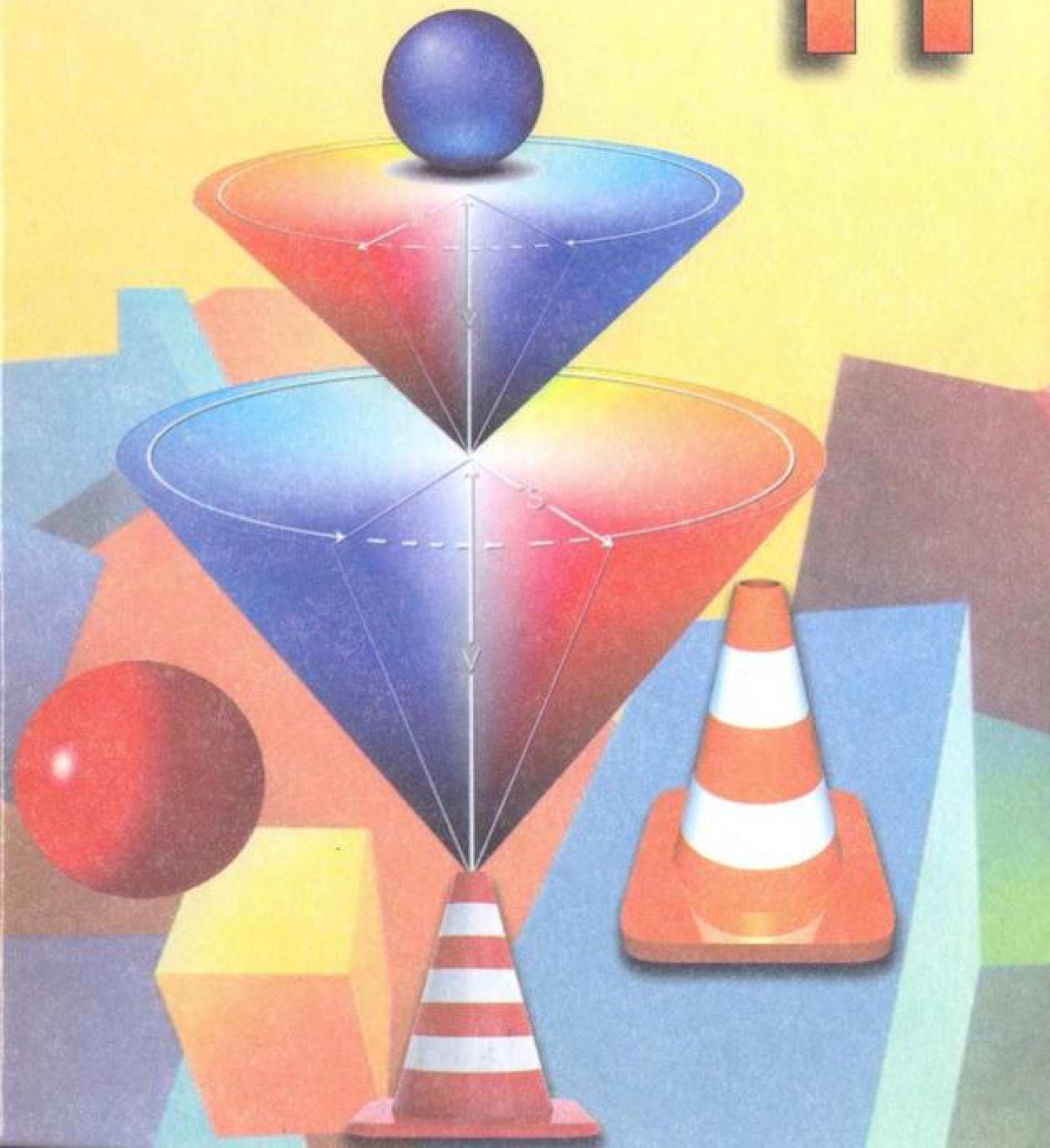
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз,
Н.Г. Владімірова, В.М. Владімір

Геометрія

Академічний рівень,
профільний рівень

11



ББК 22.151я721
Г36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України № 235 від 16.03.2011 р.)

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України.

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки Національної академії
педагогічних наук України.

Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. :
Г36 академ. рівень, профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К. : Генеза, 2011. – 336 с. : іл. – Бібліогр. : с. 310.
ISBN 978-966-11-0064-9.

Цей підручник призначений для завершення вивчення геометрії в середній школі. Він відповідає академічному та профільному рівням. Підручник містить розділи: «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі», «Многогранні кути. Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл» та «Додатки».

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0064-9

ПЕРЕДМОВА

У ваших руках – підручник геометрії для 11-го класу. Для нього характерні дві особливості. По-перше, це підручник, за яким ви будете завершувати вивчення геометрії в середній школі. Він містить другу частину стереометрії та матеріали для повторення усієї геометрії. Завершуючи вивчення геометрії, бажано уявити її всю і розуміти, яке місце займає в ній матеріал 11-го класу. У вміщеній нижче таблиці його виділено кольором.

ГЕОМЕТРІЯ

Планіметрія

Прямі, відрізки, кути, кола, круги
Трикутники, чотирикутники, многокутники
Довжини, площі, міри кутів і дуг
Рухи і перетворення подібності
Координати і вектори на площині

Стереометрія

Прямі і площини у просторі

Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі
Двогранні та многогранні кути
Многогранники, тіла обертання
Площі поверхонь і об'єми геометричних тіл

Друга особливість підручника в тому, що він дворівневий, відповідає академічному і профільному рівням. Підручник містить весь теоретичний матеріал, передбачений програмою академічного рівня, і достатню кількість відповідних вправ. Крім того, він містить матеріал і систему вправ, достатніх для опрацювання геометрії на профільному рівні. Теоретичний матеріал цих рівнів у підручнику розмежовується значком π. У класах академічного рівня параграфи про геометричні перетворення і многогранні кути можна розглядати скорочено, без доведення теорем. Вправи і задачі в підручнику поділено на: вправи для усного розв'язування, рівні А, Б, В, вправи підвищеної складності (позначено *) та вправи для повторення. Переважна більшість вправ у рівні В призначена для учнів, які навчаються за програмою профільного рівня.

Для тих старшокласників, які мають бажання продовжувати вивчення геометрії, в підручник вміщено додаток «Елементи геометрії тетраедра», список тем для самостійних наукових досліджень і перелік додаткової літератури.

Ще одна особливість підручника полягає в тому, що він адресується українським старшокласникам. У ньому багато уваги звернуто на праці українських геометрів, зокрема Михайла Остроградського, Миколи Гулака, Георгія Вороного та ін.

У кожному параграфі підручника є рубрика «Виконаємо разом». У ній наводяться задачі з розв'язаннями. Радимо проглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Знати геометрію – це насамперед уміти користуватися нею. Вчитися користуватися геометричними знаннями найкраще під час розв'язування геометричних задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфа. Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. Наприкінці кожного розділу є задачі за готовими малюнками, умови яких подано малюнками і короткими записами.

Для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу після кожного розділу подається «Головне в розділі». Перевірити, наскільки ви засвоїли новий матеріал, та підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання ви зможете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

У підручнику подано тільки частину сучасної елементарної геометрії, ту, що передбачена програмою. В додатку «Елементи геометрії тетраедра» міститься ще кілька тем, у яких поглиблено розглядаються деякі найважливіші властивості найпростішого многогранника – тетраедра. Ці теми адресуємо для самостійного опрацювання тим учням, які мають бажання займатися посильною для початківців науково-дослідною роботою. Такі теми можна розглянути на математичних гуртках, в інших позакласних і позашкільних заходах. А задачі, що є в «Додатку», можна пропонувати всім учням класів з поглибленим вивченням математики.

Іноді вважають, що найважливіше в геометрії – доведення теорем. Звичайно, вчитися доводити теореми – справа корисна. Але не менш важливу роль у цій науці відіграють поняття, їхні означення і класифікації; геометричні фігури, їхня побудова і перетворення; геометричні величини, їхнє вимірювання та обчислення. Один з відомих геометрів XX ст. Д. Гільберт писав: *«У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком»*.

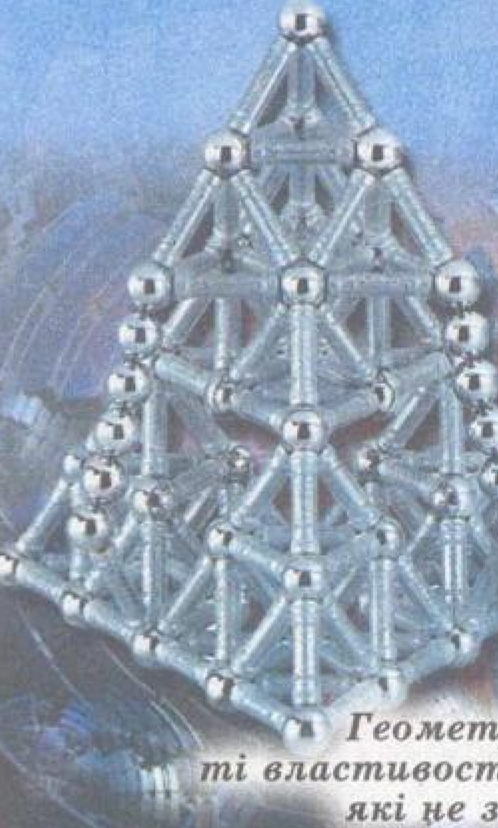
Запрошуємо вас у цей багатий і дивний світ Геометрії!

Автори

Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі

Основні теми розділу:

- Прямокутна система координат.
- Застосування координат.
- Вектори у просторі.
- Геометричні перетворення у просторі.
- Гомотетія та перетворення подібності.



РОЗДІЛ 1

Геометрія – наука, що вивчає ті властивості геометричних фігур, які не змінюються при рухах.

І. Яглом

§ 1 ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Прямокутна система координат на площині розглядалась у попередніх класах. Аналогічну систему координат можна ввести і для простору.

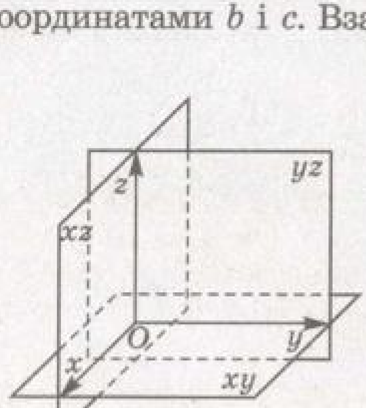
Нехай x, y, z – три попарно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O (мал. 1). Назвемо їх *координатними осями*: «вісь x», «вісь y», «вісь z». Або відповідно: вісь *абсцис*, вісь *ординат* і вісь *аплікат*.

Точка O – *початок координат*. Кожна вісь точкою O розбивається на дві півосі – додатну, позначену стрілкою, і від'ємну. Площини, які проходять через осі x і y, x і z, y і z, – *координатні площини*. Позначають їх відповідно: xy, xz і yz. Координатні площини розбивають простір на 8 *октантів*.

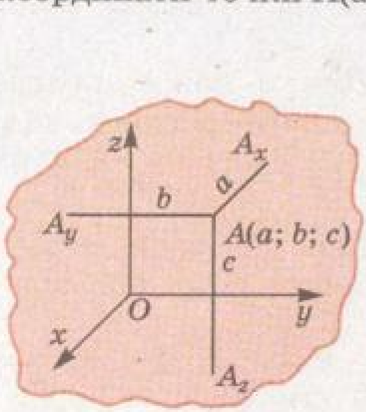
Якщо задано таку систему координат, кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній трійці чисел – єдину точку.

Нехай дано точку A. Опустимо з неї на площини yz, xz, xy перпендикуляри AA_x, AA_y, AA_z (мал. 2). Довжини a, b, c цих перпендикулярів, узяті з відповідними знаками, називають *координатами точки* A. Записують: $A(a; b; c)$. Тут a – абсциса, b – ордината, c – апліката точки A. Якщо точка лежить в якій-небудь координатній площині, її відповідна координата дорівнює нулю. Наприклад, точка $B(0; 2; -3)$ лежить у площині yz, точка $C(5; 0; 0)$ – на осі x.

Якщо через точку $A(a; b; c)$ провести площину, перпендикулярну до осі x, то вона цю координатну вісь перетне в точці з координатою a. Площини, які проходять через точку A перпендикулярно до осей y і z, перетинають їх відповідно у точках з координатами b і c. Взагалі, координати точки $A(a; b; c)$ –



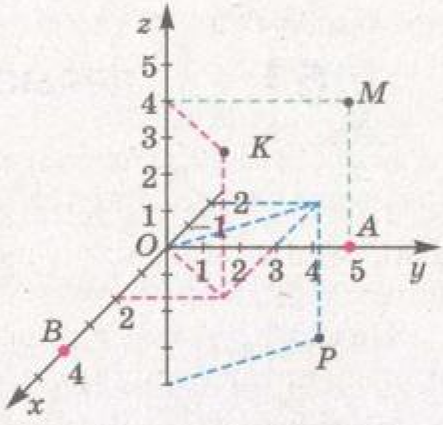
Мал. 1



Мал. 2

це координати проекцій даної точки відповідно на координатні осі x, y, z.

Наприклад, точки, зображені на малюнку 3, мають такі координати: $A(0;\ 5;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$, $M(0;\ 5;\ 4)$, $K(2;\ 3;\ 4)$, $P(-2;\ 3;\ -4)$.



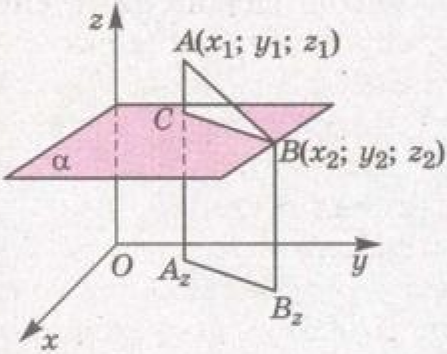
Мал. 3

! **Теорема 1.** ***Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їхніх відповідних координат.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано дві точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (мал. 4). Доведемо, що

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Розглянемо випадок, коли дані точки розміщені, як показано на малюнку 4. Прямі AA_z і BB_z, паралельні осі z, перетинають площину xy в точках $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$ і $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$. Проведемо через точку B площину α, паралельну площині xy. Вона перетне пряму AA_z у деякій точці C. За теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Відрізки CB і A_zB_z рівні та, як відомо з планіметрії,



Мал. 4

$A_zB_z^{\ 2} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$

Довжина відрізка $AC = |z_2 - z_1|$, тому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

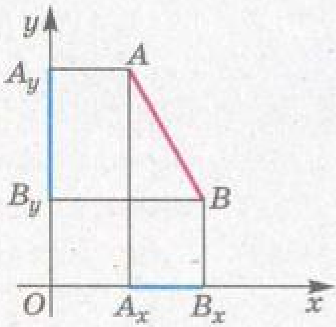
Якщо відрізок AB паралельний, наприклад осі z, то $AB = |z_2 - z_1|$. Такий самий результат дає і загальна формула при $x_2 = x_1$ і $y_2 = y_1$.

Аналогічно можна розглянути й інші випадки і переконатися, що завжди

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Доведена теорема тісно пов'язана з узагальненою для простору теоремою Піфагора.

Нехай у площині дано перпендикулярні прямі Ox, Oy і відрізок AB (мал. 5). Якщо A_xB_x, A_yB_y – проекції відрізка AB

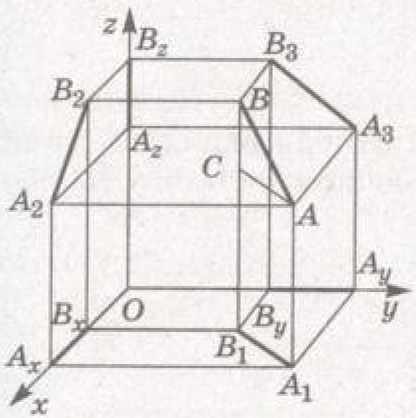


Мал. 5

на прямі Ox, Oy та якщо $AB \nparallel Ox$, $AB \nparallel Oy$, то за теоремою Піфагора $AB^2 = A_xB_x{}^2 + A_yB_y{}^2$. Ця рівність справедлива і в тому випадку, коли $AB \parallel Ox$ або $AB \parallel Oy$. Отже, теорему Піфагора можна узагальнити так: *квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві перпендикулярні прямі.*

Аналогічне твердження справедливе і для простору.

Теорема 2 (просторова теорема Піфагора). ***Квадрат довжини будь-якого відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.***



Мал. 6

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо загальний випадок, коли даний відрізок AB не перпендикулярний до жодної з даних попарно перпендикулярних прямих Ox, Oy, Oz (мал. 6). Координати проекцій точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ на координатні осі x, y і z дорівнюють x_1 і x_2, y_1 і y_2, z_1 і z_2. Довжини проекцій відрізка AB на ці осі:

$$A_xB_x = |x_2 - x_1|,$$

$$A_yB_y = |y_2 - y_1|,\ A_zB_z = |z_2 - z_1|.$$

З доведеної раніше рівності (*) випливає:

$$AB^2 = A_xB_x{}^2 + A_yB_y{}^2 + A_zB_z{}^2. \qquad (**)$$

А якщо, наприклад, $AB \perp Oz$, то $A_zB_z = 0$ і $AB^2 = A_1B_1{}^2 = A_xB_x{}^2 + A_yB_y{}^2$. Бачимо, що рівність (**) справедлива при будь-якому розміщенні відрізка AB.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Що таке координатні осі; початок координат?
3. Назвіть абсцису, ординату й аплікату точки $A(m;\ n;\ k)$.
4. Чому дорівнює квадрат відстані між двома точками?
5. Сформулюйте узагальнену теорему Піфагора.
6. Сформулюйте просторову теорему Піфагора.

Виконаємо разом

1. Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A(1;\ 2;\ 3)$ і початку координат.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $M(x;\ y;\ z)$ – будь-яка точка шуканого геометричного місця точок. Тоді $MA^2 = MO^2$, або

$$(1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

звідси

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Це і є шукане рівняння.

2. Знайдіть координати точки C, яка лежить на осі ординат, коли відомо, що $\triangle ABC$ з вершинами в точках $A(-7;\ 1;\ 2)$ і $B(5;\ 3;\ 1)$ прямокутний.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. У задачі не сказано, який з кутів повинен бути прямим. Тому потрібно розглянути три варіанти, коли прямим буде кут при вершині A, або при вершині B, або при вершині C.

Розглянемо випадок, коли $\angle A = 90°$. Тоді за теоремою Піфагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Нехай $C(0;\ y;\ 0)$ – шукана точка. Тоді

$$BC^2 = 25 + (y - 3)^2 + 1 = (y - 3)^2 + 26;$$
$$AB^2 = 144 + 4 + 1 = 149;$$
$$AC^2 = 49 + (y - 1)^2 + 4 = (y - 1)^2 + 53.$$

Отримаємо рівняння

$$(y - 3)^2 + 26 = 149 + (y - 1)^2 + 53.$$

Його корінь $y = 42$. Отже, $C_1(0;\ 42;\ 0)$.

Розглянувши випадки, коли прямим буде кут B або кут C, отримаємо остаточну відповідь:

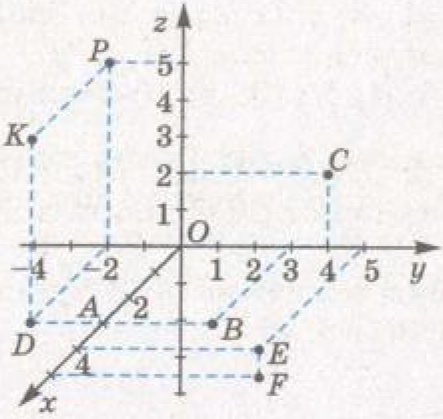
$C_1(0;\ 42;\ 0)$; $C_2(0;\ 32{,}5;\ 0)$;

$C_3(0;\ 2 + \sqrt{39};\ 0)$; $C_4(0;\ 2 - \sqrt{39};\ 0)$.

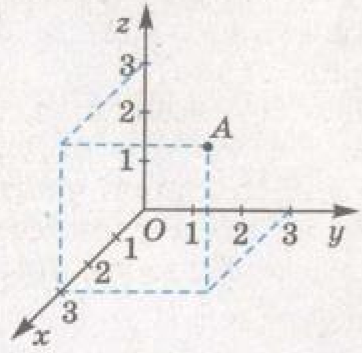
ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1. Назвіть координати точок, зображених на малюнку 7.
2. Дано точки $A(0;\ 3;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$, $D(0;\ -3;\ 0)$. Які з них лежать:
   а) на осі x; б) на осі z; в) у площині xy; г) у площині yz?
3. Чим є геометричне місце точок простору, для яких дорівнює нулю: а) перша координата; б) друга координата; в) третя



Мал. 7



Мал. 8

координата; г) перші дві координати; ґ) другі дві координати; д) перша і третя координати; е) усі три координати?

4. Дано точку $A(3; 3; 3)$ (мал. 8). Знайдіть відстань від неї до: а) координатних площин; б) осей координат; в) початку координат.

5. Знайдіть відстані від точки $M(2; -3; 1)$ до координатних площин.

6. Дано точку $K(2; -3; 1)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.

7. Дано точку $P(2; 3; 1)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні осі.

8. Тетраедр $ABCD$ задано координатами вершин: $A(2; 0; 3)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(4; 0; -1)$, $D(1; 3; 1)$. У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра?

9. Піраміда $SABCD$ задана координатами своїх вершин: $S(-2; 3; -5)$, $A(3; 1; -1)$, $B(3; 2; 2)$, $C(3; -1; 4)$, $D(3; -2; -2)$. Як розміщена площина основи $ABCD$ відносно координатних площин?

10. Які з координатних площин перетинають площину $\triangle MNK$, якщо $M(-2; 2; 4)$, $N(0; -1; 4)$, $K(3; 5; 4)$?

А

11. Побудуйте в прямокутній системі координат точки: $A(6; 0; 0)$, $B(0; 0; 5)$, $C(0; 3; -2)$, $D(4; -2; 0)$, $E(2; 4; 4)$, $F(6; -4; -3)$.

12. Знайдіть координати точок, які віддалені від кожної з координатних площин на 4.

13. Знайдіть відстань між точками $B(-2; 0; 3)$ і $K(3; 4; -2)$.

14. Яка з точок – $A(2; 1; 5)$ чи $B(-2; 1; 6)$ – лежить ближче до початку координат?

15. Дано точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$ і $C(3; 1; 2)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

16. Дано точки $K(0; 1; 1)$, $P(2; -1; 3)$ і $T(-1; y; 0)$. Знайдіть таке значення y, щоб виконувалась умова $KT = PT$.
17. Чи є точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$ і $C(3; 4; 5)$ вершинами трикутника?
18. Дано точки $A(a; b; c)$, $B(2a; 2b; 2c)$, $C(3a; 3b; 3c)$ і $D(4a; 4b; 4c)$, де $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Доведіть, що точки B і C ділять відрізок AD на три рівні частини.
19. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок $A(4; -1; 3)$ і $B(1; 3; 0)$.

Б

20. Знайдіть довжини проекцій відрізка AB на координатні площини та осі, якщо координати його кінців $A(1; 1; 1)$ і $B(1; 4; 5)$.
21. Доведіть, що точки $A(-2; 0; 5)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(1; 1; -3)$ і $D(0; -1; -1)$ є вершинами паралелограма.
22. Установіть вид $\triangle ABC$ та знайдіть його периметр і площу, якщо:
    а) $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$;
    б) $A\ (2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; 4; 0)$;
    в) $A(2; 4; -1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(5; 1; 2)$.
23. Установіть вид чотирикутника $MNPK$ та знайдіть його площу, якщо:
    а) $M(0; -2; 0)$, $N(4; 1; 0)$, $P(4; 1; 5)$, $K(0; -2; 5)$;
    б) $M(6; 8; 2)$, $N(2; 4; 3)$, $P(4; 2; 8)$, $K(8; 6; 7)$;
    в) $M(1; 1; 1)$, $N(1; 0; 1)$, $P(1; 0; 0)$, $K(1; 1; 0)$.
24. Зобразіть у системі координат пряму, яка проходить через точки $A(0; 0; 5)$ і $B(0; 5; 0)$. Знайдіть кути між прямою AB та осями координат.
25. Дано точки $A(0; 0; 4)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 2)$ і $D(2; 0; 0)$. Знайдіть кут між прямими AB і CD.
26. Зобразіть у системі координат площину, яка проходить через точки $A(0; 0; 4)$, $B(0; 4; 0)$ і $C(4; 0; 0)$. Під якими кутами до цієї площини нахилені осі координат?
27. Точки $A(0; 0; 0)$, $B(b; 0; 0)$, $C(0; c; 0)$ і $D(0; 0; h)$ – вершини паралелепіпеда. Знайдіть координати решти його вершин.
28. Точки $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(-1; -1; 1)$ і $C_1(-1; -1; -1)$ – вершини куба. Знайдіть координати решти вершин цього куба.

В

29. Знайдіть координати точки, яка лежить у площині xy і рівновіддалена від точок $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; 1)$ і $C(0; -1; 0)$.
30. Знайдіть точки, рівновіддалені від точок $A(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$ і віддалені від площини yz на відстань 2.

31. Дано точки $P(3;\ 8;\ 1)$ і $Q(2;\ 9;\ 1)$. У площині xy знайдіть координати точки R, коли відомо, що $\triangle PQR$ – правильний.

32. У $\triangle ABC$ вершини A і C мають координати: $A(3;\ 2;\ 1)$, $C(-2;\ -1;\ 3)$. На осі Oz знайдіть точку B таку, що $\triangle ABC$ буде: а) рівнобедреним; б) прямокутним; в) рівностороннім.

33. Доведіть, що піраміда $SABC$, задана координатами своїх вершин $S(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 2)$, – правильна.

34. Основа ABC правильного тетраедра $ABCD$ лежить у площині yz. Знайдіть координати вершин B і D, якщо $A(0;\ -2;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$.

35. Укажіть геометричне місце точок простору, які задовольняють таке рівняння:

а) $\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=10;$

б) $\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}=4.$

Вправи для повторення

36. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого лежать у точках $A(0;\ 0)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 4)$, $D(3;\ 1)$.

37. Знайдіть довжину медіани ND трикутника MNK, якщо $M(-2;\ 4)$, $N(2;\ 5)$, $K(0;\ -2)$.

38. Скільки прямих, паралельних площинам α і β, можна провести через точку, яка не належить цим площинам?

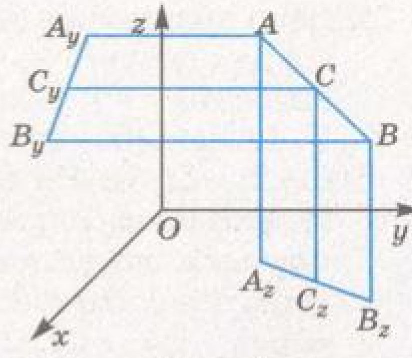
§2 ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Як виражаються координати x, y, z точки $C(x;\ y;\ z)$ – середини відрізка AB – через координати його кінців $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$?

Теорема 3. *Якщо $C(x;\ y;\ z)$ – середина відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Спроектуємо точки A, B і C на площину xy; їхніми проекціями є точки $A_z(x_1;\ y_1;\ 0)$, $B_z(x_2;\ y_2;\ 0)$, $C_z(x;\ y;\ 0)$ (мал. 9). Оскільки проекцією середини відрізка є середина його проекції, то точка C_z – середина відрізка A_zB_z. А з планіметрії відомо, що на площині xy координати середини відрізка виражаються через координати його кінців за формулами



Мал. 9

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Спроектувавши точки A, B, C на площину xz, аналогічно знайдемо

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Наприклад, якщо $C(x;\ y;\ z)$ – середина відрізка з кінцями $A(3;\ 6;\ 5)$ і $B(1;\ 0;\ -7)$, то

$$x = \frac{3+1}{2} = 2,\ y = \frac{6+0}{2} = 3,\ z = \frac{5-7}{2} = -1.$$

Отже, серединою відрізка AB є точка $C(2;\ 3;\ -1)$.

Узагальнимо теорему 3.

π

! **Теорема 4.** ***Якщо точка $P(x;\ y;\ z)$ відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ така, що $AP : PB = m : n$, то***

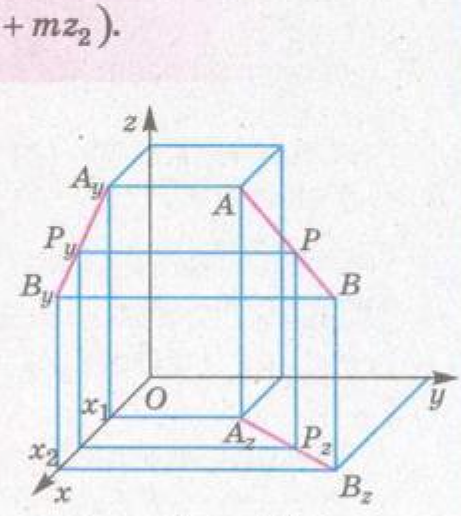
$$x = \frac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2),\ y = \frac{1}{m+n}(ny_1 + my_2),$$

$$z = \frac{1}{m+n}(nz_1 + mz_2).$$

ДОВЕДЕННЯ. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$ (мал. 10). Спроектувавши точки A, B і P на площину xy і вісь Ox, матимемо:

$A_zP_z : P_zB_z = AP : PB = m : n$, або
$(x_1 - x) : (x - x_2) = m : n$.

Звідси $x = \dfrac{1}{m+n}(nx_1 + mx_2)$.



Мал. 10

Аналогічно можна отримати

$$y=\frac{1}{m+n}(ny_1+my_2),\ z=\frac{1}{m+n}(nz_1+mz_2).$$

Якщо $x_1 = x_2$, або $y_1 = y_2$, або $z_1 = z_2$, то доводжувані формули також правильні. Переконайтеся в цьому самостійно.

Якщо чисельники і знаменники розглядуваних формул поділити на n і позначити $AP : PB = \lambda$, то отримаємо формули:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Ці формули задають координати точки P, яка ділить відрізок AB у відношенні $AP : PB = \lambda$.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про координати середини відрізка.
2. Чому дорівнюють координати точки, яка ділить у відношенні $m : n$ відрізок з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$?
3. Як знайти координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = \lambda$?
4. Чому дорівнюють координати середини відрізка, кінці якого $A(4;\ 0;\ 2)$ і $B(6;\ 8;\ 6)$?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(7;\ 0;\ 6)$, $B(4;\ 2;\ 2)$, $C(-3;\ 2;\ 2)$, $D(0;\ 0;\ 6)$ – паралелограм.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо координати середини діагоналей AC і BD.

$$x_1=\frac{7-3}{2}=2,\ y_1=\frac{0+2}{2}=1,\ z_1=\frac{6+2}{2}=4.$$

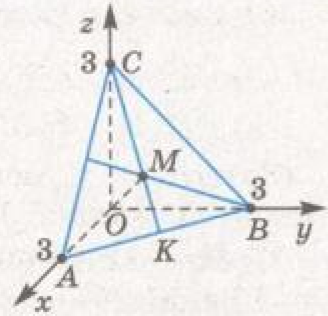
Отже, середина діагоналі AC має координати $O_1(2;\ 1;\ 4)$. Аналогічно

$$x_2=\frac{4+0}{2}=2,\ y_2=\frac{2+0}{2}=1,\ z_2=\frac{2+6}{2}=4.$$

Тобто середина діагоналі BD має координати $O_2(2;\ 1;\ 4)$.

Оскільки координати середин діагоналей збігаються, то це означає, що діагоналі чотирикутника перетинаються та точкою перетину діляться навпіл. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

2. Піраміда $OABC$ задана координатами своїх вершин: $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$ (мал. 11). Знайдіть довжину висоти OM.



Мал. 11

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо довжини ребер даної піраміди. Оскільки $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$ і $OA = OB = OC = 3$, то піраміда правильна. Отже, $M(x;\ y;\ z)$ – точка перетину медіан $\triangle ABC$. За властивістю медіан трикутника $CM : MK = 2 : 1$, тобто $\lambda = 2$.

Оскільки точка K – середина AB – має координати $K\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ 0\right)$, то

$$x = \frac{0+2\cdot 1{,}5}{1+2} = 1,\ y = \frac{0+2\cdot 1{,}5}{1+2} = 1,\ z = \frac{3+2\cdot 0}{1+2} = 1.$$

Отже, координати точки $M(1;\ 1;\ 1)$.

Тоді $OM = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

ВІДПОВІДЬ. $OM = \sqrt{3}$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

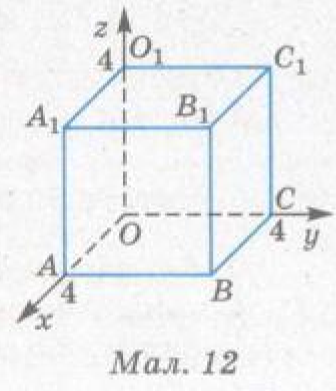
39. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
а) $A(-1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 2;\ 0)$;
б) $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 2)$;
в) $A(-2;\ 4;\ 2)$, $B(2;\ -4;\ 2)$.

