$. Аналогічно доводимо, що $BK = BO_1$. Отримуємо, що трикутники AKB і AO_1B є рівними за трьома сторонами. Звідси

$$\angle AKB = \angle AO_1B = \frac{360^\circ}{n}.$$

Таким чином, $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AKB = \frac{180^\circ}{n}$.

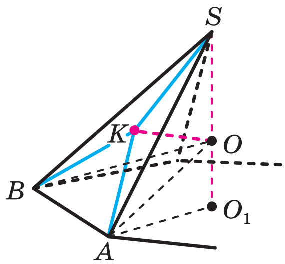


Рис. 14.8

Відповідь: $\frac{180^\circ}{n}$. ◄

1. Який многогранник називають описаним навколо сфери?
2. У який многогранник можна вписати сферу?
3. Яку властивість повинні мати бісектори двогранних кутів при ребрах опуклого многогранника, щоб у цей многогранник можна було вписати сферу?
4. Де розміщений центр сфери, вписаної в правильну піраміду?
5. Які властивості повинні мати основа та висота прямої призми, щоб у неї можна було вписати сферу?
6. Яку властивість повинна мати висота правильної призми, щоб у цю призму можна було вписати сферу?
7. Яка точка є центром кулі, вписаної в правильну призму?

ВПРАВИ

14.1.° У правильну трикутну призму вписано кулю, радіус якої дорівнює R. Знайдіть площу повної поверхні призми.

14.2.° У правильну шестикутну призму вписано кулю, радіус якої дорівнює R. Знайдіть площу повної поверхні призми.

14.3.° Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну шестикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α.

14.4.° Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α.

14.5.• Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетом a та протилежним йому кутом α. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану призму.

14.6.• Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник. Висота цього трикутника, проведена до його основи, дорівнює h і утворює з бічною стороною трикутника кут α. Знайдіть висоту призми, якщо відомо, що в цю призму можна вписати кулю.

14.7.• Основою прямої призми є прямокутна трапеція, більша бічна сторона якої дорівнює 12 см, а гострий кут — $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо відомо, що в цю призму можна вписати кулю.

14.8.• Основою прямої призми є ромб, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо відомо, що в цю призму можна вписати кулю.

14.9.• Основою прямої призми, у яку вписано кулю, є ромб з гострим кутом α. Знайдіть кут між меншою діагоналлю призми та площиною її основи.

14.10.• Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильний тетраедр, ребро якого дорівнює a.

14.11.• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — $\sqrt{21}$ см. Знайдіть радіус сфери, вписаної в дану піраміду.

14.12.• Основою піраміди є ромб зі стороною a та кутом α. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

14.13.• Трикутник ABC є основою піраміди $DABC$, $AB = BC$, $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

14.14.•• Двогранні кути піраміди при ребрах основи рівні, а площа основи дорівнює S. Центр кулі, вписаної в піраміду, ділить її висоту у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини піраміди. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

14.15.•• Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $45°$. У якому відношенні центр вписаної в цю піраміду кулі ділить її висоту, рахуючи від вершини піраміди?

14.16.•• Куля, вписана в правильну чотирикутну піраміду, дотикається до однієї з її бічних граней у точці A. Знайдіть площу перерізу цієї кулі площиною, яка проходить через точку A паралельно основі піраміди, якщо двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $60°$, а відстань від центра кулі до вершини піраміди — 8 см.

14.17.•• Двогранний кут правильної трикутної піраміди при ребрі основи дорівнює $45°$, а радіус вписаної сфери — $\sqrt{2}$ см. Ця сфера дотикається до однієї з бічних граней піраміди в точці M. Знайдіть довжину лінії перетину даної сфери та площини, яка проходить через точку M паралельно основі піраміди.

14.18.•• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює α. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

14.19.•• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює α. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

14.20.•• Доведіть, що коли центр кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, і центр вписаної в неї кулі збігаються, то дана піраміда є правильним тетраедром.

14.21.•• Трикутник ABC є основою піраміди $DABC$, $AB = BC = DB = a$, $\angle ABC = 90°$, $DB \perp ABC$. Знайдіть радіус сфери, вписаної в дану піраміду.

14.22.•• Навколо кулі описано правильну трикутну зрізану піраміду, сторони основ якої дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

14.23.•• У правильну чотирикутну зрізану піраміду вписано кулю, радіус якої дорівнює R. Двогранний кут зрізаної піраміди при ребрі її більшої основи дорівнює $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

14.24.•• Навколо кулі радіуса 12 см описано правильну шестикутну піраміду, висота якої дорівнює 30 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даної піраміди.

14.25.•• У кулю радіуса 8 см вписано правильну шестикутну піраміду, висота якої дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

14.26.•• Відстань від центра кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, до бічної грані піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду, якщо радіус описаної кулі дорівнює 15 см.

14.27.•• Відстань від центра кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, до бічного ребра піраміди дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду, якщо радіус описаної кулі дорівнює 9 см.

14.28.•• У правильну трикутну піраміду $SABC$ з основою ABC вписано сферу. До сфери проведено дотичну площину, паралельну грані ASC. Ця площина перетинає ребро SB у точці K так, що $BK : KS = 3 : 2$. Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі основи.

14.29.•• Центр сфери, вписаної в чотирикутну піраміду, належить висоті піраміди. Доведіть, що в основу піраміди можна вписати коло.

14.30.* Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. Відомо, що в дану піраміду можна вписати кулю. Доведіть, що сума площ граней ASB і CSD дорівнює сумі площ граней BSC і DSA.

14.31.* Доведіть, що в рівногранному тетраедрі центри вписаної та описаної сфер збігаються.

14.32.* Сферу вписано в правильну трикутну піраміду $SABC$ з основою ABC. Цю сферу також вписано в пряму трикутну призму $KLMK_1L_1M_1$, у якій $KL = KM = \sqrt{6}$ см, а бічне ребро KK_1 належить прямій AB. Знайдіть радіус сфери, якщо відомо, що пряма SC паралельна площині LMM_1.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.33. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 16 см і 20 см, причому одна з них перпендикулярна до сторони.

14.34. Висота ромба дорівнює 12 см, а менша діагональ — 15 см. Знайдіть площу ромба.

15. Тіла обертання, вписані у сферу

Означення. **Циліндр називають вписаним у сферу, якщо кола основ циліндра належать сфері** (рис. 15.1). **При цьому сферу називають описаною навколо циліндра.**

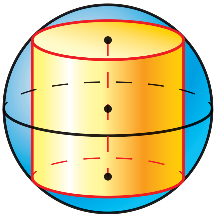


Рис. 15.1

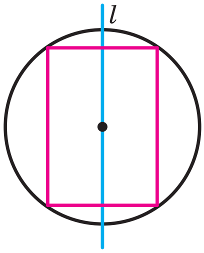


Рис. 15.2

Ви знаєте, що навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, причому центр описаного кола є серединою відрізка, який сполучає середини протилежних сторін прямокутника.

Розглянемо прямокутник, навколо якого описано коло. Пряма l, що проходить через середини протилежних сторін прямокутника, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 15.2. Обертатимемо прямокутник разом з описаним колом навколо прямої l. У результаті отримаємо сферу, описану навколо циліндра.

Наведені міркування є ілюстрацією до такої теореми.

Теорема 15.1. ***Навколо будь-якого циліндра можна описати сферу, причому центр сфери — це середина відрізка, що сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу циліндра.***

Означення. Конус називають вписаним у сферу, якщо вершина конуса та коло його основи належать сфері (рис. 15.3). **При цьому сферу називають описаною навколо конуса.**

Розглянемо рівнобедрений трикутник, навколо якого описано коло. Пряма l, що містить висоту трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 15.4. Обертатимемо трикутник разом з описаним колом навколо прямої l. У результаті отримаємо сферу, описану навколо конуса.

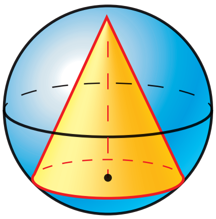


Рис. 15.3

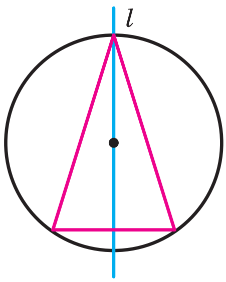


Рис. 15.4

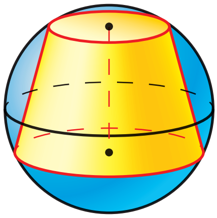


Рис. 15.5

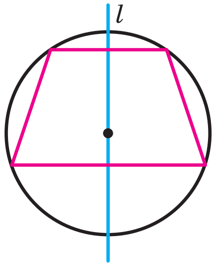


Рис. 15.6

Наведені міркування є ілюстрацією до такої теореми.

Теорема 15.2. ***Навколо будь-якого конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу конуса.***

Означення. Зрізаний конус називають вписаним у сферу, якщо кола основ конуса належать сфері (рис. 15.5). **При цьому сферу називають описаною навколо зрізаного конуса.**

Розглянемо рівнобічну трапецію, навколо якої описано коло. Пряма l, що проходить через середини основ трапеції, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 15.6. Обертатимемо трапецію разом з описаним колом навколо прямої l. У результаті отримаємо сферу, описану навколо зрізаного конуса.

Наведені міркування є ілюстрацією до такої теореми.

Теорема 15.3. ***Навколо будь-якого зрізаного конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу зрізаного конуса.***

Якщо циліндр (конус, зрізаний конус) вписано у сферу, то також говорять, що циліндр (конус, зрізаний конус) вписано в кулю, обмежену цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунках 15.1, 15.3 і 15.5 зображено відповідно циліндр, конус і зрізаний конус, вписані в кулю. Також говорять, що кулю описано навколо кожного із зазначених тіл обертання.

Задача. Твірна конуса дорівнює 17 см, а висота — 8 см. Через вершину K конуса проведено площину, що перетинає основу конуса по хорді AB, довжина якої дорівнює 18 см. Знайдіть відстань від центра сфери, описаної навколо конуса, до площини перерізу.

Розв'язання. Осьовим перерізом даного конуса є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота — 8 см.

Легко встановити, що основа цього трикутника дорівнює 30 см. Радіус кола, описаного навколо цього трикутника, дорівнює радіусу сфери, описаної навколо даного конуса. Цей радіус можна знайти, скориставшись, наприклад, формулою $R = \dfrac{abc}{4S}$. Проведемо відповідні обчислення (зробіть це самостійно) й отримаємо, що $R = \dfrac{289}{16}$.

Бачимо, що радіус описаної сфери більший за висоту конуса. Отже, центр сфери розміщений поза конусом. Цей результат дає змогу зробити рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 15.7).

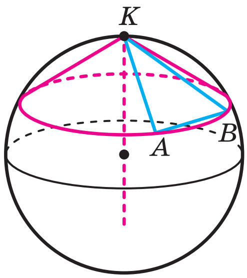


Рис. 15.7

Перерізом сфери площиною KAB є коло, у яке вписано рівнобедрений трикутник зі сторонами 17 см, 17 см і 18 см. Скориставшись формулою $R = \dfrac{abc}{4S}$, знайдемо радіус цього кола. Отримуємо: $r = \dfrac{289}{8\sqrt{13}}$.

Основою перпендикуляра, опущеного із центра сфери на площину KAB, є центр описаного кола трикутника KAB. Тому шукана відстань дорівнює: $\sqrt{R^2 - r^2} = \dfrac{867}{16\sqrt{13}}$.

Відповідь: $\dfrac{867}{16\sqrt{13}}$ см. ◄

1. Який циліндр називають вписаним у сферу?
2. Яка точка є центром сфери, описаної навколо циліндра?
3. Який конус називають вписаним у сферу?
4. Де розміщений центр сфери, описаної навколо конуса?
5. Який зрізаний конус називають вписаним у сферу?
6. Де розміщений центр сфери, описаної навколо зрізаного конуса?

ВПРАВИ

15.1.° Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а його висота — 15 см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даного циліндра.

15.2.° Висота циліндра дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного циліндра.

15.3.° Осьовий переріз конуса є прямокутним трикутником, а діаметр основи конуса дорівнює 10 см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного конуса.

15.4.° Твірна конуса завдовжки 9 см дорівнює діаметру його основи. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного конуса.

15.5.• У кулю вписано циліндр, висота якого дорівнює діаметру основи. У скільки разів площа великого круга кулі більша за площу основи циліндра?

15.6.• Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з висотою циліндра кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус кулі, описаної навколо нього, дорівнює R.

15.7.• Радіус основи циліндра дорівнює r, а радіус кулі, описаної навколо цього циліндра, дорівнює R. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

15.8.• Твірна конуса дорівнює b, а його висота — h. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо даного конуса.

15.9.• Радіус описаної навколо конуса кулі дорівнює R. Твірну конуса видно із центра цієї кулі під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

15.10.• Знайдіть радіус кулі, описаної навколо зрізаного конуса, якщо радіуси основ конуса дорівнюють 5 см і 8 см, а його висота — 9 см.

15.11.• Твірна зрізаного конуса дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус меншої основи — $\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо даного зрізаного конуса, якщо кут між його твірною та більшою основою дорівнює $60°$.

15.12.•• Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а радіус описаної навколо нього кулі — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

15.13.•• Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 4 см, а радіус описаної навколо нього кулі — 5 см. Знайдіть висоту зрізаного конуса.

15.14.•• У сферу радіуса R вписано конус. Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює α. У конус поміщено циліндр так, що одна з основ циліндра належить основі конуса, а коло другої основи належить бічній поверхні конуса. Відомо, що осьовим перерізом циліндра є квадрат. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

15.15.•• У сферу радіуса R вписано конус. Кут між твірними конуса в осьовому перерізі дорівнює α. У конус поміщено циліндр так, що одна з основ циліндра належить основі конуса, а коло другої основи належить бічній поверхні конуса. Відомо, що відношення радіуса основи циліндра до його твірної дорівнює 1 : 4. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

15.16.•• Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Площина, паралельна основі конуса, проходить через центр описаної навколо конуса сфери. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь конуса та зрізаного конуса, що утворилися.

15.17.•• Площина, паралельна основі конуса, проходить через центр сфери, описаної навколо конуса. Площі бічних поверхонь конуса та зрізаного конуса, що утворилися при цьому, рівні. Знайдіть кут між твірними в осьовому перерізі конуса.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.18. У трикутник ABC вписано ромб $AMFK$ так, що кут A в них спільний, а вершина F належить стороні BC. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.

15.19. Один із кутів трапеції дорівнює $30°$, а бічні сторони трапеції перпендикулярні. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, а одна з основ — 8 см.

16. Тіла обертання, описані навколо сфери

Означення. **Циліндр називають *описаним навколо сфери*, якщо обидві основи циліндра та всі його твірні дотикаються до сфери** (рис. 16.1). **При цьому сферу називають *вписаною в циліндр*.**

Ви знаєте, що коли в прямокутник можна вписати коло, то він є квадратом.

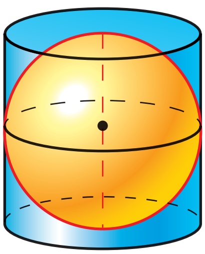


Рис. 16.1

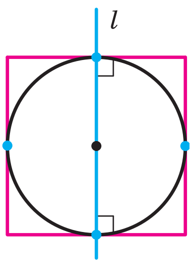


Рис. 16.2

Розглянемо квадрат, у який вписано коло. Пряма l, що проходить через центр кола перпендикулярно до двох протилежних сторін квадрата, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 16.2. Обертатимемо квадрат разом із вписаним у нього колом навколо прямої l. У результаті отримаємо сферу, вписану в циліндр.

Наведені міркування є ілюстрацією до такої теореми.

Теорема 16.1. ***Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то в такий циліндр можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу основи циліндра.***

Означення. Конус називають описаним навколо сфери, якщо основа конуса та всі його твірні дотикаються до сфери (рис. 16.3). **При цьому сферу називають вписаною в конус.**

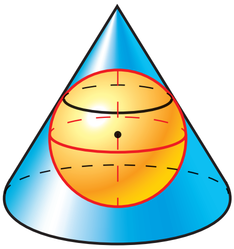


Рис. 16.3

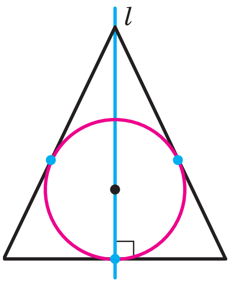


Рис. 16.4

Розглянемо рівнобедрений трикутник, у який вписано коло. Пряма l, що містить висоту трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 16.4. Обертатимемо рівнобедрений трикутник разом із вписаним у нього колом навколо прямої l. У результаті отримаємо сферу, вписану в конус.

Наведені міркування є ілюстрацією до такої теореми.

Теорема 16.2. ***У будь-який конус можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери належить висоті конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, вписаного в осьовий переріз конуса.***

Означення. Зрізаний конус називають описаним навколо сфери, якщо обидві основи зрізаного конуса та всі його твірні дотикаються до сфери (рис. 16.5). **При цьому сферу називають вписаною в зрізаний конус.**

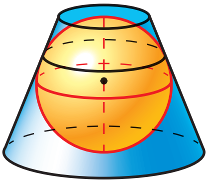


Рис. 16.5

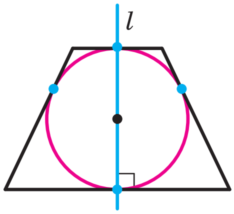


Рис. 16.6

Розглянемо рівнобічну трапецію, у яку вписано коло. Пряма l, що проходить через центр кола перпендикулярно до основ трапеції, є віссю симетрії фігури, зображеної на рисунку 16.6. Обертатимемо трапецію разом із вписаним у неї колом навколо прямої l. У результаті отримаємо сферу, вписану в зрізаний конус.

Наведені міркування є ілюстрацією до такої теореми.

Теорема 16.3. ***Якщо в осьовий переріз зрізаного конуса можна вписати коло, то в такий зрізаний конус можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює половині висоти зрізаного конуса.***

Якщо циліндр (конус, зрізаний конус) описано навколо сфери, то також говорять, що циліндр (конус, зрізаний конус) описано навколо кулі, обмеженої цією сферою. Наприклад, можна сказати, що на рисунках 16.1, 16.3 і 16.5 зображено відповідно циліндр, конус і зрізаний конус, описані навколо кулі. Також говорять, що кулю вписано в кожне з указаних тіл обертання.

Задача. У конусі, радіус основи якого дорівнює 8 см, паралельно основі провели січну площину. Радіус круга, що утворився в перерізі, дорівнює 2 см. В утворені конус і зрізаний конус вписали кулі. Знайдіть радіуси цих куль.

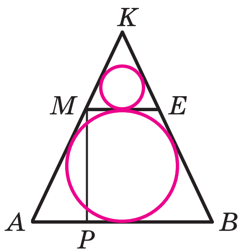


Рис. 16.7

Розв'язання. На рисунку 16.7 зображено рівнобедрений трикутник AKB, який є осьовим перерізом даного конуса. Відрізок ME є діаметром перерізу конуса, $ME = 4$ см. Радіуси кіл, вписаних у трикутник MKE та рівнобічну трапецію $AMEB$, дорівнюють шуканим радіусам куль.

Діаметр кола, вписаного в трапецію $AMEB$, дорівнює її висоті MP. Оскільки в трапецію вписано коло, то $2AM = AB + ME = 20$ см.

Звідси $AM = 10$ см. Легко встановити, що $AP = \frac{AB - ME}{2} = 6$ (см). Із трикутника AMP отримуємо, що $MP = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см). Тоді радіус більшої кулі дорівнює 4 см.

Трикутники AKB і MKE подібні з коефіцієнтом подібності, що дорівнює 4. Тоді шуканий радіус меншої кулі дорівнює 1 см.

Відповідь: 4 см і 1 см. ◄

1. Який циліндр називають описаним навколо сфери?
2. У якому разі в циліндр можна вписати сферу?
3. Яка точка є центром сфери, вписаної в циліндр?
4. Чому дорівнює радіус сфери, вписаної в циліндр?
5. Який конус називають описаним навколо сфери?
6. Де розміщений центр сфери, вписаної в конус?
7. Який зрізаний конус називають описаним навколо сфери?
8. У якому разі в зрізаний конус можна вписати сферу?
9. Яка точка є центром сфери, вписаної в зрізаний конус?
10. Чому дорівнює радіус сфери, вписаної в зрізаний конус?

ВПРАВИ

16.1.° Знайдіть радіус кулі, вписаної в циліндр, діагональ осьового перерізу якого дорівнює 8 см.

16.2.° Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо кулі, радіус якої дорівнює R.

16.3.° Твірна конуса дорівнює діаметру його основи. Як радіус сфери, вписаної в даний конус, відноситься до радіуса описаної навколо нього сфери?

16.4.° Кут між твірною конуса та його висотою дорівнює $45°$, а відстань від центра вписаної в конус кулі до вершини конуса дорівнює 4 см. Знайдіть радіус даної кулі.

16.5.• Твірна конуса дорівнює 10 см, а радіус основи — 6 см. Знайдіть радіус кулі, вписаної в даний конус.

16.6.• У конус із твірною b і кутом α при вершині осьового перерізу вписано кулю. Знайдіть радіус кулі.

16.7.• У зрізаний конус, твірна якого дорівнює 8 см, вписано кулю. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

16.8.$^{\bullet}$ У зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 3 см і 4 см, вписано кулю. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

16.9.$^{\bullet}$ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють r і R. Знайдіть радіус сфери, вписаної в даний зрізаний конус.

16.10.$^{\bullet}$ Кут між твірною зрізаного конуса та площиною більшої основи дорівнює α. Знайдіть радіус кулі, вписаної в даний зрізаний конус, і радіуси основ зрізаного конуса, якщо його твірна дорівнює b.

16.11.$^{\bullet}$ Сферу радіуса r вписано в конус, радіус основи якого дорівнює R. Висота та твірна конуса відповідно дорівнюють h і l. Доведіть, що $r = \dfrac{Rh}{l + R}$.

16.12.$^{\bullet\bullet}$ Радіус кулі, вписаної в конус, дорівнює r. Твірну конуса видно із центра вписаної кулі під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

16.13.$^{\bullet\bullet}$ Найбільший кут між твірними конуса дорівнює $90°$. У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює R. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

16.14.$^{\bullet\bullet}$ У конус, твірна якого дорівнює 15 см, а висота — 12 см, вписано сферу. Знайдіть довжину лінії, по якій сфера дотикається до бічної поверхні конуса.

16.15.$^{\bullet\bullet}$ Кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює α, а радіус основи — R. У конус вписано кулю. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини круга, коло якого є лінією дотику кулі та бічної поверхні конуса.

16.16.$^{\bullet\bullet}$ У зрізаний конус вписано кулю, радіус якої дорівнює R. Діаметр більшої основи зрізаного конуса видно із центра кулі під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

16.17.$^{\bullet\bullet}$ Навколо кулі описано зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть довжину лінії, по якій куля дотикається до бічної поверхні зрізаного конуса.

16.18.$^{\bullet\bullet}$ Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює α. Радіус основи конуса дорівнює R. У конус вписано сферу. До цієї сфери проведено дотичну площину, паралельну основі конуса. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного зрізаного конуса.

16.19.$^{\bullet\bullet}$ Твірна конуса дорівнює l і становить з висотою конуса кут α. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює β, проведено площину. Знайдіть відстань від цієї площини до центра сфери, вписаної в конус.

16.20.•• Радіус основи конуса дорівнює 3 см. Центри двох рівних сфер радіуса $\sqrt{2}$ см належать висоті конуса. Перша сфера дотикається до основи конуса, а друга — до першої сфери та до всіх твірних конуса. Знайдіть висоту конуса.

16.21.* Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Усередині конуса розміщено три рівні сфери з радіусами 1 см. Кожна сфера дотикається до двох інших, основи конуса та твірної конуса. Знайдіть радіус основи конуса.

16.22.* У конус із радіусом основи, що дорівнює R, вписано сферу радіуса r. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає вписану сферу. Знайдіть площу перерізу конуса цією площиною, якщо відомо, що ця площа набуває найбільшого значення.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.23. Коло дотикається до одного з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника та проходить через вершину протилежного гострого кута. Центр кола належить гіпотенузі трикутника, а кожний із катетів дорівнює a. Знайдіть радіус кола.

16.24. У гострокутному трикутнику ABC висоти AD і CE дорівнюють відповідно a і b. Кут між прямими AD і CE дорівнює α. Знайдіть сторону AC.

ЕЛІПС

Ви знаєте, що перерізом циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, є прямокутник. З'ясуємо, яка фігура утворюється в перерізі, якщо площина перетинає всі твірні циліндра. Окремий випадок цієї задачі було розглянуто в п. 7: перерізом циліндра площиною, перпендикулярною до осі циліндра, є круг.

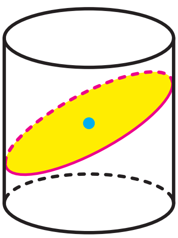


Рис. 16.8

«Зовнішній вигляд» фігури, яка утворюється в загальному випадку, вам добре знайомий. Ця фігура обмежена лінією, яку називають **еліпсом** (рис. 16.8).

Ви ознайомилися з еліпсом у 10 класі, розглядаючи цю фігуру як паралельну проекцію кола. Стикалися ви з еліпсом і під час вивчення інших предметів: у фізиці й астрономії, коли йшлося про траєкторії руху планет і супутників. Узагалі, фігури, схожі на еліпс, ви бачите досить часто, наприклад нарізаючи ковбасу (рис. 16.9) тощо.

Уточнимо наші візуальні уявлення про еліпс.

Означення. Еліпсом називають геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок F_1 і F_2 є сталою величиною, більшою, ніж F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами еліпса.

На рисунку 16.10 зображено еліпс із фокусами F_1 і F_2.

Рис. 16.9

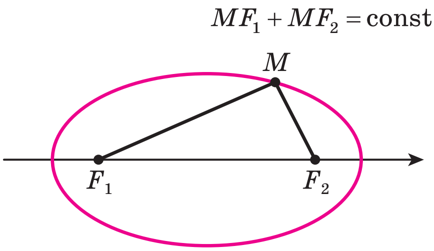


Рис. 16.10

Доведемо, що всі точки перерізу бічної поверхні циліндра площиною, яка перетинає всі твірні циліндра та не перпендикулярна до осі циліндра, належать еліпсу.

Розглянемо дві сфери, кожна з яких дотикається до всіх твірних циліндра (або їхніх продовжень), а також до січної площини α (рис. 16.11). Позначимо через F_1 і F_2 точки дотику сфер із площиною α.

Ці сфери дотикаються до бічної поверхні циліндра (або до її продовження) по колах ω_1 і ω_2, які лежать у площинах, паралельних основам циліндра. Нехай відстань між цими площинами дорівнює d.

Розглянемо довільну точку X перерізу. Через точку X проведемо пряму, яка містить твірну циліндра. Нехай ця пряма дотикається до сфер у точках M_1 і M_2. Ці точки лежать на колах ω_1 і ω_2. Зрозуміло, що $M_1M_2 = d$.

Зазначимо, що прямі XF_1 і XF_2 є дотичними до сфер. Тоді згідно з доведеним у ключовій задачі 1 п. 12 можна записати: $XF_1 = XM_1$ і $XF_2 = XM_2$.

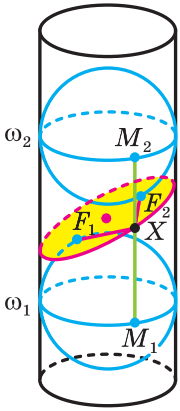


Рис. 16.11

Звідси $XF_1 + XF_2 = XM_1 + XM_2 = M_1M_2 = d$.

Отже, усі точки X перерізу належать еліпсу з фокусами F_1 і F_2, який лежить у площині α, причому $XF_1 + XF_2 = d$.

Ідею застосувати для доведення допоміжні сфери запропонував у 1822 р. бельгійський інженер Жерміналь Данделен.

Використовуючи цю ідею, можна довести, що перерізом бічної поверхні конуса площиною, яка перетинає всі твірні конуса та не перпендикулярна до осі конуса, є еліпс. За допомогою рисунка 16.12 доведіть це самостійно.

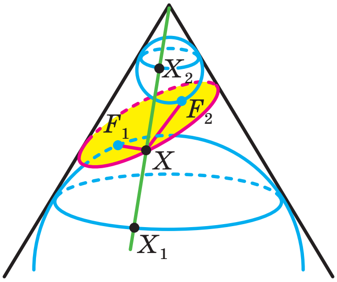


Рис. 16.12

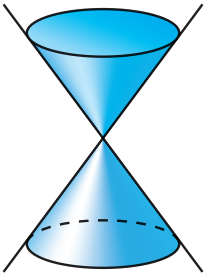


Рис. 16.13

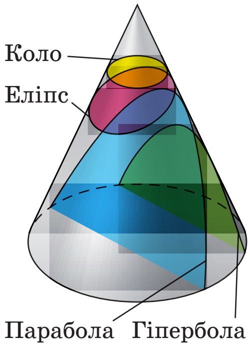


Рис. 16.14

Узагалі, конічна поверхня, тобто поверхня, утворена всіма прямими, що містять твірні даного конуса (рис. 16.13), має цілу низку чудових властивостей. Наприклад, перерізом конічної поверхні площиною, паралельною твірній, є парабола, а площиною, паралельною двом твірним, — гіпербола (рис. 16.14).

Перші дослідження властивостей конічних перерізів пов'язані з іменем давньогрецького вченого Менехма (IV ст. до н. е.). Трактат «Конічні перерізи» Аполлонія Пергського (III–II ст. до н. е.) дійшов до наших днів і являє собою системне дослідження властивостей еліпса, параболи та гіперболи.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Площа бічної поверхні циліндра

За площу $S_б$ бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні.

$S_б = 2\pi rh$, де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, r — радіус основи циліндра, h — довжина висоти циліндра.

Площа повної поверхні циліндра

$S_п = S_б + 2S_{осн}$, де $S_п$ — площа повної поверхні циліндра, $S_{осн}$ — площа основи циліндра.

$S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Комбінації циліндра та призми

Призму називають вписаною в циліндр, якщо її основи вписано в основи циліндра. При цьому циліндр називають описаним навколо призми.

Призму називають описаною навколо циліндра, якщо її основи описано навколо основ циліндра. При цьому циліндр називають вписаним у призму.

Площа бічної поверхні конуса

За площу $S_б$ бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні.

$S_б = \pi rl$, де r — радіус основи конуса, l — довжина твірної конуса.

Площа повної поверхні конуса

$S_п = S_б + S_{осн}$, де $S_п$ — площа повної поверхні конуса, $S_{осн}$ — площа основи конуса.

$S_п = \pi rl + \pi r^2$

Площа бічної поверхні зрізаного конуса

$S_б = \pi(R + r)l$, де R і r — радіуси основ, l — довжина твірної зрізаного конуса.

Комбінації конуса та піраміди

Піраміду називають вписаною в конус, якщо її основу вписано в основу конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають описаним навколо піраміди.

Піраміду називають описаною навколо конуса, якщо її основу описано навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса. При цьому конус називають вписаним у піраміду.

Сфера та куля

Сферою називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу.

Кулею називають геометричне місце точок простору, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

Рівняння сфери

Рівняння сфери із центром у точці $A(a;\ b;\ c)$ і радіусом r має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Взаємне розміщення сфери та площини

Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то перерізом сфери площиною є коло.

Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною до сфери. Цю спільну точку називають точкою дотику. У цьому разі відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Пряму, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною до сфери.

Многогранник, вписаний у сферу

Многогранник називають вписаним у сферу, якщо всі його вершини належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо многогранника.

Якщо для даного многогранника існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин, то навколо цього многогранника можна описати сферу.

Кожна грань многогранника, вписаного у сферу, є многокутником, вписаним у коло.

Якщо навколо основи прямої призми можна описати коло, то таку призму можна вписати у сферу, а центр сфери, описаної навколо призми, є серединою відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

Навколо правильної призми можна описати сферу.

Якщо навколо основи піраміди можна описати коло, то таку піраміду можна вписати у сферу.

Навколо правильної піраміди можна описати сферу. Центр описаної сфери належить прямій, яка містить висоту правильної піраміди.

Многогранник, описаний навколо сфери

Многогранник називають описаним навколо сфери, якщо всі його грані дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в многогранник.

Якщо для даного опуклого многогранника існує точка, яка йому належить і рівновіддалена від усіх площин, що містять його грані, то в цей многогранник можна вписати сферу.

Якщо всі бісектори двогранних кутів опуклого многогранника при його ребрах мають спільну точку, то в цей многогранник можна вписати сферу.

У будь-який тетраедр можна вписати сферу.

У правильну призму, висота якої дорівнює діаметру кола, вписаного в основу призми, можна вписати сферу. Центр сфери є серединою відрізка, який сполучає центри основ призми.

Комбінації циліндра та сфери

Циліндр називають вписаним у сферу, якщо кола основ циліндра належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо циліндра.

Навколо будь-якого циліндра можна описати сферу, причому центр сфери — це середина відрізка, що сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу циліндра.

Циліндр називають описаним навколо сфери, якщо обидві основи циліндра та всі його твірні дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в циліндр.

Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то в такий циліндр можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ циліндра, а радіус сфери дорівнює радіусу основи циліндра.

Комбінації конуса та сфери

Конус називають вписаним у сферу, якщо вершина конуса та коло його основи належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо конуса.

Навколо будь-якого конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу конуса.

Конус називають описаним навколо сфери, якщо основа конуса та всі його твірні дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в конус.

У будь-який конус можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери належить висоті конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, вписаного в осьовий переріз конуса.

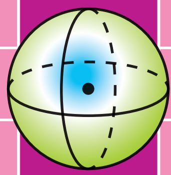
Комбінації зрізаного конуса та сфери

Зрізаний конус називають вписаним у сферу, якщо кола основ конуса належать сфері. При цьому сферу називають описаною навколо зрізаного конуса.

Навколо будь-якого зрізаного конуса можна описати сферу, причому центр описаної сфери належить осі зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює радіусу кола, описаного навколо осьового перерізу зрізаного конуса.

Зрізаний конус називають описаним навколо сфери, якщо обидві основи зрізаного конуса та всі його твірні дотикаються до сфери. При цьому сферу називають вписаною в зрізаний конус.

Якщо в осьовий переріз зрізаного конуса можна вписати коло, то в такий зрізаний конус можна вписати сферу, причому центр вписаної сфери — це середина відрізка, який сполучає центри основ зрізаного конуса, а радіус сфери дорівнює половині висоти зрізаного конуса.



§ 3. ОБ'ЄМИ ТІЛ. ПЛОЩА СФЕРИ

17. **Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми**

18. **Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди**

19. **Об'єми тіл обертання**

20. **Площа сфери**

- У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомим вам поняттям об'єму, вивчите нові формули для обчислення об'ємів многогранників і тіл обертання.
- Навчитеся знаходити площу сфери.

17. Об’єм тіла. Формули для обчислення об’єму призми

З такою величиною, як об’єм, ви часто стикаєтесь у повсякденному житті: об’єм пакета соку, об’єм скляної банки, показники споживання води або палива на лічильниках (рис. 17.1). З поняттям об’єму ви ознайомились у курсі математики 5 класу. Крім того, це поняття ви неодноразово використовували, наприклад, на уроках фізики та хімії.

Рис. 17.1

Вивчаючи планіметрію, ви часто стикалися з такою геометричною величиною, як площа фігури. Об’єм тіла в стереометрії є аналогом площі фігури в планіметрії. Побачити цю аналогію нескладно, якщо порівняти означення площі многокутника, вивчене вами у 8 класі, з таким означенням.

Означення. *Об’ємом тіла* називають додатну величину, яка має такі властивості:

1) **рівні тіла мають рівні об’єми;**
2) **якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об’єм дорівнює сумі об’ємів цих тіл;**
3) **за одиницю об’єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.**

Вивчення об’ємів тіл почнемо з многогранників.

Виміряти об’єм многогранника — це означає порівняти його об’єм з об’ємом одиничного куба. У результаті отримують числове значення об’єму даного многогранника. Це число показує, у скільки разів об’єм даного многогранника відрізняється від об’єму одиничного куба.

Покажемо, як, спираючись на означення, знайти об'єм, наприклад, прямокутного паралелепіпеда з ребрами 1 см, 1 см і 3 см (рис. 17.2).

Такий паралелепіпед можна розбити на три куби з ребром 1 см. Із властивості 2 об'єму випливає, що об'єм даного паралелепіпеда дорівнює трьом об'ємам куба з ребром 1 см (коротко записують: 3 см^3).

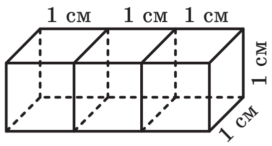


Рис. 17.2

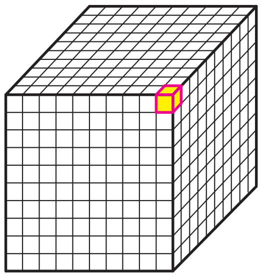


Рис. 17.3

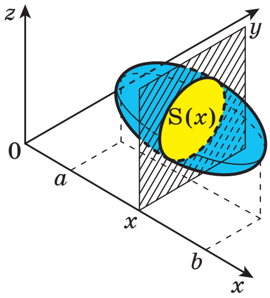


Рис. 17.4

Ще один приклад. Знайдемо об'єм V куба з ребром 1 мм, приймаючи за одиницю довжини 1 см. Якщо ребра одиничного куба (куба з ребром 1 см) поділити на 10 рівних частин і через точки поділу провести площини, паралельні його граням, то одиничний куб буде розбито на 1000 рівних кубів з ребром 1 мм (рис. 17.3). За властивістю 1 об'єму всі вони мають один і той самий об'єм V. За властивістю 2 об'єму отримуємо:

$$1 = \underbrace{V + V + \ldots + V}_{1000}.$$

Звідси $V = \dfrac{1}{1000}$ см^3.

Знаходити об'єми тіл, зокрема многогранників, спираючись тільки на означення, часто є складною задачею. Наприклад, непросто порівняти об'єм трикутної піраміди з об'ємом одиничного куба. Недаремно формулу для обчислення об'єму піраміди, знайдену вченими Стародавньої Греції, вважають одним з найважливіших досягнень античної науки.

Водночас із курсу алгебри ви знаєте, що для обчислення об'єму тіла можна скористатися формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (1)$$

де $S(x)$ — площа фігури, отриманої в результаті перетину тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, а проміжок $[a; b]$ є проекцією тіла на вісь абсцис (рис. 17.4).

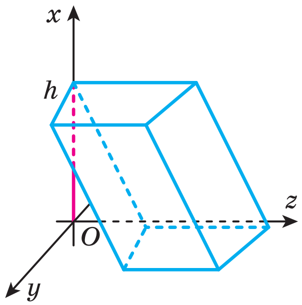


Рис. 17.5

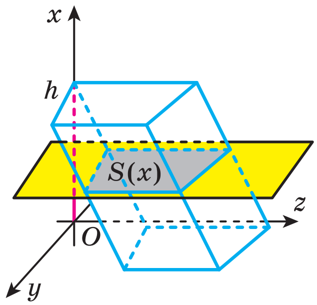


Рис. 17.6

Скориставшись формулою (1), обчислимо об'єм призми.

Розглянемо призму з висотою h і основою, площа якої дорівнює S.

Уведемо систему координат так, щоб одна з основ призми лежала в площині $x = 0$, а висота призми належала додатній півосі абсцис (рис. 17.5). Тоді проекцією призми на вісь абсцис є проміжок $[0; h]$.

Зрозуміло, що перерізом призми будь-якою площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є многокутник, що дорівнює основі призми (рис. 17.6). Тому $S(x) = S$ для всіх значень $x \in [0; h]$. Спираючись на формулу (1), отримуємо:

$$V = \int_0^h S\,dx = Sx\Big|_0^h = Sh.$$

Таким чином,

об'єм V призми з висотою h і основою, площа якої дорівнює S, обчислюють за формулою

$$\boxed{V = Sh}$$

Оскільки паралелепіпед є окремим видом призми, то цю формулу використовують і для обчислення об'єму паралелепіпеда. Зокрема, якщо ребра прямокутного паралелепіпеда, які мають спільну вершину, дорівнюють a, b і c, то об'єм цього паралелепіпеда можна знайти за формулою

$$\boxed{V = abc}$$

Задача 1. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми й перпендикулярний до них. Доведіть, що об'єм такої призми дорівнює добутку площі перерізу та бічного ребра.

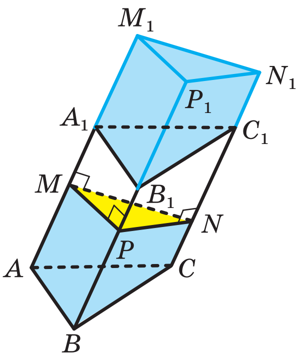


Рис. 17.7

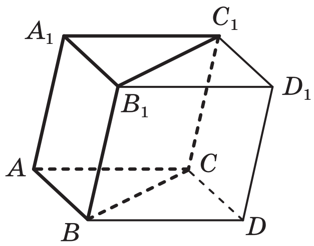


Рис. 17.8

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших n-кутних призм доведення буде аналогічним.

Розглянемо призму $ABCA_1B_1C_1$. Нехай трикутник MPN — переріз, про який ідеться в умові (рис. 17.7). Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ многогранника $ABCMPN$. Тоді образом трикутника ABC є трикутник $A_1B_1C_1$. Нехай образом трикутника MPN є трикутник $M_1P_1N_1$. Отримуємо, що образом многогранника $ABCMPN$ є многогранник $A_1B_1C_1M_1P_1N_1$. Тому ці многогранники рівні, а отже, рівними є також їхні об'єми.

Таким чином, призми $ABCA_1B_1C_1$ і $MPNM_1P_1N_1$ мають рівні об'єми. Призма $MPNM_1P_1N_1$ є прямою, тому її об'єм V дорівнює $S_{MPN} \cdot MM_1$. Оскільки $MM_1 = AA_1$, то об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює $S_{MPN} \cdot AA_1$. ◄

Задача 2. У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ площі граней ABC і AA_1B_1B відповідно дорівнюють S_1 і S_2. Відстань від точки C_1 до площини ABC дорівнює h. Знайдіть відстань від точки C_1 до площини AA_1B_1.

Розв'язання. Об'єм даної призми дорівнює S_1h.

У площинах ABC і $A_1B_1C_1$ позначимо відповідно точки D і D_1 так, щоб утворилися паралелограми $ABDC$ і $A_1B_1D_1C_1$. Розглянемо паралелепіпед $ABDCA_1B_1D_1C_1$ (рис. 17.8). Тоді об'єм даної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює половині об'єму паралелепіпеда.

Нехай відстань від точки C_1 до площини AA_1B_1 дорівнює x. Тоді об'єм паралелепіпеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ дорівнює S_2x.

Маємо: $S_1h = \frac{1}{2}S_2x$. Звідси $x = \frac{2S_1h}{S_2}$.

Відповідь: $x = \frac{2S_1h}{S_2}$. ◄

?

1. Що називають об’ємом тіла?
2. Що означає виміряти об’єм многогранника?
3. За якою формулою обчислюють об’єм призми?

ВПРАВИ

17.1.° Знайдіть об’єм правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а кут між діагоналлю призми та площиною основи дорівнює α.

17.2.° Висота правильної трикутної призми дорівнює h, а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об’єм призми.

17.3.° Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 9 см. Знайдіть ребро куба, об’єм якого дорівнює об’єму даного паралелепіпеда.

17.4.° Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 2, 3 і 6, а його діагональ дорівнює 14 см. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

17.5.° Переріз залізничного насипу має форму трапеції, нижня основа якої дорівнює 15 м, верхня основа — 8 м, а висота — 3,2 м. Скільки кубічних метрів землі знадобиться, щоб побудувати 1 км насипу?

17.6.° Цех, у якому працюватимуть a робітників, має форму прямокутного паралелепіпеда. Щоби приміщення цеху відповідало санітарним нормам, на кожного робітника цеху повинно припадати b м^3 повітря. Якою має бути в цьому разі висота h цеху, якщо площа його підлоги становить S м^2?

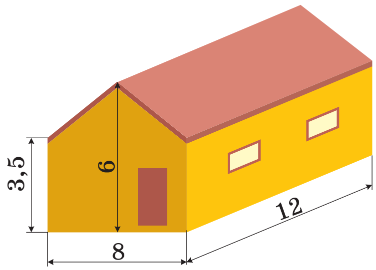


Рис. 17.9

17.7.° Знайдіть місткість сараю з двоскатним дахом (рис. 17.9), якщо довжина сараю дорівнює 12 м, ширина — 8 м, висота стін — 3,5 м, а висота гребеня даху — 6 м (товщиною стін знехтувати).

17.8.° Основа прямої призми — ромб зі стороною 8 см і кутом 60°. Менша діагональ призми дорівнює 17 см. Знайдіть об'єм призми.

17.9.° Основа прямої призми — рівнобічна трапеція з основами 5 см та 11 см і діагоналлю 10 см. Діагональ призми дорівнює 26 см. Знайдіть об'єм призми.

17.10.° Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 3 см і 8 см та кутом 30°. Бічне ребро призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм призми.

17.11.° Основою похилої призми є трикутник зі сторонами $4\sqrt{3}$ см і 5 см та кутом 120° між ними. Бічне ребро призми дорівнює 20 см і утворює з висотою призми кут 60°. Знайдіть об'єм призми.

17.12.° Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30°. Кут між діагоналлю основи та однією з її сторін дорівнює 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.13.• Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює з площиною бічної грані кут α. Знайдіть об'єм призми.

17.14.• Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.15.• Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, якщо її діагоналі A_1D і A_1E дорівнюють відповідно 13 см і 12 см.

17.16.• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$. Відомо, що $\angle BAD = \alpha$, $AC = d$. Через пряму BD і точку C_1 проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

17.17.• Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є трикутник ABC. Відомо, що $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = \beta$, $AB = c$. Площина A_1BC утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть об'єм призми.

17.18.• Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, які мають спільну вершину, дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.19.• Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.20.• Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 20 см, а відстані між паралельними прямими, які містять ребра призми, дорівнюють 17 см, 25 см і 26 см. Знайдіть об'єм призми.

17.21.• Бічне ребро похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 8 см, відстань між прямими AA_1 і BB_1 — $5\sqrt{3}$ см, між прямими AA_1 і DD_1 — 4 см, а двогранний кут паралелепіпеда при ребрі AA_1 дорівнює $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.22.• Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник ABC зі стороною a. Вершина A_1 призми рівновіддалена від вершин трикутника ABC, а кут між ребром AA_1 і площиною основи дорівнює α. Знайдіть об'єм призми.