40. Чи є початок координат серединою відрізка CD, якщо:
а) $C(-1;\ 0;\ 2)$, $D(1;\ 0;\ -2)$; б) $C(-4;\ 2;\ 6)$, $D(4;\ -2;\ 6)$?

41. На якій координатній осі лежить середина відрізка MN, якщо:
а) $M(2;\ 4;\ -6)$, $N(-2;\ 2;\ 6)$;
б) $M(-3;\ 0;\ 7)$, $N(3;\ 0;\ 2)$?

42. Якій координатній площині належить середина відрізка KP, якщо:
а) $K(2;\ 1;\ 4)$, $P(4;\ 0;\ -4)$;
б) $K(-6;\ 2;\ 1)$, $P(4;\ -2;\ 3)$?

43. Знайдіть координати середини ребер і центрів граней куба, зображеного на малюнку 12.



Мал. 12

А

44. Знайдіть координати середини відрізка PQ, якщо:

а) $P(1,2; -3; 6,3)$, $Q(-2,6; 3,2; -5,1)$;

б) $P\left(\sqrt{3}; 2; 1-\sqrt{2}\right)$, $Q\left(3\sqrt{3}; 1; 1+\sqrt{2}\right)$.

45. Дано точки $A(3; -1; 4)$, $B(-1; 1; -8)$, $C(2; 1; -6)$, $D(0; 1; 2)$. Знайдіть відстань між серединами відрізків:
а) AB і CD; б) AC і BD.

46. Точка M – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(2; -1; 6)$, $M(1; 4; 0)$.

47. Точки M і N ділять відрізок AB на три рівні частини. Знайдіть координати кінців відрізка, якщо $M(1; -1; 2)$, $N(-3; 2; 4)$.

48. Знайдіть довжини медіан $\triangle ABC$, якщо $A(3; 3; 0)$, $B(-5; 1; 2)$, $C(5; -3; -2)$.

49. Знайдіть довжини середніх ліній $\triangle EFK$, заданого координатами своїх вершин: $E(-1; 4; 2)$, $F(-3; 2; -2)$, $K(1; -2; -2)$.

50. Точки M і N – середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть координати вершин A і C, якщо $B(2; 0; -4)$, $M(3; -1; 2)$, $N(1; -4; 0)$.

51. AM – медіана $\triangle ABC$. Знайдіть довжину медіани BN, якщо $A(2; -4; 2)$, $C(0; 0; 6)$, $M(1; 2; 4)$.

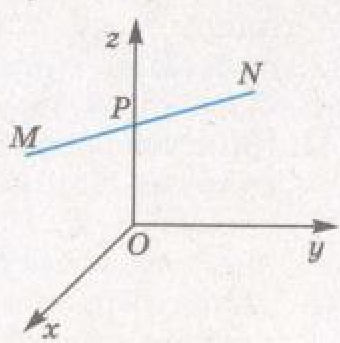
52. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(1; -3; 12)$, $B(0; 2; 6)$, $C(3; 3; -10)$, $D(4; -2; -4)$;
б) $A(4; 2; -5)$, $B(-6; 2; 8)$, $C(2; -3; 9)$, $D(12; 2; -4)$?

53. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; -2)$, $C(-6; 2; 1)$;
б) $A(-1; 7; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(9; -3; -8)$.

54. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершин C і D, якщо $A(1; 3; -2)$, $B(-4; 0; 5)$, $O(1; 0; 2)$.

Б

55. Знайдіть координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = \lambda$, якщо:
а) $A(-5; 4; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $\lambda = 2$;
б) $A(1; -1; 2)$, $B(2; -4; 1)$, $\lambda = 0,5$;
в) $A(1; 0; -2)$, $B(9; -3; 6)$, $\lambda = \frac{1}{3}$.



Мал. 13

56. Знайдіть координати точки перетину медіан $\triangle MNP$, якщо $M(3; 2; 4)$, $N(1; 3; 2)$, $P(-3; 4; 3)$.

57. Середина P відрізка MN лежить на осі z (мал. 13). Знайдіть числа a і b, якщо:

а) $M(a; -2; 3)$, $N(2; b; -1)$;
б) $M(2a^2; -b; 1)$, $N(a - 1; 1; 5)$;
в) $M(3a; b + 1; 4)$, $N(b; 1 - a; -2)$.

58. Знайдіть висоту $\triangle ABC$, проведену до найбільшої сторони, та його площу, якщо $A(1; -1; 2)$, $B(4; 2; -1)$, $C(1; 5; 2)$.

59. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 1)$, $C(3; 1; -1)$. Знайдіть:
а) висоту, проведену до найбільшої сторони;
б) кути трикутника;
в) площу трикутника.

60. Дано координати трьох вершин паралелограма: $A_1(1; -2; 3)$, $A_2(3; 2; 1)$, $A_3(-1; 4; -1)$. Знайдіть координати четвертої вершини. Скільки розв'язків має задача?

61. Знайдіть відстань від початку координат до точки перетину медіан $\triangle ABC$, якщо $A(-1; 2; 10)$, $B(1; 0; 2)$, $C(3; 4; -6)$.

62. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо $\triangle ABC$, якщо: а) $A(-1; 1; 5)$, $B(5; -1; 1)$, $C(1; 5; -1)$;
б) $A(-1; 3; 1)$, $B(2; 4; 1)$, $C(3; 1; 3)$.

63. Знайдіть координати центра кола, вписаного в $\triangle ABC$, якщо:
а) $A(-2; 6; 4)$, $B(4; -2; 6)$, $C(6; 4; -2)$;
б) $A(5; 1; 2)$, $B(2; 4; -1)$, $C(-1; 1; 2)$.

64. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого основа $ABCD$ лежить у площині xy і $A(-2; 4; 0)$, $B(2; 7; 0)$, $C(5; 3; 0)$. Знайдіть координати інших вершин куба і координати точки перетину його діагоналей.

В

65. Знайдіть координати вершини C трикутника ABC, якщо дано вершини $A(3; 4; 0)$, $B(7; 6; -5)$ і точку перетину медіан $M(1; 2; -2)$.

66. BL – бісектриса $\triangle ABC$. Знайдіть координати точки L, якщо $A(5; 6; 3)$, $B(3; 5; 1)$, $C(0; 1; 1)$.

67. Знайдіть довжину бісектриси ML трикутника MNK, якщо $M(4; 0; 1)$, $N(5; -2; 1)$, $K(4; 8; 5)$.

68. Знайдіть відстань від початку координат до площини, яка проходить через точки $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 6)$.

69. Площина α проходить через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ і $C(0; 0; 2)$, а площина β – через точки $K(4; 0; 0)$, $P(0; 4; 0)$ і $T(0; 0; 4)$. Доведіть, що $\alpha \parallel \beta$. Знайдіть відстань між цими площинами.

70. Знайдіть висоту SO піраміди $SABC$ і кути нахилу її бічних ребер до площини основи, якщо:
а) $S(2; 2; 2)$, $A(-2; 0; 4)$, $B(4; -2; 0)$, $C(0; 4; -2)$;
б) $S(2; -1; 0)$, $A(0; 4; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(0; 0; 5)$.

Вправи для повторення

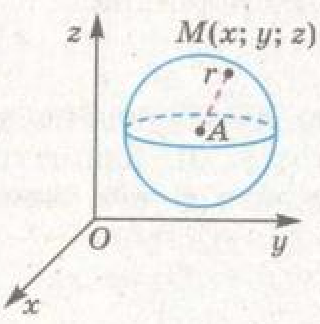
71. Установіть вид $\triangle EFK$, заданого координатами вершин: $E(1; 5; 3)$, $F(3; 1; 5)$, $K(5; 3; 1)$. Знайдіть його периметр і площу.

72. Запишіть рівняння кола, описаного навколо трикутника BCD, якщо $B(-6; 2)$, $C(-2; 5)$, $D(1; 1)$.

73. Знайдіть довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (6; -1)$.

§3 РІВНЯННЯ СФЕРИ, ПЛОЩИНИ ТА ПРЯМОЇ

Рівнянням фігури називають таке рівняння, яке задовольняють координати будь-якої точки даної фігури і тільки точки даної фігури. З планіметрії відомі рівняння прямої $ax + by + c = 0$ і кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, розміщених на координатній площині. Аналогічні рівняння відповідають багатьом фігурам у просторі.



Мал. 14

Рівняння сфери. Сферою називають геометричне місце точок простору, які віддалені на одну й ту саму відстань r від даної точки. Ця точка – центр сфери, а відстань r – її радіус.

Сфера радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$ – це множина всіх точок, віддалених від A на відстань r (мал. 14). За теоремою 1 кожна точка $M(x; y; z)$ даної сфери задовольняє рівняння:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Це рівняння сфери радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$.

Якщо $a = b = c = 0$, дістанемо рівняння сфери радіуса r з центром у початку координат:

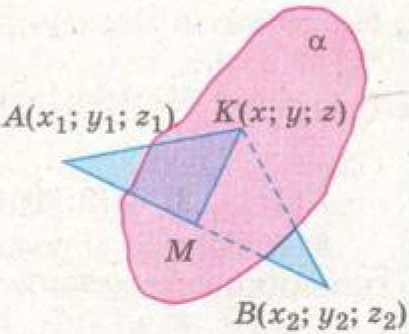
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

ПРИКЛАД. Сфері із центром у точці $A(1; -2; 3)$ радіуса $r = 4$ відповідає рівняння $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$, або

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0.$$

Рівняння площини. Нехай α – довільна площина, а точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ такі, що дана площина α перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину M (мал. 15). Будь-яка точка $K(x;\ y;\ z)$ площини α рівновіддалена від A і B, оскільки $\triangle KMA = \triangle KMB$. Отже, $AK^2 = BK^2$, або

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2. \quad (*)$$



Мал. 15

Навпаки, якщо координати x, y, z задовольняють рівняння (*), то точка $K(x;\ y;\ z)$ рівновіддалена від A і B, а отже, належить площині α.

Як бачимо, рівняння (*) є рівнянням даної площини. Його можна подати в іншому вигляді:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2} - x_2^{\,2} - y_2^{\,2} - z_2^{\,2} = 0.$$

Якщо позначимо $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $2(z_2 - z_1) = c$, $x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2} - x_2^{\,2} - y_2^{\,2} - z_2^{\,2} = d$, дістанемо рівняння:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Отже, будь-якій площині в декартовій системі координат відповідає рівняння $ax + by + cz + d = 0$.

Рівняння прямої. Пряма у просторі – лінія перетину двох площин. Тому їй відповідає система двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0, \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0. \end{cases}$$

Координати кожної точки даної прямої задовольняють цю систему рівнянь, і кожний розв'язок системи – трійка значень x, y і z – координати точки, яка лежить на даній прямій.

Якщо пряма AB, яка проходить через точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, не паралельна жодній координатній площині, їй відповідає система рівнянь

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (**)$$

Мал. 16

Щоб переконатися у цьому, розглянемо малюнок 16. Тут $M(x;\ y;\ z)$ – довільна точка прямої AB, A_z, B_z, M_z – проекції точок A, B і M на площину xy, а пряма AP, паралельна A_zB_z, перетинає прямі BB_z і MM_z у точках K і P.

2*

Прямокутні трикутники AMP і ABK подібні, $MP : BK = AM : AB$,

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=AM:AB.$$

Аналогічно, спроектувавши пряму AB на інші координатні площини, дістанемо:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=AM:AB \text{ і } \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=AM:AB.$$

З трьох останніх рівностей випливає система рівнянь (**), яку називають *рівнянням прямої, що проходить через дві точки*.

Наприклад, прямій, яка проходить через точки $A(1; -2; 0)$ і $B(3; 1; 4)$, відповідає система:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{4}.$$

Якщо у системі рівнянь (**) ввести позначення $x_2 - x_1 = m$, $y_2 - y_1 = n$, $z_2 - z_1 = p$, то отримаємо *канонічне рівняння*

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \qquad (***)$$

Якщо у цьому рівнянні всі відношення позначити через t, тобто $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}=t$, то отримаємо систему

$$\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt. \end{cases}$$

Отримана система рівнянь називається *параметричним рівнянням прямої*. Користуючись параметричним рівнянням прямої, зручно знаходити точки перетину прямих, прямої та площини, прямої та сфери.

Зауважимо, що у канонічному рівнянні прямої одне або два (але не три) з чисел m, n, p може дорівнювати нулю, оскільки в даному випадку це означає не ділення на нуль, а умовну форму запису. При цьому, якщо одне з цих чисел дорівнює нулю, то пряма буде паралельною одній з координатних площин. Якщо ж нулю дорівнюють два числа, то пряма буде паралельною одній з координатних осей. Наприклад, якщо $m = 0$, то пряма паралельна площині yz, а якщо одночасно $m = 0$ і $n = 0$, то пряма буде паралельною осі Oz.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке рівняння фігури?
2. Яку геометричну фігуру називають сферою?
3. Який вигляд має рівняння сфери? А сфери з центром у початку координат?
4. Який вигляд має рівняння площини?
5. Як за допомогою рівнянь можна задати пряму у просторі?

Виконаємо разом

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(4; 2; -1)$, $B(-1; 0; 3)$ і $C(0; 0; 1)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$. Оскільки точки A, B, C належать площині, їхні координати задовольняють її рівняння, тобто

$4a + 2b - c + d = 0,\ -a + 3c + d = 0,\ c + d = 0.$

Виразимо коефіцієнти a, b, c через d: $c = -d$, $a = -2d$, $b = 3d$. Отже, $-2dx + 3dy - dz + d = 0$, звідки $2x - 3y + z - 1 = 0$.

2. Знайдіть довжину хорди, яку сфера $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 35$ відтинає від прямої AB, якщо $A(2; 0; 1)$, $B(6; 1; -2)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тоді рівняння прямої AB матиме вигляд:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-3}=t,$$

звідки

$$\begin{cases} x=4t+2, \\ y=t, \\ z=-3t+1. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину прямої та сфери:

$$(4t + 1)^2 + (t + 2)^2 + (2 - 3t)^2 = 35,$$

або $16t^2 + 8t + 1 + t^2 + 4t + 4 + 4 - 12t + 9t^2 = 35$,
звідки $26t^2 = 26$, тобто $t = \pm 1$.
Тоді $M_1(6; 1; -2)$, $M_2(-2; -1; 4)$.

Тому $M_1M_2 = \sqrt{64+4+36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

74. Які з рівнянь не є рівнянням площини:
а) $2x + 3y - z - 2 = 0$; б) $x + y = 5$; в) $z = 4$; г) $x^2 + y^2 - z^2 = 5$;
ґ) $y = 0$; д) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$; е) $x + 2y - xy + 3z = 2$?

75. Яка з площин проходить через початок координат:
а) $x + 2y + z = 5$; б) $3x - 2y + z = 0$; в) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 0$?

76. Які фігури задають такі рівняння:
а) $z = 0$; б) $y = 2$; в) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
г) $x^2 - y^2 = 0$; ґ) $(x - 2)(y + 3) = 0$; д) $(z - 2)(z + 4) = 0$?

77. Складіть рівняння сфери із центром у початку координат радіуса 2.

78. Яка з прямих проходить через початок координат:
а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$; б) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$?

А

79. Складіть рівняння сфери радіуса $r = 5$ із центром у точці $A(1; 0; 4)$.

80. Назвіть координати трьох точок, що належать сфері радіуса $r = 10$ із центром у початку координат.

81. Чи належить точка $M(3; 2; -1)$ сфері, рівняння якої $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$?

82. Складіть рівняння сфери із центром у точці $B(1; 1; 3)$, коли відомо, що вона проходить через точку $M(2; 0; -1)$.

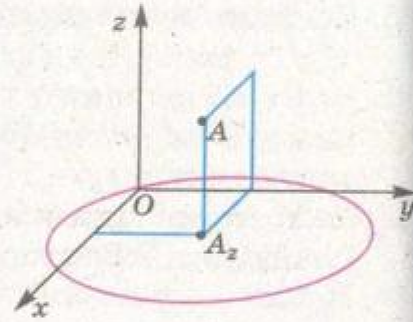
83. Напишіть рівняння сфери з діаметром AB, якщо $A(-2; 1; 4)$, $B(0; 3; 2)$.

84. Напишіть рівняння сфери, радіусом якої є відрізок AB, якщо $A(-2; 1; 3)$, $B(0; 2; 1)$.

85. Знайдіть точки перетину сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 12$, з віссю x.
86. Які з координатних осей перетинає сфера, задана рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 12y + 19 = 0$? Знайдіть координати точок перетину.
87. Дано сферу радіуса $r = 5$ із центром у точці $A(2; 4; 3)$. Знайдіть довжину лінії перетину цієї сфери з площиною xy.
88. Напишіть рівняння сфери із центром у точці $(-2; 3; 1)$, яка дотикається до площини:
а) xy; б) yz; в) xz.
89. Знайдіть радіус і координати центра сфери:
а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 31$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y = 26$.
90. Чи проходить площина, задана рівнянням $2x + 4y + 3z - 7 = 0$, через точку $A(2; 3; -1)$? А через точку $B(-1; 0; 3)$?
91. Знайдіть координати точок, у яких площина, задана рівнянням $2x - y + 3z + 6 = 0$, перетинає координатні осі.
92. Складіть рівняння площини, яка проходить через вісь x і точку $A(1; 1; 1)$.
93. Складіть рівняння площини, яка паралельна площині xy і проходить через точку $A(2; 3; 4)$.

Б

94. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; -3)$ і $B(2; -2; 5)$.
95. Пряму задано системою рівнянь $x - y + 4z = 0$ і $2x + y + 3z - 1 = 0$. Знайдіть координати точок перетину цієї прямої з координатними площинами.
96. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 3; 2)$ і $B(-5; 7; 4)$.
97. Пряму задано системою рівнянь $\frac{x-3}{5}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{7}$. Назвіть координати яких-небудь трьох точок цієї прямої.
98. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-1; 4; 2)$ і ділить відрізок MN навпіл, якщо $M(4; -1; 3)$, $N(-2; 3; 5)$.
99. Площина і пряма задані рівняннями $3x - 2y + z - 7 = 0$ і $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-3}{3}$. Чи перетинаються вони? У якій точці?
100. Пряма і сфера задані рівняннями $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{4}$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 13$. Чи перетинаються вони? У яких точках?



Мал. 17

101. Сфера із центром $A(2; 3; 4)$ проходить через початок координат (мал. 17). Напишіть рівняння кіл, по яких координатні площини перетинають сферу.

102. Складіть рівняння сфери, яка проходить через точки: $O(0; 0; 0)$, $A(4; 4; 2)$, $B(0; 0; 2)$ і $C(0; 4; 0)$.

103. Складіть рівняння сфери, коли відомо, що вона проходить через точки $A(0; 5; 1)$, $B(-2; 0; 4)$, а її центр лежить на осі z.

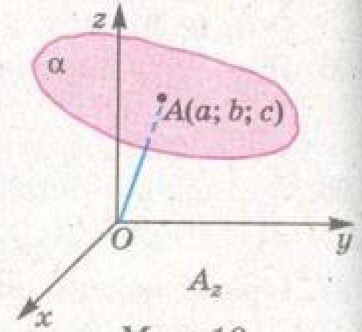
104. Знайдіть геометричне місце точок простору, відстань від яких до сфери $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$ дорівнює 2.

В

105. Залежно від значень параметра a встановіть взаємне розташування сфер:
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$ і $(x-6)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = a^2$.

106. Намалюйте площину, задану рівнянням:
а) $x = 3$; б) $y = -4$; в) $z = 5$; г) $y - 4x = 0$;
ґ) $y - z - 2 = 0$; д) $x + y = 5$; е) $x + y + z = 4$.

107. Доведіть, що кожній площині, яка проходить через початок координат, відповідає рівняння виду $ax + by + cz = 0$.



Мал. 18

108. Доведіть, що коли точка $A(a; b; c)$ – основа перпендикуляра, проведеного з початку координат на площину (мал. 18), то рівняння цієї площини $ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$.

109. На координатних осях дано точки A, B, C такі, що $OA = OB = OC = 2$. Складіть рівняння площини, яка проходить через ці точки.

110. Доведіть, що коли на координатних осях x, y, z дано точки A, B, C такі, що $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, то площині, яка проходить через ці точки, відповідає рівняння $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

111. Точки $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ і $O_1(0; 0; 5)$ – вершини прямокутного паралелепіпеда. Складіть рівняння площин усіх його граней.

112. Координати точок якої фігури задовольняють систему нерівностей: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 4$?

113. Площина і сфера задані рівняннями $4x + 3y - 4 = 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y + 8 = 0$. Чи належить центр сфери даній площині?

114. Знайдіть довжину лінії, по якій площина $z = 2 - y$ перетинає сферу $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$.

115. У якому відношенні площина $3x + 2y + z - 17 = 0$ ділить відрізок AB, якщо $A(1; -1; 4)$, $B(5; 3; 2)$?

Вправи для повторення

116. Напишіть рівняння кола, вписаного в $\triangle ABC$, якщо $A(-3; 0)$, $B(1; 3)$, $C(1; -3)$.

117. Використовуючи координатний метод, доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола, вписаного в квадрат, до вершин цього квадрата є величиною сталою.

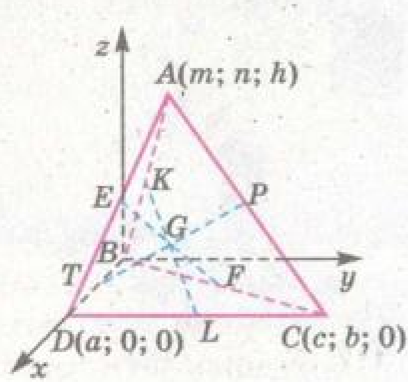
118. Точка M не належить мимобіжним прямим a і b. Чи завжди можна через точку M провести пряму, яка перетинатиме кожну з прямих a і b?

§4 ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ

Якщо розв'язують задачу або доводять теорему, застосовуючи координати точок, рівняння ліній або поверхонь, говорять про *метод координат*. Для прикладу розв'яжемо цим методом кілька задач.

ЗАДАЧА 1. Доведіть, що всі три середні лінії тетраедра проходять через одну точку і діляться цією точкою навпіл (середньою лінією тетраедра називають відрізок, який сполучає середини його протилежних ребер).

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $ABCD$ – довільний тетраедр, KL, EF і PT – його середні лінії. Розмістимо систему координат, як показано на малюнку 19, і позначимо координати вершин тетраедра: $A(m; n; h)$, $B(0; 0; 0)$, $C(c; b; 0)$, $D(a; 0; 0)$. Тоді координати середин ребер і відповідних середніх ліній тетраедра будуть:



Мал. 19

$$K\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{h}{2}\right), L\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b}{2}; 0\right), G\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right),$$

$$E\left(\frac{m+a}{2}; \frac{n}{2}; \frac{h}{2}\right), F\left(\frac{c}{2}; \frac{b}{2}; 0\right), G_1\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right),$$

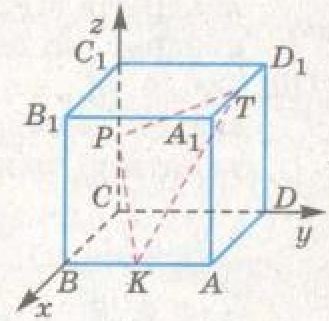
$$P\left(\frac{m+c}{2}; \frac{n+b}{2}; \frac{h}{2}\right), T\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), G_2\left(\frac{m+a+c}{4}; \frac{n+b}{4}; \frac{h}{4}\right).$$

Відповідні координати точок G, G_1 і G_2 рівні. Отже, ці точки збігаються. G – середина кожної середньої лінії даного тетраедра. (Розв'яжіть задачу іншим способом.)

Точка G, у якій перетинаються всі середні лінії тетраедра, називається *центроїдом тетраедра*.

ЗАДАЧА 2. Знайдіть на трьох попарно мимобіжних ребрах куба такі три точки, сума квадратів відстаней між якими була б мінімальною.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – довільний куб, K, P, T – точки на його попарно мимобіжних ребрах AB, CC_1, A_1D_1. Якщо систему координат розмістити, як показано на малюнку 20, і позначити довжину ребра куба буквою a, то координати розглядуваних точок будуть: $K(a;\ y;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ z)$, $T(x;\ a;\ a)$. Сума квадратів відстаней між точками:



Мал. 20

$$KP^2 + PT^2 + TK^2 = a^2 + y^2 + z^2 + x^2 + a^2 + (a - z)^2 + (a - x)^2 + (a - y)^2 + a^2 = 2(3a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - ax - ay - az) =$$

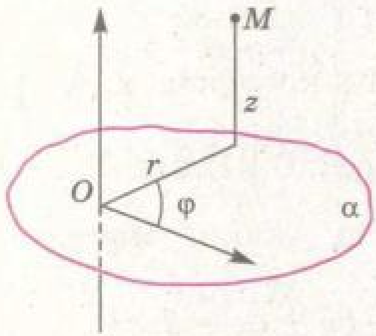
$$= 2\left(\frac{9}{4}a^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right).$$

Найменшого значення ця сума набуває, коли $x = y = z = \frac{a}{2}$. Тому K, P, T – середини мимобіжних ребер куба.

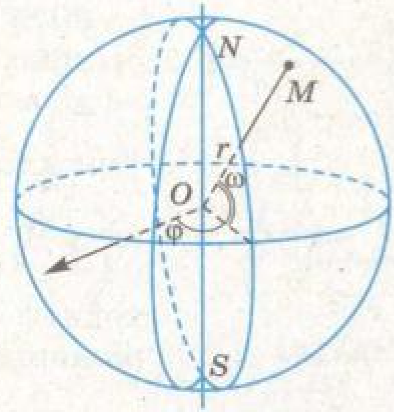
Розглянута вище прямокутна система координат широко застосовується у прикладних науках і на виробництві.

У трьох взаємно перпендикулярних напрямах (по осях координат) переміщуються робочі вузли багатьох сучасних верстатів (мал. 21).


Мал. 21



Мал. 22



Мал. 23

Існують координатно-розточувальні та інші верстати із числовим програмним керуванням. Звичайно, прямокутна система координат – найпростіша. У прикладних науках і техніці використовуються циліндрична, сферична та інші системи координат. У циліндричній системі кожна точка простору задається двома відстанями r і z та кутом φ (мал. 22). У сферичній – двома кутами φ і ω та відстанню r (мал. 23). Приклад сферичної системи координат – сітка паралелей і меридіанів на глобусі (тут r стале). Конструктори і наладчики різних роботів і роторних механізмів зазвичай використовують циліндричну систему координат.

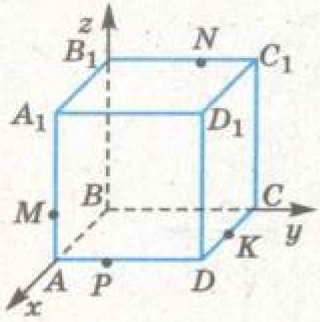
Відомо, що комп'ютери видають різні траєкторії, графіки, схеми та інші геометричні образи. Здійснюється це завдяки обчисленням координат їхніх точок.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому суть методу координат?
2. Що таке тетраедр; центроїд тетраедра?
3. Що таке середня лінія тетраедра?
4. Доведіть, що центроїд тетраедра – середина кожної його середньої лінії.
5. Які існують системи координат у просторі?

Виконаємо разом

1. Площина проходить через точки M, N і K куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $K \in CD$, $AM : MA_1 = 1 : 2$, $B_1N : NC_1 = 3 : 2$, $CK = KD$. У якому відношенні ця площина ділить ребро AD?



Мал. 24

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Розмістимо систему координат відносно даного куба, як показано на малюнку 24, і позначимо $AB = 1$. Дані точки мають такі координати: $M\left(1;\ 0;\ \frac{1}{3}\right)$, $N\left(0;\ \frac{3}{5};\ 1\right)$, $K\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)$. Площину, яка проходить через ці точки, можна задати рівнянням:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Якщо підставимо в це рівняння координати названих точок, дістанемо систему

$$\begin{cases} a+\frac{1}{3}c+d=0, \\ \frac{3}{5}b+c+d=0, \\ \frac{1}{2}a+b+d=0. \end{cases}$$

Звідси $a = 26$, $b = 20$, $c = 21$, $d = -33$. Отже, січній площині відповідає рівняння

$$26x + 20y + 21z - 33 = 0.$$

Точка $P(1;\ y;\ 0)$ лежить на січній площині. Отже, $26 + 20y - 33 = 0$, звідки $y = \frac{7}{20}$. Якщо $AP = \frac{7}{20}$, то $PD = \frac{13}{20}$.

ВІДПОВІДЬ. $AP : PD = 7 : 13$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

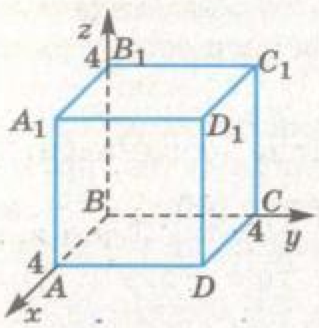
Виконайте усно

119. Назвіть координати вершин куба, зображеного на малюнку 25.

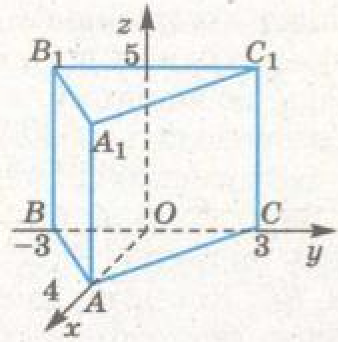
120. Назвіть координати вершин трикутної призми, зображеної на малюнку 26.

121. Вершина трикутної піраміди лежить у початку координат, а вершини основи лежать на координатних осях у точках, які віддалені від початку координат на a. Назвіть координати вершин піраміди.

122. Чому дорівнює ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо $A(2;\ 0;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 4)$? Чи може одна з вершин цього куба знаходитися в початку координат?



Мал. 25



Мал. 26

123. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано координати вершин $A(1; -1; 0)$, $B(1; 1; 0)$. Укажіть координати вершин A_1 і D_1.

А

124. а) Виберіть прямокутну систему координат і зобразіть куб, заданий системою нерівностей: $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 4$.

б) Задайте системою нерівностей інший куб з ребром 4.

125. Задайте системою нерівностей прямокутний паралелепіпед з ребрами 3, 3 і 6.

126. Ребро куба дорівнює 1. Запишіть координати вершин такого куба, що:

а) одна з вершин куба лежить у початку координат;

б) осі Ox і Oy є осями симетрії нижньої основи куба, перпендикулярними до його сторін;

в) діагоналі нижньої основи куба лежать на осях Ox і Oy.

127. Знайдіть координати вершини D правильного тетраедра $ABCD$ і відстань від неї до площини ABC, якщо $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 6)$.

128. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = AD = a$, $AA_1 = 2a$. E, F, M, N – середини A_1D_1, D_1C, CD і A_1D відповідно. Доведіть, що відрізки EM і FN перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

Б

129. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребрами $AB = 2$, $BC = 4$, $AA_1 = 6$. У якому відношенні площина AB_1C ділить відрізок BK, де K – середина DD_1?

130. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та точки M і N на ребрах AA_1 і CC_1. Чи проходить площина MB_1N через вершину D, якщо: а) $AM = MA_1$, $CN = NC_1$; б) $AM : MA_1 = 3 : 1$, $CN : NC_1 = 1 : 3$?

131. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, яка проходить через точки A, A_1 і центри граней зі спільним ребром CC_1.

132. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, яка проходить через одну з його вершин і середини трьох ребер, які містять цю вершину.

133. Сфера проходить через середини трьох ребер куба, які містять одну вершину, і через вершину куба, протилежну першій. Знайдіть радіус сфери, якщо ребро куба дорівнює 20.

134. Чотири точки A, B, C, D розміщені у просторі так, що $AD \perp BC$. Доведіть, що $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

135. Знайдіть геометричне місце точок простору, сума квадратів відстаней від яких до кінців даного відрізка стала.

136. Знайдіть на грані куба точку, сума квадратів відстаней від якої до всіх вершин протилежної грані найменша. Чому дорівнює ця сума, якщо довжина ребра куба a?

137. Центр квадрата є і центром сфери, яка проходить через вершини квадрата. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до всіх вершин квадрата стала для даного квадрата (не залежить від вибору точки на сфері).

138. Усі вершини куба лежать на сфері. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин куба стала для даного куба.

139. В одну з граней куба вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки цього кола до вершин протилежної грані куба стала.

140. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M – середина ребра AA_1, K – центр грані CC_1D_1D. У якому відношенні площина, яка проходить через точки B_1, M і K, ділить ребра CC_1 і DD_1?

141. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки M, N, P на відрізках AB_1, DC, A_1C_1 відповідно. У якому відношенні площина MNP ділить відрізок D_1C_1, якщо $AM : MB_1 = 1 : 3$, $DN : DC = 1 : 2$, $A_1P : A_1C_1 = 2 : 3$?