17.23.• Основою похилої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною a, бічне ребро призми дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Вершина A_1 призми рівновіддалена від сторін квадрата $ABCD$. Знайдіть об'єм призми.

17.24.•• Через вершини B, D і C_1 правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут $60°$. Відстань від точки C до проведеної площини дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм призми.

17.25.•• Через вершини A, C і B_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут $45°$. Відстань від точки B до проведеної площини дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм призми.

17.26.•• Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 30 см і 40 см. Через діагональ основи проведено площину, яка паралельна діагоналі паралелепіпеда й утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.27.•• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, діагоналі якого дорівнюють 8 см і $4\sqrt{5}$ см. Кут між площиною, яка проходить через прямі AD і B_1C_1, і площиною основи призми дорівнює $45°$. Знайдіть об'єм призми.

17.28.•• Основою похилого паралелепіпеда є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює 24 см. Діагональ однієї з бічних граней дорівнює $13\sqrt{3}$ см і перпендикулярна до площини основи. Кут між бічним ребром паралелепіпеда та площиною основи дорівнює $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.29.•• Висота похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює $6\sqrt{2}$ см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°. Площа грані AA_1B_1B дорівнює 36 см², площа грані AA_1C_1C — 48 см², а двогранний кут призми при ребрі AA_1 дорівнює 120°. Знайдіть об'єм призми.

17.30.•• Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 2 см. Бічне ребро призми дорівнює 5 см і утворює з двома сусідніми сторонами основи кути по 60°. Знайдіть об'єм призми.

17.31.•• Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, а кожна його бічна грань — ромб зі стороною a та кутом 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17.32.•• Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 3 см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи та є ромбом з діагоналлю 4 см. Знайдіть об'єм призми.

17.33.•• Основою похилої призми є квадрат. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а площа кожної з двох інших граней дорівнює 36 см². Бічні ребра призми дорівнюють ребрам основи та утворюють з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм призми.

17.34.•• Основою призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 12 см і 16 см, а радіус описаного кола — 10 см. Бічне ребро призми дорівнює 20 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм призми.

17.35.•• Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 10 см, а радіус описаного кола — 13 см. Висота призми дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм призми.

17.36.•• У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ площа грані AA_1B_1B дорівнює S, а відстань від прямої CC_1 до площини AA_1B_1 дорівнює d. Доведіть, що об'єм V призми можна обчислити за формулою $V = \frac{dS}{2}$.

17.37.•• Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Площі граней BB_1C_1C і AA_1D_1D відповідно дорівнюють S_1 і S_2. Відстань між площинами, що містять ці грані, дорівнює d. Знайдіть об'єм призми.

17.38.•• Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1 см. До площини квадрата проведено перпендикуляри AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1, розміщені по один бік від цієї площини. Відомо, що $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1 = 10$ см. Знайдіть об'єм многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

17.39.•• Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Площа трикутника AB_1C дорівнює S, а відстань від точки A_1 до площини AB_1C дорівнює h. Знайдіть об'єм призми.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.40. У прямокутному трикутнику медіани, проведені до катетів, дорівнюють $2\sqrt{73}$ см і $4\sqrt{13}$ см. Знайдіть катети трикутника.

17.41. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 7{,}5$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть відстань від вершини B до ортоцентра трикутника ABC.

18. Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди

Теорема 18.1. ***Об'єм V піраміди з висотою h і основою, площа якої дорівнює S, обчислюють за формулою***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Доведення. Нехай дано піраміду з висотою OM, що дорівнює h, та основою, площа якої дорівнює S (рис. 18.1). Доведемо, що об'єм піраміди дорівнює $V = \frac{1}{3}Sh$.

Уведемо систему координат так, щоб вершина піраміди O збігалася з початком координат, а висота піраміди OM належала додатній півосі абсцис (рис. 18.2). Тоді основа піраміди лежить у площині $x = h$. Тому проекцією піраміди на вісь абсцис є проміжок $[0; h]$.

Нехай площина $x = x_0$ перетинає піраміду по многокутнику з площею $S(x_0)$. Площина цього перерізу паралельна площині основи піраміди, тому многокутник, утворений у перерізі, подібний основі піраміди з коефіцієнтом подібності $\frac{x_0}{h}$. Скориставшись теоремою про відношення площ подібних фігур, отримуємо пропорцію

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

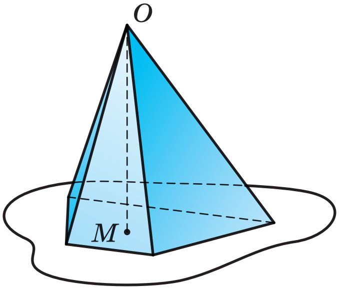


Рис. 18.1

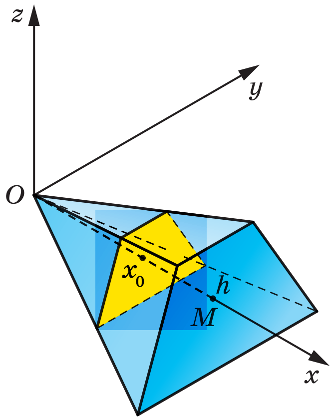


Рис. 18.2

Звідси $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2}S$. Тепер можна записати:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}Sdx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh. \blacktriangleleft$$

Задача 1. Основою чотирикутної піраміди $MABCD$ є прямокутник $ABCD$. Бічна грань AMB перпендикулярна до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди, якщо $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $MA = MB = 13$ см.

Розв'язання. Проведемо висоту MK трикутника AMB (рис. 18.3). Оскільки $AMB \perp ABC$, то $MK \perp ABC$. Отже, відрізок MK — висота даної піраміди.

Оскільки $MA = MB$, то відрізок MK є медіаною трикутника AMB. Звідси $AK = KB = 5$ см.

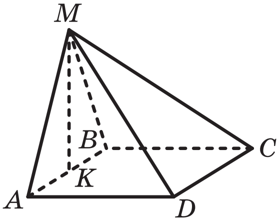


Рис. 18.3

Із прямокутного трикутника MKA отримуємо:

$$MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 120 см^2.

Тепер можемо знайти об'єм V піраміди:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot MK = \frac{1}{3}\cdot 120\cdot 12 = 480 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 480 см^3. $\blacktriangleleft$

Формулу для обчислення об'єму піраміди використовують для обчислення об'ємів опуклих многогранників, оскільки довільний опуклий многогранник можна розбити на скінченну кількість пірамід. Справді, виберемо всередині такого многогранника довільну точку й розглянемо піраміди, основами яких є грані многогранника, а вершиною — вибрана точка. Тепер зрозуміло, що об'єм опуклого многогранника дорівнює сумі об'ємів пірамід, на які його розбито (рис. 18.4).

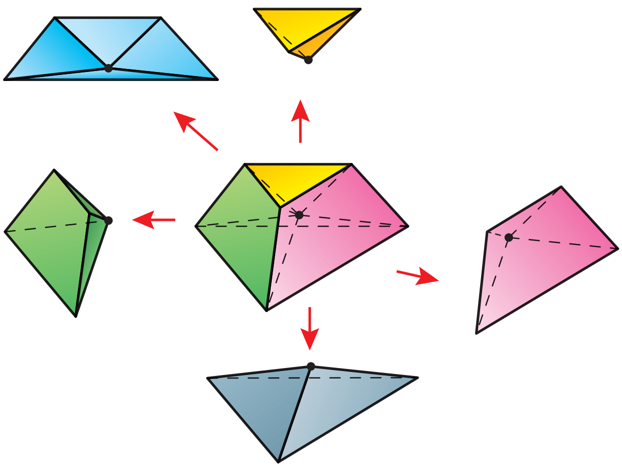


Рис. 18.4

Можна довести, що на піраміди можливо розбити не тільки опуклий, а й неопуклий многогранник. Тому об'єм довільного многогранника можна знайти як суму об'ємів пірамід, на які його розбито.

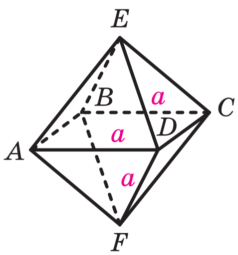


Рис. 18.5

Задача 2. На рисунку 18.5 зображено многогранник, усі ребра якого дорівнюють a. Знайдіть об'єм цього многогранника.[1]

Розв'язання. Розіб'ємо даний многогранник на дві рівні правильні чотирикутні піраміди $EABCD$ і $FABCD$ (рис. 18.6). Оскільки всі ребра піраміди $EABCD$ дорівнюють a, то нескладно встановити, що площа основи цієї піраміди дорівнює $S = a^2$, а висота дорівнює

[1] Многогранник на рисунку 18.5 називають правильним октаедром. Див. оповідання «Платонові тіла» на с. 53.

$h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (зробіть це самостійно). Тому об'єм піраміди $EABCD$ дорівнює:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Оскільки даний многогранник складається з двох таких пірамід, то його об'єм дорівнює:

$$V = 2V_{\text{пір}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. ◄

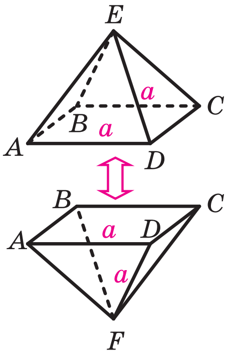


Рис. 18.6

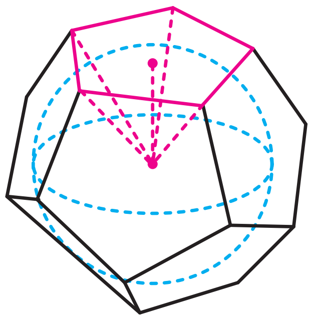


Рис. 18.7

Задача 3. Доведіть, що радіус r кулі, вписаної в многогранник, можна обчислити за формулою $r = \dfrac{3V}{S}$, де V — об'єм многогранника, S — площа поверхні многогранника.

Розв'язання. Розіб'ємо даний многогранник на піраміди, вершини яких збігаються із центром кулі, а основами є грані многогранника (рис. 18.7).

Проведемо радіуси в точки дотику кулі до граней многогранника. Проведені радіуси є висотами пірамід, на які розбито многогранник.

Нехай $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — площі граней многогранника. Тоді можна записати: $V = \dfrac{1}{3}rS_1 + \dfrac{1}{3}rS_2 + \ldots + \dfrac{1}{3}rS_n = \dfrac{1}{3}r\left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right) = \dfrac{1}{3}rS.$

Звідси $r = \dfrac{3V}{S}$.

Теорема 18.2. ***Об'єм V зрізаної піраміди з висотою h і основами, площі яких дорівнюють S_1 і S_2, обчислюють за формулою***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)}$$

Доведення. На рисунку 18.8 зображено зрізану піраміду з висотою h та основами, площі яких дорівнюють S_1 і S_2.

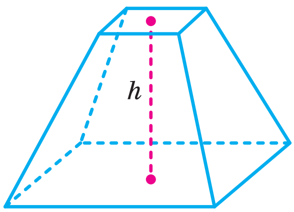


Рис. 18.8

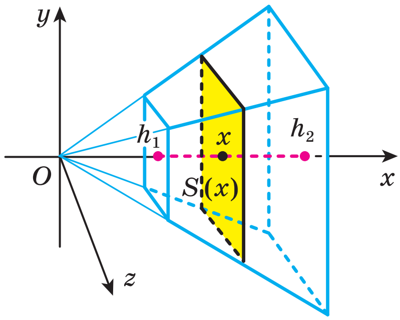


Рис. 18.9

Уведемо систему координат так, як показано на рисунку 18.9. Одна з основ зрізаної піраміди лежить у площині $x = h_2$, а друга — у площині $x = h_1$. Тому проекцією піраміди на вісь абсцис є проміжок $[h_1; h_2]$. Зазначимо, що $h_2 - h_1 = h$.

Скориставшись результатом, отриманим під час доведення теореми 18.1, можна записати:

$$V = \int_{h_1}^{h_2} S(x)dx = \int_{h_1}^{h_2} \frac{x^2}{h_2^2} S_2\,dx = \frac{S_2}{h_2^2}\int_{h_1}^{h_2} x^2 dx = \frac{S_2}{h_2^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{h_1}^{h_2} = \frac{1}{3}\frac{S_2}{h_2^2}(h_2^3 - h_1^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{S_2}{h_2^2}(h_2 - h_1)(h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2) = \frac{S_2 h}{3}\left(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1^2}{h_2^2}\right) =$$

$$= \frac{S_2 h}{3}\left(1 + \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} + \frac{S_1}{S_2}\right) = \frac{h}{3}\left(S_2 + \sqrt{S_2 S_1} + S_1\right). \blacktriangleleft$$

?

1. За якою формулою обчислюють об'єм піраміди?
2. За якою формулою обчислюють об'єм зрізаної піраміди?

ВПРАВИ

18.1.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

18.2.° Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

18.3.° Об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$, зображеної на рисунку 18.10, дорівнює V. Точка M — середина ребра AA_1. Знайдіть об'єм піраміди $MABC$.

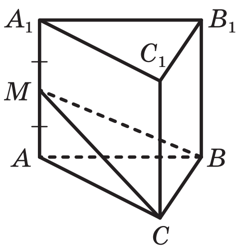


Рис. 18.10

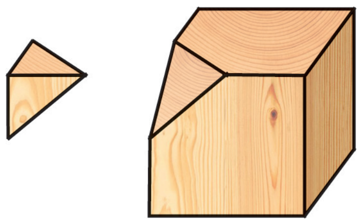


Рис. 18.11

18.4.° Дерев'яний куб, ребро якого дорівнює 12 см, розпилили на дві частини: трикутну піраміду та семигранник (рис. 18.11). Знайдіть об'єм семигранника, якщо площина розпилу проходить через середини трьох ребер куба, які мають спільну вершину.

18.5.° Основами зрізаної піраміди, висота якої дорівнює 6 см, є прямокутники. Сторони однієї основи дорівнюють 12 см і 16 см, а менша сторона другої — 3 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.6.° Знайдіть об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 5 см і 10 см, а висота — 9 см.

18.7.° Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює b і утворює з висотою піраміди кут α.

18.8.° Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

18.9.° Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює b і утворює з площиною основи кут α.

18.10.• Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b, а плоский кут при вершині піраміди дорівнює β. Знайдіть об’єм піраміди.

18.11.• Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і утворює зі стороною основи кут α. Знайдіть об’єм піраміди.

18.12.• Основою піраміди є трикутник зі сторонами $3\sqrt{10}$ см, $3\sqrt{10}$ см і 6 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об’єм піраміди.

18.13.• Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 24 см і 18 см, а кожне її бічне ребро дорівнює 25 см. Знайдіть об’єм піраміди.

18.14.• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a та прилеглим до нього кутом α. Кожне бічне ребро піраміди нахилено до площини основи під кутом β. Знайдіть об’єм піраміди.

18.15.• Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює b. Кут між бічними сторонами основи піраміди дорівнює β. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною її основи кут α. Знайдіть об’єм піраміди.

18.16.• Основою піраміди є ромб зі стороною a та кутом α. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють β. Знайдіть об’єм піраміди.

18.17.• Основою піраміди є трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 4 см і 10 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 45°, а об’єм піраміди дорівнює $\frac{280}{3}$ см^3. Знайдіть висоту піраміди.

18.18.• Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 60°. Знайдіть об’єм піраміди.

18.19.• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом 60°. Знайдіть об’єм піраміди.

18.20.• Прямокутник $ABCD$ — основа піраміди $MABCD$. Грані ABM і CBM перпендикулярні до основи піраміди, грань ADM утворює з основою кут 60°, а грань CDM — кут 30°. Висота піраміди дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть об’єм піраміди.

18.21.• Грані DAB і DAC піраміди $DABC$ перпендикулярні до основи, а грань DBC нахилена до основи під кутом β. Знайдіть об’єм піраміди, якщо $AB = BC = m$, $\angle BAC = \alpha$.

18.22.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють a і b, $a > b$. Двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює α. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.23.• На рисунку 18.12 зображено бункер для зерна, який має форму правильної чотирикутної зрізаної піраміди (розміри на рисунку дано в сантиметрах). Скільки тонн зерна можна засипати в такий бункер, якщо маса 1 м^3 зерна становить 800 кг?

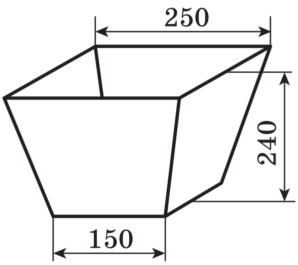


Рис. 18.12

18.24.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють a і b, $a > b$. Кут між бічним ребром піраміди та більшою основою дорівнює α. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.25.• Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 12 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $60°$. Висоту піраміди поділили на 3 рівні частини та через точки поділу провели площини, паралельні основі. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, яка міститься між цими площинами.

18.26.• Висота піраміди дорівнює 27 см. Площина, яка проходить паралельно основі цієї піраміди, відтинає від неї зрізану піраміду, площі основ якої дорівнюють 32 см^2 і 162 см^2. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.27.• Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

18.28.• Основою піраміди є квадрат зі стороною 5 см. Одне з бічних ребер піраміди, що дорівнює 12 см, є висотою піраміди. Знайдіть радіус кулі, вписаної в дану піраміду.

18.29.• Площина, паралельна основі піраміди, перетинає бічне ребро SA в точці M так, що $SM : SA = k$. Знайдіть відношення об'єму утвореної піраміди до об'єму даної піраміди.

18.30.• Площина, паралельна основі піраміди, ділить її на дві рівні за об'ємом частини. У якому відношенні ця площина ділить бічне ребро?

18.31.• Площа основи піраміди дорівнює 3 см^2, а об'єм піраміди дорівнює 3 см^3. Піраміду перерізали двома площинами, паралельними її основі. Площі утворених перерізів дорівнюють 1 см^2 і 2 см^2. Знайдіть об'єм частини піраміди, що міститься між січними площинами.

18.32.•• Відстань від вершини основи правильної трикутної піраміди до протилежної бічної грані дорівнює d, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть об'єм піраміди.

18.33.•• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут піраміди при її бічному ребрі дорівнює α. Знайдіть об'єм піраміди.

18.34.•• Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H, а двогранний кут піраміди при її бічному ребрі дорівнює α. Знайдіть об'єм піраміди.

18.35.•• Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною a та кутом α при основі. Бічна грань піраміди, яка містить основу рівнобедреного трикутника, перпендикулярна до площини цього трикутника, а дві інші грані нахилені до цієї площини під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

18.36.•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a та прилеглим до нього кутом α. Бічна грань піраміди, яка містить більшу сторону основи, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до цієї площини під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

18.37.•• Основи зрізаної піраміди — рівнобедрені прямокутні трикутники з гіпотенузами a і b, $a > b$. Бічні грані піраміди, які містять катети основ, перпендикулярні до основ, а третя бічна грань утворює з більшою основою кут β. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.38.•• Основи зрізаної піраміди — квадрати зі сторонами a і b, $a > b$. Одна з бічних граней піраміди є рівнобічною трапецією та перпендикулярна до основ, а протилежна їй грань утворює з більшою основою кут α. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.39.•• Основи зрізаної піраміди — правильні трикутники зі сторонами a і b, $a > b$. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основ, а дві інші утворюють з більшою основою кут α. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

18.40.•• Площі двох граней тетраедра дорівнюють S_1 і S_2. Їхнє спільне ребро дорівнює a, а двогранний кут тетраедра при цьому ребрі дорівнює α. Доведіть, що об'єм V даного тетраедра можна обчислити за формулою $V = \frac{2S_1 S_2 \sin\alpha}{3a}$.

18.41.•• Площі граней ABC і DAB тетраедра $DABC$ відповідно дорівнюють S_1 і S_2, а двогранний кут тетраедра при ребрі AB дорівнює α. Знайдіть площу перерізу тетраедра площиною, що проходить через пряму AB і центр вписаної в тетраедр сфери.

18.42.•• Ребро AA_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює d. Площі граней ABB_1A_1 і ADD_1A_1 відповідно дорівнюють S_1 і S_2. Кут між цими гранями дорівнює α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

18.43.•• Ребро AB тетраедра $DABC$ дорівнює a. Точка M — середина ребра CD. Площина AMB утворює з площинами ABC і ABD кути α і β відповідно. Площа трикутника AMB дорівнює S. Знайдіть об'єм тетраедра $DABC$.

18.44.•• Об'єм призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює V. На бічних ребрах AA_1 і BB_1 позначили відповідно точки M і N так, що $AM = MA_1$ і $BN : NB_1 = 1 : 2$. Знайдіть об'єм многогранника $MNCA_1B_1C_1$.

18.45.•• На бічних ребрах BB_1 і CC_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили відповідно точки M і K так, що площина AMK ділить дану призму на два рівновеликих многогранники. Знайдіть відношення $CK : KC_1$, якщо $BM : MB_1 = 2 : 1$.

18.46.•• Доведіть, що об'єм тетраедра в три рази менший від об'єму описаного навколо нього паралелепіпеда.

18.47.•• Знайдіть об'єм рівногранного тетраедра, якщо його мимобіжні ребра дорівнюють a, b і c.

18.48.•• Дано тетраедр $DABC$. Відстані між прямими AB і DC, AC і DB, BC і AD дорівнюють відповідно d_1, d_2 і d_3. Доведіть, що об'єм тетраедра не менший, ніж $\frac{d_1 d_2 d_3}{3}$.

18.49.•• Ребра AB і CD тетраедра $DABC$ відповідно дорівнюють a і b. Відстань і кут між прямими AB і CD відповідно дорівнюють d і α. Доведіть, що об'єм V даного тетраедра можна обчислити за формулою $V = \frac{abd \sin \alpha}{6}$.

18.50.•• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. На відрізку DB_1 позначили точки K і F, а на відрізку AC — точки M і P. Відомо, що $KF = 3$ см, $MP = 2$ см. Знайдіть об'єм тетраедра $KFMP$.

18.51.•• Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 4 см. На ребрі AB позначили точки M і N, а на ребрі CD — точки K і E. Відомо, що $MN = 1$ см, $KE = 3$ см. Знайдіть об'єм тетраедра $MNKE$.

18.52.•• Площі бічних граней прямокутного тетраедра дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Знайдіть радіус сфери, вписаної в тетраедр.

18.53.•• Дві грані тетраедра — рівносторонні трикутники зі стороною $2\sqrt{2}$ см, а дві інші грані — рівнобедрені прямокутні трикутники. Знайдіть радіус кулі, вписаної в тетраедр.

18.54.•• Ребро SA чотирикутної піраміди $SABCD$ перпендикулярне до площини основи та дорівнює 6 см. Основою піраміди є квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 8 см. Точки M і N — середини ребер AD і CD відповідно. Знайдіть радіус сфери, вписаної в піраміду $SDMN$.

18.55.•• Дано тетраедр $DABC$. На променях DA, DB і DC позначили відповідно точки A_1, B_1 і C_1. Доведіть, що відношення об'ємів тетраедрів $DABC$ і $DA_1B_1C_1$ дорівнює $\frac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA_1 \cdot DB_1 \cdot DC_1}$.

18.56.•• Дано тетраедр $DABC$. Точка M — середина медіани DK трикутника ADB. На медіані DF трикутника ADC позначили точку N так, що $DN : NF = 1 : 2$. У якому відношенні площина AMN ділить об'єм даного тетраедра?

18.57.•• Дано тетраедр $DABC$. На ребрі AD позначили точку K так, що $AK : KD = 3 : 1$. На продовженні ребер AB і AC за точки B і C позначили точки N і M так, що $AB = BN$ і $MC : CA = 1 : 3$. У якому відношенні площина KMN ділить об'єм даного тетраедра?

18.58.* Основою тетраедра $DABC$ є рівносторонній трикутник ABC, сторона якого дорівнює $\sqrt{6}$ см. Ребро AD дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Бічні грані тетраедра є рівновеликими трикутниками. Знайдіть об'єм тетраедра.

18.59.* Грані DAB, DBC і DCA тетраедра $DABC$ є рівновеликими трикутниками. Відомо, що $DA = DB = DC = b$, $\angle ADB = 2\alpha$. Знайдіть об'єм тетраедра.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.60. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними — 60°. Знайдіть площу паралелограма.

18.61. Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 9 см і 15 см, а більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

19. Об'єми тіл обертання

У цьому пункті ви продовжите вивчати об'єми тіл і ознайомитеся з формулами для обчислення об'ємів тіл обертання: конуса, циліндра, кулі тощо. Як і під час вивчення об'ємів многогранників, користуватимемося формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

Скориставшись формулою (1), обчислимо об'єм конуса.

Розглянемо конус із висотою h і основою, радіус якої дорівнює r.

Уведемо систему координат так, щоб вершина конуса збігалася з початком координат, а висота конуса належала додатній півосі абсцис (рис. 19.1). Тоді проекцією конуса на вісь абсцис є проміжок $[0; h]$.

Перерізом конуса площиною $x = x_0$ буде круг радіуса r_0 (рис. 19.1). Оскільки площина перерізу паралельна площині основи конуса, то

$$\frac{x_0}{h} = \frac{r_0}{r}.$$

Отримуємо, що $r_0 = \dfrac{rx_0}{h}$. Тому площа перерізу дорівнює:

$$S(x_0) = \pi r_0^2 = \frac{\pi r^2 x_0^2}{h^2}.$$

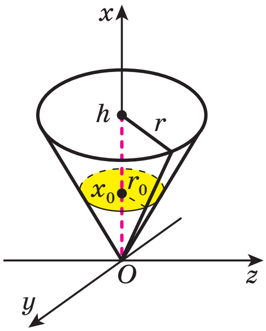


Рис. 19.1

Скориставшись формулою (1), запишемо:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Таким чином,

об'єм конуса з висотою h і радіусом r основи обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Зауважимо, що $\pi r^2 = S$, де S — площа основи конуса, тому ***об'єм конуса з висотою h і основою, площа якої дорівнює S, обчислюють за формулою***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Зверніть увагу, що отримана формула для обчислення об'єму конуса збігається з формулою для обчислення об'єму піраміди.

Міркуючи аналогічно, за допомогою формули (1) можна встановити, що

об'єм зрізаного конуса можна обчислити за формулами

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right),}$$

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),}$$

де** h **— довжина висоти зрізаного конуса,** r_1 **і** r_2 **— радіуси основ,** S_1 **і** S_2 **— площі основ зрізаного конуса;

об'єм циліндра можна обчислити за формулами

$$\boxed{V = \pi r^2 h,}$$

$$\boxed{V = Sh,}$$

де** h **— довжина висоти циліндра,** r **— радіус основи циліндра,** S **— площа основи циліндра;

об'єм кулі можна обчислити за формулою

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3,}$$

де** r **— радіус кулі.

Розглянемо кулю із центром O. Проведемо її діаметр AB. Нехай M — внутрішня точка відрізка AB. Проведемо через точку M площину перпендикулярно до діаметра AB. Ця площина ділить кулю на два тіла, кожне з яких називають **кульовим сегментом** (рис. 19.2).

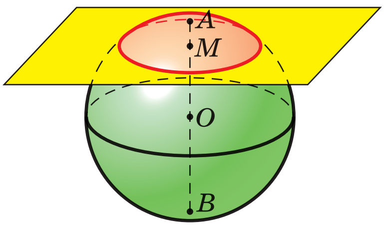


Рис. 19.2

Круг, що утворився в результаті перерізу кулі площиною, називають **основою** кожного з двох сегментів. Довжини відрізків AM і BM називають **висотами** сегментів, а точки A і B — їхніми **вершинами**.

Із курсу алгебри ви знаєте, що коли при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної на проміжку $[a; b]$ функції f, що набуває на цьому проміжку невід'ємних значень, і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, утворюється тіло об'єму V, то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Використовуючи це твердження, також можна вивести всі вищенаведені формули.

Виведемо за допомогою цього твердження формулу для обчислення об'єму кульового сегмента.

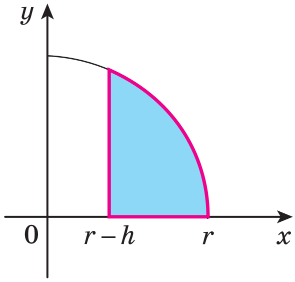


Рис. 19.3

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ на проміжку $[r - h; r]$. Її графіком є дуга кола (рис. 19.3). У результаті обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, пофарбованої на рисунку 19.3 блакитним кольором, утворюється кульовий сегмент заввишки h, який є частиною кулі радіуса r. Тоді об'єм цього кульового сегмента дорівнює:

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_{r-h}^{r} \left(r^2 - x^2\right)dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{r-h}^{r} =$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r - h) + \frac{(r - h)^3}{3} \right).$$

Після перетворень отримуємо формулу для обчислення об'єму кульового сегмента:

$$\boxed{V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right)}$$

Перетнемо кулю двома паралельними площинами. Частину кулі, що міститься між цими площинами, називають **кульовим шаром** (рис. 19.4).

Об'єм кульового шару можна знайти як різницю об'ємів двох кульових сегментів. Наприклад, об'єм кульового шару на рисунку 19.4 дорівнює різниці об'ємів кульових сегментів з висотами AC і AB.

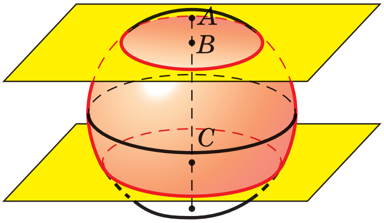


Рис. 19.4

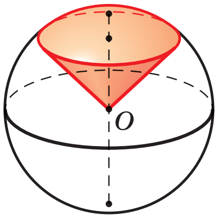


Рис. 19.5

Розглянемо конус із вершиною в центрі кулі та твірною, що дорівнює радіусу кулі (рис. 19.5). Основа цього конуса ділить кулю на два кульових сегменти. Розглянемо сегмент, вершина якого та центр кулі розташовані по різні боки від площини, що містить основу конуса. Об'єднання цього сегмента й конуса називають **кульовим сектором**.

Доведіть самостійно, що об'єм V кульового сектора можна обчислити за формулою

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi r h^2,}$$

де h — висота відповідного кульового сегмента, r — радіус сфери.

Задача 1. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням трикутника ABC навколо прямої AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см, $BC = 4$ см, $\angle A = 30°$.

Розв'язання. З'ясуємо, яка фігура утворюється в результаті обертання даного трикутника навколо прямої AB. На рисунку 19.6 зображено три тіла, які можуть утворитися в результаті обертання трикутника навколо прямої, що містить одну з його сторін.

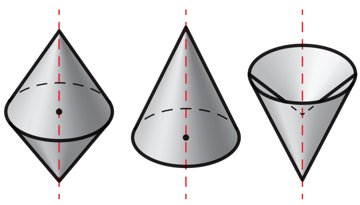


Рис. 19.6

Для того щоб визначити, яке із цих тіл відповідає умові задачі, знайдемо кут B трикутника ABC.

Скористаємося теоремою синусів. Маємо: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$. Звідси $\dfrac{4}{0{,}5} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin B}$. Тоді $\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, можливі два випадки: $\angle B = 60^\circ$ або $\angle B = 120^\circ$.

Якщо $\angle B = 60^\circ$, то в результаті обертання утворюється тіло, зображене на рисунку 19.6, *а*. Воно складається з двох конусів із твірними AC і BC, радіуси основ яких дорівнюють висоті CO трикутника ABC. Висоти цих конусів дорівнюють відрізкам AO і BO.

Із трикутника AOC отримуємо, що $AO = 4\sqrt{3}\cos 30^\circ = 6$ (см), $CO = 4\sqrt{3}\sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$ (см).

Із трикутника BOC отримуємо, що $BO = 4\cos 60^\circ = 2$ (см).

Отже, шуканий об'єм дорівнює:

$$\frac{1}{3}\pi OC^2 \cdot OA + \frac{1}{3}\pi OC^2 \cdot OB = 24\pi + 8\pi = 32\pi \ \text{(см}^3\text{)}.$$

Якщо $\angle B = 120^\circ$, то в результаті обертання утворюється тіло, зображене на рисунку 19.6, *в*. Зрозуміло, що в цьому разі шуканий об'єм дорівнює різниці об'ємів конусів із твірними AC і BC. Отримуємо: $24\pi - 8\pi = 16\pi$ (см³).

Відповідь: 32π см³ або 16π см³. ◄

Задача 2. Два одиничних куби мають спільну точку перетину діагоналей. Доведіть, що об'єм їхньої спільної частини більший за $\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Два даних куби мають спільну вписану кулю. За будь-якого взаємного розміщення кубів їхня спільна частина містить цю кулю. Отже, об'єм спільної частини не менший від об'єму кулі.

Радіус кулі дорівнює $\dfrac{1}{2}$. Її об'єм дорівнює $\dfrac{\pi}{6}$. Залишилося зауважити, що $\dfrac{\pi}{6} > \dfrac{1}{2}$. ◄

1. За якою формулою обчислюють об'єм конуса?
2. За якою формулою обчислюють об'єм зрізаного конуса?
3. За якою формулою обчислюють об'єм циліндра?
4. За якою формулою обчислюють об'єм кулі?
5. За якою формулою обчислюють об'єм кульового сегмента?

6. Як можна обчислити об’єм кульового шару?
7. За якою формулою обчислюють об’єм кульового сектора?

ВПРАВИ

19.1.° Висота циліндра дорівнює H, а осьовий переріз циліндра є квадратом. Знайдіть об’єм циліндра.

19.2.° Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 20 см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть об’єм циліндра.

19.3.° У циліндричну посудину, наповнену водою, занурили металеву деталь. При цьому деталь виявилася повністю покритою водою. Рівень води в посудині піднявся на 14 см, не досягнувши краю посудини. Знайдіть об’єм деталі, якщо внутрішній діаметр посудини дорівнює 20 см.

19.4.° Осьовий переріз конуса є рівностороннім трикутником, а радіус основи конуса дорівнює R. Знайдіть об’єм конуса.

19.5.° Знайдіть об’єм конуса, висота якого дорівнює 4 см, а кут між твірною та площиною основи дорівнює $30°$.

19.6.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а один із кутів — $60°$. Знайдіть об’єм тіла, отриманого в результаті обертання даного трикутника навколо прямої, яка містить катет, прилеглий до даного кута.

19.7.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а один із катетів — 5 см. Знайдіть об’єм тіла, отриманого в результаті обертання цього трикутника навколо прямої, яка містить даний катет.

19.8.° Знайдіть об’єм зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 8 см і 14 см, а кут між його твірною та площиною більшої основи дорівнює $45°$.

19.9.° Знайдіть об’єм зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 1 см і 3 см, а твірна дорівнює $2\sqrt{5}$ см.

19.10.° Доведіть, що об’єми двох куль відносяться як куби їхніх радіусів.

19.11.° Об’єми двох куль відносяться як 8 : 125. Знайдіть відношення їхніх радіусів.

19.12.° Знайдіть об’єм кулі, описаної навколо куба, ребро якого дорівнює a.

19.13.° Знайдіть об'єм кулі, вписаної в куб, ребро якого дорівнює a.

19.14.• Кусок алюмінієвого дроту діаметром 10 мм має масу 16,3 кг. Густина алюмінію дорівнює 2600 кг/м^3. Скільки метрів становить довжина дроту? Відповідь округліть до одиниць.

19.15.• Свинцева труба, товщина стінки якої дорівнює 4 мм, має внутрішній діаметр 32 мм. Густина свинцю дорівнює 11 400 кг/м^3. Скільки кілограмів становить маса труби, якщо її довжина дорівнює 15 м? Відповідь округліть до одиниць.

19.16.• Радіус кулі дорівнює 8 см, а висота її сегмента — 3 см. Знайдіть:

1) об'єм сегмента;
2) об'єм кульового сектора, що відповідає даному сегменту.

19.17.• Об'єм кульового сегмента дорівнює 360π см^3, а його висота — 6 см. Знайдіть:

1) радіус кулі;
2) об'єм кульового сектора, що відповідає даному сегменту.

19.18.• Паралельно осі циліндра проведено переріз, відстань від площини якого до осі циліндра дорівнює 12 см. Діагональ перерізу дорівнює $10\sqrt{5}$ см, а радіус основи циліндра — 13 см. Знайдіть об'єм циліндра.

19.19.• Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює α, $0° < \alpha < 180°$. Діагональ отриманого перерізу утворює з віссю циліндра кут β і віддалена від неї на відстань d. Знайдіть об'єм циліндра.

19.20.• В основі конуса хорда завдовжки a стягує дугу, градусна міра якої дорівнює α, $0° < \alpha < 180°$. Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює β. Знайдіть об'єм конуса.

19.21.• Хорда основи конуса стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $60°$. Відрізок, що сполучає вершину конуса із серединою даної хорди, утворює з площиною основи конуса кут $60°$. Висота конуса дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм конуса.

19.22.• Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α, проведено площину. Кут між цією площиною та площиною основи конуса дорівнює β. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює b.

19.23.• Площина, проведена через дві твірні конуса, перетинає його основи по хорді, яку видно із центра основи конуса під кутом α. Кут між проведеною площиною та площиною основи конуса дорівнює β. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює R.

19.24.$^{\bullet}$ Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання трикутника зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см навколо прямої, яка містить його більшу сторону.

19.25.$^{\bullet}$ Рівнобічну трапецію з основами 1 см і 25 см обертають навколо прямої, що містить її більшу основу. Знайдіть об'єм отриманого тіла, якщо відомо, що в дану трапецію можна вписати коло.

19.26.$^{\bullet}$ Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить гіпотенузу цього трикутника, якщо відомо його катет a та прилеглий до цього катета кут β.

19.27.$^{\bullet}$ Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, градусна міра дуги якого становить $120°$. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 9π см^2.

19.28.$^{\bullet}$ Розгорткою бічної поверхні конуса є півкруг, радіус якого дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм конуса.

19.29.$^{\bullet}$ У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює 3 см. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює 6 см.

19.30.$^{\bullet}$ У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює r. Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між його твірною та площиною основи дорівнює α.

19.31.$^{\bullet}$ Із посудини, що має форму конуса з висотою 8 см і діаметром основи 12 см, наповненої до країв водою, перелили воду в посудину, що має форму циліндра (рис. 19.7). Діаметр основи циліндра дорівнює 8 см. Якою має бути найменша висота циліндричної посудини, щоб вода з неї не виливалася?

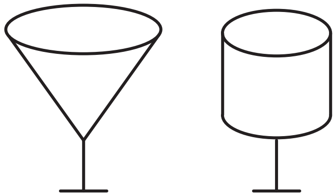


Рис. 19.7

19.32.$^{\bullet}$ Стіг сіна має форму циліндра з конічною верхівкою. Радіус його основи дорівнює 2,5 м, висота всього стогу — 4 м, а висота його циліндричної частини — 2,2 м. Густина сіна дорівнює 30 кг/м^3. Скільки тонн становить маса стогу? Відповідь округліть до десятих.

19.33.$^{\bullet}$ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, $R > r$. Знайдіть відношення об'єму даного зрізаного конуса до об'єму конуса, частиною якого він є.

19.34.• Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 6 см. Твірну зрізаного конуса видно з точки перетину діагоналей його осьового перерізу, який проходить через цю твірну, під кутом 60°. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

19.35.• Радіус однієї з основ зрізаного конуса в 4 рази більший за радіус другої основи. Висота зрізаного конуса дорівнює 8 см, а діагональ його осьового перерізу — 17 см. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

19.36.• Ромб зі стороною 6 см і кутом 60° обертається навколо прямої, яка проходить через вершину гострого кута ромба перпендикулярно до його сторони. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

19.37.• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 10 см. Трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через вершину кута при його основі перпендикулярно до цієї основи. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

19.38.• Металеву кулю радіуса 15 см розплавили й з отриманого металу відлили кілька куль, радіуси яких дорівнюють 3 см. Скільки відлили таких куль? Втратами металу під час переплавки знехтувати.

19.39.• Три металеві кулі, радіуси яких дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, розплавили й з отриманого металу відлили одну кулю. Який радіус отриманої кулі? Втратами металу під час переплавки знехтувати.

19.40.• Висота конуса дорівнює H, а його осьовий переріз є правильним трикутником. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо даного конуса.

19.41.• Твірна конуса дорівнює a, а кут між нею та площиною основи дорівнює α. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо даного конуса.

19.42.• Центр кулі, радіус якої дорівнює 1 см, розташований на ребрі двогранного кута, що дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює об'єму частини даної кулі, що належить двогранному куту.

19.43.• У крузі проведено хорду MN, паралельну діаметру AB. Круговий сегмент, що обмежений хордою MN і не має спільних точок з діаметром AB, обертається навколо прямої AB. Знайдіть об'єм тіла, що утворилося при цьому, якщо $MN = 1$ см.

19.44.• Дві паралельні площини перетинають кулю радіуса 13 см. Радіуси кругів, що утворилися в перерізі, дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть об'єм кульового шару, обмеженого цими кругами.

19.45.•• Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.

19.46.•• Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 2 см і 8 см. Діагональ призми дорівнює $3\sqrt{10}$ см. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в дану призму.

19.47.•• Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.

19.48.•• Одна зі сторін основи трикутної піраміди дорівнює 12 см, а протилежний їй кут основи — $60°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть об'єм конуса, описаного навколо даної піраміди.

19.49.•• Основою піраміди є ромб зі стороною a та кутом α. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду, якщо кут між його твірною та площиною основи піраміди дорівнює β.

19.50.•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $60°$. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.

19.51.•• Твірна зрізаного конуса дорівнює a, а кут між нею та площиною більшої основи дорівнює α. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, якщо діагоналі його осьового перерізу перпендикулярні.

19.52.•• У зрізаний конус вписано кулю, радіус якої дорівнює r. Діаметр більшої основи зрізаного конуса видно із центра вписаної кулі під кутом α. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

19.53.•• Доведіть, що об'єм конуса дорівнює третині добутку його бічної поверхні та відстані від центра основи до твірної.

19.54.•• Сфера із центром у вершині конуса ділить конус на дві рівновеликі частини. Знайдіть об'єм кулі, обмеженої цією сферою, якщо радіус основи конуса дорівнює r, а кут при вершині його осьового перерізу дорівнює α.

19.55.•• У конус вписано кулю радіуса r. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α. Знайдіть об'єм частини конуса, яка розміщена поза кулею та містить вершину конуса.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.56. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O. Через середину відрізка BO проведено пряму, паралельну діагоналі AC. Знайдіть відношення площ фігур, на які ця пряма розбиває квадрат $ABCD$.

19.57. Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета та проходить через вершину протилежного йому гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

20. Площа сфери

Вивчаючи такі тіла обертання, як циліндр і конус, ви дізналися, що поверхню цих тіл можна розгорнути на площину (рис. 6.14, 8.7, 9.7). Площами поверхонь (площами повних поверхонь) циліндра та конуса називають площі їхніх розгорток.

На відміну від циліндра та конуса, сферу (поверхню кулі) неможливо розгорнути на площину, тому площу сфери визначають в інший спосіб.

Розглянемо кулю із центром у точці O радіуса r (рис. 20.1). Уявимо, що на цю кулю нанесли тонкий однорідний шар фарби (рис. 20.2). Позначимо площу сфери через $S_{сф}$, товщину шару фарби — h, а об'єм фарби — V_h. Фарба утворюватиме так звану *атмосферу* кулі завтовшки h. Зрозуміло, що атмосфера кулі завтовшки h складається з усіх точок кулі із центром у точці O і радіусом $r + h$, які не належать даній кулі.

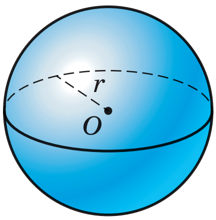


Рис. 20.1

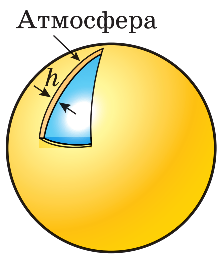


Рис. 20.2

Оскільки фарбу нанесено на кулю однорідним тонким шаром, то природно вважати, що

$$V_h \approx S_{сф} h$$

або

$$S_{сф} \approx \frac{V_h}{h}.$$

Зрозуміло, що чим тонший шар фарби, тим точнішою є записана наближена рівність.

На підставі цієї рівності введемо означення площі поверхні кулі.

Означення. Площею поверхні кулі називають границю відношення $\frac{V_h}{h}$ при h, що прямує до нуля, де V_h — об'єм атмосфери кулі завтовшки h.

Теорема 20.1. ***Площа сфери радіуса r дорівнює:***

$$\boxed{S_{\text{сф}} = 4\pi r^2}$$

Доведення. Розглянемо кулю радіуса r (рис. 20.1). Знайдемо об'єм V_h атмосфери кулі завтовшки h (рис. 20.2):

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - r^3\right).$$

Застосовуючи формулу різниці кубів двох виразів, отримуємо:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi h\left((r+h)^2 + (r+h)r + r^2\right).$$

Далі запишемо:

$$S_{\text{сф}} = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi\left((r+h)^2 + (r+h)r + r^2\right) = \frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2 = 4\pi r^2. \blacktriangleleft$$

Скориставшись описаним методом, доведіть самостійно, що площу S сферичної частини поверхні кульового сегмента можна обчислити за формулою

$$\boxed{S = 2\pi rh,}$$

де r — радіус сфери, h — висота сегмента.

?

1. Що називають площею поверхні кулі?
2. За якою формулою обчислюють площу сфери?

ВПРАВИ

20.1.° Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

20.2.° Площа великого круга кулі дорівнює S. Знайдіть площу поверхні даної кулі.

20.3.° Площина, віддалена від центра сфери на 7 см, перетинає сферу по лінії, довжина якої дорівнює 6π см. Знайдіть площу сфери.

20.4.° Площа перерізу кулі площиною, віддаленою від її центра на 4 см, дорівнює 24π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

20.5.• Скільки метрів тканини завширшки 1 м знадобиться для виготовлення повітряної кулі, радіус якої дорівнює 2 м, якщо на з'єднання деталей кулі та відходи витрачається 10 % тканини? Відповідь округліть до десятих.

20.6.• У якому випадку витрачається більше сировини: для нікелювання однієї кулі діаметром 6 см або для нікелювання 8 куль діаметром 1 см кожна?

20.7.• Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по один бік від її центра, дорівнюють 400π см^2 і 49π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 9 см.

20.8.• Два перерізи кулі мають тільки одну спільну точку, а їхні площини перпендикулярні. Радіус одного перерізу дорівнює 5 см, а радіус другого — 12 см. Знайдіть площу поверхні кулі.

20.9.• Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по різні боки від її центра, дорівнюють 9π см^2 і 25π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 8 см.

20.10.• Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в куб, до площі сфери, описаної навколо даного куба.