В

142. На якій відстані від основи куба розміщено паралельний основі відрізок завдовжки b, якщо один кінець відрізка лежить на діагоналі куба, а другий – на мимобіжній з нею діагоналі бічної грані? Довжина ребра куба дорівнює a.

143. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = BC = a$, $AA_1 = 2a$. Знайдіть довжину відрізка MK, паралельного грані ABB_1A_1, якщо $M \in AD_1$, $K \in DB_1$, $AM : AD_1 = 2 : 3$.

144. Знайдіть відстань від вершини D тетраедра $ABCD$ до його грані ABC, якщо $AC = CB = 10$, $AB = 12$, $DA = 7$, $DB = \sqrt{145}$, $DC = \sqrt{29}$.

145. Знайдіть довжину ребра AD тетраедра $ABCD$, якщо $AB = AC = BC = 10$, $DB = 2\sqrt{29}$, $DC = \sqrt{46}$ і відстань від вершини D до площини грані ABC дорівнює 5.

Вправи для повторення

146. Напишіть рівняння фігури, яка складається з точок, рівновіддалених від точок $A(-2;\ 1;\ -1)$ і $B(4;\ -1;\ 3)$.

147. Діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см та перетинаються в точці O. Довжина перпендикуляра OM до площини ромба дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки M до сторін ромба.

148. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$.

§5 ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Величини бувають *скалярні* та *векторні*. Значення скалярних величин – числа, значення векторних величин – *вектори*. Вектори на площині розглядали у попередніх класах. Тепер вивчимо найважливіші властивості векторів у просторі. Як і раніше, зображатимемо їх напрямленими відрізками.

Відомий геометр, академік О.Д. Александров роз'яснює: «Часто векторами називають самі напрямлені відрізки. Це не зовсім точно: предмет і його зображення не одне й те саме. Але в розмовній мові, показуючи, наприклад, слона на фотографії, кажуть: "Це слон", і ніхто не каже: "Це зображення слона". Так і в геометрії з векторами: малюючи напрямлений відрізок, говорять, що намалювали вектор, хоча це тільки зображення вектора».

Ми також замість «вектор, зображений напрямленим відрізком $\overline{AB}$» писатимемо і говоритимемо «вектор $\overline{AB}$». Усе ж не забудемо, що напрямленими відрізками зображають не тільки вектори. І зображати вектори можна не тільки напрямленими відрізками.

Вектори часто задають за допомогою координат. *Координатами вектора* $\overline{AB}$, початок якого $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а кінець $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, називають числа $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

Записують такий вектор, зазначаючи його координати:

$$\overrightarrow{AB}=(x;\ y;\ z) \text{ або } \vec{a}=(x;\ y;\ z).$$

Наприклад, якщо точки $A(3;\ 0;\ 2)$ і $B(0;\ 4;\ 3)$ – початок і кінець напрямленого відрізка AB (мал. 27), то $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$.

Отже, напрямленому відрізку $\overrightarrow{AB}$ відповідає вектор $\vec{a}=(-3;\ 4;\ 1)$. Числа -3, 4 і 1 – координати цього вектора.

Два вектори називаються *рівними*, якщо їхні відповідні координати рівні. Рівним векторам відповідають рівні за довжиною й однаково напрямлені відрізки і навпаки.

Координати вектора можуть бути будь-якими дійсними числами. Якщо всі координати вектора – нулі, то його називають *нульовим вектором* і позначають символом $\vec{0}$. Це єдиний вектор, якому не відповідає напрямлений відрізок і який не має напряму.

Якщо O – початок координат, а числа a_1, a_2, a_3 – координати точки A, то ці самі числа є і координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ (мал. 28). Вектор $\overrightarrow{OA}$ можна зобразити і напрямленим відрізком $\overrightarrow{KP}$, де $K(k_1;\ k_2;\ k_3)$ – будь-яка точка простору, а P – точка з координатами $k_1 + a_1$, $k_2 + a_2$, $k_3 + a_3$. Адже $k_1 + a_1 - k_1 = a_1$, $k_2 + a_2 - k_2 = a_2$, $k_3 + a_3 - k_3 = a_3$.

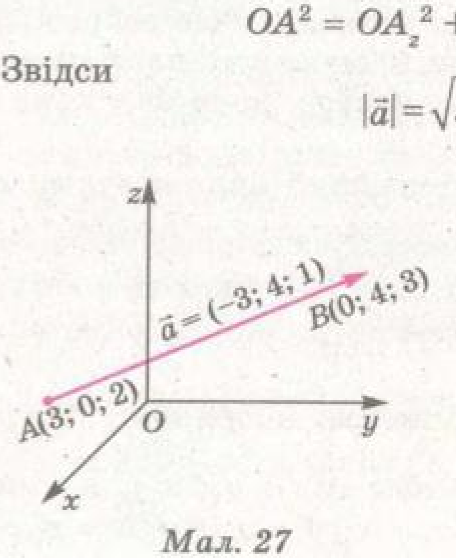
Говорять: будь-який вектор можна відкласти від будь-якої точки простору.

Довжиною, або *модулем*, *вектора* називають довжину напрямленого відрізка, що зображає його. Позначають довжину вектора $\vec{a}$ символом $|\vec{a}|$. Довжину вектора $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ можна виразити через його координати (див. мал. 28). Сторони прямокутника OEA_zF дорівнюють x і y, тому $OA_z^{\,2} = x^2 + y^2$. У прямокутному трикутнику OA_zA катет $A_zA = z$, отже,

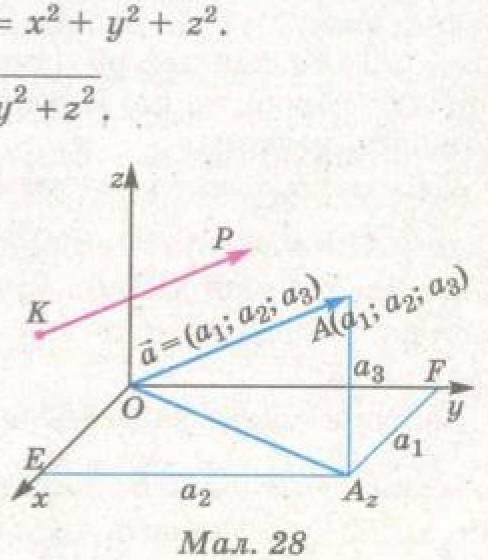
$$OA^2 = OA_z^{\,2} + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Звідси

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$



Мал. 27



Мал. 28

Довжина будь-якого ненульового вектора – число додатне. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Вектори, яким відповідають паралельні напрямлені відрізки, називають *колінеарними*. Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні тільки тоді, коли точки O, A і B лежать на одній прямій. Колінеарні вектори бувають співнапрямлені або протилежно напрямлені.

Три вектори називають *компланарними*, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розміщені в одній площині або в паралельних площинах. Вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ компланарні тільки за умови, що точки O, A, B і C лежать в одній площині.

Мал. 29

ЗАУВАЖЕННЯ. У геометрії розглядаються тільки *вільні* вектори. Фізики частіше використовують *прикладені* (зв'язані) вектори, які визначаються не лише довжиною і напрямом, а й точкою прикладання. Хоч вони мають багато спільного з вільними векторами, все ж відрізняються від них суттєво. Наприклад, щоб розв'язати задачу про дію сил, прикладених до пружини (мал. 29), вільні вектори не підходять. Адже в таких задачах не однаково, у яких точках прикладено сили.

У картографії векторами називають будь-які відрізки, навіть криволінійні, які показують напрями морських течій, руху армії тощо. Такі «вектори» не можна ні додавати, ні множити.

Далі розглядатимемо лише вільні вектори, називаючи їх просто векторами.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які величини називають векторними?
2. Що таке координати вектора?
3. Які вектори називають нульовими? Як їх позначають?
4. Що таке модуль вектора?
5. Які вектори називають колінеарними?
6. Які вектори називаються компланарними?
7. Які вектори називають вільними, а які – прикладеними?

Виконаємо разом

1. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = (a;\ 2a;\ -a)$, якщо його довжина $\sqrt{54}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. $\sqrt{a^2+(2a)^2+(-a)^2}=\sqrt{54}$, $6a^2 = 54$, $a^2 = 9$, звідки $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

ВІДПОВІДЬ. $\vec{a}=(3;\ 6;\ -3)$ або $\vec{a}=(-3;\ -6;\ 3)$.

2. Доведіть, що при будь-яких значеннях a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3 вектори $\vec{a}=(0;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}=(0;b_2;b_3)$ і $\vec{c}=(0;c_2;c_3)$ компланарні.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Перші координати даних векторів – нулі. Тому, якщо відкласти ці вектори від початку координат, усі відповідні їм напрямлені відрізки розмістяться у площині yz. Отже, дані вектори компланарні.

3. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(-2;\ 3;\ 5)$, $B(-1;\ 4;\ 2)$, $C(4;\ 1;\ -3)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо $ABCD$ паралелограм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Нехай точка D має координати $D(x;\ y;\ z)$. Тоді $\overrightarrow{AB}=(1;1;\ -3)$ і $\overrightarrow{DC}=(4-x;\ 1-y;\ -3-z)$. Оскільки рівні вектори мають рівні координати, то

$$\begin{cases}4-x=1,\\1-y=1,\\-3-z=-3.\end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases}x=3,\\y=0,\\z=0.\end{cases}$$

ВІДПОВІДЬ. $D(3;\ 0;\ 0)$.

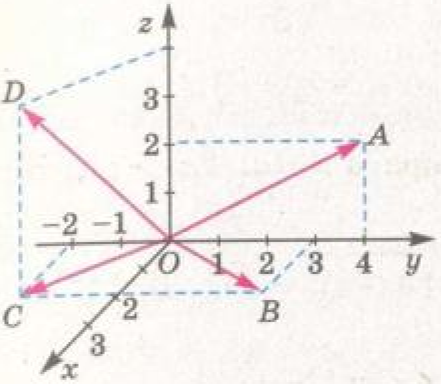
ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

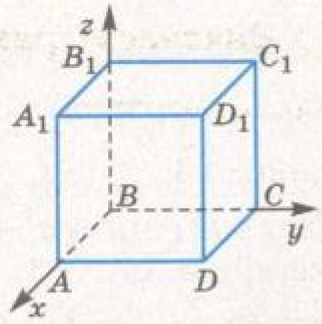
149. Назвіть координати векторів, зображених на малюнку 30.

150. Дано точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(-7;\ 0;\ 2)$, $C(3;\ -1;\ 4)$, $O(0;\ 0;\ 0)$. Укажіть координати векторів $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{AB}$.

151. Які координати має вектор $\overline{MN}$, якщо $\overline{NM} = (2;\ -1;\ 4)$?



Мал. 30



Мал. 31

152. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 31). Назвіть вектори:

а) рівні векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{AC}$;

б) протилежні до векторів $\overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{BD}$;

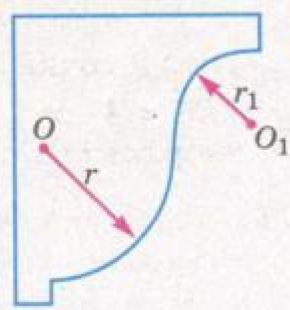
в) колінеарні з векторами $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA_1}$;

г) компланарні з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C}$.

153. Відомо, що $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Чи випливає з цього, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні?

154. Відомо, що $\vec{a}=\vec{b}$. Чи завжди $|\vec{a}|=|\vec{b}|$?

155. У кресленні напрямленими відрізками (прямолінійними стрілками) позначають радіуси кіл і дуг (мал. 32). Чи зображають такі напрямлені відрізки вектори?



Мал. 32

А

156. Точки A, B, C, D, E, F – вершини заданого у просторі правильного шестикутника. Задайте за їх допомогою пару векторів:
а) рівних;
б) протилежно напрямлених;
в) співнапрямлених, але не рівних.

157. Точка B – середина відрізка AC, а C – середина відрізка BD. Чи рівні між собою вектори:

а) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

158. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 7;\ 6)$;

б) $A(-3; 2; 1)$, $B(1; -4; 3)$;
в) $A(a; -a; 3a)$, $B(2a; -3a; -a)$.

159. Знайдіть довжини векторів $\vec{m} = (1; -1; 1)$, $\vec{n} = (0; 2; -4)$, $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 5)$, $\vec{c} = (-1; 4; 8)$, $\vec{d} = (0; 1; -3)$.

160. Знайдіть координати і довжину вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:
а) $M(4; -1; 3)$, $N(1; -1; -1)$;
б) $M(19; 4; 35)$, $N(20; 3; 40)$;
в) $M(2a; a; -4a)$, $N(3a; 4a; -5a)$.

161. Дано точки $A(-1; 3; -2)$, $B(4; 2; 1)$, $C(-3; -1; 2)$, $D(2; -2; 5)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$. Чи є серед цих векторів рівні вектори?

162. Знайдіть координати початку напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$, що відповідає вектору $\vec{a} = (3; 4; 2)$, якщо його кінець – точка $B(-5; 4; 1)$.

163. Знайдіть координати кінця напрямленого відрізка $\overrightarrow{CB}$, який відповідає вектору $\vec{c} = (-1; 3; -2)$, якщо його початок – точка $C(-2; -1; -3)$.

164. Дано точки $M(1; 3; 4)$, $N(7; 5; 1)$, $K(5; -1; 4)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їхні модулі. Установіть вид $\triangle MNK$ та знайдіть його периметр і площу.

165. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(1; -2; 3)$, $B(4; -2; -1)$, $C(-2; 2; -3)$, $D(-5; 2; 1)$;
б) $A(-2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(4; 2; -3)$, $D(3; -1; -7)$?

166. Довжини векторів $\vec{a} = (2; 1; 3)$ і $\vec{b} = (-1; x; 2)$ рівні. Знайдіть x.

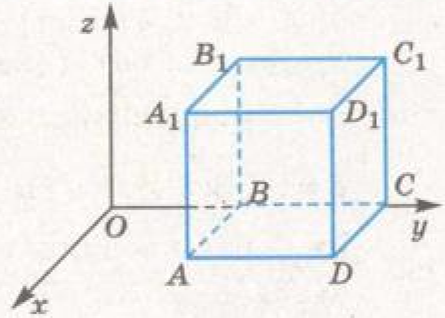
167. Як відносяться довжини ненульових векторів $\vec{a} = (a; b; c)$ і $\vec{n} = (2a; 2b; 2c)$?

168. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
а) Чи колінеарні вектори:
1) $\overrightarrow{A_1B_1}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{C_1D_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{CD_1}$; 4) $\overrightarrow{AD_1}$ і $\overrightarrow{BA_1}$?
б) Напишіть трійку компланарних векторів.

Б

169. У прямокутній системі координат позначте вектори $\vec{a} = (2; 4; 0)$, $\vec{b} = (0; 3; 1)$, $\vec{c} = (0; 0; 2)$, $\vec{d} = (2; 2; 3)$.

170. У прямокутній системі координат розмістіть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1, як на малюнку 33. Знайдіть координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{B_1C}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{BB_1}$.



Мал. 33

171. Знайдіть координати вектора, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{2}$, а всі координати рівні.

172. Знайдіть координати вектора, які є послідовними членами арифметичної прогресії, якщо його довжина $2\sqrt{14}$, а ордината дорівнює 4.

173. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(1; -3; 1)$, $B(2; 4; -6)$, $C(3; -1; 1)$;
б) $A(2; -2; 1)$, $B(4; 0; -1)$, $C(1; 2; -3)$.

174. Дано чотирикутники $ABCD$ і $MNPK$. Який із чотирикутників є ромбом, а який – квадратом, якщо:
$A(6; 7; 8)$, $B(8; 2; 6)$, $C(4; 3; 2)$, $D(2; 8; 4)$ і
$M(3; 5; 2)$, $N(7; 1; 2)$, $P(3; -3; 2)$, $K(-1; 1; 2)$?

175. M, N, K – середини сторін AB, BC, AC трикутника ABC. Знайдіть координати вектора $\overline{NK}$, якщо $A(-1; 3; -5)$, $M(3; 2; -6)$.

176. При якому значенні a довжина вектора $\vec{m}$ дорівнює $\sqrt{21}$, якщо:
а) $\vec{m}=(4; a; 2)$; б) $\vec{m}=(a-1; 1; 4)$;
в) $\vec{m}=(a; 1; a+2)$; г) $\vec{m}=(a-1; a-2; a+1)$?

177. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, якщо:
а) $\vec{a}=(1; -2; m^2)$, $\vec{b}=(1; -2; m)$;
б) $\vec{a}=(m-1; 9; 2m)$, $\vec{b}=(-4; m^2; -6)$;
в) $\vec{a}=(m^2-m; m+3; 2m)$, $\vec{b}=(2; 2m+1; m^2)$;
г) $\vec{a}=(m-3; m^2; -2)$, $\vec{b}=(-2m; 2m-1; -2)$?

178. Чи колінеарні вектори:
а) $\vec{a}=(1; 1; 0)$ і $\vec{b}=(1; 1; 2)$;
б) $\vec{k}=(0; 1; 0)$ і $\vec{p}=(0; -2; 0)$?

В

179. $ABCD$ – тетраедр, K, P, T – середини його ребер AB, AC і AD. Чи компланарні вектори:

а) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{KP}$;

б) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KT}$ і $\overrightarrow{CB}$?

180. Чи компланарні вектори $\vec{a} = (3;\ 2;\ 0)$; $\vec{b} = (6;\ 3;\ 0)$ і $\vec{c} = (8;\ 1;\ 0)$?

181. $ABCD$ – довільний тетраедр, K і M – середини його ребер AC і BD. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{KM}$ компланарні.

Вправи для повторення

182. Дано вектори $\vec{a} = (1;\ -2)$, $\vec{b} = (4;\ -5)$. Знайдіть:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; г) $3\vec{b} - 2\vec{a}$.

183. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (1;\ m)$ і $\vec{b} = (-2;\ 4)$:

а) колінеарні; б) перпендикулярні?

184. Пряма b перетинає пряму a, яка паралельна площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

§6 ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Дії над векторами у просторі означаються аналогічно до того, як вони означалися для векторів на площині.

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

Властивості суми векторів. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ справедливі рівності:

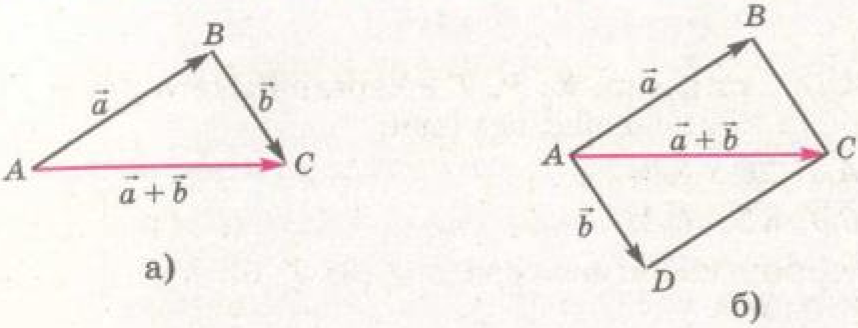
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – переставний закон додавання;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ – сполучний закон додавання.

Щоб довести ці властивості, достатньо порівняти відповідні координати лівої та правої частин кожної векторної рівності.

Геометрично суму двох векторів простору можна знаходити, користуючись *правилом трикутника*: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 34, *а*). Адже для будь-яких трьох точок $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ і $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1),$$



Мал. 34

$$\overline{BC} = (x_3 - x_2;\ y_3 - y_2;\ z_3 - z_2).$$

Тому

$$\overline{AB} + \overline{BC} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1) = \overline{AC}.$$

Можна користуватися і *правилом паралелограма*: якщо $ABCD$ – паралелограм, то $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ (мал. 34, *б*).

Суму трьох некомпланарних векторів можна знаходити за *правилом паралелепіпеда*: якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед (мал. 35), то $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1} = \overline{AC_1}$.

Адже за правилом паралелограма $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ і $\overline{AC} + \overline{AA_1} = \overline{AC_1}$.

Суму кількох векторів можна знаходити за *правилом многокутника*. Наприклад, як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D, E, завжди $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$.

Два вектори, сума яких дорівнює нульовому вектору, називають *протилежними*. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ завжди протилежні один одному. При будь-яких значеннях x, y, z вектори $\vec{a} = (x; y; z)$ і $\vec{a}_1 = (-x; -y; -z)$ протилежні.

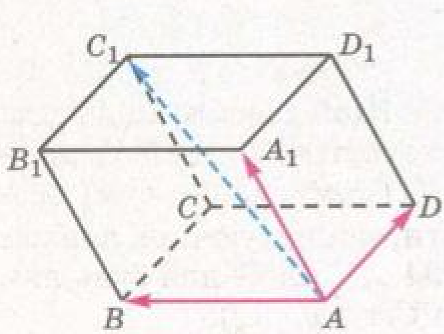
Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. З цього означення випливає, що завжди $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$. І якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ то $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$.

Множити на число вектор простору можна так, як і вектор площини. Якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справедливі рівності:

1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, де λ – число;

2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, де λ, μ – числа;



Мал. 35

3) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, де λ – число.

Ці властивості безпосередньо випливають з означення множення вектора на число.

При множенні вектора на число отримуємо вектор, колінеарний даному, тобто якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то позначивши відношення їхніх довжин через λ, отримаємо, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ($\lambda > 0$), якщо вектори співнапрямлені, і $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$, якщо вектори протилежно напрямлені.

Тому має місце така ***ознака колінеарності двох векторів***: вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли існує число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, або вектори $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Компланарність векторів. Кілька векторів компланарні, якщо відповідні їм напрямлені відрізки паралельні деякій площині. Три вектори, серед яких є принаймні один нульовий, компланарні.

З 9-го класу відомо, що будь-який вектор $\vec{c}$ площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто існує єдина впорядкована пара чисел α, β таких, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Отже, якщо вектор $\vec{c}$ компланарний з неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то має міце рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. І навпаки, якщо для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

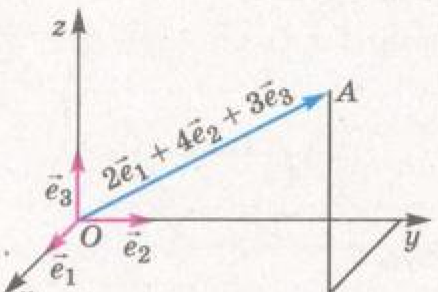
Розкладання вектора. Вектори $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ називають *ортами*. Завжди, якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Таке подання вектора у вигляді суми називають *розкладом даного вектора за ортами* (мал. 36). Він завжди можливий і однозначний. Взагалі, якщо дано три некомпланарні вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, то будь-який вектор $\overline{OM}$ можна подати, причому єдиним способом, у вигляді

$$\overline{OM} = a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC},$$

де a, b, c – деякі дійсні числа.



Мал. 36

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які дії можна виконувати над векторами у просторі?
2. Що таке сума векторів?
3. Як знаходять суму векторів за правилом трикутника; паралелограма; паралелепіпеда?
4. Чому дорівнює різниця векторів $\vec{a} = (a;\ a;\ a)$ і $\vec{b} = (b;\ b;\ b)$?
5. Що таке орти?
6. Що означає розкласти даний вектор за ортами?

Виконаємо разом

1. Нехай K і P – середини відрізків AB і CD, які лежать на мимобіжних прямих, а O – середина відрізка KP. Доведіть, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Вектори $\overline{OK}$ і $\overline{OP}$ протилежні (мал. 37). Отже, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 2 \cdot \overline{OK} + 2 \cdot \overline{OP} = 2(\overline{OK} + \overline{OP}) = \vec{0}$.

2. M – середина ребра BC тетраедра $PABC$, O – середина AM. Виразіть вектор $\overline{PO}$ через вектори $\overline{PA} = \vec{a}$, $\overline{PB} = \vec{b}$, $\overline{PC} = \vec{c}$ (мал. 38).

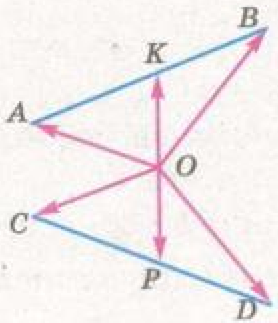
РОЗВ'ЯЗАННЯ. За правилом паралелограма (побудованого на відрізках PB і PC) маємо $2 \cdot \overline{PM} = \overline{PB} + \overline{PC}$, звідки $\overline{PM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

Аналогічно знаходимо:

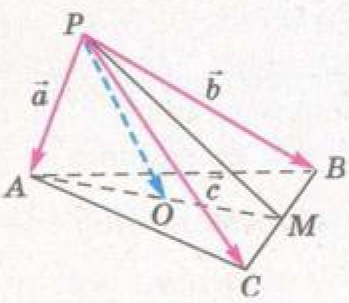
$$\overline{PO} = \frac{1}{2}(\overline{PA} + \overline{PM}) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\right) = \frac{1}{4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

3. Доведіть, що коли точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$, а X – будь-яка точка простору, то

$$\overline{XM} = \frac{n}{m+n}\overline{XA} + \frac{m}{m+n}\overline{XB}.$$



Мал. 37



Мал. 38

РОЗВ'ЯЗАННЯ. $\overline{XM} + \overline{MA} = \overline{XA}$, $\overline{XM} + \overline{MB} = \overline{XB}$.

Отже, $n\overline{XM} + n\overline{MA} = n\overline{XA}$, $m\overline{XM} + m\overline{MB} = m\overline{XB}$.

Якщо додати почленно ці векторні рівності та врахувати, що $n\overline{MA} + m\overline{MB} = \vec{0}$, дістанемо $(m + n)\overline{XM} = n\overline{XA} + m\overline{XB}$, звідки

$$\overline{XM} = \frac{n}{m+n}\overline{XA} + \frac{m}{m+n}\overline{XB}.$$

4. Чи компланарні вектори:

а) $\vec{a} = (1; 3; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6; 4)$, $\vec{c} = (0,5; 1,5; -1)$;

б) $\vec{a} = (-1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 5; 3)$, $\vec{c} = (4; -5; -1)$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. а) Відповідні координати даних векторів пропорційні, тому ці вектори колінеарні, а отже, компланарні. Вони або лежать в одній площині, або паралельні одній площині.

б) Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, бо їхні відповідні координати не пропорційні. Якщо вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ будуть компланарними. Якщо такий розклад неможливий, то вектори не будуть компланарними. Тому встановимо, чи існують такі числа α і β, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, тобто чи має розв'язки система рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha - 2\beta = 4, \\ 2\alpha + 5\beta = -5, \\ \alpha + 3\beta = -1. \end{cases}$$

Додаючи перше і третє рівняння, отримаємо, що $\beta = 3$, тоді $\alpha = -10$. Отже, $\vec{c} = -10\vec{a} + 3\vec{b}$. Це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

185. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a} = (-2; 0; 3)$ і $\vec{b} = (1; 1; 0)$;

б) $\vec{c} = (-2; -1; 4)$ і $\vec{d} = (3; 1; -1)$.

186. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (-4; 1; 2)$. Знайдіть координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{b} - \vec{a}$; $\vec{a} + \vec{a}$; $\vec{b} - \vec{b}$.

187. Помножте вектор $\vec{m} = (-6; 4; 0)$ на: 2; –3; 0,5; $-\frac{1}{4}$.

188. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a} = (1; 1; 2)$ і $\vec{b} = (2; 2; 4)$;

б) $\vec{a} = (1; 2; 3)$ і $\vec{b} = (3; 2; 1)$;
в) $\vec{a} = (2; 4; 7)$ і $\vec{b} = (1; 2; 3,5)$?

189. Знайдіть суму векторів: а) $\overline{AX} + \overline{XB}$; б) $\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PK}$.

190. Знайдіть різницю векторів: а) $\overline{XA} - \overline{XT}$; б) $\overline{MA} - \overline{MD}$.

А

191. Знайдіть суму векторів:
а) $\vec{a} = (3; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; -2; 5)$;
б) $\vec{a} = (-2; 4; 11)$, $\vec{b} = (2; 6; 21)$;
в) $\vec{a} = (-3,2; 4,6; 3)$, $\vec{b} = (-0,2; 2; 3,5)$;
г) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}; 0,3; \frac{2}{5}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$.

192. Знайдіть суму векторів $\vec{x} = \left(0; 3; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y} = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ і $\vec{z} = \left(-4; \frac{1}{2}; 2\right)$.

193. Знайдіть суму векторів:
а) $\overline{CX}$ і $\overline{XP}$; б) $\overline{BT}$ і $\overline{AB}$; в) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DA}$.

194. $ABCD$ – тетраедр. Чому дорівнює $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$?

195. Доведіть, що коли O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$.

196. Доведіть, що коли O – центр правильного шестикутника $ABCDEF$, то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} = \vec{0}$.

197. Знайдіть різницю $\vec{a} - \vec{b}$, якщо:
а) $\vec{a} = (4; 1; 5)$, $\vec{b} = (3; 5; -1)$; б) $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = (3; 4; -2)$.

198. Нехай O – центр правильного шестикутника $ABCDEF$. Доведіть, що:
а) $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{OB}$; б) $\overline{AB} - \overline{DC} = \overline{AO}$.

199. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, $\overline{AA_1} = \vec{c}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\overline{AD_1}$, $\overline{AC}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{A_1C}$.

200. Помножте вектор $\vec{a} = (3; -4; 2)$ на: $3; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; 0$.

201. Дано вектор $\vec{p} = (6; -8; 0)$. Знайдіть координати вектора:
а) $2\vec{p}$; б) $-\vec{p}$; в) $-1,5\vec{p}$; г) $\frac{1}{2}\vec{p}$; д) $0 \cdot \vec{p}$.

202. Дано вектори $\vec{a} = (-1; 3; 7)$ і $\vec{b} = (6; 2; -8)$. Знайдіть координати вектора:
а) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$; в) $0,5\vec{a} - 1,5\vec{b}$.

203. Знайдіть довжини векторів $3\vec{a} - \vec{b}$ і $2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2; 0; -3)$, $\vec{b} = (5; -1; 2)$.

Б

204. Розкладіть за ортами вектор:

а) $\vec{a} = (3; -4; 7)$; б) $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; -1\right)$.

205. Знайдіть координати вектора $2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

206. Знайдіть числа a, b, c, якщо $\vec{m} = (2; 3; 4) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3$.

207. Чи колінеарні вектори $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (2; -2; 4)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (-8; 16; 0)$?

208. При яких значеннях k вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:
а) $\vec{a} = (2; k; -3)$, $\vec{b} = (-4; 10; 6)$;
б) $\vec{a} = (k; -2; -1)$, $\vec{b} = (-3; 6; 3k)$?

209. Доведіть, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо:
а) $\vec{a} = (-2; 4; 6)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$, $\vec{c} = (1; -2; -3)$;
б) $\vec{a} = (1; 2; 5)$, $\vec{b} = (0{,}3; 0{,}2; 1)$, $\vec{c} = (-3; -2; -10)$.

210. Дано точки $A(-3; 2; 5)$, $B(4; -1; 2)$, $C(1; 0; -2)$, $D(-2; 6; 1)$. Знайдіть координати векторів:

$$\overline{AB} + \overline{CD};\ \overline{AC} + \overline{BD};\ \overline{AD} + + \overline{BC};\ \overline{BA} + \overline{BD};\ \overline{DA} + \overline{DC}.$$

211. Дано вектори $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -3; -1)$, $\vec{c} = (-1; 5; 7)$. Знайдіть: $|\vec{a} + \vec{b}|$; $|\vec{a} + \vec{c}|$; $|2\vec{a} + 3\vec{c}|$; $|\vec{b} - 2\vec{a}|$; $|2\vec{b} - \vec{c}|$.

212. Доведіть, що коли O – точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$.

213. Знайдіть числа x, y, z, якщо $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = (x; 2; z)$, $\vec{b} = (-3; 2y; 3z - 1)$ і:
а) $\vec{p} = (1; -5; 3)$; б) $\vec{p} = (3; -7; 12)$; в) $\vec{p} = (-1; 6; -9)$.

214. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнапрямленого з вектором $\vec{p}$, якщо $\vec{p} = (2; -2; -1)$ і $|\vec{a}| = 6$.

215. Знайдіть координати одиничного вектора, протилежно напрямленого до вектора $\vec{c} = (1; -3; 2)$.

216. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $\overline{OA} = (-1; 2; -6)$, $\overline{OB} = (2; -4; 3)$, $\overline{OC} = (2; -4; 6)$?

217. Знайдіть координати точки P, яка лежить на прямій MN, якщо $M(4; -1; 2)$, $N(3; 2; 1)$ і $|\overline{MP}| = 2\sqrt{11}$.

218. Знайдіть усі значення a, при яких вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ колінеарні, якщо:
а) $\vec{m} = (-1; 4; -2)$, $\vec{n} = (2; a; 4)$;

б) $\vec{m} = (a + 1;\ 2;\ a)$, $\vec{n} = (1;\ a;\ 2)$;
в) $\vec{m} = (3;\ 5 - a;\ a)$, $\vec{n} = (5 + a;\ 7a + 1;\ 2)$.