20.11.• Знайдіть площу сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

20.12.• Осьовим перерізом циліндра є квадрат. Площа повної поверхні циліндра дорівнює S. Знайдіть площу сфери, описаної навколо даного циліндра.

20.13.• Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення площі сфери, вписаної в даний конус, до площі сфери, описаної навколо нього.

20.14.•• Гіпотенуза та катети прямокутного трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють S_1 і S_2.

20.15.•• Один із кутів трикутника дорівнює $120°$. Сторони трикутника є діаметрами трьох куль. Знайдіть площу поверхні більшої кулі, якщо площі поверхонь менших куль дорівнюють S_1 і S_2.

20.16.•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього кутом α. Бічні ребра піраміди утворюють із площиною її основи кут β. Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо даної піраміди.

20.17.•• Висота правильної трикутної піраміди дорівнює H, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в дану піраміду.

20.18.•• На висоті конуса як на діаметрі побудовано сферу. Площа поверхні частини сфери, що міститься всередині конуса, дорівнює площі частини поверхні конуса, що розташована всередині сфери. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.

20.19.•• На висоті конуса як на діаметрі побудовано сферу. Площа частини поверхні сфери, що розташована поза конусом, дорівнює площі основи конуса. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.

20.20.•• Доведіть, що відношення об'ємів зрізаного конуса та вписаної в нього кулі дорівнює відношенню повної поверхні зрізаного конуса до поверхні кулі.

20.21.•• Навколо кулі радіуса 1 см описано конус, висота якого дорівнює 4 см. Знайдіть відношення повної поверхні конуса до площі поверхні кулі.

20.22.* Банківське сховище має форму круга радіуса $R = 2$ м і охороняється системою лазерних датчиків. Кожен датчик забезпечує охорону вздовж деякої хорди кола. Яку найменшу кількість датчиків треба встановити, щоб гарантовано зафіксувати грабіжника (круг радіуса $r = 15$ см), якщо він знаходиться десь у сховищі?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.23. У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Кут A в 3 рази більший за кут C, а кут B у 5 разів менший від кута A. Знайдіть кут D.

20.24. Відрізок BM — медіана трикутника ABC. Відомо, що $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$. Знайдіть сторону AB.

ОЗНАЧЕННЯ МІНКОВСЬКОГО

Вивчаючи стереометрію, ви, можливо, звернули увагу, що в підручнику наявні два різних підходи до поняття площі поверхні тіла. Так, площі поверхонь циліндра та конуса визначено як площі їхніх розгорток на площину. Аналогічно, за суттю, визначено й площу поверхні довільного многогранника. Справді, якщо поверхню многогранника розрізати по всіх ребрах і утворені при цьому многокутники (грані многогранника) розкласти на площині без перетинів, то буде отримано розгортку многогранника на площину. Зрозуміло, що площа поверхні многогранника дорівнює площі його розгортки.

На жаль, ідея використати розгортку для обчислення площі поверхні тіла є неприйнятною в загальному випадку. Наприклад, сферу неможливо розгорнути на площину, тому площу сфери визначають інакше. Виявляється, означення площі сфери можна розвинути й узагальнити для довільних поверхонь у просторі.

Нагадаємо, що, даючи означення площі сфери, ми розглядали атмосферу — множину точок, які розташовані поза сферою та віддалені від неї на відстань, що не перевищує h.

У разі довільної поверхні використовують так званий обкутуючий шар.

Означення. Обкутуючим шаром завтовшки h поверхні Ф називають множину точок, які розташовані від поверхні Ф на відстані, не більшій ніж h.

Точки обкутуючого шару, на відміну від атмосфери, розміщені з обох боків поверхні. Такий підхід дає змогу не перейматися тим, з якого боку поверхні розміщено точки обкутуючого шару.

Наприклад, обкутуючим шаром завтовшки h сфери радіуса r, де $h < r$, із центром O буде множина точок кулі радіуса $r + h$ із центром O, які не лежать усередині кулі радіуса $r - h$ із тим самим центром (рис. 20.3).

Позначимо $S_Ф$ — площу поверхні Ф, V_h — об'єм обкутуючого шару завтовшки h поверхні Ф. Оскільки точки обкутуючого шару розміщено з обох боків поверхні Ф, то має місце наближена рівність

$$S_Ф \approx \frac{V_h}{2h}.$$

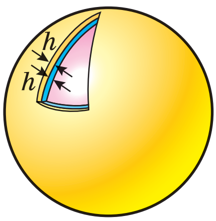


Рис. 20.3

Зрозуміло, що чим меншою є величина h, тим точнішою є записана наближена рівність.

Спираючись на цю рівність, уведемо означення площі поверхні.

Означення. Площею поверхні Ф називають границю відношення $\frac{V_h}{2h}$ при h, що прямує до нуля, де V_h — об'єм обкутуючого шару завтовшки h цієї поверхні, тобто

$$S_Ф = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

Це означення запропонував один із видатних математиків свого часу — Герман Мінковський.

Покажемо, що означення Мінковського узгоджується з раніше введеним означенням площі сфери.

Справді, розглянемо сферу радіуса r та її обкутуючий шар завтовшки h. Тоді об'єм V_h цього обкутуючого шару дорівнюватиме різниці об'ємів куль з радіусами $r+h$ і $r-h$. Маємо:

$$V_h = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3 = \frac{4}{3}\pi\left((r+h)^3-(r-h)^3\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(6r^2h+2h^3\right) = \frac{8}{3}\pi h\left(3r^2+h^2\right).$$

Тому згідно з означенням Мінковського площа сфери дорівнює:

$$S_\Phi = \lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\cdot\frac{8}{3}\pi h\left(3r^2+h^2\right) = \lim_{h\to 0}\frac{4}{3}\pi\left(3r^2+h^2\right) = 4\pi r^2,$$

що збігається з отриманою раніше формулою площі сфери.

Розглядаючи обкутуючі шари поверхонь відомих вам тіл, наприклад циліндра, конуса, многогранників, ви самостійно можете перевірити, що означення Мінковського узгоджується також з означеннями площ поверхонь цих тіл.

Знайдемо, користуючись означенням Мінковського, площу поверхні тіла, яке за формою нагадує «бублик» або «рятівний круг» (рис. 20.4). У геометрії це тіло називають *тором*. Це тіло отримують у результаті обертання круга навколо прямої, яка лежить у площині цього круга та його не перетинає (рис. 20.5). Під час такого обертання центр круга описує коло, яке називають *осьовим колом тора* (червона лінія на рисунку 20.5).

Герман Мінковський
(1864–1909)

Народився в Алексотах (нині Каунаський район Литви). Викладав у Боннському, Кенігсберзькому, Цюріхському, Ґеттинґенському університетах. Основні здобутки — у теорії чисел, геометрії та математичній фізиці. Був одним з основоположників сучасної геометричної теорії чисел. У 1896 р. встановив деякі важливі властивості багатовимірних опуклих многогранників і тим самим започаткував важливий розділ геометрії — теорію опуклих тіл.

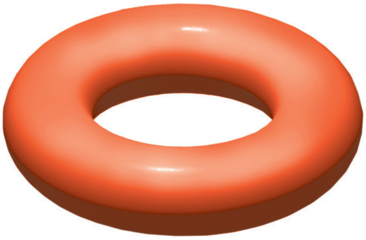


Рис. 20.4

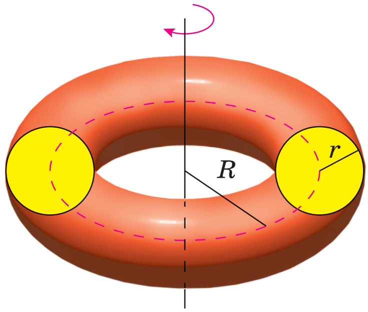


Рис. 20.5

Використовуючи формулу для обчислення об'єму тіла обертання, вивчену в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу, можна довести, що об'єм тора обчислюють за формулою

$$V_{\text{тора}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

де r — радіус круга, R — радіус осьового кола тора (див. рис. 20.5).

Перейдемо до обчислення площі поверхні тора. Розглянемо тор, утворений обертанням круга радіуса r, з осьовим колом радіуса R. Об'єм V_h його обкутуючого шару завтовшки h дорівнює різниці об'ємів торів, утворених обертанням кругів радіусів $r+h$ і $r-h$, зі спільним осьовим колом радіуса R (рис. 20.6).

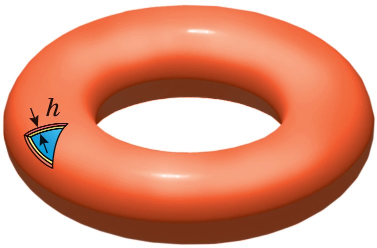


Рис. 20.6

Маємо:

$$V_h = 2\pi^2 (r+h)^2 R - 2\pi^2 (r-h)^2 R =$$

$$= 2\pi^2 R\left((r+h)^2 - (r-h)^2\right) = 8\pi^2 Rrh.$$

Тому площа поверхні тора дорівнює:

$$S_{\text{тора}} = \lim_{h\to 0} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{8\pi^2 Rrh}{2h} = 4\pi^2 rR.$$

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Об'єм тіла

Об'ємом тіла називають додатну величину, яка має такі властивості:

1) рівні тіла мають рівні об'єми;
2) якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл;
3) за одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.

Об'єм призми

$V = Sh$, де S — площа основи призми, h — довжина висоти призми.

Об'єм піраміди

$V = \frac{1}{3}Sh$, де S — площа основи піраміди, h — довжина висоти піраміди.

Об'єм зрізаної піраміди

$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$, де h — довжина висоти зрізаної піраміди, S_1 і S_2 — площі основ.

Об'єм конуса

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, де r — радіус основи конуса, h — довжина висоти конуса.

Об'єм зрізаного конуса

$V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$, де h — довжина висоти зрізаного конуса, r_1 і r_2 — радіуси основ.

Об'єм циліндра

$V = \pi r^2 h$, де r — радіус основи циліндра, h — довжина висоти циліндра.

Об'єм кулі

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, де r — радіус кулі.

Площа сфери

$S = 4\pi r^2$, де r — радіус сфери.

§ 4. ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

21. Вправи для повторення курсу планіметрії

1. Трикутники

21.1. Висота рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону на відрізки завдовжки 1 см і 12 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу даного трикутника.

21.2. Висота AD трикутника ABC ділить сторону BC на відрізки BD і CD так, що $BD = 15$ см, $CD = 5$ см. Знайдіть сторону AC, якщо $\angle B = 30°$.

21.3. Із точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої, якщо одна з похилих на 2 см більша за другу.

21.4. Знайдіть площу трикутника ABC, зображеного на рисунку 21.1.

21.5. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

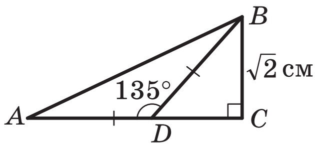


Рис. 21.1

21.6. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 100 см, а висота, опущена на основу, — 30 см. Знайдіть площу трикутника.

21.7. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Серединний перпендикуляр відрізка AB перетинає його в точці M, а сторону BC — у точці K. Доведіть, що $MK = \frac{1}{3}BC$.

21.8. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 15°. Доведіть, що висота трикутника, проведена до його гіпотенузи, у 4 рази менша від гіпотенузи.

21.9. У прямокутному трикутнику MNK на гіпотенузу MK опущено висоту NF. Площа трикутника MNF дорівнює 2 см^2, а площа трикутника KNF — 32 см^2. Знайдіть гіпотенузу трикутника MNK.

21.10. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) відрізок CD — висота. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і DCB, відповідно дорівнюють r_1 і r_2. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

21.11. На стороні BC трикутника ABC позначили точку K так, що $\angle CAK = \angle ABC$, $BK = 12$ см, $KC = 4$ см. Знайдіть сторону AC.

21.12. На стороні AC трикутника ABC позначили точку D так, що $\angle ABD = \angle ACB$. Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 18$ см.

21.13. У трикутник ABC вписано ромб $CDEF$ так, як показано на рисунку 21.2. Знайдіть сторону BC трикутника, якщо $AC = 15$ см, а сторона ромба дорівнює 10 см.

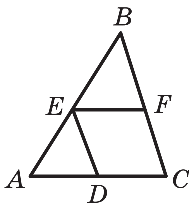


Рис. 21.2

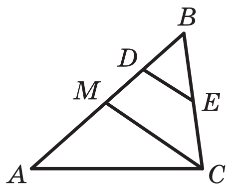


Рис. 21.3

21.14. Точка M — середина сторони AB трикутника ABC, точка K — середина сторони AC. Площа трикутника AMK дорівнює 12 см^2. Чому дорівнює площа чотирикутника $BMKC$?

21.15. Точка D — середина сторони AB трикутника ABC, точка E — середина сторони BC. Площа чотирикутника $ADEC$ дорівнює 27 см^2. Чому дорівнює площа трикутника ABC?

21.16. Відрізок CM — медіана трикутника ABC, зображеного на рисунку 21.3, відрізок DE — середня лінія трикутника MBC. Чому дорівнює площа чотирикутника $MDEC$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 48 см^2?

21.17. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторону AB у точці M, а сторону BC — у точці K. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BM = 3$ см, $AM = 4$ см, а площа чотирикутника $AMKC$ дорівнює 80 см^2.

21.18. Площа трикутника ABC дорівнює 18 см^2. На стороні AB позначили точки K і D так, що $AK = KD = DB$, а на стороні AC — точки F і E так, що $AF = FE = EC$. Знайдіть площу чотирикутника $DEFK$.

21.19. Площа трикутника ABC дорівнює 24 см^2. На стороні AB позначили точки D і F так, що $AD = BF = \frac{1}{4}AB$, а на стороні BC — точки P і M так, що $CM = BP = \frac{1}{4}BC$. Знайдіть площу чотирикутника $DFPM$.

21.20. Відрізок AB є діаметром кола, а точка C лежить поза цим колом. Відрізки AC і BC перетинаються з колом у точках D і M відповідно. Знайдіть кут ACB, якщо площі трикутників DCM і ACB відносяться як 1 : 4.

21.21. Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторони AB і BC у точках M і F відповідно. Знайдіть відношення площ трикутників MFB і ABC, якщо $\angle ABC = 45^\circ$.

21.22. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює піврізниці катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

21.23. Сума радіусів вписаного та описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює одному з катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

21.24. Доведіть, що площу S прямокутного трикутника можна знайти за формулою $S = p(p - c)$, де p — півпериметр трикутника, c — довжина гіпотенузи.

21.25. Доведіть, що площу S прямокутного трикутника можна знайти за формулою $S = (p - a)(p - b)$, де p — півпериметр трикутника, a і b — довжини катетів.

21.26. Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета й проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

21.27. У трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB у точці E. Через точку E проведено дотичну до цього кола, яка перетинає катет BC у точці D. Доведіть, що $DE = DB$.

21.28. Дотична в точці A до кола, описаного навколо трикутника ABC, перетинає пряму BC у точці D, відрізок AE — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $AD = DE$.

21.29. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, — $4\sqrt{91}$ см. Знайдіть відстань між точками перетину бісектрис кутів при основі трикутника з його бічними сторонами.

21.30. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до неї, — 15 см. Знайдіть відстань між точками дотику кола, вписаного в трикутник, до бічних сторін трикутника.

21.31. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 15 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 24 см. Знайдіть площу цього трикутника.

21.32. У трикутнику ABC відрізок AK (точка K належить стороні BC) ділить медіану BM у відношенні 3 : 4, рахуючи від вершини B. У якому відношенні точка K ділить сторону BC?

21.33. У трикутнику ABC медіана BM ділить відрізок AK (точка K належить стороні BC) у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини A. У якому відношенні точка K ділить сторону BC?

21.34. На стороні BC трикутника ABC позначили точку M так, що $BM : MC = 3 : 10$. У якому відношенні відрізок AM ділить медіану BK трикутника ABC?

21.35. На стороні AB трикутника ABC позначили точку M так, що $AM : MB = 4 : 3$. У якому відношенні медіана BK трикутника ABC ділить відрізок CM?

21.36. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 24$ см, $BC = 20$ см, відрізок AD на 3 см більший за відрізок CD. Знайдіть сторону AC.

21.37. У трикутнику ABC відрізок BK — висота, відрізок AM — бісектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. Із точки M опущено перпендикуляр MD на сторону AC. Знайдіть відрізок MD.

21.38. Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$), дорівнює 12 см, а відстань від центра цього кола до вершини B — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

21.39. У трикутнику ABC точка D — основа бісектриси, проведеної з вершини C, $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{CD}$. Доведіть, що $\angle ACB = 120°$.

21.40. Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 8 : 9, рахуючи від вершини кута при основі трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

21.41. На стороні AC трикутника ABC позначено точку M. Кола, вписані в трикутники ABM і MBC, дотикаються. Доведіть, що $AB + MC = AM + BC$.

21.42. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.

21.43. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут при вершині дорівнює $108°$. У цьому трикутнику проведено бісектриси AA_1 і BB_1. Доведіть, що $AA_1 = 2BB_1$.

21.44. Одна зі сторін трикутника дорівнює 25 см, а друга сторона ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки завдовжки 22 см і 8 см, рахуючи від кінця першої сторони. Знайдіть радіус вписаного кола.

21.45. Радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює $\frac{1}{3}$ однієї з його висот. Доведіть, що довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію.

21.46. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні 2 : 3. Знайдіть сторони трикутника, якщо центр вписаного кола віддалений від вершини прямого кута на відстань $\sqrt{8}$ см.

21.47. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить один із катетів у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини прямого кута. Відстань від центра вписаного кола до вершини прямого кута дорівнює $\sqrt{18}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

21.48. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60°$.

21.49. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку C позначили точку D так, що $\angle ADB = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABD, якщо $\angle ACB = 45°$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює $8\sqrt{2}$ см.

21.50. Точка M належить стороні BC трикутника ABC. Доведіть, що відношення радіусів кіл, описаних навколо трикутників AMB і MAC, не залежить від вибору точки M на стороні BC.

21.51. Доведіть, що коло, яке проходить через ортоцентр трикутника та дві його вершини, дорівнює колу, описаному навколо трикутника.

21.52. Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Пряма, що містить висоту, проведену з вершини C, у другий раз перетинає описане коло трикутника в точці K. Доведіть, що сторона AB перетинає відрізок HK у його середині.

21.53. Сторони трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Медіана трикутника, проведена до його третьої сторони, дорівнює $\sqrt{46}$ см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

21.54. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 9 см і 13 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його найбільшої сторони.

21.55. Медіана CM трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CM.

21.56. На медіані BD трикутника ABC позначили точку M так, що $BM : MD = 3 : 1$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо площа трикутника AMD дорівнює 3 см^2.

21.57. Площа трикутника ABC дорівнює 40 см^2. На медіані AM позначили точку P таку, що $AP : PM = 2 : 3$. Знайдіть площу трикутника BPM.

21.58. Усередині трикутника ABC вибрано точку M так, що площі трикутників AMB, BMC, AMC рівні. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC.

21.59. На відрізку, що сполучає середини основ трапеції, позначили точку та сполучили її зі всіма вершинами трапеції. Доведіть, що трикутники, прилеглі до бічних сторін трапеції, є рівновеликими.

21.60. Точки M, N, P належать сторонам AB, BC, CA трикутника ABC відповідно. Відомо, що $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 3$. Площа трикутника MNP дорівнює S. Знайдіть площу трикутника ABC.

21.61. Два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розташовані так, що точка B — середина відрізка AB_1, точка C — середина відрізка BC_1, точка A — середина відрізка CA_1. Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

21.62. Два паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ розташовані так, що точка B — середина відрізка AB_1, точка C — середина відрізка BC_1, точка D — середина відрізка CD_1, точка A — середина відрізка DA_1. Знайдіть площу паралелограма $A_1B_1C_1D_1$, якщо площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S.

21.63. У трикутник ABC вписано коло. Дотична до цього кола перетинає сторони AB і BC у точках K і L відповідно. Периметр трикутника KBL дорівнює 10 см. Знайдіть сторону AC, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 24 см.

21.64. У трикутник ABC, периметр якого дорівнює 30 см, вписано коло. Дотична до цього кола перетинає сторони AB і BC у точках K і L відповідно. Знайдіть периметр трикутника KBL, якщо $AC = 12$ см.

21.65. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і CC_1. Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Доведіть, що відрізки BO і A_1C_1 перпендикулярні.

21.66. Через вершини A і C трикутника ABC проведено коло, що перетинає сторони BA і BC у точках M і N відповідно. Пряма BF — дотична до кола, описаного навколо трикутника ABC. Доведіть, що прямі MN і BF паралельні.

2. Чотирикутники. Правильні многокутники

21.67. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні $3:7$, рахуючи від вершини гострого кута, який дорівнює $45°$. Обчисліть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 52 см.

21.68. Бісектриса кута D прямокутника $ABCD$ перетинає сторону AB у точці M, $BM = 5$ см, $AD = 3$ см. Знайдіть периметр прямокутника.

21.69. Через середину діагоналі BD прямокутника $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD прямокутника в точках M і K відповідно, $BD = 10$ см, $BM = 6$ см, $MC = 2$ см. Обчисліть площу чотирикутника $AMCK$.

21.70. У трикутнику ABC проведено медіану AA_1. Через точку C проведено відрізок FN, рівний відрізку AA_1 і паралельний йому. Знайдіть площу чотирикутника $AFNA_1$, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

21.71. Через точку перетину медіан трикутника ABC проведено відрізок EF паралельно стороні AB. Знайдіть площу чотирикутника $ABFE$, якщо $AB = EF$, а площа трикутника ABC дорівнює S.

21.72. Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC та утворює з нею кут, рівний куту між діагоналями. Знайдіть цей кут.

21.73. Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

21.74. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює a, а один із кутів — $60°$. Знайдіть площу трапеції.

21.75. Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 16 см, а гострий кут — $30°$. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

21.76. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює R, а один із кутів трапеції — $45°$. Знайдіть площу трапеції.

21.77. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см і 17 см, а діагональ ділить її тупий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.

21.78. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 15 см і 33 см, а діагональ ділить її гострий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.

21.79. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 10 см і 8 см.

Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні трапеції.

21.80. Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 20 см і 12 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

21.81. Менша діагональ прямокутної трапеції ділить її тупий кут навпіл, а більшу діагональ — у відношенні 5 : 2, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює 12 см.

21.82. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть площу трапеції.

21.83. Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.

21.84. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 25 см. Обчисліть периметр трапеції.

21.85. Доведіть, що площа прямокутної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку її основ.

21.86. Доведіть, що радіус r кола, вписаного в прямокутну трапецію, можна обчислити за формулою $r = \frac{ab}{a+b}$, де a і b — довжини основ трапеції.

21.87. В опуклий чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло. Доведіть, що кола, вписані в трикутники ABC і ADC, дотикаються.

21.88. Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

21.89. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони й утворює з основою трапеції кут 30°. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює R.

21.90. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює a.

21.91. Бічні сторони та менша основа рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см, а один з її кутів дорівнює 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

21.92. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а діагональ — 17 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

21.93. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 36 см, а бічні сторони — 13 см і 20 см. Знайдіть площу даної трапеції.

21.94. Трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана в коло. Точка O — центр цього кола. Знайдіть площу трапеції, якщо $AC = d$ і $\angle COD = 30°$.

21.95. Коло, побудоване на більшій основі трапеції як на діаметрі, дотикається до меншої основи, перетинає бічні сторони й ділить їх навпіл. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо радіус кола дорівнює R.

21.96. У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції, якщо $AC = 17$ см, а висота трапеції дорівнює 8 см.

21.97. Діагоналі опуклого чотирикутника перпендикулярні. Доведіть, що відрізки, що сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, є рівними.

21.98. В опуклому чотирикутнику відрізки, що сполучають середини протилежних сторін, є рівними. Доведіть, що діагоналі чотирикутника перпендикулярні.

21.99. Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють a і b. Відрізки, що сполучають середини протилежних сторін, є рівними. Знайдіть площу чотирикутника.

21.100. Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло та $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

21.101. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою кута BCD. Відомо, що $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $CD = 18$ см, $DA = 8$ см. Знайдіть кут ADC.

21.102. Із точки M, яка рухається по колу, опускають перпендикуляри на фіксовані діаметри AB і DC. Доведіть, що довжина відрізка, який сполучає основи перпендикулярів, не залежить від положення точки M.

21.103. Усередині кута AOB позначили точку M, проекціями якої на прямі OA і OB є точки M_1 і M_2. Доведіть, що $M_1M_2 \leqslant OM$.

21.104. На стороні AC гострокутного трикутника ABC знайдіть таку точку, щоб відстань між її проекціями на дві інші сторони була найменшою.

21.105. Навколо трикутника ABC описано коло. Із довільної точки M кола проведено перпендикуляри MN і MK до прямих AB

і AC відповідно. Знайдіть положення точки M, для якого довжина відрізка NK є найбільшою.

21.106. У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 і CC_1. Відомо, що $\angle AA_1C = \angle CC_1A$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

21.107. На катеті BC прямокутного трикутника ABC позначили довільну точку M. Із точки M опустили перпендикуляр MN на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle ANC = \angle AMC$.

21.108. У трикутнику ABC бісектриси AA_1 і CC_1 перетинаються в точці O, $\angle AOC = 120°$. Доведіть, що $\angle C_1BO = \angle C_1A_1O$.

21.109. У трикутнику ABC бісектриси AA_1 і CC_1 перетинаються в точці O, $\angle ABC = 60°$. Доведіть, що $\angle C_1OB = \angle C_1A_1B$.

21.110. Як відноситься сторона правильного трикутника, вписаного в коло, до сторони правильного трикутника, описаного навколо цього кола?

21.111. Як відноситься сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, до сторони правильного шестикутника, описаного навколо цього кола?

21.112. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною квадрата, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по різні боки від хорди.

21.113. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною правильного шестикутника, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює a. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по один бік від хорди.

21.114. Діагональ опуклого чотирикутника ділить навпіл відрізок, який сполучає середини двох його протилежних сторін. Доведіть, що ця діагональ ділить чотирикутник на два рівновеликих трикутники.

21.115. Діагональ опуклого чотирикутника ділить його на два рівновеликих трикутники. Доведіть, що ця діагональ ділить навпіл відрізок, який сполучає середини двох протилежних сторін чотирикутника.

21.116. На сторонах CD і AD паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки M і N так, що $CM : MD = 1 : 1$ і $AN : ND = 1 : 2$. Відрізки BM і CN перетинаються в точці K. Знайдіть відношення $BK : KM$.

21.117. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що $S_{BCO} = 1$ см², $S_{AOD} = 9$ см², $S_{ABCD} \leqslant 16$ см². Знайдіть площі трикутників ABO і COD.

3. Коло та круг

21.118. Знайдіть градусну міру дуги кола, довжина якої дорівнює π см, якщо радіус кола дорівнює 12 см.

21.119. Довжина дуги кола дорівнює 2π см, а її градусна міра — $60°$. Знайдіть радіус кола.

21.120. У колі проведено хорди AK і BM, які перетинаються в точці C. Знайдіть відрізок KM, якщо $AB = 4$ см, $BC = 2$ см, $KC = 8$ см.

21.121. Відрізок AB — діаметр кола, $AB = 24$ см. Точка A віддалена від дотичної до цього кола на 4 см. Знайдіть відстань від точки B до цієї дотичної.

21.122. Два кола, відстань між центрами яких дорівнює 17 см, мають зовнішній дотик. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо відстань між точками дотику кіл до їхньої спільної зовнішньої дотичної дорівнює 15 см.

21.123. У кут, величина якого становить $60°$, вписано два кола, які мають зовнішній дотик одне до одного. Знайдіть радіус більшого з них, якщо радіус меншого дорівнює 6 см.

21.124. Два кола із центрами O_1 і O_2 мають зовнішній дотик у точці C. Пряма, яка проходить через точку C, перетинає коло із центром O_1 у точці A, а коло із центром O_2 — у точці B. Хорда AC дорівнює 12 см, а хорда BC — 18 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо $O_1O_2 = 20$ см.

21.125. Два кола мають зовнішній дотик у точці A, точки B і C — точки дотику до цих кіл їхньої спільної дотичної. Доведіть, що кут BAC прямий.

21.126. Два кола перетинаються в точках A і B. Проведено діаметри AD і AC цих кіл. Доведіть, що точки B, C і D лежать на одній прямій. (Розгляньте випадки розташування центрів кіл в одній та в різних півплощинах відносно прямої AB.)

21.127. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку B проведено січну, яка перетинає кола в точках C і D. Доведіть, що величина кута CAD є сталою для будь-якої січної, що проходить через точку B. (Розгляньте випадки розташування точок C і D в одній та в різних півплощинах відносно прямої AB.)

21.128. До двох кіл, які перетинаються в точках M і K, проведено спільну дотичну, A і B — точки дотику. Доведіть, що $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

21.129. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку B проведено пряму, яка перетинає кола в точках C і D. У точках C і D до даних кіл проведено дотичні, які перетинаються в точці P. Доведіть, що $\angle DAC + \angle DPC = 180°$.

21.130. У колі проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD, які перетинаються в точці M. Доведіть, що пряма, яка містить висоту MK трикутника DMB, також містить медіану трикутника CMA.

21.131. На одній зі сторін кута з вершиною в точці M вибрано точки A і B, а на другій стороні — точки C і D так, що $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D належать одному колу.

21.132. Відомо, що M — точка перетину відрізків AB і CD, $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D належать одному колу.

21.133. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку P, що належить відрізку AB, проведено хорду KM першого кола та хорду LN другого кола. Доведіть, що точки K, L, M, N лежать на одному колі.

21.134. Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку P, що належить прямій AB (але не відрізку AB), проведено дві прямі, які перетинають перше коло в точках K і L, а друге — у точках M і N. Доведіть, що точки K, L, M, N лежать на одному колі.

21.135. У колі, радіус якого дорівнює R, проведено дві хорди AB і CD, які перетинаються під прямим кутом. Доведіть, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

21.136. На діаметрі AB кола із центром O позначили точки M і N так, що $MO = ON$. Нехай X — довільна точка даного кола. Доведіть, що сума $XM^2 + XN^2$ не залежить від вибору точки X.

21.137. Дано два концентричних кола. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра другого кола не залежить ні від вибраної точки, ні від вибраного діаметра.

4. Декартові координати на площині

21.138. Вершинами трикутника є точки $A(-3;\ 1)$, $B(2;\ -2)$ і $C(-4;\ 6)$. Знайдіть медіану AM трикутника ABC.

21.139. Точки $B(4;\ 1)$, $C(-1;\ 1)$ і $D(-2;\ -2)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини A.

21.140. Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок $C(3;\ 2)$ і $D(1;\ -6)$.

21.141. Знайдіть координати точки, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точок $A(-1;\ 5)$ і $B(7;\ -3)$.

21.142. Коло задано рівнянням $(x+4)^2+(y-1)^2=12$. Як розташована точка $A(-2;\ 3)$ відносно цього кола?

21.143. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок MK, якщо $M(-3;\ 4)$, $K\ (5;\ 10)$.

21.144. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;\ 4)$ і $B(-3;\ -2)$.

21.145. Відрізок AM — медіана трикутника з вершинами в точках $A\ (-4;-2)$, $B\,(5;3)$ і $C(-3;\ -7)$. Складіть рівняння прямої AM.

21.146. Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри кіл $(x-1)^2+(y-6)^2=3$ і $(x+1)^2+y^2=7$.

21.147. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\,(\sqrt{3};5)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $60°$.

21.148. Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 21.4.

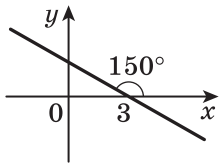


Рис. 21.4

21.149. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(2;\ -5)$ і паралельна прямій $y=-0{,}5x+9$.

21.150. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1;\ 5)$, $B(4;\ 6)$, $C(3;\ 1)$, $D(-2;\ 0)$ є ромбом.

21.151. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2;\ -2)$, $B(1;\ 2)$, $C(-3;\ 1)$, $D(-2;\ -3)$ є прямокутником.

21.152. Дано точки $A(-2;\ 1)$ і $B(2;\ -3)$. Знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає відрізок AB у точці N такій, що $AN : NB = 3 : 1$.

5. Вектори

21.153. Знайдіть координати суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 21.5.

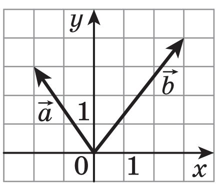


Рис. 21.5

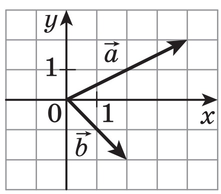


Рис. 21.6

21.154. Знайдіть координати різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 21.6.

21.155. Дано вектори $\vec{a}\,(3;\ -1)$ і $\vec{b}\,(1;\ -2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, якщо $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

21.156. Відомо, що $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Знайдіть $|\vec{c}|$, якщо $\vec{a}(-1;1)$, $\vec{b}(-2;3)$.

21.157. Обчисліть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

21.158. Дано точки $M(4;\ -2)$, $N\,(1;\ 1)$ і $P(3;\ 3)$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MP}$.

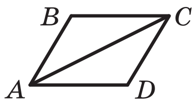


Рис. 21.7

21.159. На рисунку 21.7 зображено ромб $ABCD$, у якому $AB = 2$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

21.160. Сторона правильного шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 1. Обчисліть скалярний добуток:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$.

21.161. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}\,(-1;\ -1)$ і $\vec{b}\,(2;\ 0)$.

21.162. На стороні CD паралелограма $ABCD$ позначили точку M так, що $CM : MD = 2 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

21.163. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки E і F так, що $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.164. На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки M і K так, що $AM : MB = 1 : 2$, $BK : KC = 2 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{KM}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

21.165. На стороні BC і діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки K і F відповідно так, що $BK : BC = 5 : 6$, $AF : AC = 6 : 7$. Доведіть, що точки D, F і K лежать на одній прямій.

21.166. Точки M і N — середини діагоналей AC і BD опуклого чотирикутника $ABCD$ $(AD > BC)$. Відомо, що $MN = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$. Доведіть, що даний чотирикутник є трапецією.

6. Геометричні перетворення

21.167. Скільки існує паралельних перенесень, при яких образом прямої є:

1) сама ця пряма; 2) паралельна їй пряма?

21.168. Запишіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2 + y^2 = 4$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(2; -3)$.

21.169. Укажіть рух, при якому образом чотирикутника $ABCD$, зображеного на рисунку 21.8, є чотирикутник $MNKP$.

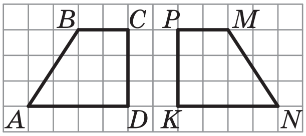


Рис. 21.8

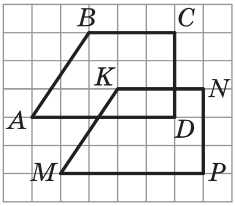


Рис. 21.9

21.170. Укажіть рух, при якому образом чотирикутника $ABCD$, зображеного на рисунку 21.9, є чотирикутник $MKNP$.

21.171. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ образом точки $A(-3; 7)$ є точка $B(2; 3)$. Які координати має образ точки $C(1; -5)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$?

21.172. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ образом точки $A(-5; 6)$ є точка $B(2; -1)$. Які координати має прообраз точки $D(10; -3)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$?

21.173. Які координати має образ точки $A(-4; 6)$ при симетрії відносно початку координат?

21.174. Які координати має точка, симетрична точці $A(2; -4)$ відносно точки $M(3; -1)$?

21.175. Які координати має образ точки $A(-2; 5)$ при симетрії відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат?

21.176. Скільки осей симетрії має прямокутник, який не є квадратом?

21.177. Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, зображеного на рисунку 21.10. Укажіть образ сторони CD при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут $120°$.

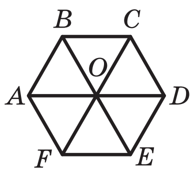


Рис. 21.10

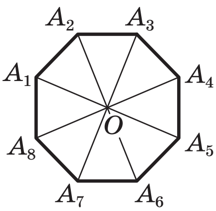


Рис. 21.11

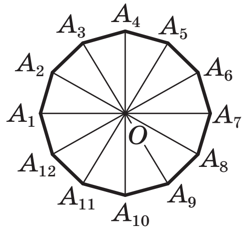


Рис. 21.12

21.178. Точка O — центр правильного восьмикутника, зображеного на рисунку 21.11. Укажіть образ сторони A_3A_4 при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 135°.

21.179. Точка O — центр правильного дванадцятикутника, зображеного на рисунку 21.12. Укажіть образ сторони A_2A_3 при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут 150°.

21.180. Квадрат $CDEF$, зображений на рисунку 21.13, є образом квадрата $ABCD$ при повороті за годинниковою стрілкою на кут 90°. Яка точка є центром повороту?

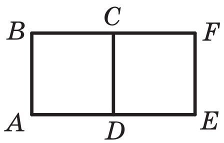


Рис. 21.13

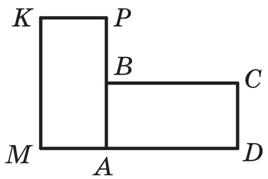


Рис. 21.14

21.181. Прямокутник $AMKP$, зображений на рисунку 21.14, є образом прямокутника $ABCD$ при повороті проти годинникової стрілки на кут 90°. Яка точка є центром повороту?

21.182. Медіани трикутника ABC, зображеного на рисунку 21.15, перетинаються в точці M. Знайдіть коефіцієнт:

1) гомотетії із центром M, при якій точка C_1 є образом точки C;
2) гомотетії із центром B, при якій точка M є образом точки B_1.

21.183. Точка $A_1(-1; 4)$ є образом точки $A(2; -8)$ при гомотетії із центром у початку координат. Чому дорівнює коефіцієнт гомотетії?

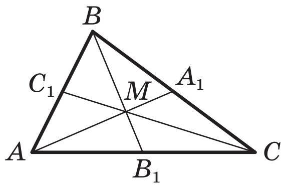


Рис. 21.15

21.184. Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої a. На прямій a знайдіть таку точку X, щоби пряма a містила бісектрису кута AXB.

21.185. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоби промені XA і XB утворювали із цією прямою рівні кути.

21.186. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб сума $AX + XB$ була найменшою.

21.187. Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту на кут $90°$. Знайдіть відрізок BC_1, де точка C_1 — образ точки C при вказаному повороті, якщо $AB = 1$ см.

21.188. Нехай вершина A рівностороннього трикутника ABC є центром повороту на кут $120°$. Знайдіть відрізок BC_1, де точка C_1 — образ точки C при вказаному повороті, якщо $AB = 1$ см.

Дружимо з комп'ютером

У 10 класі ви вже навчилися створювати зображення стереометричних об'єктів за допомогою графічного редактора або спеціалізованих пакетів для зображення об'ємних об'єктів. Радимо в 11 класі вдосконалювати свої вміння, створюючи ілюстрації до матеріалу, що вивчається. Якщо ви плануєте обрати професію, яка потребує вміння креслити й читати креслення, — інженера, проектувальника тощо, то вам буде корисно набути навичок роботи зі спеціалізованими пакетами інженерної графіки (наприклад, із програмою *AutoCad*).

Завдання курсу стереометрії 11 класу для виконання за допомогою комп'ютера

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Для виконання завдання достатньо скласти алгоритм розв'язування задачі. Для тих, хто любить програмування, пропонуємо створювати програми, які реалізують ці алгоритми.

До п. 1 «Призма»

1. Побудуйте в графічному редакторі зображення прямої призми, похилої призми, зображення висоти призми. Побудуйте кілька перерізів призми. Зробіть висновок про можливу форму перерізу призми залежно від розміщення січної площини. Побудуйте проекції призми на площину, паралельну основі призми, і на площину, паралельну висоті призми.

До п. 2 «Паралелепіпед»

1. Побудуйте в графічному редакторі зображення паралелепіпеда, прямокутного паралелепіпеда. Які властивості цього тіла та які властивості паралельного проектування треба брати до уваги для отримання адекватного зображення?

До п. 3 «Піраміда»

1. Побудуйте в графічному редакторі зображення різних пірамід. Побудуйте зображення висоти піраміди, двогранного кута піраміди при ребрі основи.
2. Як за допомогою засобів графічного редактора з'ясувати, чи є зображена піраміда правильною?
3. Узявши за зразок рисунки п. 3, нарисуйте в графічному редакторі правильну трикутну піраміду, правильну чотирикутну

ппіраміду. Зобразіть, виконавши необхідні для цього додаткові побудови:
1) висоту піраміди;
2) апофему;
3) кут нахилу одного з ребер до площини основи;
4) лінійний кут двогранного кута піраміди при одному з ребер основи.

До п. 4 «Зрізана піраміда»

1. Напишіть програму, яка будує на екрані розгортку правильної n-кутної піраміди, n-кутної зрізаної піраміди. Передбачте можливість задання розмірів піраміди різними наборами вхідних параметрів (наприклад, радіус вписаного кола основи та кут між висотою й апофемою тощо), якомога більшу кількість різних наборів.

До п. 5 «Тетраедр»

1. Запишіть алгоритм, що дає змогу якнайдетальніше класифікувати многогранники, вивчені в пп. 1–5.

До п. 6 «Циліндр»

1. Напишіть програму, яка за даними радіусом основи й висотою циліндра:
   1) обчислює площу його бічної поверхні та площу його повної поверхні;
   2) будує на екрані комп'ютера зображення розгортки циліндра та підписує відповідні розміри.
2. Подайте коло як результат обертання точки навколо центра кола. Користуючись цим поданням, напишіть підпрограму для зображення кола в декартовій системі координат, якщо це коло розміщено в площині, паралельній одній із координатних площин.
3. Користуючись підпрограмою, створеною в завданні 2, напишіть програму для побудови на екрані комп'ютера «каркасного» зображення циліндра в декартовій системі координат. Передбачте якомога більше варіантів розміщення циліндра.

До п. 7 «Комбінації циліндра та призми»

1. Яким чином можна задати циліндр і призму в структурах мови програмування, яку ви вивчаєте, щоб створити програму для визначення, чи є одне із цих тіл вписаним у друге? Які підпрограми для цього потрібні?

2. Реалізація програм, описаних у попередньому завданні, є складною насамперед тому, що вам невідомо рівняння кола в просторі. Як можна обійти цю проблему?

Вказівка. Подайте коло як ГМТ, що належать даній площині та знаходяться на даній відстані від даної точки — центра кола.

До п. 8 «Конус»

1. Напишіть програму, яка за даними радіусом основи й висотою конуса:
   1) обчислює площу його бічної поверхні та площу його повної поверхні;
   2) будує на екрані комп'ютера зображення розгортки конуса та підписує відповідні розміри.
2. Користуючись підпрограмою, створеною в завданні 2 до п. 6, напишіть програму для побудови на екрані комп'ютера «каркасного» зображення конуса в декартовій системі координат. Передбачте якомога більше варіантів розміщення конуса.

До п. 9 «Зрізаний конус»

1. Напишіть програму, яка для даного зрізаного конуса будує його розгортку й обчислює площу його повної поверхні. Які вхідні параметри потрібні для опису зрізаного конуса?

До п. 10 «Комбінації конуса та піраміди»

1. Проаналізуйте, з яких графічних елементів складається зображення конуса (зрізаного конуса), вписаної в нього та описаної навколо нього піраміди (зрізаної піраміди). Зробіть висновки про те, яка інформація потрібна для побудови цих зображень на екрані комп'ютера.

До п. 11 «Сфера та куля. Рівняння сфери»

1. Напишіть програму, що за заданим рівнянням сфери й заданою точкою визначає, як розміщена точка відносно сфери: поза сферою, належить сфері або всередині сфери.

До п. 12 «Взаємне розміщення сфери та площини»

1. Напишіть програму, яка за заданими рівняннями сфери та площини будує на екрані комп'ютера зображення сфери й ГМТ перетину сфери та площини.

До п. 13 «Многогранники, вписані у сферу»,
п. 14 «Многогранники, описані навколо сфери»,
п. 15 «Тіла обертання, вписані у сферу»,
п. 16 «Тіла обертання, описані навколо сфери»

1. Проаналізуйте завдання, що ви виконували в попередніх пунктах, і визначте, які аналогічні завдання можете виконати для комбінацій тіл, що розглянуто в пп. 13–16.

До п. 17 «Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми»

1. Напишіть програму для обчислення об'єму правильної n-кутної призми зі стороною основи a та висотою h.
2. Скориставшись класифікацією призм, напишіть програму для обчислення об'єму якомога більшої кількості різних видів призм. Візьміть до уваги, що залежно від виду призми можуть знадобитися різні параметри для її опису. Вибір виду призми реалізуйте через меню для користувача програми.

До п. 18 «Формули для обчислення об'ємів піраміди та зрізаної піраміди»

1. Проаналізуйте задачі, наведені в цьому пункті. Напишіть програму для обчислення об'єму піраміди (зрізаної піраміди) з використанням різних вхідних даних, що описують піраміду та її елементи. Вибір наявних даних реалізуйте через меню для користувача програми.
2. Спробуйте скласти алгоритм, за яким можна обчислити об'єм довільного опуклого многогранника за допомогою розбиття його на піраміди. Який крок цього алгоритму найскладніший?

До п. 19 «Об'єми тіл обертання»

1. Проаналізуйте задачі, наведені в цьому пункті. Напишіть програму для обчислення об'ємів тіл обертання з вибором виду тіла (конус, циліндр, зрізаний конус, куля) та наявних про нього відомостей через меню для користувача програми.

До п. 20 «Площа сфери»

1. Напишіть програму, яка за заданими радіусом кулі та товщиною атмосфери обчислює об'єм кулі й об'єм її атмосфери.
2. Побудуйте за допомогою редактора діаграм *Word* або *Excel* стовпчасту діаграму. Виберіть вид діаграми «об'ємна» та подання ряду даних у вигляді різних геометричних тіл (призм, конусів тощо). Використовуючи отримані знання про об'єми тіл, визначте, які із цих фігур дають найбільш адекватне уявлення про співвідношення поданих на діаграмі величин.