219. При яких значеннях a і b точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо $\overline{AB} = (-1;\ a;\ b)$, $\overline{AC} = (3;\ 6;\ -1)$?

В

220. Чи компланарні вектори:
а) $\vec{a} = (-2;\ 1;\ 1)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 2)$, $\vec{c} = (0;\ 2;\ -1)$;
б) $\vec{a} = (1;\ -2;\ -1)$, $\vec{b} = (3;\ -4;\ 2)$, $\vec{c} = (-1;\ 4;\ 6)$?

221. Вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – некомпланарні. Доведіть, що компланарними є вектори

$$\vec{a} = -2\vec{m} + \vec{n} - 2\vec{p},\ \vec{b} = -3\vec{m} + 4{,}5\vec{n} - 7\vec{p},$$
$$\vec{c} = \vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}.$$

222. Дано вектори $\vec{a} = (1;\ 2;\ -3)$, $\vec{b} = (0;\ 3;\ 1)$, $\vec{c} = (2;\ 5;\ 2)$ і $\vec{m} = (4;\ 0;\ -7)$. Знайдіть числа a, b і c такі, щоб виконувалася рівність $\vec{m} = a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}$.

223*. Доведіть, що кожний відрізок, який сполучає вершину тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані, проходить через центроїд тетраедра і ділиться ним у відношенні 3 : 1.

224*. Доведіть, що коли O – центр правильного многокутника $A_1A_2A_3...A_n$, то $\overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 + \overline{OA}_3 + ... + \overline{OA}_n = \vec{0}$.

Вправи для повторення

225. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} = (-1;\ 4)$ і $\vec{b} = (2;\ 5)$.

226. При якому значенні a вектори $\vec{m} = (-1;\ a)$ і $\vec{n} = (9;\ a)$ перпендикулярні?

227. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Через точку D проведіть пряму, паралельну площині ABC.

§7 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки.

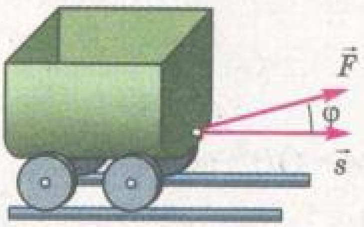
Від вибору цієї точки міра розглядуваного кута не залежить. Вважають, що кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими – 0°.

Тепер введемо поняття скалярного добутку двох векторів простору.

Скалярним добутком двох векторів називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їхній скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi.$$



Мал. 39

Якщо хоч один з векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Приклад застосування скалярного добутку векторів відомий з фізики. Механічна робота A, яку виконує стала сила $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{s}$ (мал. 39), дорівнює скалярному добутку даних векторів:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\varphi.$$

Застосовується це поняття й в геометрії. З означення скалярного добутку векторів випливає, що відрізки AB і CD перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ дорівнює нулю (ознака перпендикулярності векторів). Важливі й інші наслідки. Щоб користуватися ними, треба знати властивості скалярного добутку векторів.

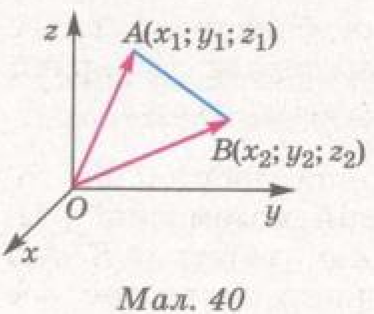
!

Теорема 5. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ дорівнює $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.***

ДОВЕДЕННЯ. Відкладемо дані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від початку координат (мал. 40). Їм відповідають напрямлені відрізки $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, кінці яких $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Якщо дані вектори неколінеарні, то ABO – трикутник. За теоремою косинусів

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi,$$

звідки



Мал. 40

$$OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2). \qquad (*)$$

Виразимо квадрати довжин векторів $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ і $\overline{AB}$ через їхні координати:

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$OB^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

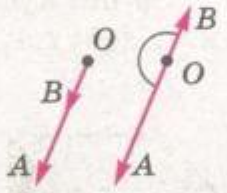
Тому

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=OA\cdot OB\cdot\cos\varphi=\frac{1}{2}\Big(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-$$

$$-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2\Big)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Доведене співвідношення справджується і для кутів φ, що дорівнюють 0° або 180° (мал. 41). Адже у першому із цих випадків

$$AB^2=|OA-OB|^2=OA^2+OB^2-$$
$$-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 0°,$$



Мал. 41

а у другому

$$AB^2=(OA+OB)^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos 180°.$$

Отже, теорема, яку доводимо, правильна і для колінеарних векторів. Завжди

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

ПРИКЛАД. Якщо $\vec{a}=(2;\,-1;\,4)$, $\vec{b}=(1;\,0;\,3)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1+(-1)\cdot 0+4\cdot 3=14.$$

Якими б не були вектори $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $\vec{c}=$ $=(x_3;\,y_3;\,z_3)$, завжди

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \text{ і } (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Істинність цих властивостей випливає з тотожностей:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1;$$
$$(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3+(z_1+z_2)z_3=$$
$$=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)+(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3).$$

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора* $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0°=|\vec{a}|^2$, звідки випливає, що $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Доведені властивості дають можливість порівняно легко виконувати перетворення векторних виразів – за тими самими правилами, за якими виконують тотожні перетворення алгебраїчних виразів. З іншого боку, знаючи скалярний добуток двох векторів та їхні довжини, легко можна обчислити косинус кута між ними. А це дає можливість застосовувати скалярний добуток векторів під час розв'язування багатьох задач.

ЗАУВАЖЕННЯ. Чому говорять скалярний добуток векторів, а не добуток векторів? Бо у вищій математиці розглядається ще векторний, косий та інші добутки. *Косим добутком* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів і синуса орієнтованого кута між першим і другим векторами.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює φ, називають такий вектор $\vec{c}$, що
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$; 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що з його кінця найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видно проти руху годинникової стрілки. Важливу роль тут відіграє й орієнтація простору, кута тощо. Тому, взагалі кажучи, для таких добутків переставний закон не має місця.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
2. Сформулюйте означення кута між двома векторами.
3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$?
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів, принаймні один з яких нульовий?
5. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.
6. Як знайти довжину вектора $\vec{a}$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(1; -3; -5)$, $B(1; 1; -2)$, $C(1; 3; 3)$.

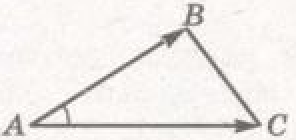
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Введемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (мал. 42) і знайдемо їхні координати

$$\overline{AB} = (0; 4; 3),\ \overline{AC} = (0; 6; 8).$$

За означенням скалярного добутку $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos A$.

Тому $\cos A = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$.

Оскільки $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 + 24 + 24 = 48$, $|\overline{AB}| = \sqrt{0+16+9} = 5$, $|\overline{AC}| = \sqrt{0+36+64} = 10$, то $\cos A = \dfrac{48}{5 \cdot 10} = \dfrac{24}{25}$.



Мал. 42

ВІДПОВІДЬ. $\angle A = \arccos\dfrac{24}{25}$.

2. Знайдіть $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3\sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=30°$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 30°+|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+18+27}=\sqrt{49}=7.$$

ВІДПОВІДЬ. $|\vec{a}+\vec{b}|=7$.

3. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=(1;\ 2;\ 2)$ і $\vec{b}=$ $=(2;\ 3;\ 6)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 6}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{20}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}.$$

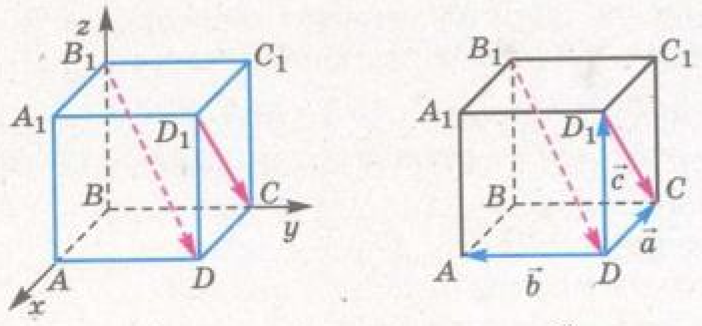
ВІДПОВІДЬ. $\cos\varphi=\dfrac{20}{21}$.

4. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $B_1D\perp D_1C$.

ДОВЕДЕННЯ. I спосіб. Розмістимо даний куб у прямокутній системі координат (мал. 43, *а*) і введемо вектори $\overline{B_1D}$ і $\overline{D_1C}$. Оскільки $B_1(0;\ 0;\ a)$, $D(a;\ a;\ 0)$, $D_1(a;\ a;\ a)$, $C(0;\ a;\ 0)$, то $\overline{B_1D}=(a;\ a;\ -a)$, $\overline{D_1C}=(-a;\ 0;\ -a)$. Тоді $\overline{B_1D}\cdot\overline{D_1C}=-a^2+0+a^2=0$.

Отже, $\overline{B_1D}\perp\overline{D_1C}$. З чого випливає, що перпендикулярними будуть і відрізки B_1D і D_1C.

II спосіб. Введемо вектори $\overline{DC}=\vec{a}$, $\overline{DA}=\vec{b}$, $\overline{DD_1}=\vec{c}$ (мал. 43, *б*). Тоді $\overline{B_1D}=\overline{B_1B}+\overline{BD}=-\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$, $\overline{D_1C}=\overline{DC}-\overline{DD_1}=$ $=\vec{a}-\vec{c}$. Тоді $\overline{B_1D}\cdot\overline{D_1C}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})=-(\vec{a}^2-\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-$ $-\vec{b}\cdot\vec{c})=-(|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2)=0$, бо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ і $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. Отже, $\overline{B_1D}\perp\overline{D_1C}$.



Мал. 43

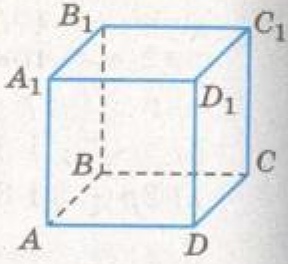
ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

228. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 1 (мал. 44).

а) Знайдіть кут між векторами: $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$; $\overline{AA_1}$ і $\overline{AD}$; $\overline{BD}$ і $\overline{BC}$; $\overline{BC}$ і $\overline{B_1C_1}$; $\overline{AB}$ і $\overline{D_1C_1}$; $\overline{AD_1}$ і $\overline{AD}$; $\overline{AA_1}$ і $\overline{BB_1}$; $\overline{B_1B}$ і $\overline{DD_1}$.

б) Знайдіть: $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; $\overline{BC} \cdot \overline{DD_1}$; $\overline{DC} \cdot \overline{AB}$; $\overline{AA_1} \cdot \overline{D_1D}$; $\overline{AB_1} \cdot \overline{AA_1}$.



Мал. 44

229. Знайдіть кут між двома одиничними векторами, якщо їхній скалярний добуток дорівнює:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) 1; ґ) –0,5; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

230. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (0; 1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 0; 1)$;
б) $\vec{a} = (1; 1; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$;
в) $\vec{a} = (6; 0; -3)$, $\vec{b} = (-2; -5; 0)$;
г) $\vec{a} = (4; 2; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; -1)$.

231. Який знак має скалярний добуток двох векторів, якщо кут між ними:

а) гострий; б) тупий?

232. Укажіть вид кута між векторами, якщо їхній скалярний добуток:

а) дорівнює нулю; б) додатний; в) від'ємний.

А

233. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. Знайдіть кути між векторами:

а) $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$; б) $\overline{CA}$ і $\overline{AB}$; в) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$.

234. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини і кут між ними дорівнюють:

а) 5, 12, 60°; б) 3, $\sqrt{2}$, 45°; в) 5, 6, 120°; г) 4, 7, 180°.

235. Трикутник ABC – рівносторонній, $AB = 12$. Знайдіть скалярний добуток:

а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

236. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (-8; 2; 4)$;
б) $\vec{m} = (-2; -3; 2)$ і $\vec{n} = (2; 3; 0,5)$;

в) $\vec{p} = (-3; -7; 1)$ і $\vec{k} = (-2; 10; -6)$;

г) $\vec{c} = \left(4\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{5}\right)$ і $\vec{d} = (2; 3; -10)$.

237. Дано вектори $\vec{p} = (1; -5; 2)$, $\vec{q} = (3; 1; 2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{p} - \vec{q}$;

б) $\vec{p} + 2\vec{q}$ і $3\vec{p} - \vec{q}$;

в) $2\vec{p} + \vec{q}$ і $3\vec{p} - 2\vec{q}$.

238. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$;

б) $\vec{a} = (2; 6; 4)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

в) $\vec{a} = (-4; -8; 1)$, $\vec{b} = (-3; 3; 0)$;

г) $\vec{a} = (-3; -4; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$.

239. Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a} = (-2; 0; 2)$, $\vec{b} = (0; 0; 4)$;

б) $\vec{x} = (1; 1; 0)$, $\vec{y} = (0; -1; 1)$;

в) $\vec{c} = (0; 0; 2)$, $\vec{d} = (1; 0; -1)$;

г) $\vec{p} = (0; 2; 2)$, $\vec{k} = (3; 0; 3)$.

240. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 1; 3)$, $B(7; 4; 5)$, $C(4; 2; 1)$ – прямокутний.

241. При яких значеннях x вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні:

а) $\vec{m} = (1; 2; 3)$, $\vec{n} = (x; 3; 1)$;

б) $\vec{m} = (-3; x; 2)$, $\vec{n} = (9; x; 1)$;

в) $\vec{m} = (x + 2; x; 3)$, $\vec{n} = (1; 3; -2)$;

г) $\vec{m} = (x - 3; x; 1)$, $\vec{n} = (4; x; -3x)$?

242. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$, якщо він колінеарний вектору $\vec{b} = (2; -1; 2)$ і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$.

243. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; б) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

Б

244. Дано: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}; \vec{c}}) = 60°$. Обчисліть скалярний добуток:

а) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$; б) $(2\vec{a} + \vec{b})(3\vec{b} - 2\vec{c})$.

245. Обчисліть $|\vec{a} + \vec{b}|$ та $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо:

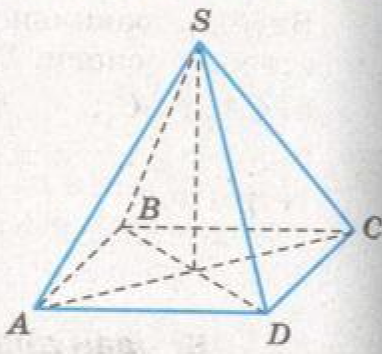
а) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$; б) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \perp \vec{b}$;

в) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60°$; г) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 120°$.

246. Під дією сили 20 Н, прикладеної під кутом 30° до напряму переміщення, фізичне тіло перемістилося на 3 м. Знайдіть виконану цією силою роботу.

247. Усі ребра піраміди $SABCD$ рівні, а в основі лежить квадрат $ABCD$ (мал. 45). Знайдіть кут між векторами:

а) $\overline{SA}$ і $\overline{SB}$; б) $\overline{SD}$ і $\overline{AD}$;
в) $\overline{SB}$ і $\overline{SD}$; г) $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$;
д) $\overline{AS}$ і $\overline{AC}$.



Мал. 45

248. Доведіть, що коли довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, то вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні.

249. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо:
а) $A(0; -1; 1)$, $B(-4; -1; -2)$, $C(-3; -5; 1)$;
б) $A(2; -1; 1)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-1; 1; 0)$.

250. Дано точки $A(1; 4; 8)$ і $B(-4; 0; 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

251. Дано три точки: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Знайдіть координати точки D такої, щоб виконувалася умова $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, якщо точка D лежить:
а) на осі Ox; б) на осі Oy; в) на осі Oz.

В

252. Дано вектори $\vec{a}=(3; 4; 5)$ і $\vec{b}=(-1; 2; 0)$. Знайдіть число l, при якому вектор $\vec{a}+l\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

253. Обчисліть $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}-\vec{b}|=24$.

254. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=19$;
б) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; в) $|\vec{a}+\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$.

255. Дано: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})=(\widehat{\vec{b}; \vec{c}})=60°$, $\vec{b} \perp \vec{c}$. Знайдіть довжину вектора:
а) $\vec{a}+3\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{c}$; в) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

256. Обчисліть кут між векторами $\vec{m}=2\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$ і $\vec{n}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

257. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо його довжина дорівнює $2\sqrt{3}$ і він перпендикулярний до векторів $\vec{m}=(1; -2; 1)$, $\vec{n}=(2; 1; -3)$.

258. Висота правильної трикутної призми у 2 рази більша за сторону основи. Знайдіть кут між прямими:

а) CA_1 і BC_1; б) AB_1 і BC_1.

259. Знайдіть кути між медіанами двох граней правильного тетраедра.

Вправи для повторення

260. Вектор, довжина якого 10, має однакові координати. Знайдіть їх.

261. Від точки $A(2; -5; 1)$ відкладено вектор $\overline{AB} = \vec{a}$. Знайдіть координати точки B, якщо $\vec{a} = (1; 3; -2)$.

262. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N, P, якщо $M \in B_1C_1$, $N \in CC_1$, $P \in AB$.

§8 ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ

Вектори часто застосовують у математиці та фізиці. У геометрії за їх допомогою доводять теореми і розв'язують багато цікавих задач.

Багатьом властивостям геометричних фігур відповідають ті чи інші векторні рівності. Наприклад, якщо:

$\overline{OA} = \overline{OB}$ – точки A і B збігаються;

$\overline{AB} = k\overline{CD}$ – прямі AB і CD паралельні;

$\overline{AB} = k\overline{AC}$ – точки A, B, C лежать на одній прямій;

$\overline{OA} = x\overline{OB} + y\overline{OC}$ – точки O, A, B, C однієї площини;

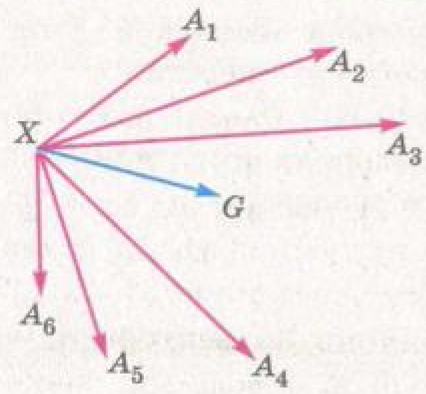
$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ – прямі AB і CD перпендикулярні;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ.

Користуючись такими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач. Для цього дані в задачі співвідношення між геометричними об'єктами спочатку немовби «перекладають» мовою векторів. Потім перетворюють знайдені векторні рівності та знову перекладають їх звичайною мовою геометрії. Особливо часто при цьому застосовують теорему про центроїд системи точок.

Точку G називають *центроїдом* n даних точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, якщо $\overline{GA_1} + \overline{GA_2} + \ldots + \overline{GA_n} = \vec{0}$ (мал. 46).

Мал. 46



Мал. 47

Теорема 6. ***Якщо G – центроїд n точок $A_1, A_2, ..., A_n$, а X – довільна точка простору, то*** $\overline{XG}=\dfrac{1}{n}(\overline{XA}_1+\overline{XA}_2+\ldots+\overline{XA}_n)$.

ДОВЕДЕННЯ. Для будь-яких точок X, G, A_1, A_2, ..., A_n справджуються векторні рівності $\overline{XA}_i = \overline{XG} + \overline{GA}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ (мал. 47). Додавши їх, дістанемо

$$\overline{XA}_1 + \overline{XA}_2 + \ldots + \overline{XA}_n = n\overline{XG} + \overline{GA}_1 + \overline{GA}_2 + \ldots + \overline{GA}_n.$$

Якщо G – центроїд точок $A_1, A_2, ..., A_n$, то сума n останніх доданків цієї векторної рівності дорівнює $\vec{0}$. Отже,

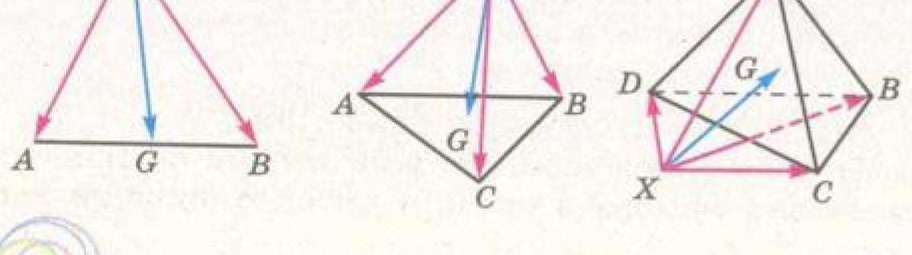
$$n\overline{XG} = \overline{XA}_1 + \overline{XA}_2 + \ldots + \overline{XA}_n.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $\dfrac{1}{n}$, дістанемо те, що й треба було довести.

Наслідки. ***Якщо G – середина відрізка AB, або точка перетину медіан трикутника ABC, або центроїд тетраедра ABCD (мал. 48), то відповідно:***

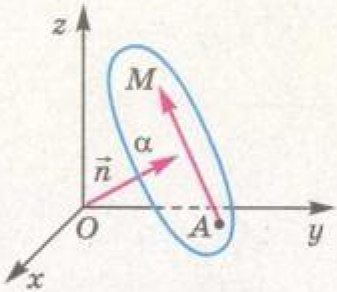
$$\overline{XG}=\frac{1}{2}(\overline{XA}+\overline{XB}),\ \overline{XG}=\frac{1}{3}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}),$$

$$\overline{XG}=\frac{1}{4}(\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}+\overline{XD}).$$



Мал. 48

Центроїд тетраедра – те саме, що й центроїд його вершин.



Мал. 49

ЗАДАЧА. Доведіть, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, має вигляд $ax + by + cz + d = 0$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай площина α проходить через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, а $M(x; y; z)$ – довільна точка площини α (мал. 49). Вектори $\vec{n} = (a; b; c)$ і $\overline{AM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ перпендикулярні. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (*)$$

Це – рівняння площини, яка проходить через точку $A(x_0; y_0; z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$. Цей вектор називають *нормаллю* до площини.

Якщо в рівнянні (*) позначити $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, його можна подати у вигляді $ax + by + cz + d = 0$. Це – загальне рівняння площини.

Використовуючи векторний метод, можна записати і рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і паралельна вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, який називається *напрямним вектором* даної прямої.

Візьмемо на шуканій прямій l довільну точку $M(x; y; z)$. Тоді вектори $\overline{M_0M}$ і $\vec{s}$ – колінеарні, тобто $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Отримали вже відоме вам канонічне рівняння прямої, де числа m, n, p – координати напрямного вектора даної прямої.

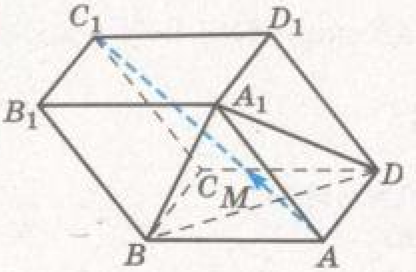
Враховуючи, що рівняння площини задає координати вектора, перпендикулярного до цієї площини, а рівняння прямої – координати напрямного вектора, то, використовуючи властивості векторів, можна знаходити кут між прямими, між прямою і площиною та кут між площинами.

Використовуючи векторний метод, можна довести ще одну дуже корисну формулу, а саме – формулу відстані від точки до площини. Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини, заданої рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, визначається за формулою

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Пропонуємо довести цю формулу самостійно.

Отже, векторним методом можна розв'язувати не тільки ті задачі, які містять вектори в умові, а набагато ширший клас



Мал. 50

задач. Але потрібно пам'ятати, що при розв'язуванні таких задач потрібно спочатку ввести вектори і сформулювати умову задачі векторною мовою.

ЗАДАЧА. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед, M – точка перетину медіан трикутника A_1BD (мал. 50). Доведіть, що пряма AC_1 проходить через M. У якому відношенні точка M ділить відрізок AC_1?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. За правилом паралелепіпеда $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. А оскільки M – точка перетину медіан трикутника A_1BD, то $\overline{AM} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1})$.

Маємо: $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AC_1}$. Отже, точка M лежить на прямій AC_1, причому $AC_1 = 3AM$, тобто $AM : MC_1 = 1 : 2$.

Вектори можна застосовувати не тільки в геометрії, а й при розв'язуванні алгебраїчних задач. Особливо зручно це робити при доведенні нерівностей і знаходженні найбільшого та найменшого значення функції або виразу.

Наприклад, знайдемо найбільше значення функції

$$y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 3\sqrt{2}.$$

Перетворимо дану функцію $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{\frac{2-x}{2}} + 3\sqrt{2} = \sqrt{x} + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2-x} + 3\sqrt{2}$ і врахуємо, що її область визначення $D(y) = [0; 2]$.

Введемо вектори $\vec{a} = (1; 2\sqrt{2}; 3)$ і $\vec{b} = (\sqrt{x}; \sqrt{2-x}; \sqrt{2})$. Тоді дану функцію можна записати у вигляді $y = \vec{a} \cdot \vec{b}$, адже $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{x} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-x} + 3 \cdot \sqrt{2}$. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{1+8+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x+2-x+2} = 2$, то $y = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 6\sqrt{2}\cos\varphi$. Тому найбільше значення функції дорівнює $6\sqrt{2}$ і досягається тоді, коли значення $\cos\varphi$ – найбільше, тобто якщо $\cos\varphi = 1$, а $\varphi = 0°$.

Знайдемо, при яких x функція набуває свого найбільшого значення. Оскільки $\varphi = 0°$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнапрямлені, тоді їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ або } \begin{cases} 3\sqrt{x} = \sqrt{2}, \\ 3\sqrt{2-x} = 4, \end{cases}$$

звідки $x = \frac{2}{9}$.

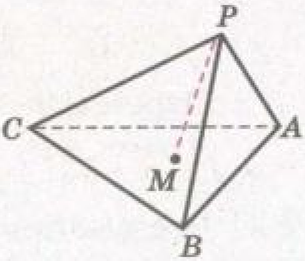
Отже, найбільше значення функції дорівнює $6\sqrt{2}$ і досягається при $x = \frac{2}{9}$.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке векторний метод розв'язування задач?
2. Які векторні формули вам відомі?
3. Як мовою векторів записати, що прямі паралельні; перпендикулярні; що точки збігаються; лежать на одній прямій?
4. Чи можна застосовувати векторний метод до задач, умова яких не містить векторів? Як це зробити?
5. Чи можна застосовувати векторний метод до розв'язування задач з алгебри? Наведіть приклади.
6. Сформулюйте теорему про центроїд n точок.
7. Який вигляд має рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$?

Виконаємо разом

1. M – точка перетину медіан грані ABC тетраедра $PABC$, $PA = 3$, $PB = 6$, $PC = 9$ і $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \alpha$. Знайдіть PM.



Мал. 51

РОЗВ'ЯЗАННЯ. $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$ (мал. 51). Тому

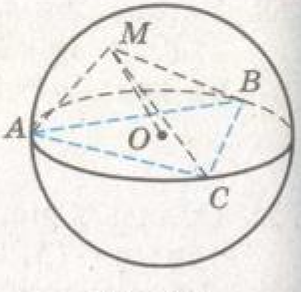
$$PM^2 = \frac{1}{9}\left(PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2\cdot\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} + 2\cdot\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + 2\cdot\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\right) = \frac{1}{9}\left(3^2 + 6^2 + 9^2 + 2\cos\alpha(3\cdot 6 + 6\cdot 9 + 9\cdot 3)\right) = 14 + 22\cos\alpha.$$

ВІДПОВІДЬ. $PM = \sqrt{14 + 22\cos\alpha}$.

2. Усі вершини правильного трикутника лежать на сфері, центр якої збігається із центром трикутника. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин трикутника стала (не залежить від розміщення точки на сфері).

ДОВЕДЕННЯ. Нехай ABC – правильний трикутник, а M – точка на сфері радіуса r (мал. 52).

$$\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA},\ \overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB},$$
$$\overline{MC} = \overline{MO} + \overline{OC}.$$



Мал. 52

Отже,

$$MA^2 = MO^2 + OA^2 + 2 \cdot \overline{MO} \cdot \overline{OA},$$
$$MB^2 = MO^2 + OB^2 + 2 \cdot \overline{MO} \cdot \overline{OB},$$
$$MC^2 = MO^2 + OC^2 + 2 \cdot \overline{MO} \cdot \overline{OC}.$$

Додамо ці рівності:

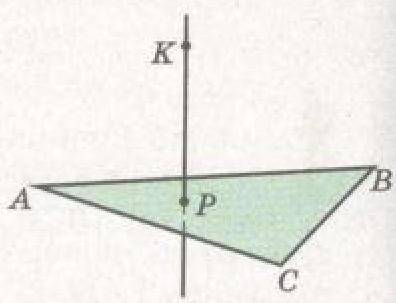
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + OA^2 + OB^2 +$$
$$+ OC^2 + 2\overline{MO} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

Враховуючи, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0}$ і що $MO^2 = OA^2 = OB^2 = OC^2 = r^2$, дістанемо $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6r^2$. Це значення одне й те саме для будь-якої точки M на сфері.

3. Доведіть за допомогою векторів, що коли пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника, то вона перпендикулярна і до третьої його сторони (мал. 53).

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $KP \perp AB$ і $KP \perp AC$, то

$$\overline{KP} \cdot \overline{BC} = \overline{KP} \cdot (\overline{BA} + \overline{AC}) =$$
$$= \overline{KP} \cdot \overline{BA} + \overline{KP} \cdot \overline{AC} = 0.$$



Мал. 53

Отже, $KP \perp BC$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

263. Що можна сказати про відрізки AB і CD, якщо $\overline{AB} = 2\overline{CD}$?

264. Установіть взаємне розміщення точок A, B, C, якщо:

а) $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$; б) $\overline{BC} = -3\overline{BA}$.

265. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо:

а) $\overline{AB} = 2\overline{BC}$; б) $\overline{AC} = -\overline{BC}$; в) $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$?

266. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

а) $\overline{AB} = \overline{DC}$; б) $\overline{BC} = 0,3\overline{AD}$.

267. Установіть вид трикутника ABC, якщо $\overline{CA} = (-2; 3; 0)$, $\overline{CB} = (3; 2; -4)$.

268. Установіть взаємне розміщення площин:
а) $2x + 3y - 5z - 16 = 0$ і $2x + 3y - 5z + 12 = 0$;
б) $3x - 2y - 3z - 5 = 0$ і $x + 3y - z + 2 = 0$.

А

269. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (5; 0; -3)$ і проходить через точку $A(2; -1; 4)$.

270. Дано точки $A(1; 2; -3)$ і $B(4; -2; 4)$. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до прямої AB і проходить через точку A.

271. Дано точку $A(a; b; c)$. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат O перпендикулярно до прямої OA.

272. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1; -3; 5)$ і паралельна площині $2x - 3y + z + 10 = 0$.

Б

273. Знайдіть кут між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ і $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{-2}$.

274. Знайдіть кут між площинами $2x + 3y - z + 2 = 0$ і $x - 2y + z - 4 = 0$.

275. Напишіть рівняння площини, яка дотикається до сфери $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$ у початку координат.

276. У тетраедрі $ABCD$ $AB \perp CD$. Доведіть, що $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$.

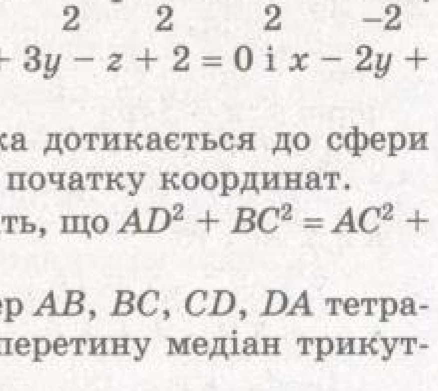
277. Точки K, L, M, N – середини ребер AB, BC, CD, DA тетраедра $ABCD$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників AML і CNK збігаються.

278. Доведіть, що як би не були розміщені у просторі паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, то середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – вершини паралелограма або лежать на одній прямій (мал. 54).

279. Дано неплоску замкнену ламану $ABCDA$. Довжини ланок AB і CD дорівнюють a і b, а кут між мимобіжними прямими AB і CD дорівнює φ. Знайдіть відстань між серединами ланок AD і BC.

280. Використовуючи векторний метод, доведіть теорему про три перпендикуляри.

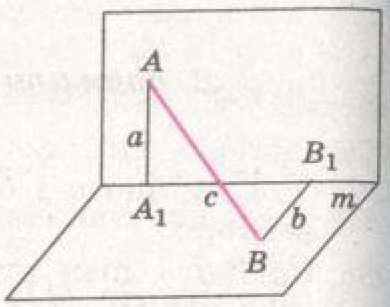
281. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній $\triangle ABC$. $\angle A_1AB = \angle A_1AC$. Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.



Мал. 54

282. Медіани граней DAB і DAC тетраедра $ABCD$ перетинаються відповідно в точках M_1 і M_2. Доведіть, що $M_1M_2 \parallel BC$.