Відповіді та вказівки до вправ

1.4. 18 см². **1.5.** $32\sqrt{2}$ см². **1.7.** 8 см. **1.8.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45°. **1.9.** $2a$, $a\sqrt{5}$. **1.10.** $\dfrac{2a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$, $2a\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$. **1.11.** 9 см. **1.12.** 48 см². **1.13.** 1250 см². **1.14.** 1) $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$; 2) $\arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **1.15.** $\dfrac{a^2\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{ctg}\alpha}{2\cos\beta}$. **1.16.** 1) $\dfrac{1}{2}d\operatorname{tg}\beta$; 2) $\dfrac{d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}$. **1.17.** 60°. **1.18.** 45°. **1.19.** $2S\sqrt{2}$. **1.20.** $\left(18+12\sqrt{7}\right)$ см². **1.21.** 1) 522 см²; 2) 240 см². **1.22.** 6 см, 8 см або 8 см, 6 см. **1.23.** 360 см². **1.24.** 15 см. **1.25.** $6\sqrt{S_1^2-S^2}$. **1.26.** $6S\sin\alpha$. **1.27.** $24\sqrt{3}$ см². **1.28.** 20 см². **1.29.** $\dfrac{1}{2}h^2\operatorname{tg}\alpha$. **1.30.** $\dfrac{h^2\sin\alpha}{2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. **1.31.** 2) $a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **1.32.** 2) $a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **1.33.** $36\sqrt{2}$ см². **1.34.** $6\sqrt{3}$ см². **1.35.** $\left(6+2\sqrt{3}\right)$ см². *Вказівка*. Із точки C опустіть перпендикуляр CK на ребро AA_1. Доведіть, що $\angle CKB=60°$. **1.36.** $\dfrac{h^2\sin\alpha}{8\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)}$. *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 2 п. 13 підручника «Геометрія-10». **1.37.** $\left(3+\sqrt{3}\right)$ см². **1.38.** 60°. *Вказівка*. Добудуйте дану призму до куба $ADBCA_1D_1B_1C_1$. Тоді шуканий кут дорівнює куту D_1AC_1. **1.39.** $\arccos\dfrac{1}{4}$. *Вказівка*. Добудуйте дану призму до правильної шестикутної призми. **1.40.** 8 вершин і 6 граней. *Вказівка*. Скористайтеся теоремою Ейлера про опуклий многогранник. **1.41.** $\dfrac{450}{13}$ см². *Вказівка*. Площа трикутника BXC_1 буде найменшою, якщо його висотою є спільний перпендикуляр мимобіжних прямих CM і BC_1. Спроектуємо ці прямі на площину ABB_1. Шуканий перпендикуляр дорівнює відстані від точки M до проекції прямої BC_1 на площину ABB_1. **1.42.** $\dfrac{18\sqrt{3}}{5}$ см². **1.43.** $\sqrt{7}$ см. *Вказівка*. Розгляньте всі можливі розгортки даної призми. **1.44.** $\sqrt{11+4\sqrt{3}}$ см. **1.45.** Якщо $a\sqrt{3}\leqslant b$, то $\dfrac{\sqrt{4b^2+9a^2}}{2}$; якщо $a\sqrt{3}>b$, то $\dfrac{\sqrt{4b^2+3a^2+2ab\sqrt{3}}}{2}$. **1.46.** 12. *Вказівка*. Нехай у даному многограннику кількість п'ятикутників дорівнює x, а кількість шестикутників — y. Тоді кількість ребер дорівнює $\dfrac{5x+6y}{2}$, а кількість вершин — $\dfrac{5x+6y}{3}$. **1.47.** 3 : 2, 1 : 2 та 1 : 6.

2.3. 1) $\mathrm{arctg}\,\frac{5}{12}$; 2) $\mathrm{arctg}\,\frac{7}{13}$. **2.4.** 1) $\mathrm{arctg}\,\frac{12}{5}$; 2) $\mathrm{arctg}\,\frac{6\sqrt{74}}{37}$. **2.5.** 7 см. **2.6.** 2 см, 4 см, 4 см. **2.7.** 18 см² або 16 см². **2.8.** $\dfrac{2d^2\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **2.9.** $144\sqrt{2}$ см². **2.10.** $12(\sqrt{2}+2)$ см². **2.11.** $4(5\sqrt{3}+4)$ см². **2.13.** 1) $3\sqrt{6}$ см; 2) $36\sqrt{2}$ см². **2.14.** 4 см. **2.15.** $2d^2\sin\alpha\left(\sin\beta+\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}\right)$. **2.16.** $\dfrac{2a^2\sin\alpha\left(\cos\beta+\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}\right)}{\cos^2\beta}$. **2.21.** $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. **2.22.** $\sqrt{\dfrac{S_1S_2}{2S}}$. **2.23.** $32\sqrt{3}$ см². **2.24.** 2 см. **2.25.** 64 см². **2.26.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **2.27.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **2.28.** $a\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. **2.29.** *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю трикутника. **2.30.** 8 см. *Вказівка.* Див. задачу 2 п. 2. **2.31.** 2 : 1. **2.32.** $8\sqrt{6}$ см.

3.1. 6 см. **3.2.** 20 см, $\sqrt{281}$ см, 20 см, $\sqrt{281}$ см. **3.3.** $\frac{1}{2}b^2\sin 2\beta$. **3.4.** $\frac{1}{2}a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **3.8.** $\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. **3.9.** $\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$. **3.10.** 2) 24 см². **3.11.** 20 см. **3.12.** *Вказівка.* Доведіть, що апофема дорівнює половині сторони основи піраміди. **3.13.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}$. **3.14.** $\dfrac{d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **3.15.** 20 см. **3.16.** $5\sqrt{3}$ см. **3.17.** $8\sqrt{3}$ см². **3.18.** $5\sqrt{2}$ см. **3.19.** 1) $20\sqrt{3}$ см²; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **3.20.** 1) 160 см²; 2) $4\sqrt{3}$ см. **3.21.** 1) 4 см; 2) $(32+8\sqrt{10}+24\sqrt{2})$ см². **3.22.** 360 см². **3.23.** 660 см². **3.24.** 105 см². **3.25.** 2) 36 см². **3.26.** 2) 6 см². **3.27.** $\arccos\frac{1}{6}$. **3.28.** $\arccos\frac{2\sqrt{15}}{15}$. **3.29.** $2\arcsin\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **3.30.** $2\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **3.31.** $\dfrac{6d^2\sqrt{3}}{\sin 2\alpha\sin\alpha}$. **3.32.** $\dfrac{8m^2}{\sin 2\beta\cos\beta}$. **3.33.** 180 см². **3.34.** 240 см². **3.35.** $(3+\sqrt{6}+\sqrt{3})$ см². **3.36.** $\dfrac{a^2\sin\alpha(1+\sin\beta)}{\cos\beta}$. **3.37.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **3.38.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см або $8\sqrt{3}$ см. **3.39.** *Вказівка.* Позначте S і Q — площі основи та бічної грані відповідно. Тоді $S=3Q\cos\alpha$ і $Q=S\cos\alpha+2Q\cos\beta$. **3.40.** $\dfrac{27d^2}{4\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}}$. **3.41.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. *Вказівка.* Спроектуйте прямі MK і AC на площину BMD.

Шукана відстань дорівнює відстані від точки O до проекції прямої MK на площину BMD. **3.42.** $\frac{3\sqrt{14}}{7}$ см. **3.43.** $\frac{3a^2}{8\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}}$. *Вказівка.* Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі основи, скориставшись теоремою про три синуси (див. ключову задачу 4 п. 14 підручника «Геометрія-10»). **3.44.** $\frac{2S\sqrt{3\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}}{3}$. **3.45.** 1 см, або 2 см, або 3 см, або 6 см. *Вказівка.* Основою висоти піраміди є центр вписаного кола або один із центрів зовнівписаних кіл трикутника основи. **3.46.** $195\sqrt{3}$ см^2 або $45\sqrt{123}$ см^2. **3.47.** $4\sqrt{3}$ см^2 або $36\sqrt{3}$ см^2. **3.48.** $\frac{b^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4}$, або $\frac{b^2\sin\alpha}{8}$, або $\frac{b^2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}$. *Вказівка.* Розгляньте три можливих варіанти розміщення площини π. **3.49.** $b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ або $\frac{3b^2\sin\alpha}{8}$. **3.50.** $\frac{1}{4}$ см^2. *Вказівка.* Доведіть, що всі вказані в умові перерізи є прямокутниками, периметр кожного з яких дорівнює 2 см. **3.51.** *Вказівка.* Розгляньте таку розгортку даного тетраедра, яка є рівностороннім трикутником із середніми лініями AB, BC і CA. **3.52.** 1 см. **3.53.** *Вказівка.* Нехай даний трикутник є основою правильного тетраедра $SABC$. Розгляньте трикутник SA_1C_1. **3.54.** 4 см^2. **3.55.** $\frac{1701}{32}$ см^2.

4.1. 8 см, 12 см. **4.2.** 7 см. **4.3.** $45\sqrt{6}$ см^2. **4.4.** 90 см^2. **4.5.** 1) 12 см; 2) $32\sqrt{2}$ см^2; 3) $64\sqrt{5}$ см^2. **4.6.** 1) $2\sqrt{6}$ см; 2) $168\sqrt{15}$ см^2. **4.7.** 2 см. **4.8.** 1 см. **4.9.** 24 см^2. **4.10.** $12\sqrt{10}$ см^2. **4.11.** $\left(104+65\sqrt{3}\right)$ см^2. **4.12.** $6\left(2+\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)$ см^2. **4.13.** $2H^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. **4.14.** $\frac{(a-b)\sqrt{-\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}$. **4.15.** $1+\cos\alpha$. **4.16.** 60°. **4.17.** $2\cos\alpha$. *Вказівка.* Проекцією чотирикутника DA_1B_1C на площину BDD_1 є чотирикутник DO_1B_1O, де точки O і O_1 — центри більшої та меншої основ зрізаної піраміди відповідно. **4.18.** 3 см і 4 см. **4.19.** 3 : 1.

5.14. 6 : 5. **5.16.** *Вказівка.* Розгляньте паралелепіпед, описаний навколо даного тетраедра. **5.18.** *Вказівка.* Розгляньте паралелепіпед, описаний навколо даного тетраедра. **5.22.** *Вказівка.* Паралелепіпед, описаний навколо даного тетраедра, є прямокутним, усі грані якого — ромби, тобто є кубом. **5.23.** $\arccos\frac{\left|b^2-c^2\right|}{a^2}$; $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **5.24.** *Вказівка.* Розгляньте проекції трьох граней тетраедра на четверту його грань. **5.25.** *Вказівка.* Нехай сума плоских кутів при кожній із вершин A, B і C тетраедра $DABC$ дорівнює $180°$. Розгляньте розгортку цього тетраедра на площину ABC. **5.26.** 3 : 16. *Вказівка.* Розгляньте тетраедр A_1ABC і скористайтеся теоремою Менелая. **5.28.** $\min\{2a,\ 2b,\ 2c\}$. *Вказівка.* Розгляньте розгортку даного тетраедра, яка є паралелограмом. **5.29.** $\frac{a+b}{c}$. **5.30.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+ac+c^2}$.

6.3. $18\pi\sqrt{3}$ см². **6.4.** 13 см. **6.5.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **6.6.** 2π см². **6.8.** $4S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **6.9.** $\frac{S}{\pi}$. **6.10.** $24\pi\sqrt{2}$ см². **6.11.** 128π см². **6.12.** $\frac{2\pi a^2\operatorname{tg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **6.13.** $\frac{\pi m^2\sin 2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **6.14.** 1) Площа бічної поверхні циліндра, отриманого в результаті обертання прямокутника, не залежить від того, навколо якої сторони його обертали; 2) навколо меншої сторони. **6.15.** 8 см. **6.16.** $2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **6.17.** 48 см². **6.18.** *Вказівка.* Побудуйте осьовий переріз циліндра, який проходить через точку A. **6.19.** 16 см. **6.20.** 10 см. **6.21.** $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}$. **6.22.** $\operatorname{arctg}(\pi\operatorname{tg}\alpha)$. **6.23.** $2\sqrt{7}$ см. **6.24.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см. **6.25.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **6.26.** *Вказівка.* Через точку A проведіть пряму m, паралельну прямій MM_1. Нехай вона перетинає нижню основу циліндра в точці A_1 ($AA_1 = MM_1$), а K — точка перетину прямих A_1B і MN. Шукана точка — це точка перетину прямих AB і KK_1, де $KK_1 \parallel MM_1$ і $KK_1 = MM_1$. **6.28.** $4S\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **6.29.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **6.30.** 256 см² або 400 см². *Вказівка.* Розгляньте два випадки: 1) площина прямокутника паралельна осі циліндра; 2) площина прямокутника перетинає вісь циліндра. У другому випадку треба довести, що проекція прямокутника $ABCD$ на площину основи циліндра також є прямокутником. **6.31.** $4\sqrt{2}$ см. **6.32.** 2 см або $\sqrt{3}$ см. **6.33.** 8π см². *Вказівка.* Доведіть, що осьовим перерізом даного циліндра є квадрат. **6.34.** 6π см². **6.35.** $\sqrt{25+9\pi^2}$ м. *Вказівка.* Розріжте циліндр по твірній, що проходить через початок стрічки, і розгляньте розгортку бічної поверхні циліндра. Буде отримано прямокутник зі сторонами π м і 5 м. Добудуйте цей прямокутник до прямокутника зі сторонами 3π м і 5 м. Шукана довжина дорівнює діагоналі цього прямокутника. **6.36.** $h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$. **6.37.** 6 см.

7.1. Так. **7.2.** Ні. **7.4.** $\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$. **7.5.** 170π см². **7.6.** 162 см². **7.7.** $24\sqrt{6}$ см². **7.8.** $2a^2\operatorname{ctg}\alpha$. **7.9.** 48 см². **7.10.** $10\pi\sqrt{3}$ см². **7.11.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **7.12.** 120π см². **7.13.** 40 см². **7.14.** $2:\sqrt{3}$. **7.15.** 2 : 1. **7.16.** $\frac{\pi a^2\operatorname{tg}\beta}{\sin^2\alpha}$. **7.17.** $\frac{2S\sqrt{3}}{9}$. **7.18.** $\frac{S\left(\sqrt{2}-1\right)}{2h}$.

7.19. $\pi m^2 \sin 2\beta \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **7.20.** $\frac{1}{2}\pi d^2 \sin 2\beta \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$. **7.21.** $\frac{1}{4}\pi S \sin\alpha$. **7.22.** $\frac{1}{6}\pi S\sqrt{3}$. **7.23.** $\frac{1}{4}d^2 \sin 2\alpha$. **7.24.** $2R^2$. **7.25.** $\frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **7.26.** $\frac{1}{2}\pi d^2 \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$. **7.27.** 240π см^2 або $40\pi\sqrt{39}$ см^2. **7.28.** 624π см^2 або $52\pi\sqrt{209}$ см^2. **7.29.** $\frac{7a\sqrt{3}}{24}$. *Вказівка.* Розгляньте проекцію даної призми на площину основи циліндра. Тоді проекцією відрізка AA_1 є хорда кола основи циліндра. Її довжина дорівнює довжині проекції відрізка BB_1, тобто $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Проекцією прямої BC_1 є дотична до кола основи циліндра. Ця дотична паралельна проекції відрізка AA_1 і віддалена від неї на відстань $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **7.30.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **7.31.** 3,6 см^2. **7.32.** 8π см.

8.3. 1) $H^2 \operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{\pi H^2 \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. **8.4.** 1) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; 2) $\pi a^2 \sin\frac{\alpha}{2}$. **8.7.** 25 см, 20 см. **8.8.** 160π см^2. **8.10.** $\frac{a \operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **8.11.** $2m\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$. **8.12.** $\frac{H^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}$. **8.13.** $32\pi\sqrt{2}$ см^2. **8.14.** $\frac{1020\pi}{13}$ см^2. **8.15.** $\frac{1}{2}\pi a^2 \operatorname{tg}\alpha(2\cos\alpha+1)$. **8.16.** $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **8.17.** 84π см^2. **8.18.** $\pi\left(9+\sqrt{2}\right)$ см^2. **8.19.** $200\pi\sqrt{3}$ см^2. **8.20.** 240π см^2. **8.21.** 8 см. **8.22.** 60°. **8.23.** 216°. **8.24.** $\frac{\sqrt{105}}{7}$. **8.25.** $\frac{a \operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$. **8.26.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см. **8.27.** $\frac{R^2 \operatorname{tg}\beta\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\beta \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\sin\alpha}$. **8.28.** $\frac{\pi H^2\sqrt{1-\sin^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta}$. **8.29.** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **8.30.** $3\pi\sqrt{6}$ см^2. **8.31.** 252π см^2. **8.32.** $\frac{5}{4}\pi a^2\sqrt{3}$. **8.33.** $\arccos\frac{1}{6}$. *Вказівка.* Проведіть хорду CD паралельно хорді AB. Знайдіть основу CD трапеції $ABCD$. **8.34.** 12 см. **8.35.** 12 см. *Вказівка.* Розгляньте осьовий переріз конуса, перпендикулярний до діаметра AB. Проведіть хорду CD паралельно діаметру AB. Тоді шукана відстань дорівнюватиме відстані від центра кола основи конуса до площини CSD. **8.36.** 150°. *Вказівка.* Якщо кут між твірними конуса в осьовому перерізі не перевищує 90°, то з усіх перерізів, які проходять через вершину конуса, найбільшу площу має осьовий переріз. Інакше найбільшу площу має переріз, кут між твірними якого дорівнює 90°.

8.37. $2\sqrt{3}$ см. *Вказівка*. Нехай точка A — початок і кінець шляху. Розріжте бічну поверхню конуса по твірній SA та розгляньте її розгортку на площину. В отриманому секторі хорда, що сполучає кінці дуги, є шуканим шляхом. **8.38.** 10 см. **8.39.** 8 см.

9.1. 64π см². **9.2.** 2 : 1. **9.7.** $24\pi\sqrt{2}$ см². **9.8.** 120π см². **9.9.** $\frac{9}{16}S$. **9.10.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **9.11.** 9 см². **9.12.** 5 : 7. **9.13.** $(R^2-r^2)\operatorname{tg}\alpha$. **9.14.** 520π см². **9.17.** $24\pi\sqrt{3}$ см². **9.18.** $\frac{m}{2\cos\alpha}$, $-\frac{m\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$. **9.19.** $\frac{h(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha)}{2}$, $\frac{h(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)}{2}$. **9.20.** $\frac{1}{6}\pi\sqrt{6}(a^2-b^2)$. **9.21.** $\frac{(R^2-r^2)\sin\alpha}{2\cos\beta}$. **9.22.** $8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **9.23.** $\frac{1}{2}\pi a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)$. **9.24.** $\frac{4\pi S\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **9.25.** 22 см. **9.26.** $8\sqrt{10}$ см.

10.1. $16\sqrt{3}$ см². **10.2.** $25\sqrt{2}$ см². **10.3.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}$, $\frac{a}{2\sin\alpha\cos\beta}$. **10.4.** 65π см². **10.5.** 120 см². **10.6.** $2\sqrt{10}$ см. **10.7.** $3\sqrt{6}$ см. **10.8.** $\frac{\pi a^2}{12\cos\alpha}$. **10.9.** $\frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **10.10.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2-\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$. **10.11.** $\frac{\pi a^2\sqrt{4-3\cos^2\alpha}}{12\cos\alpha}$. **10.12.** $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\beta}$. **10.13.** $\frac{\pi b^2}{4\cos^2\alpha\cos\varphi}$. **10.14.** $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 2\alpha\cos\beta}$. **10.15.** $\frac{325\pi}{4}$ см². **10.17.** $\frac{\pi m^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}$. **10.18.** $\frac{2d^2}{\sin 2\beta}$. **10.19.** $\frac{1}{4}a^2\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **10.20.** $\frac{\pi a^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$. **10.21.** 8π см². **10.22.** 12π см². **10.23.** $108\sqrt{39}$ см². **10.24.** $60\pi\sqrt{2}$ см². **10.25.** $96\sqrt{2}$ см². **10.26.** 63π см². **10.27.** Якщо $0<\alpha<\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{h^2(1+\sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha}$; якщо $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{h^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. **10.28.** Якщо $0<\alpha<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, то $\frac{h^2(1+3\sin^2\alpha)}{8\sin^2\alpha}$; якщо $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{h^2\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. **10.29.** $\frac{210}{17}$ см або $\frac{30}{17}$ см. *Вказівка*. Розгляньте два випадки: центр основи конуса належить трапеції та не належить трапеції. **10.30.** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ см або $5\sqrt{2}$ см. **10.31.** $2\arcsin\frac{3\sqrt{5}}{10}$. *Вказівка*. На променях AB і AC позначте відповідно точки B_1 і C_1 так, що $AB_1 = AC_1 = 2a$. Тоді точки D, B_1 і C_1 належатимуть колу, площина якого перпендикулярна до осі конуса. **10.32.** $\frac{\sqrt{145}}{5}$ см. **10.33.** 45π см.

11.10. (0; 0; 0), (4; 0; 0), (0; −6; 0), (0; 0; 12). **11.11.** C (0; 7; 0). **11.12.** $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ або $(x + 12)^2 + y^2 + z^2 = 49$. **11.13.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ або $x^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 9$. **11.15.** (0; 8; −3), $r = \sqrt{73}$. **11.16.** $x^2 + (y + 4)^2 + (z - 8)^2 = 46$ або $x^2 + (y - 5{,}6)^2 + (z - 3{,}2)^2 = 46$. **11.17.** $(x - 9)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 90$ або $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 9)^2 = 90$. **11.18.** $\sqrt{14}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся методом координат. **11.19.** 8 см. **11.20.** Сфера, або дві сфери, або точка та сфера. **11.22.** Порожня множина, або центроїд даного тетраедра, або сфера із центром у центроїді даного тетраедра. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 11.21. **11.24.** Центроїд даного тетраедра. **11.25.** Сфера радіуса $\frac{2}{3}AB$ із центром у точці O, що лежить на прямій AB, причому точка B ділить відрізок AO у відношенні 3 : 1, рахуючи від точки A. **11.26.** 4,5 см. **11.27.** 10π см.

12.9. $\pi R^2 \cos^2 \alpha$. **12.10.** $4\pi\sqrt{3}$ см. **12.15.** 48π см². **12.16.** 24 см. **12.17.** 8 см. **12.18.** 7 см. **12.19.** 144π см². **12.20.** 15 см. **12.21.** 10π. **12.22.** 13π. **12.24.** 1 см. **12.25.** 15 см. **12.26.** 32π см². **12.27.** $(x - 6)^2 + (y + 6)^2 + (z - 6)^2 = 36$ або $(x - 22)^2 + (y + 22)^2 + (z - 22)^2 = 484$. **12.28.** $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 4)^2 = 16$. **12.29.** $2x - y - 2z + 9 = 0$. **12.32.** 48π см. **12.33.** 13 см. **12.34.** $\frac{1}{2}a\cos\alpha$. **12.36.** $8\sqrt{2}$ см. **12.37.** 6 см. **12.38.** $\pi\left(R^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$ або $\pi\left(R^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **12.39.** $2\sqrt{10}$ см. **12.40.** 4 см. **12.41.** Сфера з діаметром AB, за винятком точки A. **12.42.** Якщо площини паралельні, то шуканим ГМТ є площина, кожна точка якої рівновіддалена від паралельних площин; якщо площини перетинаються по прямій a, то шуканим ГМТ є дві площини, які перетинаються по прямій a та містять бісектори чотирьох двогранних кутів, утворених двома даними площинами, що перетинаються. Пряма a не входить до ГМТ. **12.43.** Сфера із центром O і радіусом $r\sqrt{3}$. **12.44.** *Вказівка*. Нехай M — точка перетину прямої m із площиною α, K — точка дотику сфери до площини α. Тоді $MK^2 = MA \cdot MB$. **12.45.** 3 см або 5 см. *Вказівка*. Скористайтеся методом координат. **12.46.** $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$. *Вказівка*. Введіть систему координат з початком у точці B та осями, які містять ребра паралелепіпеда, що виходять із вершини B. Тоді координати центра сфери дорівнюють (r; r; r), де r — радіус сфери. **12.47.** $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$. **12.48.** $\frac{(\sqrt{3}+1)R}{2}$ або $\frac{(\sqrt{3}-1)R}{2}$. *Вказівка*. Якщо сфери мають зовнішній дотик, то відстань між їхніми центрами дорівнює сумі радіусів, а якщо мають внутрішній дотик — то різниці радіусів. **12.49.** $\frac{(3-\sqrt{3})a}{2}$. *Вказівка*.

Скористайтеся методом координат. **12.50.** $\sqrt{3}$ см, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 12.35. **12.51.** $\frac{bc}{2a}, \frac{ac}{2b}, \frac{ab}{2c}$.
12.52. *Вказівка*. Доведіть, що таку властивість має сфера $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2=6$. **12.53.** *Вказівка*. Розгляньте центри п'яти сфер різного радіуса, що попарно дотикаються. **12.54.** $2\sqrt{2}$ см. *Вказівка*. Опишіть навколо даного тетраедра паралелепіпед. **12.55.** *Вказівка*. Скориставшись теоремою Менелая для тетраедра, покажіть, що точки K, P, F і N належать одній площині. Звідси випливає, що відрізки NP і KF перетинаються. Аналогічно доведіть, що відрізки KF і ME, а також відрізки NP і ME також перетинаються. **12.56.** 1 : 2. **12.57.** 25 см.

13.1. 7 см. **13.2.** $8R^2$. **13.3.** 7 см. **13.4.** $4a\sqrt{4R^2-2a^2}$. **13.5.** 11 см. **13.6.** 24 см. **13.7.** 17 см. **13.8.** 2,25 см. **13.9.** $2R\sin^2\alpha$. **13.10.** $\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$.
13.11. $\frac{a(\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}\alpha)}{4}$. **13.12.** 4 см. **13.13.** 9 см. **13.14.** $\frac{2R}{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$. **13.15.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.
13.16. $\frac{a}{2}$. **13.18.** Якщо $b\geqslant h\sqrt{2}$, то центр сфери належить піраміді; якщо $b<h\sqrt{2}$, то центр сфери не належить піраміді. **13.19.** $2R^2\sin^2 2\beta\sin\alpha$.
13.20. 13 см. **13.21.** $\frac{7}{6}$ см. **13.22.** 40 см або 30 см. **13.23.** $2\sqrt{3}$ см. **13.24.** 2 см.
13.25. $\frac{a\sqrt{27\operatorname{tg}^2\alpha+48}}{12}$. **13.26.** 13 см. **13.27.** 10 см. **13.28.** 15 см.
13.29. $r\sqrt{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$. **13.30.** $\frac{\sqrt{66}}{2}$ см. **13.31.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **13.32.** $\frac{a\sqrt{89}}{8}$.
13.33. $\frac{2a\sqrt{4R^2-a^2}}{3}$. **13.34.** $\frac{2a\sqrt{b^2+\frac{a^2}{3}}}{3}$. **13.35.** *Вказівка*. Доведіть, що зазначені прямі паралельні площині, яка дотикається в точці D до сфери, описаної навколо даного тетраедра. **13.36.** $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}}{4}$. *Вказівка*. Опишіть навколо даного тетраедра паралелепіпед. **13.37.** $56\sqrt{3}$ см². **13.30.** 300 см².

14.1. $18R^2\sqrt{3}$. **14.2.** $12R^2\sqrt{3}$. **14.3.** $\frac{1}{2}a\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **14.4.** $\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
14.5. $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **14.6.** $2h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. **14.7.** 216 см². **14.8.** 384 см².

14.9. $\operatorname{arctg}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **14.10.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **14.11.** 1 см. **14.12.** $\frac{1}{2}a\sin\alpha\,\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.
14.13. $\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **14.14.** $3S$. **14.15.** $\sqrt{2}:1$. **14.16.** 12π см^2. **14.17.** 2π см.
14.18. $\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **14.19.** $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **14.21.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **14.22.** $81\sqrt{3}$ см^2.
Вказівка. Апофема даної зрізаної піраміди дорівнює сумі радіусів кіл, вписаних в її основи. **14.23.** $32R^2$. **14.24.** 31 см. **14.25.** $(3\sqrt{5}-3)$ см.
14.26. 6 см. **14.27.** $(4\sqrt{2}-2)$ см. **14.28.** $\arccos\frac{2}{3}$. **14.30.** *Вказівка.* Нехай M, N, E, F і P — точки дотику вписаної кулі до граней ABS, DAS, CDS, BSC і ABC відповідно. Доведіть, що $\Delta AMS=\Delta ANS$, $\Delta DNS=\Delta DES$, $\Delta CES=\Delta CFS$, $\Delta BFS=\Delta BMS$, $\Delta AMB=\Delta APB$, $\Delta AND=\Delta APD$, $\Delta DEC=\Delta DPC$, $\Delta CFB=\Delta CPB$. **14.31.** *Вказівка.* Опишіть навколо даного тетраедра паралелепіпед. **14.32.** $(\sqrt{3}-1)$ см. *Вказівка.* Нехай точка F — середина ребра AB. Скориставшись тим, що основами даної трикутної призми є рівнобедрені трикутники, доведіть, що $FS=FC$. **14.33.** 96 см^2. **14.34.** 150 см^2.

15.5. У 2 рази. **15.6.** $2\pi R^2\sin 2\alpha$. **15.7.** $4\pi r\sqrt{R^2-r^2}$. **15.8.** $\frac{b^2}{2h}$.
15.9. $2\pi R^2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. **15.10.** $\frac{25}{3}$ см. **15.11.** $2\sqrt{3}$ см. **15.12.** $16\pi\sqrt{5}$ см^2 або $8\pi\sqrt{5}$ см^2. **15.13.** 7 см або 1 см. **15.14.** $\frac{6\pi R^2\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha}{(2\cos\alpha+\sin\alpha)^2}$. **15.15.** $\frac{10\pi R^2\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+4\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.
15.16. $\frac{4}{5}$. **15.17.** $\arccos(\sqrt{2}-1)$. **15.18.** 6 см. **15.19.** 2 см.

16.2. $4\pi R^2$. **16.3.** 1 : 2. **16.4.** $2\sqrt{2}$ см. **16.5.** 3 см. **16.6.** $b\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$.
16.7. 64π см^2. **16.8.** 49π см^2. **16.9.** $\sqrt{Rr}$. **16.10.** $\frac{1}{2}b\sin\alpha$, $b\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $b\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **16.12.** $-\frac{\pi r^2\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **16.13.** $\pi R^2(5\sqrt{2}+7)$. **16.14.** $7{,}2\pi$ см^2.
16.15. $2R\operatorname{tg}\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **16.16.** $\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$. **16.17.** $\frac{288\pi}{13}$ см. **16.18.** $\frac{\pi R^2}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.
16.19. $\frac{l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **16.20.** $6\sqrt{2}$ см. **16.21.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. *Вка-*

зівка. Нехай точка O — центр основи конуса, а точки A, B і C — проекції центрів сфер на площину основи конуса. Тоді точка O — центр рівностороннього трикутника ABC зі стороною 2 см. Нехай OM — радіус основи конуса, який містить точку A. Розгляньте осьовий переріз конуса, що містить радіус OM. **16.22.** Якщо $r < R \leqslant (1+\sqrt{2})r$, то $\frac{2rR^3}{R^2-r^2}$; якщо $R > (1+\sqrt{2})r$, то $\frac{R^2(R^2+r^2)^2}{2(R^2-r^2)^2}$. *Вказівка*. Якщо кут між твірними в осьовому перерізі не перевищує 90°, то найбільшу площу має осьовий переріз конуса. Якщо ж указаний кут тупий, то найбільшу площу має переріз, у якому твірні перпендикулярні. **16.23.** $(2-\sqrt{2})a$. **16.24.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

17.2. $\frac{h^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\alpha}{4}$. **17.3.** 6 см. **17.4.** 288 см³. **17.5.** 36 800 м³. **17.6.** $h=\frac{ab}{S}$. **17.7.** 456 м³. **17.8.** $480\sqrt{3}$ см³. **17.9.** 1152 см³. **17.12.** $162\sqrt{3}$ см³. **17.13.** $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$. **17.14.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **17.15.** $\frac{225\sqrt{23}}{2}$ см². **17.16.** $\frac{1}{4}d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **17.17.** $\frac{1}{4}c^3\sin 2\beta\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$. **17.18.** $\sqrt{S_1S_2S_3}$. **17.19.** $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{2}}$. **17.20.** 4080 см³. **17.21.** 240 см³. **17.22.** $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **17.23.** $\frac{a^3}{2}$. **17.24.** $128\sqrt{3}$ см³. **17.25.** $72\sqrt{3}$ см³. **17.26.** $19200\sqrt{3}$ см³. **17.27.** $\frac{640}{3}$ см³. **17.28.** $1560\sqrt{3}$ см³. **17.29.** $36\sqrt{3}$ см³. **17.30.** $5\sqrt{2}$ см³. **17.31.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **17.32.** $3\sqrt{15}$ см³. *Вказівка*. Нехай AA_1C_1C — грань призми $ABCA_1B_1C_1$, яка є ромбом. $AC=3$ см, $A_1C=4$ см, тоді $AC_1=2\sqrt{5}$ см. Висота ромба, опущена з вершини A_1 на сторону AC, є також висотою призми. **17.33.** 108 см³. **17.34.** 1960 см³ або 280 см³. *Вказівка*. Розгляньте випадки, коли центр описаного кола належить або не належить трапеції. **17.35.** 40 см³ або 1000 см³. **17.37.** $\frac{(S_1+S_2)d}{2}$. *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 17.36. **17.38.** 5 см³. *Вказівка*. Добудуйте даний многогранник до правильної призми з бічним ребром, що дорівнює 10 см. **17.39.** Sh. *Вказівка*. Розгляньте паралельне перенесення піраміди B_1ABC на вектор $\overrightarrow{BB_1}$. **17.40.** 16 см, 12 см. **17.41.** 3,5 см.

18.1. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см³. **18.2.** 18 см³. **18.3.** $\frac{V}{6}$. **18.4.** 1692 см³. **18.5.** 504 см³. **18.6.** $\frac{525\sqrt{3}}{4}$ см³. **18.7.** $\frac{2}{3}b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. **18.8.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **18.9.** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **18.10.** $\frac{1}{3}b^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **18.11.** $\frac{4}{3}b^3\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **18.12.** 108 см³.

18.13. 2880 см³. **18.14.** $\frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{12\cos\alpha}$. **18.15.** $\frac{1}{6}b^3 \sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **18.16.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha \operatorname{tg}\beta$. **18.17.** $2\sqrt{5}$ см. **18.18.** $40\sqrt{3}$ см³. **18.19.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **18.20.** $27\sqrt{3}$ см³. **18.21.** $\frac{1}{6}m^3\sin^2 2\alpha \operatorname{tg}\beta$. **18.22.** $\frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{24}$. **18.23.** 7,84 т. **18.24.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{6}$. **18.25.** $336\sqrt{3}$ см³. **18.26.** 1330 см³. **18.27.** $\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$. **18.28.** 2 см. **18.29.** $k^3 : 1$. **18.30.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$. **18.31.** $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$ см³. **18.32.** $\frac{d^3\sqrt{3}}{27\sin^2\alpha\cos\alpha}$. **18.33.** $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$. **18.34.** $\frac{H^3\sqrt{3}\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}{4}$. **18.35.** $\frac{1}{12}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **18.36.** $\frac{a^3\sqrt{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos(45°-\alpha)}$. **18.37.** $\frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\beta}{24}$. **18.38.** $\frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{3}$. **18.39.** $\frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{16}$. **18.41.** $\frac{2S_1S_2\cos\frac{\alpha}{2}}{S_1+S_2}$. *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 18.40. **18.42.** $\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{d}$. *Вказівка.* Для тетраедра AA_1BD скористайтеся доведеним у ключовій задачі 18.40. **18.43.** $\frac{8S^2\sin\alpha\sin\beta}{3a\sin(\alpha+\beta)}$. *Вказівка.* Доведіть, що тетраедри $DABM$ і $CABM$ рівновеликі. **18.44.** $\frac{13V}{18}$. *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 17.36. **18.45.** 5 : 1. **18.46.** *Вказівка.* Нехай об’єм описаного паралелепіпеда дорівнює V. Знайдіть суму об’ємів трикутних пірамід, які доповнюють даний тетраедр до описаного паралелепіпеда. **18.47.** $\frac{\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}}{12}$. *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 18.46. **18.49.** *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 18.46. **18.50.** $\sqrt{6}$ см³. *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 18.49. **18.51.** $\sqrt{2}$ см³. **18.52.** $\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{S_1+S_2+S_3+\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}$. *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 3 п. 18, а також у задачі 16.23 з підручника «Геометрія-10». **18.53.** $\left(4-2\sqrt{3}\right)$ см. *Вказівка.* У даному тетраедрі є три рівних ребра, що виходять з однієї вершини. Тоді основа висоти тетраедра, проведеної із цієї вершини, є центром описаного кола грані. Далі скористайтеся доведеним у ключовій задачі 3 п. 18. **18.54.** $\frac{20-2\sqrt{22}}{13}$ см. **18.55.** *Вказівка.* Доведіть, що висоти тетраедрів, проведені з вершин A і A_1, відносяться як відрізки DA і DA_1. **18.56.** 1 : 14. *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 18.55. **18.57.** 2 : 33. **18.58.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см^3, або $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ см^3, або $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^3. *Вказівка*. Доведіть, що в даному тетраедрі бічні грані утворюють рівні кути з площиною основи. Тоді основою висоти тетраедра є або центр вписаного кола трикутника ABC, або центр зовнівписаного кола цього трикутника. **18.59.** $\frac{b^3\sin^2\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{3}$ або $\frac{b^3\cos^2\alpha\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}{3}$. *Вказівка*. З умови випливає, що синуси плоских кутів при вершині D піраміди є рівними. Тоді кожний із кутів ADC і BDC може набувати одного з двох значень: 2α або $60°-2\alpha$. **18.60.** $64\sqrt{3}$ см^2. **18.61.** 936 см^2.

19.1. $\frac{\pi H^3}{4}$. **19.2.** 750π см^3. **19.4.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **19.5.** 64π см^3. **19.6.** 125π см^3. **19.7.** 240π см^3. **19.8.** 744π см^3. **19.9.** $\frac{52\pi}{3}$ см^3. **19.12.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **19.13.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **19.14.** 80 м. **19.15.** 77 кг. **19.16.** 1) 63π см^3; 2) 128π см^3. **19.17.** 1) 12 см; 2) 576π см^3. **19.18.** 3380π см^3. **19.19.** $\frac{2\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **19.20.** $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. **19.21.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ см^3. **19.22.** $\frac{1}{3}\pi b^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\right)$. **19.23.** $\frac{1}{3}\pi R^3\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **19.24.** 448π см^3. **19.25.** 225π см^3. **19.26.** $\frac{1}{3}\pi a^3\sin\beta\operatorname{tg}\beta$. **19.27.** $2\pi\sqrt{6}$ см^3. **19.28.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3. **19.29.** 96π см^3. **19.30.** $\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **19.31.** 6 см. **19.32.** 1,6 т. **19.33.** $\frac{R^3-r^3}{R^3}$. **19.34.** $\frac{760\pi\sqrt{3}}{9}$ см^3. **19.35.** 504π см^3. **19.36.** $162\pi\sqrt{3}$ см^3. **19.37.** 576π см^3. **19.38.** 125 куль. **19.39.** 6 см. **19.40.** $\frac{32\pi H^3}{81}$. **19.41.** $\frac{\pi a^3}{6\sin^3\alpha}$. **19.42.** $\frac{1}{2}$ см. **19.43.** $\frac{\pi}{6}$ см^3. **19.44.** $\frac{6766\pi}{3}$ см^3 або $\frac{1946\pi}{3}$ см^3. **19.45.** $\frac{\pi V\sqrt{3}}{9}$. **19.46.** 28π см^3. **19.47.** $\frac{1}{3}\pi b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **19.48.** 64π см^3. **19.49.** $\frac{1}{24}\pi a^3\sin^3\alpha\operatorname{tg}\beta$. **19.50.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3. **19.51.** $\frac{1}{12}\pi a^3\sin\alpha(2-\cos 2\alpha)$. **19.52.** $\frac{2}{3}\pi r^3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right)$.

19.54. $\dfrac{\pi r^3 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{6\sin^2\dfrac{\alpha}{4}}$. **19.55.** $\dfrac{\pi r^3}{3}\left(\dfrac{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}-\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. **19.56.** 1 : 7. **19.57.** $\dfrac{65}{18}$ см.

20.1. 9 : 25. **20.3.** 232π см². **20.4.** 160π см². **20.5.** 55,3 м. **20.7.** 2500π см². **20.8.** 676π см². **20.9.** 136π см². **20.10.** 1 : 3. **20.11.** 49π см². **20.12.** $\dfrac{4S}{3}$. **20.13.** 1 : 4. **20.14.** $S_1 + S_2$. **20.15.** $S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}$. **20.16.** $\dfrac{\pi a^2}{\cos^2\alpha\sin^2 2\beta}$. **20.17.** $4\pi H^2\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$. **20.18.** $\arccos\left(\sqrt{5}-2\right)$. **20.19.** $\arccos\left(\sqrt{5}-2\right)$. **20.22.** 13 датчиків. *Вказівка.* Позначимо на будь-якому діаметрі d = 4 м сховища 13 точок, що ділять його на 14 рівних частин. Проведемо через ці точки 13 хорд, перпендикулярних діаметру. Оскільки $\dfrac{400}{14}<30$ см, то така система хорд гарантовано зафіксує грабіжника. Доведемо, що 12 датчиків може не вистачити. Розглянемо півсферу, в основі якої лежить круг радіуса R = 2 м (сховище). Для кожної хорди круга розглянемо смугу на півсфері з точок, проекції яких на основу розташовані від даної хорди на відстані, що не перевищує r = 15 см. Площа поверхні кожної смуги дорівнює $2\pi Rr$ (доведіть це самостійно). Це означає, що 12 таких смуг покриють частину півсфери площею, що не перевищує $12\cdot 2\pi Rr = 24\pi Rr$. Оскільки $24\pi Rr < 2\pi R^2$, то на півсфері залишиться непокрита точка. Тоді проекція цієї точки на основу півсфери задає положення грабіжника, що не фіксується охоронними датчиками. **20.23.** 153°. **20.24.** $\dfrac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

21.1. $\sqrt{26}$ см. **21.2.** 10 см. **21.3.** 12 см. **21.4.** $\left(\sqrt{2}+1\right)$ см². **21.5.** 48 см. **21.6.** 480 см². **21.9.** 17 см. **21.10.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **21.11.** 8 см. **21.12.** 2 см. **21.13.** 30 см. **21.14.** 36 см². **21.15.** 36 см². **21.16.** 18 см². **21.17.** 98 см². **21.18.** 6 см². **21.19.** 12 см². **21.20.** 60°. **21.21.** $\dfrac{1}{2}$. **21.22.** 30°, 60°. **21.23.** 45°, 45°. **21.26.** $\dfrac{65}{18}$ см. **21.29.** 15 см. **21.30.** 8 см. **21.31.** 300 см². **21.32.** 3 : 8. **21.33.** 1 : 2. **21.34.** 3 : 5. **21.35.** 7 : 3. **21.36.** 33 см. **21.37.** 14 см. **21.38.** 128 см. **21.40.** $\dfrac{4000}{3}$ см². **21.42.** 10 см. **21.44.** 4 см. **21.46.** 10 см, 6 см, 8 см. **21.47.** 9 см, 12 см, 15 см. **21.48.** 6 см. **21.49.** 16 см. **21.53.** 4 см. **21.54.** 5,5 см. **21.55.** $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **21.56.** 24 см². **21.57.** 12 см². **21.60.** $3S$. **21.61.** $7S$. **21.62.** $5S$. **21.63.** 14 см. **21.64.** 6 см. **21.67.** $60\sqrt{2}$ см². **21.68.** 22 см.

21.69. 12 см². **21.70.** S. **21.71.** $\frac{2S}{3}$. **21.72.** 60°. **21.73.** 30°, 60°. **21.74.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **21.75.** 96 см². **21.76.** $4R^2\sqrt{2}$. **21.77.** 135 см². **21.78.** 288 см². **21.79.** 972 см². **21.80.** 1664 см². **21.81.** 48 см. **21.82.** 624 см². **21.83.** 196 см. **21.84.** 162 см. **21.88.** 60°, 120°, 60°, 120°. **21.89.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **21.90.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **21.91.** 10 см. **21.92.** $\frac{85}{8}$ см. **21.93.** 306 см². **21.94.** $\frac{d^2}{4}$. **21.95.** $R\left(2-\sqrt{3}\right)$. **21.96.** $\frac{1156}{15}$ см². **21.99.** $0{,}5ab$. **21.100.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **21.101.** 90°. **21.104.** Основа висоти, проведеної з вершини B. **21.105.** Точка M є такою, що AM — діаметр кола, описаного навколо трикутника ABC. **21.110.** 1 : 2. **21.111.** $\sqrt{3}:2$. **21.112.** $\frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$. **21.113.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **21.116.** 3 : 1. **21.117.** 3 см², 3 см². **21.118.** 15°. **21.119.** 6 см. **21.120.** 16 см. **21.121.** 20 см. **21.122.** 12,5 см, 4,5 см. **21.123.** 18 см. **21.124.** 8 см, 12 см. **21.138.** $\sqrt{5}$. **21.139.** A (3; −2). **21.140.** (0; −1,5). **21.141.** (2; 0). **21.143.** $(x-1)^2+(y-7)^2=25$. **21.144.** $y=3x+7$. **21.145.** $y=-2$. **21.146.** $y=3x+3$. **21.147.** $y=x\sqrt{3}+2$. **21.148.** $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$. **21.149.** $y = -0{,}5x-4$. **21.152.** $y=x-3$. **21.155.** $\vec{m}(7;1)$. **21.156.** $\sqrt{65}$. **21.157.** 1. **21.158.** 18. **21.159.** 6. **21.160.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **21.161.** 135°. **21.162.** $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\vec{a}+\vec{b}$. **21.163.** $\overrightarrow{EF}=\frac{4}{7}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}$. **21.164.** $\overrightarrow{KM}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$. **21.171.** (6; −9). **21.172.** (3; 4). **21.184.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка X перетину прямих a і A_1B є шуканою. Якщо точки A_1 і B збігаються, то за шукану точку X можна взяти будь-яку точку прямої a. Якщо прямі a та A_1B паралельні, то задача розв'язків не має. **21.185.** *Вказівка*. Нехай A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і BA_1 є шуканою. Справді, $\angle AXK=\angle KXA_1$, оскільки XK — бісектриса кута AXA_1, а $\angle KXA_1=\angle BXD$ як вертикальні. **21.186.** *Вказівка*. Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Шукана точка X — це точка перетину прямих A_1B і a. **21.187.** 1 см або $\sqrt{5}$ см. *Вказівка*. Розгляньте два випадки: поворот за годинниковою стрілкою та проти годинникової стрілки. **21.188.** 2 см або 1 см.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

9 789664 743270