283. Кінці відрізка AB лежать на перпендикулярних площинах, які перетинаються по прямій m. Відстані AA_1 і BB_1 від точок A і B до прямої m дорівнюють відповідно a і b, а $A_1B_1 = c$. Знайдіть довжину відрізка AB (мал. 55).



Мал. 55

284. Три ребра тетраедра, які виходять з однієї вершини, рівні, кути між ними теж рівні. Доведіть, що кожне ребро такого тетраедра перпендикулярне до протилежного.

285. Точка K – середина ребра AC правильного тетраедра $ABCD$. Знайдіть косинус кута між прямими AB і KD.

В

286. Знайдіть косинус кута між прямими, яким належать мимобіжні медіани двох граней правильного тетраедра.

287. Усі вершини правильного тетраедра лежать на сфері. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до вершин тетраедра стала.

288. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ BD_1 перпендикулярна до площини, яка проходить через точки A, B_1, C. Доведіть, що $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

289. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки простору до вершин A, B_1, C_1, D дорівнює сумі квадратів відстаней від цієї точки до вершин A_1, B, C, D_1.

290. Знайдіть кут між прямою, яка проходить через точки $A(1; 3; -2)$ і $B(-3; 4; -1)$ та площиною $x + 2y - z + 3 = 0$.

291. Знайдіть множину точок, рівновіддалених від площин:

а) $2x - y + 3z - 5 = 0$ і $2x - y + 3z + 3 = 0$;

б) $2x + y - 2z + 5 = 0$ і $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

292. Знайдіть відстань між двома мимобіжними діагоналями суміжних граней куба, ребро якого дорівнює a.

293. Знайдіть відстань між прямими AB і CD, якщо $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$, $D(-3; 0; 4)$.

294. Знайдіть найбільше значення виразу:

а) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$; б) $y=3x+4\sqrt{1-x^2}+5$.

При якому значенні x воно досягається?

Вправи для повторення

295. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

296. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{p}| = 2$, а кути між ними 60°.

297. Як розрізати куб на три рівні чотирикутні піраміди? А на шість рівних чотирикутних пірамід?

§9 ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ. РУХИ

Якщо точки даної фігури F змістити яким-небудь способом, дістанемо нову фігуру F_1. Якщо різні точки першої фігури зміщуються (відображаються) на різні точки другої, говорять про *перетворення* даної фігури.

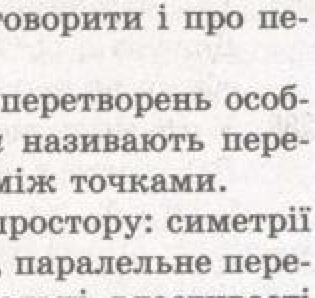
Весь простір – теж фігура. Тому можна говорити і про перетворення простору.

У стереометрії, як і в планіметрії, з усіх перетворень особливо важливу роль відіграють рухи. *Рухом* називають перетворення, при якому зберігаються відстані між точками.

Далі ми розглянемо найважливіші рухи простору: симетрії (відносно точки, площини, прямої), поворот, паралельне перенесення та ін. Але спочатку доведемо загальні властивості всіх рухів.

Теорема 7. ***Точки, які лежать на прямій, у результаті руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розміщення.***

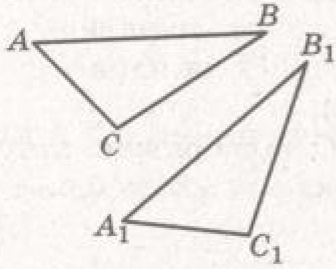
ДОВЕДЕННЯ. Нехай точки A, B і C лежать на прямій, причому B – між A і C, тобто $AB + BC = AC$ (мал. 56). Якщо який-небудь рух відображає дані точки на A_1, B_1, C_1, то внаслідок збереження відстаней між точками $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, тобто має місце рівність $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. А це означає, що точка B_1 лежить між A_1 і C_1. Теорему доведено.



Мал. 56

НАСЛІДОК. ***Рух пряму відображає на пряму, промінь – на промінь, відрізок – на відрізок, що дорівнює даному.***

Теорема 8. ***Рух відображає трикутник на трикутник, що дорівнює даному.***



Мал. 57

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано довільний трикутник ABC (мал. 57). Рух відображає його сторони AB, BC, CA на відрізки A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, які утворюють трикутник $A_1B_1C_1$. При цьому, внаслідок збереження відстаней $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$. Отже, за трьома сторонами $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. Теорему доведено.

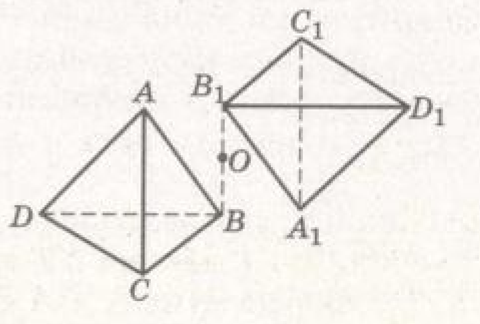
НАСЛІДОК. ***Рух відображає кут на кут, що дорівнює йому.***

Можна довести, що рух площину відображає на площину, тетраедр – на тетраедр тощо.

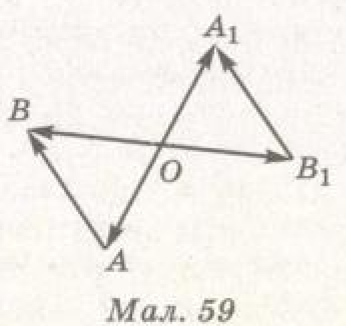
Означення симетрії відносно точки, відоме з планіметрії, залишається правильним і для стереометрії. Точки A і A_1 називаються *симетричними відносно точки* O, якщо O – середина відрізка AA_1. Перетворення, при якому кожна точка даної фігури відображається на точку, симетричну їй відносно O, називається *симетрією відносно точки* O. Наприклад, якщо дано тетраедр $ABCD$ і точку O (мал. 58), то, побудувавши точки A_1, B_1, C_1, D_1, симетричні вершинам даного тетраедра відносно O, дістанемо вершини нового тетраедра $A_1B_1C_1D_1$, симетричного даному.

Теорема 9. ***Симетрія відносно точки – рух.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай симетрія відносно точки O відображає будь-які дві точки A і B на точки A_1 і B_1. Доведемо, що $A_1B_1 = AB$ (мал. 59). Оскільки $\overline{OA} = -\overline{OA_1}$ і $\overline{OB} = -\overline{OB_1}$, то



Мал. 58



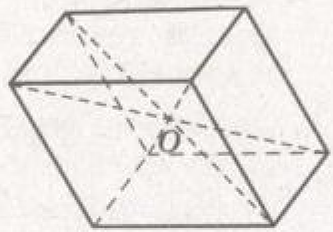
Мал. 59

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{OA_1} - \overline{OB_1} = \overline{B_1A_1}$.

Вектор $\overline{AB}$ дорівнює вектору $\overline{B_1A_1}$, отже, рівні й їхні довжини: $AB = B_1A_1$. А це й треба було довести.

З доведеної рівності $\overline{AB} = \overline{B_1A_1}$ випливає також, що відрізки AB і A_1B_1 паралельні або лежать на одній прямій. Отже, симетрія відносно точки відображає пряму на паралельну пряму (або таку, що збігається з нею), площину на паралельну площину (або таку, що збігається з нею).

Якщо симетрія відносно деякої точки O відображає дану фігуру на ту саму фігуру, таку фігуру називають *центрально-симетричною*, а точку O – її *центром симетрії*. Наприклад, центрально-симетричною фігурою є кожний паралелепіпед. Точка перетину діагоналей – його центр симетрії (мал. 60). Центрально-симетричною є правильна n-кутна призма, якщо n – число парне. Жодна піраміда не має центра симетрії.



Мал. 60

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

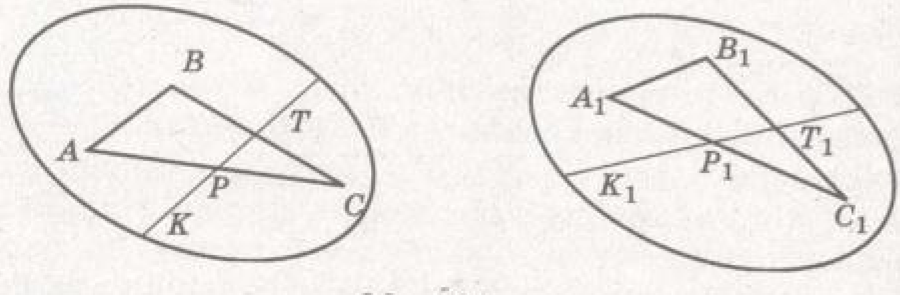
1. Що таке геометричне перетворення? А рух?
2. Які дві точки називаються симетричними відносно даної точки? А дві фігури?
3. Що таке симетрія відносно точки у просторі? Які її властивості?
4. Які фігури називають центрально-симетричними? Наведіть приклади.

Виконаємо разом

1. Доведіть, що рух відображає площину на площину.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай α – довільна площина (мал. 61). Побудуємо на ній трикутник ABC. Внаслідок руху він відобразиться на $\triangle A_1B_1C_1$, який лежить у деякій площині α_1. Покажемо, що в результаті такого руху площина α відображається на α_1.

Нехай K – довільна точка площини α. Проведемо через K пряму, яка перетинає $\triangle ABC$ у точках P і T. Пряма KT відображається рухом на пряму K_1T_1, яка перетинає $\triangle A_1B_1C_1$ у точках P_1 і T_1. Оскільки $P_1 \in \alpha_1$ і $T_1 \in \alpha_1$, то і $K_1 \in \alpha_1$



Мал. 61

(аксіома C_3). Виходить, у результаті розглядуваного руху будь-яка точка K площини α відображається на точку K_1 площини α_1. І будь-яка точка K_1 площини α_1 є образом деякої точки K даної площини α. Отже, існує рух, який відображає площину α на α_1.

2. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1;\ 2;\ 3)$ відносно точки $M(a;\ b;\ c)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $A_1(x;\ y;\ z)$ – шукана точка. Оскільки $M(a;\ b;\ c)$ – середина відрізка AA_1, то

$$a=\frac{x+1}{2},\ b=\frac{y+2}{2},\ c=\frac{z+3}{2},$$

звідки $x = 2a - 1$, $y = 2b - 2$, $z = 2c - 3$.

ВІДПОВІДЬ. $A_1(2a - 1;\ 2b - 2;\ 2c - 3)$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

298. Наведіть приклади центрально-симетричних і не центрально-симетричних фігур.

299. Чи може центр симетрії фігури не належати самій фігурі?

300. Чи правильно, що центрально-симетричний опуклий многогранник має парне число вершин, ребер, граней?

301. Доведіть, що точки $A(1;\ 3;\ 5)$ і $B(-1;\ -3;\ -5)$ симетричні відносно початку координат.

302. Чи симетричні точки A і A_1 відносно точки O, коли відомо, що $OA = OA_1$?

303. При деякому відображенні сфера $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$ відобразилася на сферу $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Чи є дане відображення рухом? Чому?

304. Чи симетричні будь-які дві точки простору відносно деякої третьої точки?

305. У просторі дано дві паралельні прямі. Чи симетричні вони відносно точки? Скільки таких точок існує?

А

306. Чи існують точки, прямі, площини, які при центральній симетрії відображаються на себе? Виконайте відповідні малюнки.

307. Чи можуть два нерівні відрізки бути симетричними відносно деякої точки?

308. Знайдіть координати точок, симетричних відносно початку координат точкам $A(1; -3; 2)$, $B(-5; 0; 2)$, $C(3; -1; 0)$, $D(0; 0; 0)$.

309. Знайдіть координати точки M, відносно якої симетричні точки $A(-3; 4; 6)$ і $B(1; 2; -4)$. Знайдіть координати точок, симетричних точці M відносно точок A і B.

310. Запишіть рівняння сфери, симетричної сфері $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$ відносно точки $S(2; 3; -2)$.

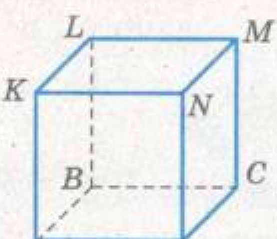
311. Дано відрізок AB і точку O, яка не належить прямій AB. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку відносно точки O. Доведіть, що побудований відрізок лежить у площині OAB.

312. Побудуйте фігуру, симетричну даному $\triangle ABC$ відносно: а) довільної точки O; б) вершини C; в) середини M сторони AB.

313. Побудуйте трикутник, симетричний даному $\triangle ABC$ відносно точки O, яка не лежить у площині ABC. Доведіть, що даний і побудований трикутники рівні та лежать у паралельних площинах.

Б

314. $ABCDKLMN$ – куб. Побудуйте фігуру, симетричну йому відносно:
а) точки A;
б) середини ребра CM;
в) центра грані $CDNM$ (мал. 62).



Мал. 62

315. Точки A, B, C, D розміщені у просторі так, що A і C симетричні відносно B, а B і D симетричні відносно C. Чи можна через усі ці точки провести площину? А пряму?

316. Чи можуть відрізки, які перетинаються або мимобіжні, бути симетричними відносно деякої точки?

317. Чи є центрально-симетричною правильна призма: а) трикутна; б) чотирикутна; в) п'ятикутна; г) шестикутна?

318. Чи має центр симетрії похила призма, основа якої – правильний шестикутник?

319. Доведіть, що центр симетрії центрально-симетричного многогранника є центроїдом його вершин.

320. Доведіть, що рух відображає пряму, перпендикулярну до площини, у пряму, перпендикулярну до площини.

321. Доведіть, що рух відображає двогранний кут у рівний йому двогранний кут.

322. Напишіть рівняння площини, яка є симетричною площині $x - 2y + 3z - 2 = 0$ відносно початку координат.

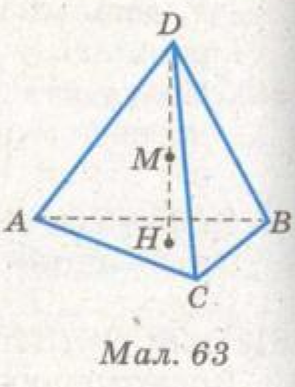
323. Напишіть рівняння прямої, симетричної прямій AB відносно початку координат, якщо $A(1; -2; 4)$, $B(2; -1; 3)$.

В

324. Дано правильний тетраедр. Побудуйте тетраедр, симетричний даному відносно:
а) вершини тетраедра;
б) центра грані;
в) середини бічного ребра.

325. Побудуйте паралелепіпед, симетричний прямокутному паралелепіпеду $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відносно точки M такої, що $B_1M : MD = 3 : 1$. Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого паралелепіпедів.

326. Побудуйте тетраедр, симетричний правильному тетраедру $ABCD$ відносно середини M його висоти, проведеної з вершини D (мал. 63). Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого тетраедрів.



Мал. 63

Вправи для повторення

327. Чи перпендикулярні площини:
а) $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ і $3x - 2y - 4z - 5 = 0$;
б) $5x - 6y + z - 12 = 0$ і $2x + y - 4z = 0$?

328. Дано тетраедр $ABCD$. Доведіть, що має місце рівність $\overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{BD} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{DC} = 0$.

329. O – центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Чи належить точка C площині, в якій лежать точки A, B, O?

§ 10 СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПЛОЩИНИ

Точки A і A_1 називаються *симетричними відносно площини*, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка AA_1 і ділить його навпіл (мал. 64).

Перетворення, яке відображає кожну точку фігури на точку, симетричну їй відносно даної площини, називається *симетрією відносно площини*.

Теорема 10. ***Симетрія відносно площини – рух.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай симетрія відносно площини α відображає точки A і B на точки A_1 і B_1 (мал. 65). Доведемо, що $A_1B_1 = AB$.

Введемо систему координат так, щоб координатна площина xy сумістилась з площиною α. Нехай координати даних точок $A(a_1; a_2; a_3)$ і $B(b_1; b_2; b_3)$. Симетричними їм відносно площини α будуть точки $A_1(a_1; a_2; -a_3)$ і $B_1(b_1; b_2; -b_3)$. За теоремою 1

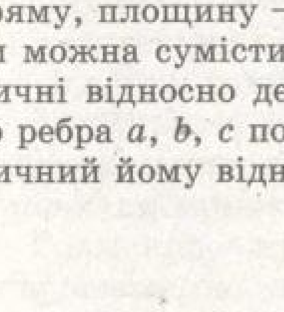
$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (-b_3 + a_3)^2}.$$

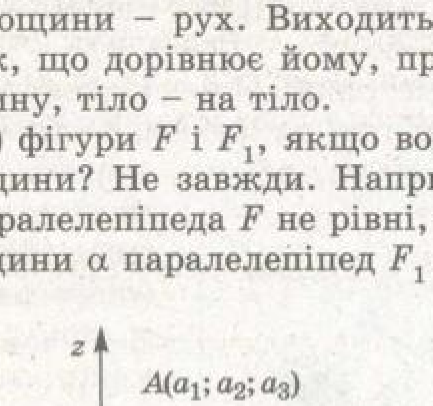
Як бачимо, $AB = A_1B_1$. А це й треба було довести.

Отже, симетрія відносно площини – рух. Виходить, вона відображає відрізок на відрізок, що дорівнює йому, пряму – на пряму, площину – на площину, тіло – на тіло.

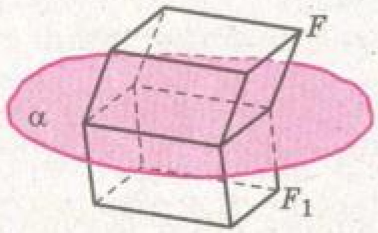
Чи можна сумістити (уявно) фігури F і F_1, якщо вони симетричні відносно деякої площини? Не завжди. Наприклад, якщо ребра a, b, c похилого паралелепіпеда F не рівні, то симетричний йому відносно площини α паралелепіпед F_1 суміс-



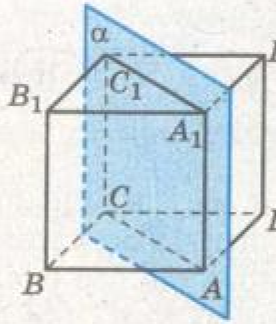
Мал. 64



Мал. 65



Мал. 66



Мал. 67

тити з F неможливо (мал. 66). Говорять, що паралелепіпеди F і F_1 мають *різні орієнтації базисів.* Вони відрізняються, як правий і лівий черевики однієї пари, як права і ліва нарізки на болтах тощо.

Симетрія відносно площини змінює орієнтацію базису.

Розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і площину α, яка проходить через його ребра AA_1 і CC_1 (мал. 67). Симетрія відносно площини α точки B і B_1 відображає на D і D_1, ребро BB_1 – на ребро DD_1, грань ABB_1A_1 – на грань ADD_1A_1, кожну внутрішню точку X на внутрішню точку X_1 цього самого куба. Говорять, що симетрією відносно площини α даний куб відображається *на себе.*

Якщо деяка фігура симетрією відносно площини α відображається на себе, цю фігуру називають *симетричною відносно площини*, а α – *площиною симетрії* даної фігури. Наприклад, правильна трикутна призма має чотири площини симетрії, а куля – безліч.

Симетричні відносно площини молотки, рубанки, стамески, лопати, викрутки, цеглини, труби, підшипники, автомобілі, літаки, ракети, кораблі і багато інших знарядь праці і механізмів, а також деякі овочі, комахи (мал. 68) тощо. Вчення про симетрію многогранників важливе для кристалографії. Виявляється, один і той самий кристал у різних напрямах має різні фізичні властивості, наприклад твердість. І виявляти ці напрями допомагають дослідження симетрії кристалів.

Симетрію відносно площини називають ще відображенням у площині. Пригадайте, як відображаються фігури у дзеркалі чи на поверхні спокійної водойми: озера, річки тощо.

Мал. 68

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які дві точки називаються симетричними відносно площини?
2. Які дві фігури називаються симетричними відносно площини?
3. Доведіть, що симетрія відносно площини – рух.
4. Що таке симетрія відносно площини у просторі? Які її властивості?
5. Фігура, симетрична відносно площини. Що це за фігура? Наведіть приклади.
6. Які властивості має фігура, симетрична відносно площини?

Виконаємо разом

1. Чи правильно, що які б не були площини α і β, вони симетричні відносно деякої площини ω?

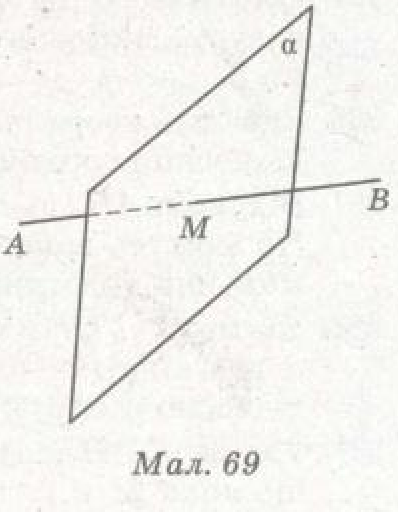
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Розглянемо два випадки. Якщо дані площини α і β перетинаються, вони симетричні відносно площини ω, яка проходить через пряму їхнього перетину та ділить кут між даними площинами навпіл.

Якщо площини α і β паралельні, вони симетричні відносно площини ω, рівновіддаленої від α і β.

Сформульоване твердження правильне.

2. Напишіть рівняння площини, відносно якої симетричні точки $A(-1; 3; -2)$ і $B(3; 1; -4)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо точки A і B симетричні відносно площини, то ця площина проходить через середину M відрізка AB перпендикулярно до нього (мал. 69). Оскільки координати середини відрізка $(1; 2; -3)$, а координати вектора $\overline{AB} = (4; -2; -2)$, то рівняння площини матиме вигляд $4(x - 1) - 2(y - 2) - 2(z + 3) = 0$ або $4x - 2y - 2z - 6 = 0$, звідки $2x - y - z - 3 = 0$.



Мал. 69

Отже, точки $A(-1; 3; -2)$ і $B(3; 1; -4)$ симетричні відносно площини $2x - y - z - 3 = 0$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

330. Укажіть площини симетрії (якщо вони існують) таких фігур: прямої, відрізка, променя, правильного трикутника, квадрата, ромба, прямокутника.

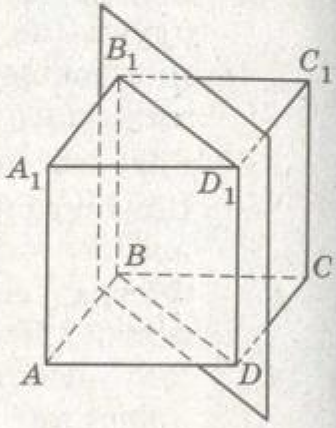
331. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 70). Що є образом при симетрії відносно площини BDD_1B_1:

а) точок A, B, C_1;

б) відрізків AA_1, BB_1, BD_1, AC_1;

в) $\triangle AB_1C$, $\triangle BC_1D$;

г) квадрата ABB_1A_1?



Мал. 70

332. Два однакові кола лежать в одній площині. Чи будуть вони симетричні відносно деякої площини? Якщо так, то що це за площина?

333. Чи має площини симетрії фігура, яка складається з двох сфер, які мають зовнішній дотик, якщо радіуси сфер:

а) однакові;

б) різні?

А

334. Накресліть фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно площини α. Розгляньте усі можливі випадки.

335. Площина β не перетинає трикутник ABC. Накресліть фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно площини β.

336. Знайдіть координати точок, симетричних точці $A(a_1; a_2; a_3)$ відносно координатних площин.

337. Відрізки AB і A_1B_1 симетричні відносно деякої площини. Чи можуть вони належати мимобіжним прямим? А прямим, що перетинаються?

338. Чи можуть бути симетричними відносно деякої площини α два відрізки однієї прямої? Як розміщена площина α відносно цієї прямої?

339. Точки A і B симетричні відносно площини β. Доведіть, що коли $M \in \beta$, то $MA = MB$.

340. Відрізок AB перетинає площину ω в точці O. Відрізок OB_0 – проекція відрізка OB на площину ω. Побудуйте фігуру, симетричну відрізку AB відносно площини ω.

341. Пряма AB нахилена до деякої площини під кутом φ і симетрична відносно цієї площини прямій A_1B. Знайдіть кут між прямими AB і A_1B.

342. Дано зображення тетраедра $ABCD$ і його висоти DH. Побудуйте зображення фігури, симетричної йому відносно площини ABC.

343. Скільки площин симетрії має правильна чотирикутна призма, відмінна від куба?

344. Скільки площин симетрії має правильна трикутна піраміда, якщо її бічна грань не дорівнює основі?

345. Скільки площин симетрії має правильна чотирикутна піраміда? Намалюйте їх.

346. Скільки площин симетрії має куб? Зробіть відповідний малюнок.

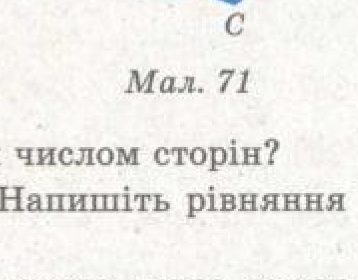
347. Скільки площин симетрії має правильний тетраедр? Зробіть відповідний малюнок.

348. Доведіть, що точки $A(2; -1; 4)$ і $B(2; 1; 4)$ симетричні відносно площини xz.

349. Відносно яких координатних площин симетричні точки:
а) $A(4; 2; -3)$, $B(-4; 2; -3)$;
б) $M(-3; 2; 6)$, $N(-3; 2; -6)$;
в) $P(7; -2; -4)$, $K(7; 2; -4)$?

Б

350. Скільки площин симетрії має тетраедр, одне ребро якого вдвічі коротше від кожного з решти ребер (мал. 71)?



Мал. 71

351. Скільки площин симетрії має пряма призма, в основі якої рівнобічна трапеція? А якщо трапеція не рівнобічна?

352. Скільки площин симетрії має правильна піраміда, в основі якої лежить многокутник з:
а) парним числом сторін; б) непарним числом сторін?

353. Дано точки $A(2; -4; 3)$ і $B(-6; 2; 1)$. Напишіть рівняння площини симетрії даних точок.

354. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3; -1; 2)$ і $B(1; 2; 4)$, та прямої, симетричної даній відносно площини: а) xy; б) yz.

355. Дано сферу $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 30$. Напишіть рівняння площини, дотичної до сфери в точці $A(1; -1; 2)$, і рівняння сфери, симетричної даній відносно цієї площини.

В

356. У кубі дві грані зафарбували іншим кольором. Скільки площин симетрії має такий куб? Розгляньте всі можливі випадки.

357. Точки B і C симетричні точці A відносно перпендикулярних площин β і γ, що перетинаються по прямій a. Знайдіть відстань від A до прямої a, якщо $BC = 6$ м.

358. Чи правильно, що які б не були прямі a і b, вони симетричні відносно деякої площини α?

359. Побудуйте тетраедр, симетричний тетраедру $ABCD$ відносно площини, яка проходить через середини ребер DA, DB, DC. Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого тетраедрів.

360. Побудуйте піраміду, симетричну правильній чотирикутній піраміді відносно площини, яка проходить через середину висоти піраміди, перпендикулярно до неї.

361. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(1; -2; 3)$ відносно площини $2x - y + 3z + 1 = 0$.

362. Точки A і B лежать по різні боки від площини α. Знайдіть у площині α точку, різниця відстаней від якої до точок A і B найбільша.

363. Точки A і B не лежать у площині α та розміщені в одному півпросторі від неї. Знайдіть у площині α таку точку P, що сума відстаней $PA + PB$ буде найменшою.

Вправи для повторення

364. Побудуйте тетраедр, симетричний даному відносно точки, яка лежить: а) зовні тетраедра; б) всередині тетраедра.

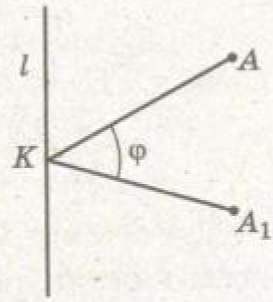
365. Знайдіть вершини трикутника, симетричного трикутнику ABC відносно точки $M(1; -2; 4)$, якщо $A(4; 0; 1)$, $B(4; 4; 1)$, $C(-1; 2; 0)$.

366. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку A та середини ребер CC_1 і C_1D_1.

367. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть дротяні моделі ламаних з трьох рівних і попарно перпендикулярних ланок та розмістіть їх так, щоб вони виявилися симетричними відносно: а) точки; б) площини.

§11 ПОВОРОТ І СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Нехай дано пряму l та дві точки A і A_1. Якщо перпендикуляри AK і A_1K, опущені на пряму l, рівні, мають спільну основу K та утворюють кут φ, то говорять, що поворот навколо прямої l на кут φ відображає точку A на A_1 (мал. 72). Кут φ може бути додатним або від'ємним.



Мал. 72

Якщо кожну точку деякої фігури F повернути навколо прямої l на один і той самий кут φ, дістанемо нову фігуру F_1. Говорять, що поворот навколо прямої l на кут φ відображає фігуру F на F_1. Наприклад, якщо куб F повернути на кут 180° навколо прямої l, яка проходить через його ребро, дістанемо новий куб F_1 (мал. 73). Поворот навколо прямої l на кут 180° відображає куб F на F_1. Цей самий поворот відображає вершину C на C_1 ребро CP на ребро C_1P_1, грань $BCPK$ на грань $B_1C_1P_1K_1$ тощо.

Теорема 11. ***Поворот навколо прямої є рухом.***

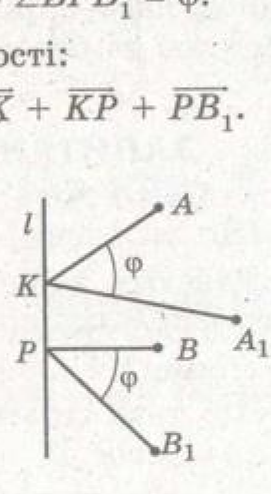
ДОВЕДЕННЯ. Нехай у результаті повороту навколо прямої l на кут φ точки A і B даної фігури відображаються на точки A_1 і B_1 (мал. 74). Якщо K – спільна основа перпендикулярів, опущених з точок A і A_1 на пряму l, а P – спільна основа перпендикулярів, опущених на пряму l з точок B і B_1, то

$$KA = KA_1,\ PB = PB_1,\ \angle AKA_1 = \angle BPB_1 = \varphi.$$

Справджуються й такі векторні рівності:

$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KP} + \overline{PB},\ \overline{A_1B_1} = \overline{A_1K} + \overline{KP} + \overline{PB_1}.$$

Мал. 73



Мал. 74

Піднесемо їх (скалярно) до квадрата:

$$AB^2 = AK^2 + KP^2 + PB^2 + 2\overline{AK}\cdot\overline{KP} + 2\overline{AK}\cdot\overline{PB} + 2\overline{KP}\cdot\overline{PB},$$

$$A_1B_1^2 = A_1K^2 + KP^2 + PB_1^2 + 2\overline{A_1K}\cdot\overline{KP} + $$
$$+ 2\overline{A_1K}\cdot\overline{PB_1} + 2\overline{KP}\cdot\overline{PB_1}.$$

Оскільки $AK \perp KP$, $KP \perp PB$, $A_1K \perp KP$, $KP \perp PB_1$, $AK = A_1K$ і $PB_1 = PB$, то

$$AB^2 - A_1B_1^2 = 2\overline{AK}\cdot\overline{PB} - 2\overline{A_1K}\cdot\overline{PB_1} =$$
$$= -2KA\cdot PB\cdot\cos\omega + 2KA\cdot PB\cdot\cos\omega.$$

Тут ω – кут між променями KA і PB (він дорівнює куту між променями KA_1 і PB_1). Знайдена сума дорівнює 0, тому $AB^2 = A_1B_1^2$, звідки $AB = A_1B_1$. Теорему доведено.

Поворот навколо прямої l на кут 180° називається *симетрією відносно прямої l*. Наприклад, куби F і F_1, зображені на малюнку 73, симетричні відносно прямої l. Оскільки поворот є рухом, а симетрія відносно прямої – вид повороту, то і симетрія відносно прямої – рух. Вона пряму відображає на пряму, площину – на площину, трикутник – на трикутник, що дорівнює йому.

π Якщо поворотом навколо деякої прямої на кут 360° : n, де натуральне число $n \geqslant 2$, фігура суміщається із собою, то цю пряму називають *віссю симетрії n-го порядку*. Наприклад, правильна п'ятикутна піраміда має вісь симетрії п'ятого порядку. Сфера має нескінченно багато осей симетрії будь-якого порядку. Зверніть увагу: вісь симетрії n-го порядку не завжди є віссю симетрії даної фігури.

З поворотами матеріальних тіл часто мають справу токарі, фрезерувальники, свердлильники, бурильники та ін. Теоретичні питання, пов'язані з поворотами фігур у просторі, важливі для спеціалістів, які створюють турбіни, електромотори, відцентрові насоси, різноманітні центрифуги та особливо – сучасні роторні та роторно-конвеєрні машини.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке поворот?

2. Доведіть, що поворот навколо прямої – рух.

3. Які дві точки називаються симетричними відносно прямої? А дві фігури?

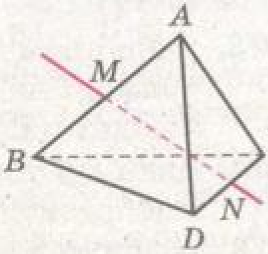
4. Що таке симетрія відносно прямої у просторі? Які її властивості?

5. Наведіть приклади фігур, симетричних відносно прямої.

Виконаємо разом

1. Доведіть, що пряма, яка містить середини протилежних ребер правильного тетраедра, є його віссю симетрії.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай M і N – середини ребер AB і CD правильного тетраедра $ABCD$ (мал. 75). Тоді $\triangle ANB$ рівнобедрений ($AN = BN$), тому $MN \perp AB$. Аналогічно, $\triangle DMC$ – рівнобедрений, тому $MN \perp DC$. Отже, пряма l, яка проходить через точки M і N, є спільним серединним перпендикуляром для відрізків AB і CD. Тоді при симетрії відносно прямої l відрізок AB відображається на відрізок BA, CD – на DC, AC – на BD (бо точка A переходить у точку B, а точка C – у D) і BC відображають на AD.

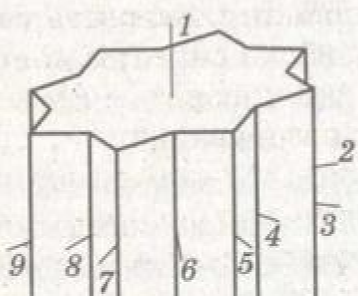


Мал. 75

Це означає, що симетрія відносно прямої l вершини, ребра і грані тетраедра $ABCD$ відображає на вершини, ребра і грані цього самого тетраедра, тобто тетраедр $ABCD$ при симетрії відносно прямої l відображається на себе. Отже, пряма l є віссю симетрії цього тетраедра.

2. Куб повернули на 45° навколо прямої, яка проходить через центри протилежних граней. Намалюйте об'єднання даного й утвореного кубів. Зобразіть осі симетрії цього тіла.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Площини граней, перпендикулярних до осі, в результаті повороту відображаються на себе. Об'єднання основи даного куба й утвореного в результаті повороту – центрально-симетричний неопуклий 16-кутник з рівними сторонами. Об'єднання розглядуваних кубів – неопукла 16-кутна пряма призма. Вона має 9 осей симетрії (мал. 76).



Мал. 76

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

368. Наведіть приклади об'єктів навколишнього середовища, які мають вісь симетрії.

369. Скільки осей симетрії має відрізок; пряма; площина?

370. Чи має вісь симетрії промінь; паралелограм; трапеція?

371. Укажіть координати точки, у яку відобразиться точка $A(0;\ 5;\ 0)$ при повороті навколо осі Oz за рухом годинникової стрілки на кут:

а) $90°$; б) $180°$; в) $270°$; г) $360°$.

372. Укажіть координати точки, симетричної точці $M(1;\ 2;\ 3)$ відносно:

а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz.

А

373. Дано пряму l і точки A та B. Як виконати поворот навколо прямої l на кут α: а) точки A; б) відрізка AB? Зробіть відповідні малюнки.

374. Дано дві точки. Скількома поворотами одну з них можна відобразити на другу?

375. Знайдіть координати точки, на яку відображається точка $A(1;\ 2;\ 0)$ поворотом навколо осі x на кут $90°$.

376. Знайдіть координати кінців відрізка, утвореного в результаті повороту навколо осі y на кут $90°$ відрізка з кінцями $A(0;\ 3;\ 4)$ і $B(0;\ 6;\ 0)$.

377. Знайдіть координати вершин трикутника, утвореного поворотом трикутника з вершинами $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ a)$ навколо осі z на кут $90°$.

378. Скільки осей симетрії має куб? А прямокутний паралелепіпед, відмінний від куба?

379. Скільки осей симетрії має правильна n-кутна піраміда?

380. Скільки осей симетрії має сфера? Як вони розміщені?

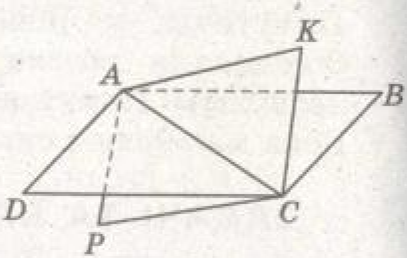
381. Скільки осей симетрії має правильна шестикутна призма?

382. Чи має осі симетрії правильна п'ятикутна призма?

383. Чи має осі симетрії правильний тетраедр? Скільки?

384. Скільки осей симетрії має фігура, яка складається з двох рівних квадратів, що перетинаються по їхній спільній діагоналі (мал. 77)?

385. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди рівні. Скільки осей симетрії має тіло, яке складається з двох таких пірамід із спільною основою?



Мал. 77

Б

386. Доведіть, що пряма, яка містить висоту правильної чотирикутної піраміди, є її віссю симетрії.

387. Доведіть, що пряма, яка містить точки перетину діагоналей протилежних граней прямокутного паралелепіпеда, є його віссю симетрії.

388. Доведіть, що точки $A(2; -3; 1)$ і $B(2; 3; -1)$ симетричні відносно осі Ox. Укажіть координати точок, симетричних точкам A і B відносно осі: а) Oy; б) Oz.

389. Як побудувати вісь симетрії двох мимобіжних прямих?

390. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вісь симетрії фігури, що є об'єднанням двох прямих, які містять ребра:
а) AA_1 і CD; б) BB_1 і AC; в) AB_1 і CD_1; г) AC і B_1D.

391. Побудуйте піраміду, утворену при повороті правильної трикутної піраміди навколо висоти на кут 180°.

В

392. Доведіть, що коли кожне ребро тетраедра дорівнює протилежному, то він має три осі симетрії.

393. Дано два рівних відрізки. Скількома поворотами один з них можна відобразити на другий?

394. Чи має куб осі симетрії третього порядку? Скільки?

395. Чи має правильний тетраедр осі симетрії третього порядку?

396. Чи має осі симетрії третього порядку правильна чотирикутна піраміда?

397. Побудуйте тетраедр, який має тільки одну вісь симетрії.

398. Знайдіть усі повороти простору, які відображають на себе:
а) правильну трикутну піраміду;
б) правильну чотирикутну піраміду;
в) правильний тетраедр.

399. Побудуйте тетраедр, утворений з правильного тетраедра $ABCD$ при повороті його на кут 60° навколо висоти DO. Різними кольорами зафарбуйте об'єднання та переріз даного і побудованого тетраедрів.

400. Правильний тетраедр повернули на 90° навколо прямої, яка проходить через середини його протилежних ребер. Намалюйте об'єднання даного й утвореного тетраедрів. Скільки граней має це об'єднання?

401*. Доведіть, що коли деяка фігура має дві перпендикулярні осі симетрії, які перетинаються, то вона має ще одну вісь симетрії, перпендикулярну до них.

402. Пряма l нахилена до площини α під кутом φ. У результаті повороту площини α навколо прямої l на кут φ_1 площина α відобразилася на площину β. Як знайти кут між площинами α і β?

403*. Дано пряму l і точки A та B такі, що прямі l і AB мимобіжні. На прямій l знайдіть таку точку M, що сума відстаней $AM + MB$ буде найменшою.

Вправи для повторення

404. Зобразіть тетраедр, який має тільки:

а) одну площину симетрії;
б) дві площини симетрії;
в) три площини симетрії.

405. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(2; 5; 0)$ відносно площини $y = x$.

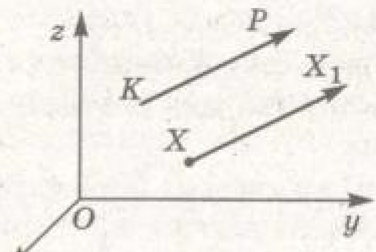
406. Три площини попарно перпендикулярні. Доведіть, що прямі їхнього перетину також попарно перпендикулярні.

§ 12 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

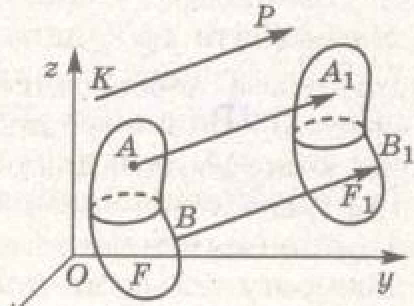
Одним з прикладів руху є *паралельне перенесення.*

Нехай $\overline{KP}$ – який-небудь вектор, а X – довільна точка простору (мал. 78). Якщо точка X_1 така, що $\overline{XX_1} = \overline{KP}$, то говорять, що паралельне перенесення на вектор $\overline{KP}$ відображає точку X на X_1. Якщо виконати паралельне перенесення кожної точки деякої фігури F на один і той самий вектор $\overline{KP}$, дістанемо нову фігуру F_1. Говорять, що паралельне перенесення на вектор $\overline{KP}$ відображає фігуру F на F_1 (мал. 79). У результаті паралельного перенесення всі точки даної фігури переносяться в одному напрямі на однакові відстані.

Теорема 12. ***Паралельне перенесення – рух.***

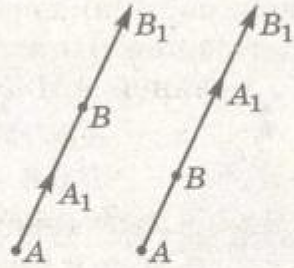


Мал. 78



Мал. 79

ДОВЕДЕННЯ. Нехай при паралельному перенесенні точки A і B відображаються відповідно на A_1 і B_1. Доведемо, що $A_1B_1 = AB$.



Мал. 80

Можливі два випадки. Якщо точки A, B, A_1, B_1 не лежать на одній прямій, то ABB_1A_1 – паралелограм (мал. 79) і, отже, $A_1B_1 = AB$. Якщо точки A, B, A_1, B_1 лежать на одній прямій (мал. 80), то з рівності $AA_1 = BB_1$ випливає:

$$A_1B_1 = AB_1 - AA_1 = AB_1 - BB_1 = AB.$$

Отже, якщо паралельне перенесення відображає точки A і B на A_1 і B_1, то завжди $A_1B_1 = AB$. Як бачимо, паралельне перенесення зберігає відстані між точками, тобто є рухом.

З теорем 7, 8 і 12 випливає, що паралельне перенесення пряму відображає на пряму, відрізок – на відрізок, що дорівнює йому, трикутник – на трикутник, що дорівнює йому, тощо.

Нехай при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (a;\ b;\ c)$ точка $A(x;\ y;\ z)$ переходить у точку $A'(x';\ y';\ z')$. Тоді $\overline{AA'} = \vec{p}$. Оскільки $\overline{AA'} = (x' - x;\ y' - y;\ z' - z)$, то з умови рівності векторів отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x' - x = a, \\ y' - y = b, \\ z' - z = c, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c. \end{cases}$$

Ці співвідношення називають ***формулами паралельного перенесення*** простору на вектор $\vec{p} = (a;\ b;\ c)$.

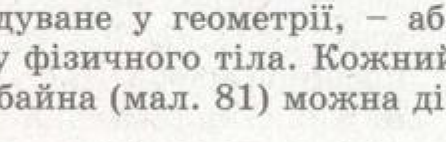
ПРИКЛАД. Знайдіть координати образу точки $A(-1;\ 3;\ -5)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1;\ 2;\ 6)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Користуючись встановленими співвідношеннями, отримаємо:

$$x' = -1 + 1 = 0;\ y' = 3 + 2 = 5;\ z' = -5 + 6 = 1.$$

Отже, $A'(0;\ 5;\ 1)$.

Паралельне перенесення, розглядуване у геометрії, – абстрактна модель поступального руху фізичного тіла. Кожний сегмент ножа зернозбирального комбайна (мал. 81) можна дістати в результаті паралельного перенесення суміжного сегмента. Те саме можна сказати про окремі секції розкладеної на площині гусениці трактора, застібки «блис-



Мал. 81

кавка», про цеглини у стіні, про окремі поверхи сучасного багатоповерхового будинку тощо.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке перетворення називають паралельним перенесенням у просторі?
2. Доведіть, що паралельне перенесення простору є рух.
3. Які властивості має паралельне перенесення фігур у просторі?
4. Яким рухом може бути композиція двох паралельних перенесень?
5. Як знайти координати образу точки $A(x;\ y;\ z)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (a;\ b;\ c)$?

Виконаємо разом

1. Є два кола однакових радіусів із центрами в точках O_1 і O_2. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка O_1 відображається на точку O_2. Чи правильно, що при цьому паралельному перенесенні коло із центром O_2 є образом кола із ценром O_1?

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. З того, що точка O_1 при паралельному перенесенні відображається на точку O_2, не випливає, що кожна точка першого кола відображається на точку другого кола. Це буде тільки тоді, коли ці кола лежать в одній площині або у паралельних площинах.

   ВІДПОВІДЬ. Ні, не завжди.

2. Напишіть рівняння площини, яка є образом площини $2x + y - 3z + 2 = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1;\ -2;\ 3)$.

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. У заданій площині виберемо довільну точку, наприклад точку $M(1;\ 2;\ 2)$. Образом точки M при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1;\ -2;\ 3)$ буде точка $M'(2;\ 0;\ 5)$. Оскільки при паралельному перенесенні площина відображається на паралельну площину, то потрібно записати рівняння площини, яка проходить через точку M' паралельно площині $2x + y - 3z + 2 = 0$, тобто $2(x - 2) + 1(y - 0) - 3(z - 5) = 0$, або $2x + y - 3z + 11 = 0$.

   ВІДПОВІДЬ. $2x + y - 3z + 11 = 0$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

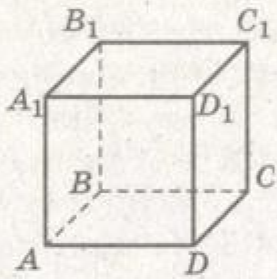
Виконайте усно

407. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 82).

1) Знайдіть образ відрізка:

а) AA_1 при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{AD}$; $\overline{DC}$; $\overline{D_1C_1}$;

б) AD при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AB}$; $\overline{BB_1}$; $\overline{DC_1}$.



Мал. 82

2) При якому паралельному перенесенні квадрат:

а) $ABCD$ є образом квадрата $A_1B_1C_1D_1$;

б) AA_1B_1B є образом квадрата DD_1C_1C?

3) Чи існує паралельне перенесення, при якому образом:

а) відрізка A_1C_1 є відрізок AC;

б) відрізка AB_1 є відрізок CD_1;

в) квадрата AA_1B_1B є квадрат BB_1C_1C?

408. Дано два рівні трикутники. Чи завжди існує паралельне перенесення, яке один з трикутників відображає на другий?

409. Як мають бути розміщені дві рівні фігури, одну з яких можна отримати з другої паралельним перенесенням, якщо цими фігурами є:

а) два кола; б) два квадрати; в) дві сфери; г) два куби?

А

410. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка $M(5; -1; 3)$ відобразилася на точку $N(2; 4; -1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

411. Знайдіть координати образу точки $A(-4; 10; 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1; 3; -2)$.

412. Знайдіть координати точки, в яку переходить точка $X(2; 3; -1)$ у результаті паралельного перенесення, яке відображає початок координат на точку $A(1; 1; 2)$.

413. Знайдіть координати точки, в яку переходить точка $M(3; -2; 1)$ у результаті паралельного перенесення на $\overline{OM}$, якщо O – початок координат.

414. Дано точки $K(1; 0; 0)$, $P(-1; 3; 0)$ і трикутник з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(-1, 0; 3)$, $C(0; 0; 1)$. Знайдіть координати вершин трикутника, який утворився у результаті паралельного перенесення на $\overline{KP}$ трикутника ABC.

415. Чи існує паралельне перенесення, яке точку A відображає на точку B, а точку M – на точку N, якщо:

а) $A(1; 3; -2)$, $B(3; -2; 1)$, $M(4; 6; 2)$, $N(6; 1; 5)$;

б) $A(5; 3; -2)$, $B(4; 8; -3)$, $M(1; 3; -9)$, $N(0; -2; -10)$?

416. Шестикутник F_1 – проекція куба F. Чи можна вважати, що фігуру F_1 дістали в результаті перетворення фігури F?

417. Чи можна паралельним перенесенням відобразити одну з мимобіжних прямих на іншу?

418. Скількома паралельними перенесеннями можна відобразити одну з двох паралельних прямих на іншу?

419. Чи існує паралельне перенесення, яке відображає сторону:

а) прямокутника на протилежну їй сторону;

б) рівностороннього трикутника на іншу його сторону?

420. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні та лежать у паралельних площинах. Чи можна один з них паралельним перенесенням відобразити на інший?

421. Доведіть, що при паралельному перенесенні паралелограм переходить у рівний йому паралелограм.

Б

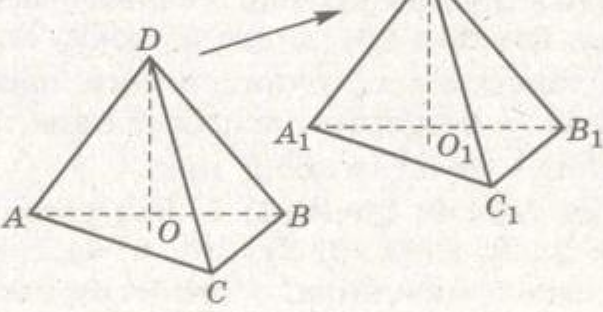
422. При паралельному перенесенні тетраедр $A_1B_1C_1D_1$ є образом тетраедра $ABCD$ (мал. 83). Доведіть, що висоти DO і D_1O_1 цих тетраедрів рівні.

423. Побудуйте фігуру, на яку відображається тетраедр $PABC$ паралельним перенесенням на $\overline{AB}$.

424. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте зображення фігури, в яку переходить цей куб у результаті паралельного перенесення на $\overline{AB}$.

425. Доведіть, що при паралельному перенесенні прямі, паралельні напряму переносу, переходять самі в себе.

426. Доведіть, що при паралельному перенесенні площини, паралельні напряму переносу, переходять самі в себе.



Мал. 83

427. Доведіть, що коли паралельне перенесення відображає пряму a на b, то ці прямі паралельні або збігаються.

428. Доведіть, що коли паралельне перенесення відображає площину α на β, то ці площини паралельні або збігаються.

429. Пряма a нахилена до площини α під кутом 30°. Під яким кутом нахилена до площини α пряма b, якщо вона паралельним перенесенням відображається на пряму a?

430. Тетраедр $ABCD$ паралельним перенесенням відображається на тетраедр $A_1B_1C_1D_1$. Чи випливає з цього, що:

а) їхні грані ABC і $A_1B_1C_1$ рівні;

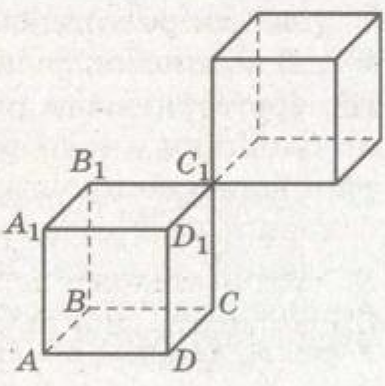
б) існує паралельне перенесення, яке відображає тетраедр $A_1B_1C_1D_1$ на $ABCD$?

431. Одне паралельне перенесення відображає відрізок AB на A_1B_1, а друге – відрізок A_1B_1 на A_2B_2. Чи існує паралельне перенесення, яке відображає відрізок AB на A_2B_2?

432. Відрізок m паралельним перенесенням відображається на відрізок n. Чи рівні їхні проекції на одну й ту саму площину? Чому?

В

433. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельним перенесенням на $\overline{AC_1}$ відображається на інший куб (мал. 84). Знайдіть найбільшу відстань між точками цих двох кубів, якщо $AB = a$.



Мал. 84

434. При паралельному перенесенні точка $A(1; -2; 3)$ переходить у точку $B(2; 4; -1)$. У яку точку перейде точка M, симетрична точці A відносно:

а) початку координат; б) площини yz; в) осі Ox?

435. Напишіть рівняння прямої, яка є образом прямої AB при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p} = (1; -1; 2)$, якщо $A(3; -2; 1)$, $B(1; 4; -2)$.

436. Напишіть рівняння площини, яка є образом площини $x + y - 2z + 4 = 0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{s} = (2; -1; 3)$.

437. Точка M – середина висоти DO правильного тетраедра $ABCD$. Побудуйте тетраедр, який є образом даного тетраедра при паралельному перенесенні на вектор:

а) $\overline{AO}$; б) $\overline{OM}$; в) $\overline{AM}$.

438. Задайте напрям паралельного перенесення, щоб перетином куба та його образу були:
а) квадрат; б) точка; в) прямокутний паралелепіпед; г) куб.

Вправи для повторення

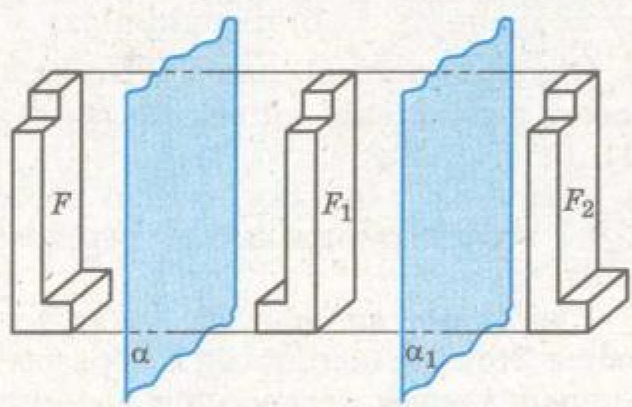
439. Дано точку $A(1; -2; 3)$. Знайдіть координати точки, симетричної даній відносно: а) початку координат; б) координатних площин; в) координатних осей.

440. Як знайти вісь повороту, який відображає деяку точку A на точку B? Скільки розв'язків має задача?

441. Ортогональною проекцією трикутника є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть площу даного трикутника, якщо кут між площиною трикутника і площиною проекції дорівнює 60°.

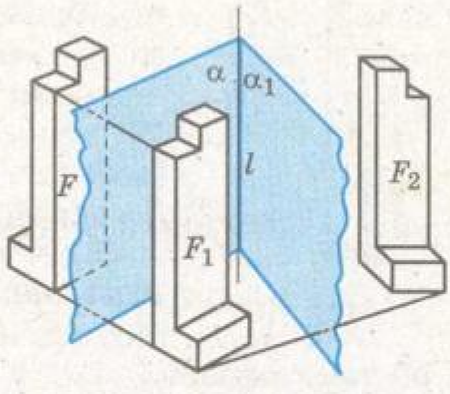
§ 13 КОМПОЗИЦІЇ РУХІВ І РІВНІСТЬ ФІГУР

Досі ми розглядали окремі види рухів. Заслуговують уваги й їхні *композиції* – послідовні виконання одного геометричного перетворення за іншим. Наприклад, якщо симетрія відносно площини α відображає дану фігуру F на фігуру F_1, а симетрія відносно площини α_1 – фігуру F_1 на F_2, то відображення фігури F на F_2 називають ***композицією двох симетрій*** відносно даних площин. Якщо площини α і α_1 паралельні, то ця композиція – паралельне перенесення, яке відображає фігуру F на F_2 (мал. 85). Якщо площини α і α_1 перетинаються по прямій l, то композиція таких двох симетрій є поворотом фі-



Мал. 85

гури F навколо прямої l (мал. 86). Зокрема, якщо $\alpha \perp \alpha_1$, композиція двох розглядуваних симетрій – поворот навколо прямої l на $180°$, тобто симетрія відносно осі l.



Мал. 86

Деякі композиції мають спеціальні назви. Композицію повороту навколо прямої та паралельного перенесення вздовж цієї прямої називають *гвинтовим рухом*. Композицію повороту навколо прямої та симетрії відносно площини, перпендикулярної до цієї прямої, називають *дзеркальним поворотом*.

Розрізняють рухи *першого* і *другого роду*.

Рухи, які зберігають орієнтації базисів, називають *рухами першого роду*. До них належать паралельне перенесення та поворот навколо прямої. Рухи першого роду можуть бути реалізовані неперервним переміщенням фігур у просторі. Композиція будь-якого числа рухів першого роду – рух першого роду.

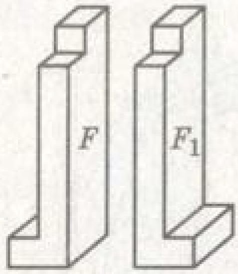
Рухи, які змінюють орієнтації базисів, називають *рухами другого роду*. До них належать симетрія відносно точки і відносно площини. Оскільки кожний рух другого роду змінює орієнтацію фігури, то композиція парного числа таких рухів – рух першого роду, а композиція непарного числа рухів другого роду – рух другого роду.

Рухи першого та другого родів розглядають і в планіметрії. Рух площини першого роду є або поворотом, або паралельним перенесенням; рух площини другого роду є композицією симетрії відносно прямої та паралельного перенесення вздовж цієї прямої (теорема Шаля).

Число різних рухів простору більше. Але усі їх можна звести до композиції симетрій відносно площини. Будь-який рух простору першого роду є композицією двох або чотирьох симетрій відносно площини; рух простору другого роду є або симетрією відносно площини, або композицією трьох таких симетрій.

ЗАУВАЖЕННЯ. Зверніть увагу на те, що симетрія відносно точки на площині – рух першого роду, а в просторі – рух другого роду. Симетрія відносно прямої на площині – рух другого роду, а в просторі – рух першого роду.

З геометричними рухами тісно пов'язане поняття *рівності фігур*. Дві фігури називають *рівними*, якщо існує рух, який



Мал. 87

відображає одну з них на іншу. Мають на увазі будь-які рухи: і першого роду, і другого, і будь-які їхні композиції. Хоча деталь F, зображену на малюнку 87, не можна замінити деталлю F_1, але в геометрії такі фігури вважаються рівними.

Відношення рівності геометричних фігур *транзитивне*, – якщо перша фігура дорівнює другій, а друга – третій, то перша і третя фігури також рівні.

З рівними матеріальними предметами доводиться мати справу багатьом робітникам. Сучасна промисловість виробляє великі партії геометрично рівних виробів. Рівні всі заготовки, вилиті в одній формі, всі деталі, виготовлені верстатом-автоматом за однією програмою. На багато виробів існують спеціальні Державні стандарти. Служба стандартизації зобов'язує випускати такі вироби встановлених стандартів, геометрично рівні один одному.

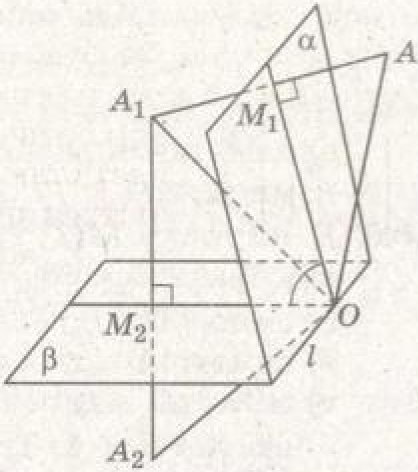
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що розуміють під композицією рухів?
2. Наведіть приклади композицій рухів.
3. Яку композицію називають гвинтовим рухом? А дзеркальним поворотом?
4. Які рухи називають рухами першого роду? Наведіть приклади.
5. Які рухи називають рухами другого роду? Наведіть приклади.
6. Які дві фігури називають рівними?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що композиція двох симетрій відносно двох площин, які перетинаються, є поворотом. Знайдіть вісь і кут цього повороту.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано площини α і β, які перетинаються по прямій l, а кут між ними дорівнює φ. І нехай A – деяка точка простору, яка при симетрії відносно площини α відображається у точку A_1, яка при симетрії відносно площини β відображається у точку A_2 (мал. 88). Уявіть, що через прямі AA_1 і A_1A_2 проведено площину γ. Вона перпендикулярна до l (чому?). Нехай O – точка перетину прямої l і площини γ.



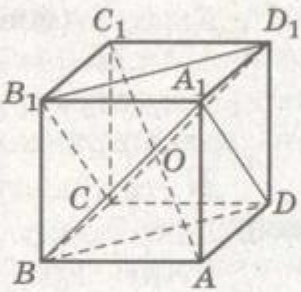
Мал. 88

Розглянемо $\triangle AOA_1$. Оскільки точки A і A_1 симетричні відносно площини α, то $AM_1 = M_1A_1$ і $OM_1 \perp AA_1$. Отже, $\triangle AOA_1$ – рівнобедрений і $OA = OA_1$. Аналогічно $OA_1 = OA_2$. З чого випливає, що $OA = OA_2$. А це означає, що відобразити точку A в точку A_2 можна поворотом навколо осі l.

Визначимо кут повороту. Нехай $\angle AOM_1 = \angle M_1OA_1 = \varphi_1$ і $\angle A_1OM_2 = \angle M_2OA_2 = \varphi_2$. Тоді $\angle AOA_2 = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) = 2\varphi$.

Отже, композицією двох симетрій відносно площин α і β, які перетинаються по прямій l під кутом φ, є поворот навколо прямої l на кут 2φ.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб. Доведіть рівність пірамід AA_1BD і $C_1CB_1D_1$.



Мал. 89

Доведення. Нехай O – середина діагоналі AC_1 куба. У результаті симетрії відносно точки O вершини піраміди AA_1BD відображаються на вершини піраміди $C_1CD_1B_1$ (мал. 89). Ці піраміди симетричні відносно точки O, отже, рівні.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

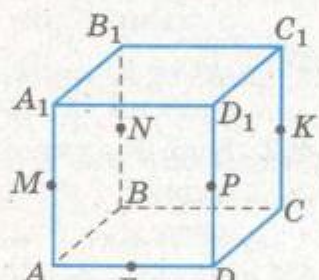
Виконайте усно

442. Наведіть приклади рівних фігур із навколишнього середовища.

443. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M, N, K, P, F – середини відповідних ребер (мал. 90). Знайдіть образ:

а) точки A при композиції паралельного перенесення на вектор $\overline{BC}$ та симетрії відносно точки P;

б) точки C при композиції повороту навколо прямої BB_1 на кут 90° та симетрії відносно площини MNK;



Мал. 90

в) відрізка AA_1 при композиції паралельного перенесення на вектор $\overline{AC}$ та повороту навколо прямої DD_1 на кут 45°.

444. Використовуючи умову попередньої задачі вкажіть, яким одним рухом можна замінити у кожному випадку задані композиції.

445. Дано точку $M(1; 2; 3)$. Знайдіть координати точки, у яку відобразиться точка M при композиції таких рухів:

а) симетрій відносно початку координат і площини xy;

б) симетрій відносно площин xy і yz;

в) симетрії відносно осі Ox і паралельного перенесення на вектор $\overline{a} = (1; 1; 1)$.

А

446. Накресліть довільний відрізок AB і точку O ($O \notin AB$). Побудуйте образ відрізка AB при композиції центральної симетрії відносно точки O та повороту на кут 90° навколо прямої, що проходить через точку O перпендикулярно до площини AOB.

447. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $M \in AA_1$, $AM : MA_1 = 1 : 2$. Площина α проходить через точку M перпендикулярно до AA_1. Побудуйте образ цього паралелепіпеда при композиції паралельного перенесення на вектор $\overline{AC}$ та симетрії відносно площини α.

448. Дано точку $A(1; -2; 5)$. Знайдіть координати образу цієї точки при композиції центральної симетрії відносно точки M і паралельного перенесення на вектор $\overline{s} = (-1; 2; 4)$, якщо:

а) $M(0; 0; 0)$; б) $M(3; 4; -1)$.

449. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 9$. Напишіть рівняння сфери, яка є образом даної при композиції центральної симетрії відносно початку координат і симетрій відносно площин xy та xz.

450. Дано два рівних відрізки зі спільним кінцем. Якими рухами один з них можна відобразити на другий?

451. Дано два рівних куби з однією спільною гранню. Якими рухами їх можна сумістити?

452. Куб F_1 утворився в результаті повороту куба F на 90° навколо його ребра. Якими ще рухами можна відобразити куб F на F_1?

453. Нехай $ABCD$ – правильний тетраедр. Якими рухами можна відобразити: а) ребро AB на CD; б) грань ABC на грань ABD; в) висоту AA_1 на висоту BB_1?

454. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Якими рухами можна відобразити: а) ребро AB на ребро C_1D_1; б) ребро AB на ребро CC_1; в) грань $ABCD$ на грань $A_1B_1C_1D_1$; г) грань $ABCD$ на грань AA_1B_1B; ґ) діагональ AC_1 на діагональ B_1D?

Б

455. Чи може композиція двох поворотів бути поворотом? А паралельним перенесенням або симетрією відносно площини?

456. Чи може композиція повороту навколо прямої та симетрії відносно точки бути паралельним перенесенням?

457. Доведіть, що композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням. Знайдіть вектор, який задає це перенесення.

458. Доведіть, що композиція симетрій відносно двох взаємно перпендикулярних площин є осьовою симетрією.

459. Доведіть, що у правильній чотирикутній піраміді діагональні перерізи рівні.

460. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини трьох його паралельних ребер. Доведіть, що ця площина розтинає паралелепіпед на рівні многогранники. Чи є вона площиною симетрії даного паралелепіпеда?

461. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює 2φ. Чи правильно, що переріз, проведений через сторону основи під кутом φ до площини основи, розтинає дану піраміду на дві рівні частини?

462. Площина проходить через апофему правильної трикутної піраміди і протилежне бічне ребро. Доведіть, що ця площина розтинає дану піраміду на два рівних тетраедри. Яким рухом можна відобразити один з цих тетраедрів на другий?

В

463. У кожному з двох тетраедрів довжина одного ребра a, а решти – b. Чи рівні ці тетраедри?

464. У кожному з двох тетраедрів три ребра мають довжину a і три – довжину b. Чи рівні ці тетраедри?

465. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються у точці O. Чи рівні піраміди $OABCD$ і $OA_1B_1C_1D_1$? А піраміди $OABCD$ і $OABB_1A_1$?

466. Чи правильно, що діагональний переріз прямого паралелепіпеда розбиває його на дві рівні призми? А якщо паралелепіпед похилий?

467. K, P, T, M, N – середини ребер AB, AC, AD, BD і CD тетраедра $ABCD$. Доведіть рівність тетраедрів $AKPT$ і $TMND$.

468*. Доведіть, що коли промінь падає на систему з трьох попарно перпендикулярних дзеркал, то він повертається до свого джерела (принцип дії кутового відбивача).

469*. Установіть і доведіть найважливіші властивості гвинтового руху.

470*. Сформулюйте і доведіть найважливіші властивості дзеркального повороту.

Вправи для повторення

471. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка $M(5; -3; 4)$ відобразилася на точку $N(1; -2; 3)$. Знайдіть вектор паралельного перенесення та образ точки $A(4; 7; -2)$ при цьому перенесенні.

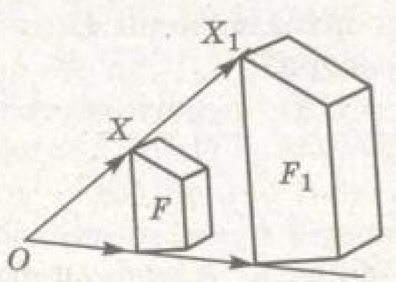
472. Доведіть, що коли обмежена фігура має центр симетрії та вісь симетрії, то центр симетрії лежить на осі симетрії.

473. Діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює d. Знайдіть площу $\triangle BC_1D$.

§ 14 ГОМОТЕТІЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Нехай дано точку O, число k і фігуру F. Перетворення, в результаті якого кожна точка X фігури F відображається на таку точку X_1, що $\overline{OX_1} = k\overline{OX}$, називається *гомотетією відносно центра O з коефіцієнтом k* (мал. 91). Якщо всі знайдені таким способом точки X_1 утворюють фігуру F_1, говорять, що дана гомотетія відображає фігуру F на F_1. Фігура F_1 називається гомотетичною фігурі F відносно центра O з коефіцієнтом k.

Коефіцієнт гомотетії може бути будь-яким дійсним числом $k \neq 0$. Якщо $k = 1$, фігура F відображається на себе. Якщо $k = -1$, фігура F відображається на фігуру F_1, симетричну F відносно точки O. Симетрія відносно точки – окремий випадок гомотетії.

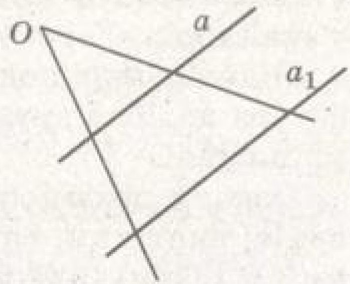


Мал. 91

Якщо коефіцієнт гомотетії k відмінний від 1 і –1, вона не зберігає відстаней між точками, не є рухом. Але при гомотетії відповідні відстані множаться на одне й те саме число. У результаті змінюються розміри фігури, але її форма не змінюється.

Теорема 13. ***Гомотетія відображає пряму, яка не проходить через центр гомотетії, на паралельну їй пряму.***

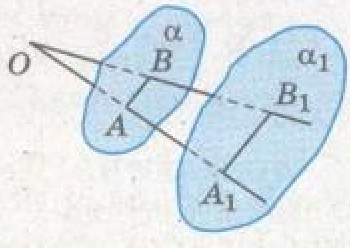
ДОВЕДЕННЯ. Нехай O і k – центр і коефіцієнт гомотетії, a – дана пряма, яка не проходить через точку O (мал. 92). Усі точки, гомотетичні точкам прямої a відносно центра O, лежать на променях, що виходять з O і перетинають a. Усі ці промені лежать в одній площині, яка проходить через O та a. Як відомо з планіметрії, гомотетія площини відображає пряму a на паралельну їй пряму a_1. Отже, і гомотетія простору відображає пряму a на паралельну їй пряму a_1. Теорему доведено.



Мал. 92

Теорема 14. ***Гомотетія відображає площину, яка не проходить через центр гомотетії, на паралельну їй площину.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай O і k – центр і коефіцієнт гомотетії, а α – площина, яка не проходить через точку O (мал. 93). Опустимо перпендикуляр OA на площину α і на прямій OA позначимо точку A_1 таку, що $\overline{OA_1} = k\overline{OA}$. Розглянемо площину α_1, яка паралельна α і проходить через точку A_1. Якщо B – будь-яка точка площини α, то пряма OB перетинає площину α_1 у такій точці B_1, що $\triangle OBA \sim \triangle OB_1A_1$. Отже, $OB_1 : OB = OA_1 : OA$, $\overline{OB_1} = k\overline{OB}$. Цим доведено, що дана гомотетія кожну точку B площини α відображає на деяку точку B_1 площини α_1. І навпаки: якщо B_1 – довільна точка площини α_1, то пряма OB_1 перетинає площину α в такій точці B, що $OB_1 = k\overline{OB}$. Отже, при розглядуваній гомотетії кожна точка площини α_1 є образом деякої точки площини α. Теорему доведено.



Мал. 93

Площина або пряма, яка проходить через центр гомотетії, відображається цією гомотетією на себе.

Композицію руху і гомотетії називають *перетворенням подібності*. Якщо фігура F дорівнює F_1, а F_1 гомотетична фігурі

F_2, то говорять, що перетворення подібності відображає фігуру F на F_2. Фігуру F називають *подібною* F_2 і навпаки. Пишуть $F \sim F_2$ або $F_2 \sim F$.

Рівність фігур і гомотетія – окремі випадки перетворення подібності. Якщо фігури гомотетичні, вони подібні. Але не завжди подібні фігури гомотетичні. Щоб дві подібні фігури стали гомотетичними, їх треба відповідним чином розмістити у просторі.

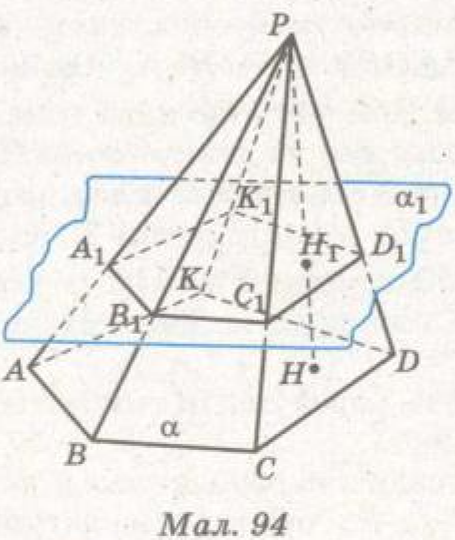
Відношення подібності фігур *транзитивне*: якщо перша фігура подібна другій, а друга – третій, то перша і третя фігури подібні.

Ознаки подібності, доведені в планіметрії для трикутників однієї площини, справджуються й для трикутників, розміщених у різних площинах. Подібними можуть бути і неплоскі фігури. Наприклад, будь-які два куби подібні один одному. Те саме можна сказати про два правильні тетраедри, про дві кулі тощо.

Нехай ребро одного куба втричі довше за ребро другого. У скільки разів площа поверхні першого куба більша від площі поверхні другого? У 9 разів. Узагалі, площі поверхонь подібних тіл відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних розмірів.

Теорема 15. ***Переріз піраміди площиною, паралельною основі, гомотетичний цій основі відносно вершини піраміди. Площі перерізу й основи відносяться як квадрати їхніх відстаней від вершини піраміди.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $PABC...K$ – довільна піраміда, а паралельна її основі площина α_1 перетинає піраміду по многокутнику $A_1B_1C_1...K_1$ (мал. 94). Гомотетія з центром P і коефіцієнтом $k = PA_1 : PA$ відображає точку A на A_1, а площину основи α на паралельну їй площину α_1. Оскільки через точку A_1 проходить єдина площина, паралельна основі, то многокутник $ABC...K$ цією гомотетією відображається на многокутник $A_1B_1C_1...K_1$.



Мал. 94

Отже, многокутники $ABC...K$ і $A_1B_1C_1...K_1$ подібні, відношення їхніх площ дорівнює k^2. Якщо PH і PH_1 – перпендикуляри до площин α і α_1, то з подібності трикутників PAH і PA_1H_1 випливає, що

$PH_1 : PH = k$. Отже, якщо площа перерізу дорівнює S_1, а площа основи піраміди S, то $S_1 : S = k^2 = PH_1^{\ 2} : PH^2$. Це й треба було довести.

Властивості подібних фігур у просторі часто використовують у моделюванні. Наприклад, перед тим як будувати літак, корабель, греблю, завод, створюють зменшені у кілька разів подібні їм моделі. На цих моделях з'ясовують особливості споруд і своєчасно усувають дефекти проектів.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке перетворення простору називається гомотетією?
2. Яких значень може набувати коефіцієнт гомотетії?
3. При яких значеннях коефіцієнта k гомотетія є рухом?
4. Сформулюйте і доведіть важливіші властивості гомотетії.
5. Яке перетворення простору називається перетворенням подібності?
6. Які фігури називаються подібними?
7. Укажіть властивості перетворення подібності.

Виконаємо разом

1. Доведіть, що при гомотетії з коефіцієнтом k відстань між точками змінюється у $|k|$ разів.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ та їхні образи при гомотетії з коефіцієнтом k – точки $A'(x_1'; y_1'; z_1')$ і $B'(x_2'; y_2'; z_2')$. Розглянемо гомотетію з центром у початку координат. За означенням гомотетії $\overline{OA'} = k\overline{OA}$. Тоді $x_1' = kx_1$, $y_1' = ky_1$ і $z_1' = kz_1$. Аналогічно $x_2' = kx_2$, $y_2' = ky_2$ і $z_2' = kz_2$. Розглянемо відстані AB і $A'B'$.

$$A'B' = \sqrt{\left(x_2' - x_1'\right)^2 + \left(y_2' - y_1'\right)^2 + \left(z_2' - z_1'\right)^2} =$$

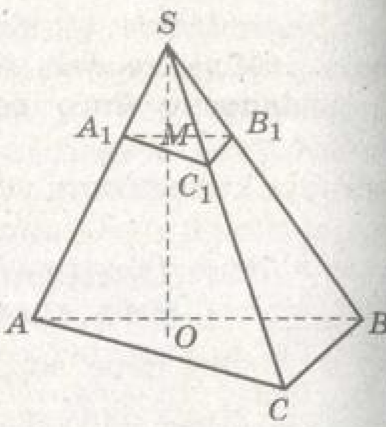
$$= \sqrt{\left(kx_2 - kx_1\right)^2 + \left(ky_2 - ky_1\right)^2 + \left(kz_2 - kz_1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{k^2\left(\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right)} =$$

$$= |k|\sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} = |k| \cdot AB.$$

Отже, відстань між точками A і B та їхніми образами – точками A' і B' – змінюється у k разів.

2. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Через точку M, яка лежить на висоті піраміди, проведено площину паралельно основі. У якому відношенні точка M ділить висоту піраміди, якщо площа перерізу дорівнює $\frac{28}{3}$ см^2?



Мал. 95

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $SABC$ задана в умові задачі піраміда, $A_1B_1C_1$ – переріз піраміди площиною, паралельною основі (мал. 95). Знайдемо площу $\triangle ABC$. Скористаємося формулою Герона. Оскільки $p=\frac{13+14+15}{2}=21$, то $S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=$ $=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84.$

За теоремою 15 $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{SM^2}{SO^2}$, тоді $\frac{SM^2}{SO^2}=\frac{28}{3\cdot 84}=\frac{1}{9}$, звідки $\frac{SM}{SO}=\frac{1}{3}$.

Отже, $SM : MO = 1 : 2$.

ВІДПОВІДЬ. $SM : MO = 1 : 2$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

474. Назвіть приклади подібних фігур з навколишнього середовища.

475. Чи всі гомотетичні фігури подібні?

476. Чи завжди подібні фігури гомотетичні?

477. Назвіть фігури, які завжди гомотетичні.

478. Назвіть фігури, які завжди подібні. Які з них гомотетичні?

479. Ребро правильного тетраедра дорівнює 4 см. Чому дорівнює ребро тетраедра, гомотетичного даному з коефіцієнтом гомотетії k, якщо:

а) $k = 2$; б) $k=-\frac{1}{2}$; в) $k = 1$; г) $k = -2$?

А

480. Побудуйте фігуру, гомотетичну даному трикутнику ABC відносно даної точки P з коефіцієнтом гомотетії $k = 2$.

481. Побудуйте фігуру, гомотетичну даному тетраедру $ABCD$ відносно його вершини D, якщо коефіцієнт гомотетії $k = 0{,}5$.

482. Дано тетраедр $ABCD$ і точку P, симетричну точці A відносно B. Побудуйте фігуру, гомотетичну даному тетраедру відносно центра P, якщо коефіцієнт гомотетії $k = -1$.

483. Побудуйте тетраедр, гомотетичний тетраедру $ABCD$ відносно його вершини A, якщо в результаті цієї гомотетії центроїд грані ABC відображається на середину ребра BC. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

484. Побудуйте куб, гомотетичний даному кубу відносно його вершини з коефіцієнтом гомотетії $k = -2$.

485. Чи може одна з двох гомотетичних фігур лежати у внутрішній області другої?

486. Як можуть бути розміщені дві гомотетичні сфери?

487. Радіус однієї зі сфер є діаметром другої. Чи гомотетичні вони? З яким коефіцієнтом гомотетії? Де знаходиться центр гомотетії, якщо: а) центри сфер збігаються; б) сфери мають внутрішній дотик; в) сфери мають зовнішній дотик?

488. Напишіть рівняння сфери, гомотетичної сфері $x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$ з центром у початку координат і коефіцієнтом: а) $k = 3$; б) $k = -2$.

489. Напишіть рівняння площини, гомотетичної площині $2x + y - 3z + 6 = 0$ з центром гомотетії в початку координат і коефіцієнтом: а) $k = 2$; б) $k = -3$.

Б

490. Доведіть, що пряма, яка проходить через центр гомотетії, відображається цією гомотетією на себе.

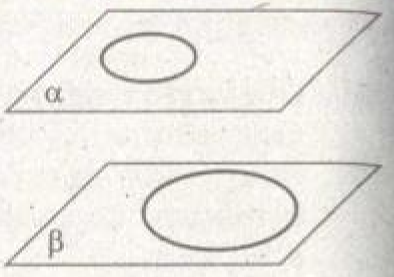
491. Доведіть, що площина, яка проходить через центр гомотетії, відображається цією гомотетією на себе.

492. Чи гомотетичні два куби, якщо вони симетричні: а) відносно площини їхньої спільної грані; б) відносно прямої, яка містить їхнє спільне ребро?

493. Чи можуть бути гомотетичними один одному два трикутники, які лежать у перпендикулярних площинах?

494. Доведіть, що композицією двох гомотетій зі спільним центром і коефіцієнтами k_1 і k_2 є гомотетія з тим самим центром і коефіцієнтом $k = k_1 \cdot k_2$.

495. Скільки існує гомотетій, які відображають один із двох нерівних паралельних відрізків на другий?



Мал. 96

496. Два кола радіусів r і R лежать у різних паралельних площинах (мал. 96). Скільки існує центрів гомотетій, які відображають одне коло на інше? Чому при цьому дорівнює коефіцієнт гомотетії?

497. Знайдіть координати точки, в яку відображається точка $A(1;\ 0;\ 2)$ гомотетією з коефіцієнтом $k = 10$ відносно: а) початку координат; б) точки $B(2;\ 0;\ 0)$.

498. Відносно яких центрів і з якими коефіцієнтами гомотетичні трикутники з вершинами $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$ і $A_1(0;\ 0;\ 4)$, $B_1(0;\ 4;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ 4)$?

499. Знайдіть координати вершин тетраедра, гомотетичного тетраедру з вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ 3)$, $C(-1;\ 2;\ -3)$, $D(4;\ 0;\ 5)$ відносно початку координат з коефіцієнтом гомотетії $k = 5$.

500. Тетраедр $OABC$ заданий координатами своїх вершин: $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 4)$. Знайдіть координати вершин тетраедра, гомотетичного даному:
а) з центром O і коефіцієнтом $k = -1$;
б) з центром A і коефіцієнтом $k = 2$.

501. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту у відношенні 2 : 3 (рахуючи від вершини). Знайдіть площу перерізу, знаючи, що вона менша за площу основи на 84 см^2.

502. Бічне ребро піраміди розділили на 10 рівних частин і через точки поділу провели площини, паралельні основі. Знайдіть площі перерізів, якщо площа основи піраміди дорівнює S.

В

503. Доведіть, що композиція двох перетворень подібності з коефіцієнтами k_1 і k_2 є подібністю з коефіцієнтом $k = k_1 \cdot k_2$.

504. Дано дві правильні чотирикутні призми. Сторона основи однієї вдвічі довша від її бічного ребра, а сторона основи другої вдвічі коротша від її бічного ребра. Чи подібні ці призми?

505. A_1, B_1, C_1, D_1 – центри граней правильного тетраедра $ABCD$. Доведіть, що тетраедри $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – подібні, та знайдіть коефіцієнт подібності.

506. Через вершину S піраміди $SABCD$, в основі якої лежить паралелограм $ABCD$, проведено площину, яка ділить основу на два рівні паралелограми, подібні даному. Знайдіть відношення сторін основи. За якої умови утворені піраміди будуть рівними? Чи будуть подібними дана піраміда й утворені?

507. Площина, паралельна бічній грані правильної трикутної призми, відтинає від неї меншу трикутну призму. Чи подібні ці призми?

508*. Усі грані тетраедра – подібні між собою прямокутні трикутники. Знайдіть відношення найбільшого і найменшого ребер цього тетраедра.

509. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть із дроту моделі подібних ламаних з трьох попарно перпендикулярних ланок і розмістіть їх у просторі так, щоб вони були гомотетичними.

Вправи для повторення

510. Дано точки $A(3; -4; 1)$ і $B(1; -2; 7)$. Наведіть приклади рухів, які відображають одну точку на іншу.

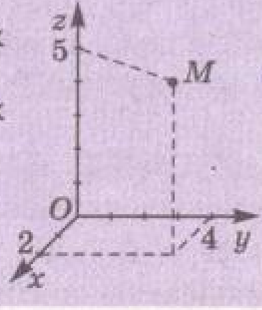
511. Дано точку $M(2; 4; 3)$. Знайдіть точку, яка є образом точки M при повороті на $90°$ навколо осі Ox.

512. Прямі a і b та прямі b і c мимобіжні. Чи випливає з цього, що прямі a і c мимобіжні?

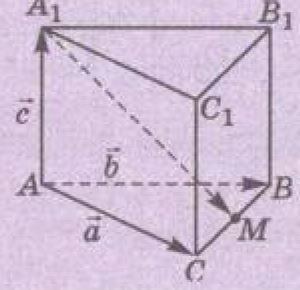
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

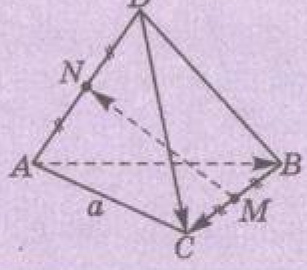
Знайдіть відстань від точки M до:
а) $O(0; 0; 0)$;
б) координатних площин;
в) координатних осей.



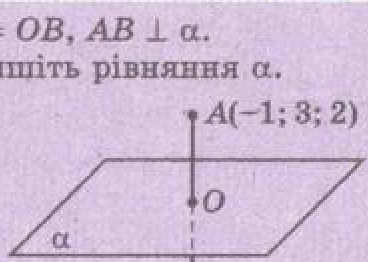
$CM = MB$.
Розкладіть $\overline{A_1M}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



$ABCD$ – правильний тетраедр.
Знайдіть:
а) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; б) $\overline{BC} \cdot \overline{DC}$;
в) $\overline{BM} \cdot \overline{MN}$.

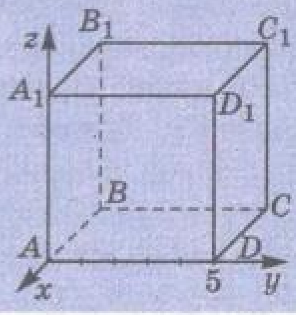


$AO = OB$, $AB \perp \alpha$.
Запишіть рівняння α.

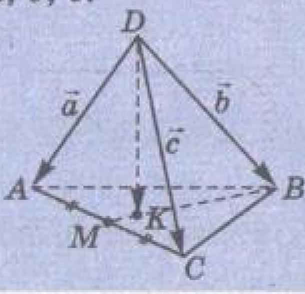


Б

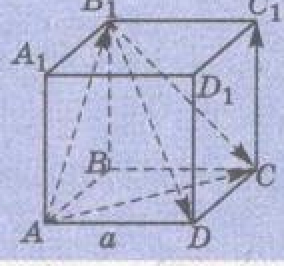
Знайдіть координати вершин куба.



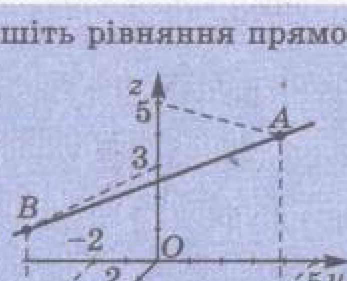
$MK : KB = 1 : 3$.
Розкладіть вектор $\overline{DK}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
Знайдіть:
а) $\overline{AB_1} \cdot \overline{CC_1}$; б) $\overline{AB_1} \cdot \overline{B_1C}$;
в) $\overline{B_1D} \cdot \overline{AC}$.



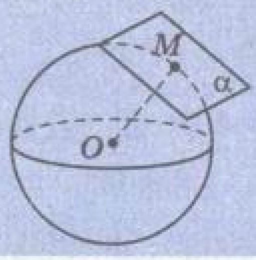
Запишіть рівняння прямої AB.



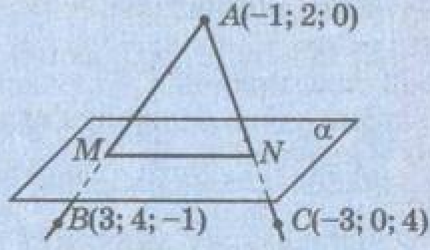
А

Б

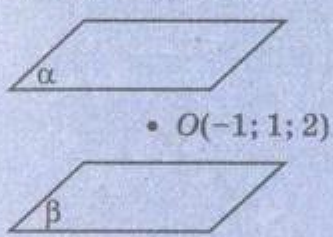
Площина α – дотична до сфери в точці $M(2; -1; 4)$; $O(1; -2; 3)$. Напишіть рівняння α.



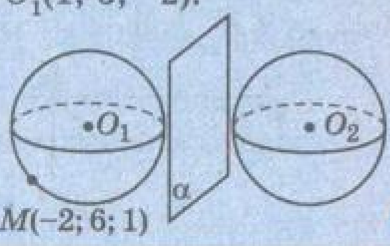
α: $2x + y - z + 10 = 0$. Знайдіть MN.



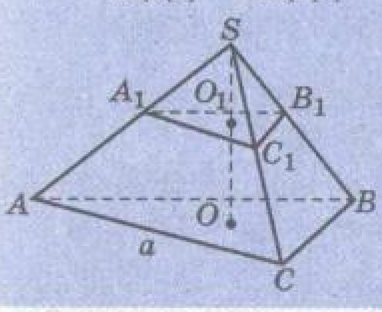
α і β симетричні відносно точки O; α: $x - 2y + 3z - 4 = 0$. Напишіть рівняння β.



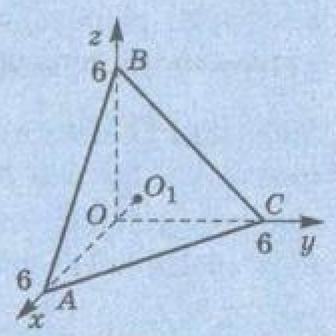
Сфери O_1 і O_2 симетричні відносно α: $x + y - z + 3 = 0$. Напишіть рівняння сфери O_2, якщо $O_1(1; 3; -2)$.



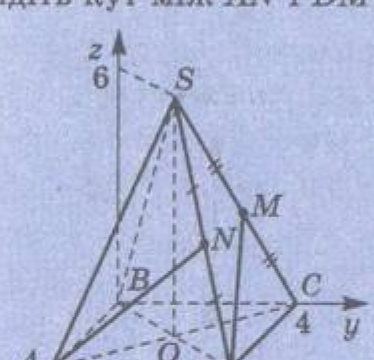
$SABC$ – правильний тетраедр, $SO_1 : O_1O = 2 : 3$; $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$. Знайдіть $P_{\triangle A_1B_1C_1}$ і $S_{\triangle A_1B_1C_1}$.



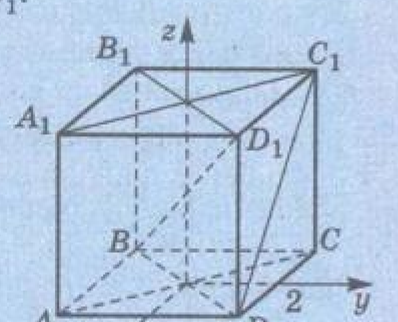
OO_1 – висота тетраедра $OABC$. Знайдіть OO_1.



$SABCD$ – правильна піраміда. Знайдіть кут між AN і DM.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут і відстань між BD_1 і DC_1.



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Дано точки $A(0; -3; 2)$ і $B(4; 0; -2)$. Середина відрізка AB належить:

а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz; г) площині xy.

2. Знайдіть відстань від точки $A(3; 4; -3)$ до осі Oz.

а) 3; б) 5; в) $2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{34}$.

3. При якому значенні m колінеарні вектори

$$\vec{a} = (m^2; 3; -4m-3) \text{ і } \vec{b} = (3; 4; 2m+7)?$$

а) 1,5; б) −1,5; в) −1,5 або 1,5; г) −0,5 або 0,5.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $AB = 1$. Обчисліть $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{BB_1}$.

а) 1; б) 0; в) −1; г) 0,5.

5. Знайдіть координати одиничного вектора, співнапрямленого з вектором $\vec{m} = (2; -1; 2)$.

а) $\left(1; -\frac{1}{2}; 1\right)$; б) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; в) $\left(-1; -\frac{1}{2}; -1\right)$; г) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

6. При яких значеннях p кут між векторами $\vec{a} = (1; 1; 0)$ і $\vec{b} = (0; 4; p)$ дорівнює 60°?

а) 4; б) −4 або 4; в) 16; г) −16 або 16.

7. Укажіть рівняння сфери з центром у точці $(0; -1; 0)$, яка дотикається до площини $y = 2$.

а) $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$; б) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$;
в) $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$; г) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$.

8. Яка з точок симетрична точці $M(-1; 2; -4)$ відносно площини yz?

а) $(1; -2; 4)$; б) $(1; 2; -4)$; в) $(-1; -2; -4)$; г) $(-1; 2; 4)$.

9. Яка з площин симетрична відносно початку координат площині $x + y - 2z + 5 = 0$?

а) $-x + y - 2z + 5 = 0$; б) $x + y - 2z - 5 = 0$;
в) $x - y + 2z - 5 = 0$; г) $x + y - 2z + 5 = 0$.

10. Площини α і β задані відповідно рівняннями $x + y - 2z + 3 = 0$ і $2x + 2y - 4z + 9 = 0$. Яке взаємне розміщення прямих $a \subset \alpha$ і $b \subset \beta$?

а) Перетинаються або паралельні; б) паралельні;
в) паралельні або мимобіжні; г) перетинаються.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1°. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-1; 3; 2)$ відносно точки $Q(3; -1; 4)$.

2°. Знайдіть кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A(2; -1; 3)$, $B(1; -1; 2)$, $C(4; 5; -2)$, $D(4; 4; -1)$.

3°. Знайдіть довжину медіани BM $\triangle ABC$, заданого координатами своїх вершин $A(-2; 3; 5)$, $B(1; -3; 2)$ і $C(4; -3; 1)$.

4°. Складіть рівняння площини, яка проходить через середину відрізка MN перпендикулярно до нього, якщо $M(-1; 2; 4)$, $N(3; 0; 6)$.

5•. Напишіть рівняння сфери з центром у точці $A(1; -2; 3)$, яка проходить через точку $M(3; -2; 4)$, і сфери, утвореної при паралельному перенесенні даної на вектор $\overline{p} = (-2; 1; -1)$.

6•. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$, якщо $A(7; 6; 8)$, $B(2; 8; 6)$, $C(3; 4; 2)$, $D(8; 2; 4)$.

7•. У якому відношенні площина $z = 1,5$ ділить діаметр сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, який проходить через точку $A(0; 4; 3)$?

8•. На прямій l взято вектор $\overline{AB} = (3; 4; -5)$. Знайдіть кут між прямою l і площиною xy.

9••[1]. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$ такого, що $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$, якщо $\vec{a} = (1; -2; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; -1)$.

10••. Доведіть, що композиція двох симетрій відносно площин $y = x$ і $y = -x$ є поворотом. Укажіть вісь і кут цього повороту.

11••. Дано точки $A(1; 2; -3)$, $B(2; -3; 1)$ і площину $2x - y - 3z + 1 = 0$. Знайдіть:

а) рівняння прямої AB;

б) точку перетину прямої AB з площиною;

в) рівняння площини, симетричної даній площині відносно точки B;

г) рівняння прямої, симетричної прямій AB відносно заданої площини.

12••. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $A(0; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$. Знайдіть кут між прямими AB_1 і BD_1 та відстань між ними.

---

[1]Тут і далі задачі з позначкою •• тільки для учнів профільних класів.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1

1. *Прямокутна система координат* дає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору та трійками дійсних чисел. $A(x;\ y;\ z)$ – точка з абсцисою x, ординатою y та аплікатою z.

2. Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їхніх відповідних координат.

3. Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на три взаємно перпендикулярні прямі.

4. Якщо точка $C(x;\ y;\ z)$ – середина відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

5. Рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$.

6. Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(a;\ b;\ c)$, –

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

7. Рівняння сфери радіуса r з центром у початку координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

з центром у точці $A(a;\ b;\ c)$ –

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

8. Пряму у тривимірному просторі визначає система рівнянь двох площин.

9. Рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, –

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

10. *Вектор* – елемент векторного простору. Зображати ненульові вектори можна напрямленими відрізками. Будь-які вектори зручно зображати у координатній формі. Координатами вектора з початком у точці $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$; $z = z_2 - z_1$. Записують так: $\overline{AB} = (x;\ y;\ z)$.

11. *Модулем вектора* називають довжину напрямленого відрізка, що його зображає. Позначають його символом $|\overline{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

12. Якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

13. *Сумою* двох векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

14. Для додавання будь-яких векторів правильні переставний і сполучний закони. Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника, паралелограма або паралелепіпеда.

15. *Різницю* двох векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ можна знаходити, користуючись рівністю

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

16. *Множити* будь-який вектор $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ на довільне дійсне число k можна так: $k\vec{a} = (kx;\ ky;\ kz)$.

17. Вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

18. *Скалярним добутком двох векторів* називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

19. Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

20. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

21. Якщо X – довільна точка простору, G – середина відрізка AB або точка перетину медіан трикутника ABC, то відповідно

$$\overline{XG} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB}); \quad \overline{XG} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}).$$

22. Переріз піраміди площиною, паралельною основі, гомотетичний цій основі відносно вершини піраміди. Площі перерізу й основи відносяться як квадрати їхніх відстаней від вершини піраміди.

Многогранні кути. Многогранники

Основні теми розділу:

- Двогранні кути.
- Тригранні кути.
- Многогранні кути.
- Геометричні тіла і многогранники.
- Призма.
- Паралелепіпед.
- Піраміда і зрізана піраміда.
- Правильні многогранники.

РОЗДІЛ 2

Многогранники становлять, можна сказати, центральний предмет стереометрії.

О. Александров

§ 15 ДВОГРАННІ КУТИ

Пряма на площині розбиває її на дві півплощини. Дві півплощини зі спільною прямою, що їх обмежує, можуть і не лежати в одній площині, а утворювати двогранний кут (мал. 97).

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.
Півплощини, які утворюють двогранний кут, називають *гранями*, а пряму, що їх обмежує, – *ребром* двогранного кута.

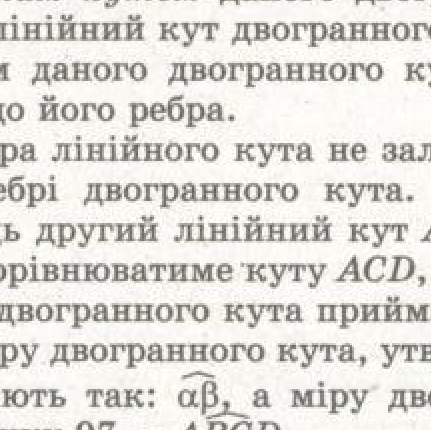
Двогранний кут розбиває простір на дві області – внутрішню та зовнішню. Об'єднання двогранного кута та його внутрішньої області також називають двогранним кутом. Двогранний кут з ребром BC і точками A, D, які лежать у його різних гранях, позначають $ABCD$.

Проведемо з якої-небудь точки C ребра двогранного кута в його гранях промені CA і CD, перпендикулярні до ребра (мал. 98). Кут ACD, утворений цими променями, називають *лінійним кутом* даного двогранного кута. Можна сказати і так: лінійний кут двогранного кута – це кут, утворений перетином даного двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра.

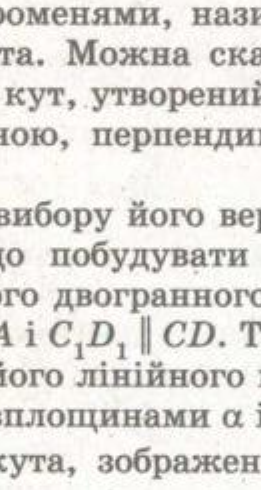
Міра лінійного кута не залежить від вибору його вершини на ребрі двогранного кута. Адже якщо побудувати який-небудь другий лінійний кут $A_1C_1D_1$ даного двогранного кута, він дорівнюватиме куту ACD, бо $C_1A_1 \parallel CA$ і $C_1D_1 \parallel CD$. Тому за міру двогранного кута приймають міру його лінійного кута.

Міру двогранного кута, утвореного півплощинами α і β, позначають так: $\widehat{\alpha\beta}$, а міру двогранного кута, зображеного на малюнку 97, – $A\widehat{BC}D$.

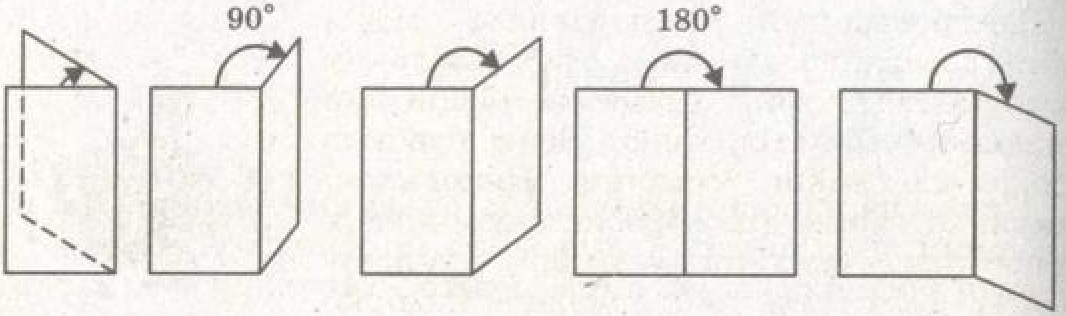
Двогранні кути можна порівнювати. Той з двох двогранних кутів вважають більшим, лінійний кут якого більший. Дво-



Мал. 97



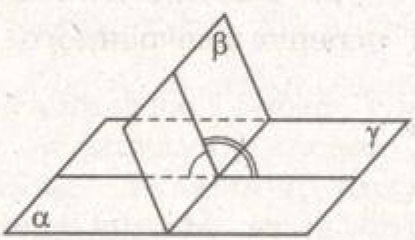
Мал. 98



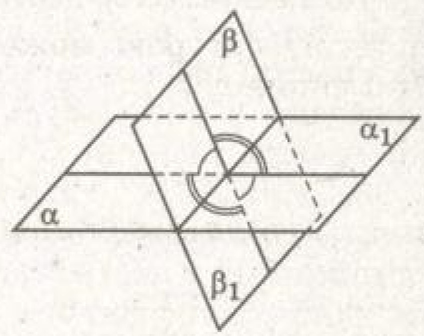
Мал. 99

гранний кут називають гострим, прямим, тупим, розгорнутим або більшим від розгорнутого залежно від того, гострий, прямий, тупий, розгорнутий або більший від розгорнутого його лінійний кут (мал. 99).

Подібно до кутів у планіметрії, двогранні кути можуть бути суміжними (мал. 100) і вертикальними (мал. 101).



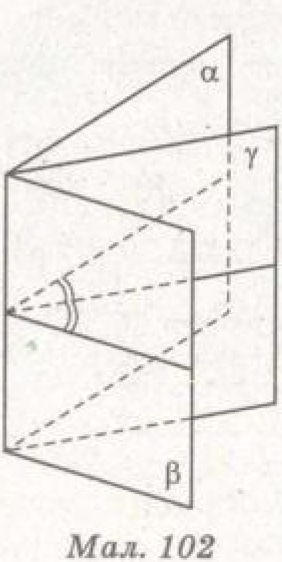
Мал. 100



Мал. 101

При цьому справедливі й аналогічні теореми про міри цих кутів.

Півплощина, яка обмежена ребром двогранного кута і ділить його на два рівні двогранні кути, називається бісекторною півплощиною, або *бісектором* даного двогранного кута (мал. 102). На малюнку 102 бісектором двогранного кута $\widehat{\alpha\beta}$ є півплощина γ.



Мал. 102

Не слід ототожнювати міру двогранного кута з кутом між площинами. Кут між площинами може змінюватися у межах від 0 до 90°, а міра двогранного кута – від 0 до 360°.

Замість «двогранний кут, міра якого дорівнює α», часто говорять коротше: «двогранний кут α». У таких випадках під двогранним кутом розуміють і певну фігуру, і відповідну їй міру – значення величини.

Найпростішими матеріальними моделями двогранного кута є краї різальних інструментів: зубил, стамесок, різців для токарних верстатів тощо. Вони бувають більш або менш гострими. Наприклад, слюсарне зубило для обробки алюмінієвих сплавів заточують під кутом 35°, для латуні – 45°, для сталі – 60° і більше. Вимірюють такі кути кутомірами (мал. 103).

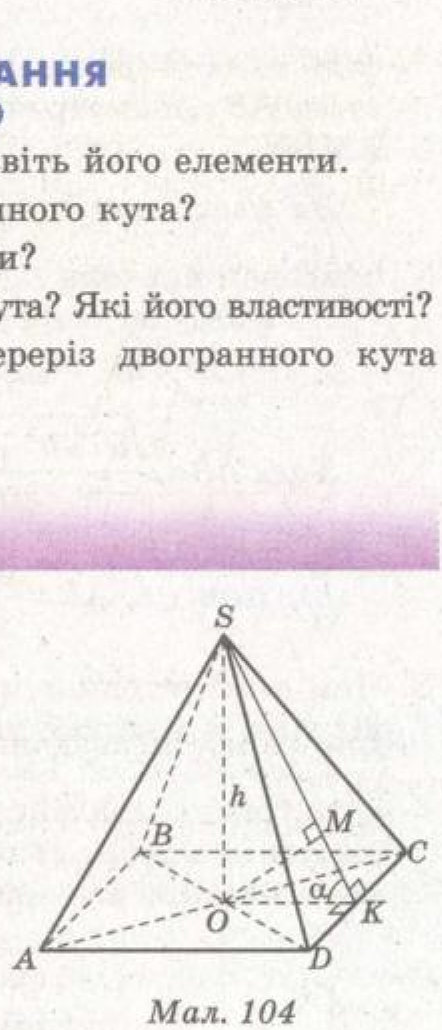
Мал. 103

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке двогранний кут? Назвіть його елементи.
2. Що таке лінійний кут двогранного кута?
3. Якими бувають двогранні кути?
4. Що таке бісектор двогранного кута? Які його властивості?
5. Якою фігурою може бути переріз двогранного кута площиною?

Виконаємо разом

1. Знайдіть відстань від основи висоти SO правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ до бічної грані, якщо $SO = h$, а двогранні кути при ребрі основи дорівнюють α (мал. 104).



Мал. 104

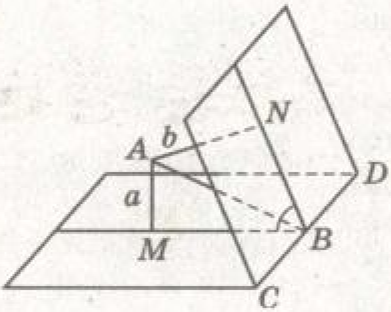
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проведемо $OK \perp CD$ і точку K з'єднаємо з точкою S. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SK \perp CD$. Отже, $\angle SKO$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі CD, $\angle SKO = \alpha$.

У площині SOK проведемо $OM \perp SK$. Оскільки площини SOK і SCD перпендикулярні, то OM – відстань від точки O до грані SCD.

Відстань OM знайдемо з $\triangle SOM$, враховуючи, що $\angle OSM = 90° - \alpha$. Тоді $OM = SO \cdot \sin(90° - \alpha)$, або $OM = h\cos\alpha$.

ВІДПОВІДЬ. $OM = h\cos\alpha$.

2. Точка A міститься всередині двогранного кута α ($\alpha < 180°$) і віддалена від граней кута на відстані a і b. Знайдіть відстань від точки A до ребра даного кута.



Мал. 105

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай точка A віддалена від граней двогранного кута з ребром CD на відстані $AM = a$ і $AN = b$ (мал. 105).

Розглянемо чотирикутник $AMBN$. Оскільки сума його протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло. Це коло буде описаним і навколо прямокутного трикутника AMB, а тому його центр буде лежати на середині гіпотенузи AB. Отже, шукана відстань AB – діаметр кола, описаного навколо чотирикутника $AMBN$.

За наслідком з теореми синусів $2R = \frac{MN}{\sin\alpha}$, бо це коло описане і навколо $\triangle MBN$.

З $\triangle MAN$ за теоремою косинусів знайдемо MN.

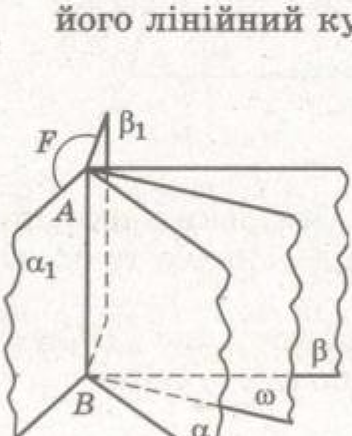
$$MN^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Тоді $AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

ВІДПОВІДЬ. $AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

3. Чим є геометричне місце точок простору, рівновіддалених від граней гострого двогранного кута?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Геометричним місцем точок двогранного кута, рівновіддалених від його граней, є півплощина, яка виходить з ребра даного двогранного кута і ділить кожний його лінійний кут навпіл, тобто бісекторна площина.



Мал. 106

Якщо через ребро AB даного двогранного кута провести півплощини α_1 і β_1, перпендикулярні відповідно до граней α і β даного двогранного кута, дістанемо новий двогранний кут F (мал. 106). Кожна точка двогранного кута F і його внутрішньої області також рівновіддалена від граней α і β даного двогранного кута.

Шуканим геометричним місцем точок є об'єднання бісектора даного двогранного кута і двогранного кута F (разом з його внутрішньою областю).

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

513. Знайдіть кут між прямими, перпендикулярними до граней двогранного кута, міра якого 100°.

514. Кут між двома площинами 47°. Знайдіть градусні міри двогранних кутів, утворених перетином цих площин.

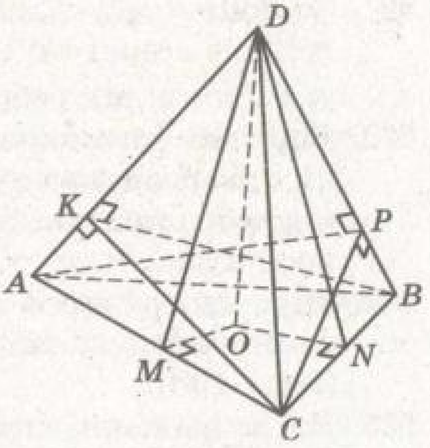
515. Дано двогранний кут, міра якого 52°. Чому дорівнює міра суміжного з ним двогранного кута? А вертикального?

516. Чому дорівнює двогранний кут між бісекторами двох суміжних двогранних кутів?

517. Точка A лежить на бісекторі двогранного кута мірою 60°. Знайдіть відстань від точки A до граней цього кута, якщо від ребра вона віддалена на 10 см.

518. Точка M лежить в одній грані двогранного кута мірою 30° і віддалена від іншої грані на 6 см. Знайдіть відстань від точки M до ребра цього кута.

519. Дано тетраедр $ABCD$ (мал. 107). Назвіть лінійні кути двогранних кутів при ребрах AC, BC, BD, DA.



Мал. 107

А

520. Дано двогранний кут, міра якого 60°. Точка A, яка лежить в одній з його граней, віддалена на 12 см від другої. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута.

521. Двогранний кут дорівнює 45°. Точка B, яка лежить в одній з його граней, віддалена від ребра на 8 дм. Знайдіть відстань від точки B до другої грані.

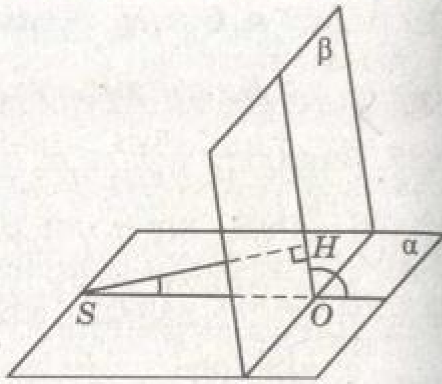
522. Знайдіть міру двогранного кута, якщо відстань від точки, взятої на одній його грані, до другої вдвічі менша за відстань від цієї точки до ребра.

523. З точок A і B однієї грані гострого двогранного кута опущено перпендикуляри AA_1, BB_1 на другу грань і AA_2, BB_2 – на ребро. Знайдіть довжину перпендикуляра BB_2, якщо $AA_1 = 3$ дм, $AA_2 = 5$ дм, $BB_1 = 9$ дм.

524. Точка A віддалена від граней прямого двогранного кута на 3 дм і 4 дм. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута.

525. Двогранний кут дорівнює 60°. З точки C на його ребрі у гранях проведено перпендикулярні до ребра відрізки $CA = 3{,}2$ дм і $CB = 1{,}2$ дм. Знайдіть відстань від A до B.

526. Довжини перпендикулярів, опущених з точки A на грані двогранного кута, дорівнюють по 36 см. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута, якщо його міра 120°.



Мал. 108

527. Знайдіть міру двогранного кута, якщо точка P, яка лежить всередині цього кута, віддалена від його граней на m і $\sqrt{2}m$, а від ребра – на $2m$.

528. Відстань між паралельними прямими, що лежать у гранях двогранного кута, дорівнює 13 см. Ці прямі віддалені від ребра кута на 7 см і 8 см. Знайдіть міру цього двогранного кута.

529. Міра двогранного кута 100°. Знайдіть кут між площиною однієї його грані та перпендикуляром до другої грані (мал. 108).

530. На зображенні правильного тетраедра побудуйте зображення лінійного кута одного з його двогранних кутів.

Б

531. Доведіть, що всі двогранні кути правильного тетраедра рівні. Знайдіть міру двогранного кута правильного тетраедра.

532. У правильній n-кутній піраміді бічне ребро дорівнює 5 см, а ребро основи 6 см. Знайдіть двогранні кути при основі, якщо:

а) $n = 4$; б) $n = 3$.

533. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 13 см, 14 см, 15 см, а всі двогранні кути при основі рівні. Знайдіть ці двогранні кути, якщо висота піраміди дорівнює 4 см.

534. Ребро SB піраміди $SABCD$ перпендикулярне до площини основи $ABCD$ і дорівнює BD. Знайдіть міри двогранних кутів при ребрах AD, DC і SB, якщо $ABCD$:

а) квадрат;

б) прямокутник зі сторонами 5 см і 12 см;

в) ромб, у якого $\angle BAD = 60°$;

г) паралелограм зі сторонами 4 см і 6 см та кутом $\angle ABC = 120°$.

535. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть міру двогранного кута BAC_1D.

536. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB, AC і AD попарно перпендикулярні й рівні. Знайдіть міри його двогранних кутів при ребрах BC, CD, BD.

537. В основі піраміди $SABCD$ лежить квадрат $ABCD$. Ребро SB перпендикулярне до площини основи і дорівнює ребру основи. Знайдіть міри двогранних кутів при ребрах AB, AD, SD, SC.

538. Основою похилої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник зі стороною a. Вершина B_1 проектується у центр основи ABC. Знайдіть міру двогранного кута при ребрі BC, якщо ребро BB_1 утворює з площиною основи кут 45°.

539. Точка Q лежить всередині двогранного кута, міра якого 60°, і віддалена від його граней на 3 см і 5 см. Знайдіть відстань від точки Q до ребра цього кута.

540. Міра двогранного кута дорівнює 60°. Відстань між паралельними прямими, які лежать у гранях цього кута, дорівнює 14 см. Знайдіть відстань від ребра двогранного кута до цих прямих, якщо одна з цих відстаней на 10 см більша за другу.

541. Кінці відрізка AB належать різним граням двогранного кута мірою 120° і віддалені від ребра на 6 см і 10 см. Відстань між основами перпендикулярів, проведених з точок A і B до ребра, дорівнює $12\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину відрізка AB.

542. Кінці відрізка лежать на гранях прямого двогранного кута та віддалені від його ребра на 12 см і 16 см. Знайдіть відстань від даного відрізка до ребра двогранного кута.

В

543. A і B – точки на ребрі двогранного кута міри φ, AC і BD – перпендикуляри до ребра, проведені у різних гранях. Знайдіть відстань CD, якщо $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$.

544. Кінці відрізка AB лежать у гранях двогранного кута, а відстані AM і BN від них до ребра рівні. Доведіть, що $\angle ABM = \angle BAN$.

545*. Паралелограм $ABCD$, у якого $AB = AC$ і $AB \perp AC$, зігнули по діагоналі AC так, що кут BAD став 60°. Знайдіть міру двогранного кута, утвореного площинами трикутників ABC і ADC.

546. Чим є геометричне місце точок гострого двогранного кута, рівновіддалених від його граней?

547. Чим є геометричне місце точок простору, рівновіддалених від граней двогранного кута?

548*. Доведіть, що бісектори всіх двогранних кутів будь-якого тетраедра проходять через одну точку.

549. *ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.* Зробіть з картону модель двогранного кута, позначте на ньому його лінійний кут.

Вправи для повторення

550. При якому значенні a справджується рівність $\vec{m} \cdot \vec{n} = -5$, якщо $\vec{m} = (2;\ a;\ 5)$, $\vec{n} = (-3;\ 2;\ 1)$?

551. При паралельному перенесенні точка $A(-2;\ 3;\ 4)$ відображається на точку $A_1(1;\ 3;\ -2)$. У яку точку відобразиться середина відрізка AA_1?

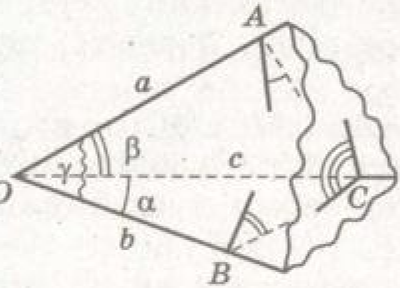
552. Доведіть, що сума відстаней від середини відрізка до площини, яка його перетинає, дорівнює модулю піврізниці відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

§ 16 ТРИГРАННІ КУТИ

Уявіть фігуру, яка складається з трьох кутів AOB, BOC, COA, які не лежать в одній площині (мал. 109). Таку фігуру називають *тригранним кутом*, точку O – його *вершиною*, а дані кута – *гранями*, промені OA, OB, OC – *ребрами*. Ця фігура розбиває простір на дві частини. Об'єднання такої фігури й однієї з цих частин також називають тригранним кутом.

Якщо ребра тригранного кута a, b, c, то відповідні їм двогранні кути позначають буквами $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, а протилежні плоскі кути – буквами α, β, γ.

Звичайно розглядають тригранні кути, у яких кожний плоский кут менший від розгорнутого. За такої умови сума всіх трьох плоских кутів тригранного кута більша від 0 і менша від 360°. Кожний двогранний кут такого тригранного кута може змінюватися в межах від 0 до 180°, але сума всіх трьох двогранних кутів тригранного кута не може бути меншою від 180°. Чому?

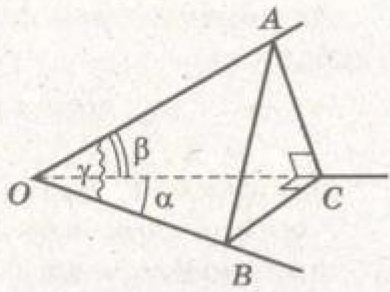


Мал. 109

Тригранний кут називається прямим, якщо всі його плоскі кути прямі.

Теорема 16 (косинусів для тригранного кута). ***Якщо*** α, β, γ – ***плоскі кути тригранного кута, а*** $\hat{C}$ – ***його двогранний кут, протилежний*** γ, ***то*** $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}$.

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо спочатку тригранний кут $OABC$ з довільним плоским кутом $\gamma = \angle AOB$ і гострими кутами $\alpha = \angle BOC$ і $\beta = \angle AOC$ (мал. 110). Через будь-яку точку C променя OC проведемо перпендикулярні до OC прямі, які перетинають промені OA і OB у точках A і B. Кут ACB – лінійний кут двогранного кута при ребрі OC, тому $\angle ACB = \hat{C}$.



Мал. 110

Застосуємо теорему косинусів до трикутників AOB і ACB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB\cos\gamma,$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\hat{C},$$

звідки

$$OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\gamma =$$
$$= CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\hat{C},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2\cdot OA\cdot OB}\Big(OA^2 - CA^2 + OB^2 - CB^2 +$$

$$+ 2\cdot CA\cdot CB\cdot\cos\hat{C}\Big) = \frac{1}{2\cdot OA\cdot OB}\left(2\cdot OC^2 + 2\cdot CA\cdot CB\cdot\cos\hat{C}\right) =$$

$$= \frac{OC}{OA}\cdot\frac{OC}{OB} + \frac{CA}{OA}\cdot\frac{CB}{OB}\cos\hat{C} = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha\cos\hat{C}.$$

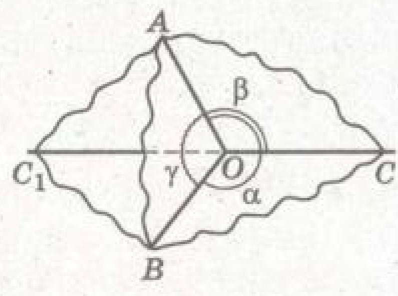
Отже,

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}.$$

Якщо $\alpha = \beta = 90°$, то $\hat{C} = \gamma$. У цьому випадку рівність справедлива:

$$\cos\gamma = \cos 90° \cdot \cos 90° +$$
$$+ \sin 90° \cdot \sin 90° \cdot \cos\hat{C}.$$

Якщо у тригранному куті $OABC$ кути α і β тупі, то проведемо промінь OC_1, доповняльний для OC (мал. 111). У тригранному куті $OABC_1$ $\angle AOC_1 = 180° - \beta$,



Мал. 111

$\angle BOC_1 = 180° - \alpha$, $\angle AOB = \gamma$, а двогранний кут при ребрі OC_1 дорівнює $\hat{C}$. За доведеним вище

$$\cos\gamma = \cos(180° - \alpha)\cos(180° - \beta) + \\ + \sin(180° - \alpha)\sin(180° - \beta)\cos\hat{C}.$$

Звідси

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}.$$

Аналогічно можна довести теорему для решти випадків. Завжди

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\hat{C}.$$

Наслідки. 1. ***Якщо*** $\hat{C} = 90°$, ***то*** $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. ***Якщо двогранний кут тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його плоских кутів.***

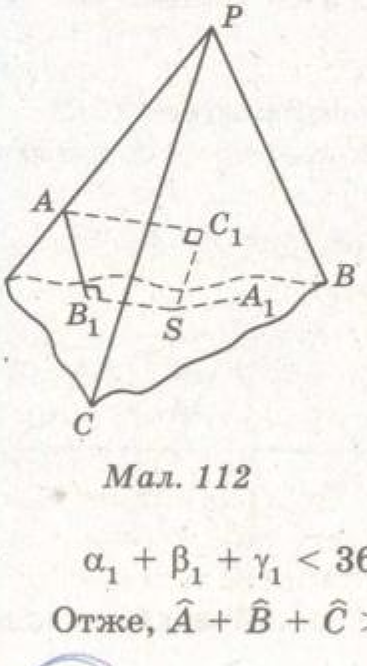
Ця властивість називається ***теоремою про три косинуси.***

2. Оскільки $\cos\hat{C} > -1$, $\sin\alpha > 0$ **і** $\sin\beta > 0$, **то**

$$\cos\gamma > \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta).$$

Звідси випливає, що $\gamma < \alpha + \beta$, **тобто** ***кожний плоский кут опуклого тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів.***

Теорема 17. ***Сума мір двогранних кутів тригранного кута більша за 180°.***



Мал. 112

ДОВЕДЕННЯ. Нехай двогранні кути тригранного кута дорівнюють $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Візьмемо всередині тригранного кута $PABC$ довільну точку S і опустимо перпендикуляри SA_1, SB_1, SC_1 на грані BPC, APC, APB відповідно (мал. 112). Позначимо $\angle B_1SC_1 = \alpha_1$, $\angle A_1SC_1 = \beta_1$, $\angle A_1SB_1 = \gamma_1$. Тоді $\alpha_1 = 180° - \hat{A}$; $\beta_1 = 180° - \hat{B}$; $\gamma_1 = 180° - \hat{C}$. Маємо:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 540 - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1).$$

Оскільки α_1, β_1, γ_1 – плоскі кути тригранного кута $SA_1B_1C_1$, то

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 < 360°, \text{ тоді } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 540° - 360° = 180°.$$

Отже, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180°$.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке тригранний кут? Назвіть його елементи.
2. Сформулюйте і доведіть теорему косинусів для тригранного кута.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про три косинуси.
4. Які властивості мають плоскі кути тригранного кута?
5. Які властивості мають двогранні кути тригранного кута?
6. Який тригранний кут називають прямим?

Виконаємо разом

1. У тригранного кута два плоских кути по 45°, двогранний кут між ними – прямий. Знайдіть третій плоский кут.

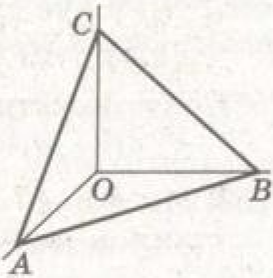
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо $\hat{C} = 90°$, то

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta = \cos45°\cos45° = \frac{1}{2}. \text{ Отже, } \gamma = 60°.$$

ВІДПОВІДЬ. 60°.

2. Точки A, B, C лежать на ребрах прямого тригранного кута $OABC$. Чи може бути прямокутним чи тупокутним $\triangle ABC$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. На основі теореми косинусів маємо (мал. 113):



Мал. 113

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$$

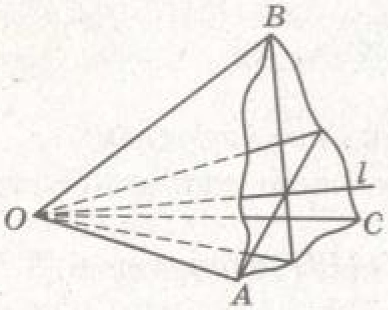
$$= \frac{AO^2 + OC^2 + BO^2 + OC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{2OC^2}{2AC \cdot BC} > 0.$$

Отже, $\angle ACB < 90°$. Аналогічно доводимо, що кути ABC і BAC також гострі.

3. Знайдіть геометричне місце точок, які лежать всередині тригранного кута і рівновіддалені від граней цього кута.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Геометричним місцем точок двогранного кута, рівновіддалених від його граней, є бісектор, який ділить навпіл лінійний кут цього двогранного кута (див. задачу 3 на с. 108).

Нехай бісектори двох довільних двогранних кутів даного тригранного кута перетинаються по променю l, початок якого знаходиться у вершині тригранного кута. Тоді кожна точка цього променя буде рівновіддалена від



Мал. 114

площин усіх трьох граней даного тригранного кута, а отже, бісектор третього двогранного кута теж проходить через промінь l. Отже, шуканим геометричним місцем точок є промінь з початком у вершині тригранного кута, по якому перетинаються бісектори двогранних кутів цього тригранного кута (мал. 114).

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

553. Чи може сума плоских кутів тригранного кута дорівнювати 90°; 120°; 180°; 360°? А бути більшою за 360°?

554. Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють 65° і 95°. У яких межах може змінюватися міра третього плоского кута?

555. Два плоскі кути тригранного кута мають міри по 110°. У яких межах може змінюватися міра третього плоского кута?

556. Чи існує тригранний кут з плоскими кутами:
а) 45°; 80°; 130°; б) 76°; 34°; 110°; в) 20°; 60°; 70°?

557. Чи можуть двогранні кути тригранного кута дорівнювати:
а) 50°; 80°; 90°; б) 70°; 60°; 40°; в) 120°; 100°; 70°?

558. Чи існує тригранний кут, кожний двогранний кут якого дорівнює 60°?

559. Чи існує площина, перпендикулярна до всіх граней тригранного кута?

560. Чи існує тригранний кут з плоскими кутами:
а) 30°, 45° і 60°; б) 20°, 30° і 60°?

561. Сума всіх плоских кутів тригранного кута дорівнює 180°. Доведіть, що всі ці плоскі кути гострі.

А

562. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Доведіть, що і всі його двогранні кути прямі.

563. Доведіть, що коли двогранні кути тригранного кута рівні, то кожний з них більший за 60°.

564. Знайдіть двогранні кути тригранного кута, коли кожний його плоский кут дорівнює 60°.

565. У тригранного кута плоскі кути дорівнюють 45°, 45° і 60°. Знайдіть його двогранні кути.

566. У тригранного кута плоскі кути дорівнюють 120°, 120° і 90°. Знайдіть двогранний кут, який лежить проти меншого плоского кута.

567. У тригранного кута $OABC$ $\angle BOC = 90°$, $\angle AOB = \angle AOC = 60°$ і $OA = a$. Знайдіть відстань від точки A до площини кута BOC.

568. Усі плоскі кути тригранного кута $OABC$ дорівнюють 60°. Знайдіть кут між ребром OA і площиною кута BOC.

569. У тригранного кута $PABC$ $\angle BPC = 90°$, а ребро PA утворює з площиною цього кута кут 45°. Знайдіть $\angle APB$ і $\angle APC$, коли відомо, що вони рівні.

570. У тригранного кута всі плоскі кути прямі. Всередині його з вершини проведено відрізок, проекції якого на ребра дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть довжину цього відрізка.

571. Всередині прямого тригранного кута взято точку M, яка віддалена від ребер цього кута на 12 см, 16 см і 12 см. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини кута.

Б

572. Доведіть, що в тригранному куті проти рівних плоских кутів лежать рівні двогранні кути. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

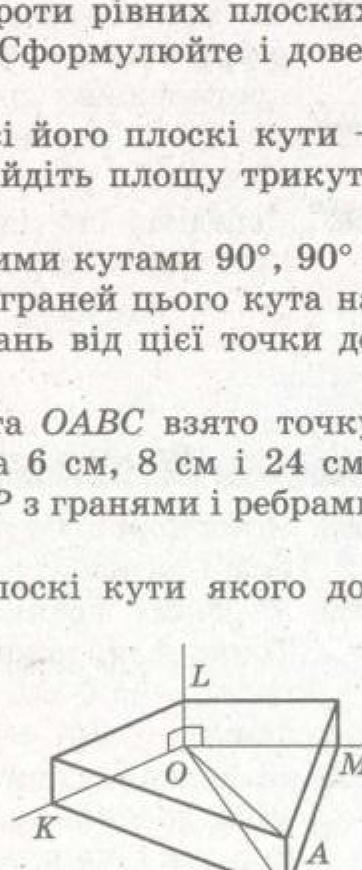
573. $OABC$ – прямий тригранний кут (усі його плоскі кути – прямі). $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Знайдіть площу трикутника ABC.

574. Усередині тригранного кута з плоскими кутами 90°, 90° і 120° взято точку, яка віддалена від граней цього кута на 12 см, 12 см і 2 см. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини кута (мал. 115).

575. Усередині прямого тригранного кута $OABC$ взято точку P, яка віддалена від граней кута на 6 см, 8 см і 24 см. Знайдіть кути, які утворює пряма OP з гранями і ребрами даного тригранного кута.

576. Усередині тригранного кута, всі плоскі кути якого дорівнюють 60°, взято точку, яка віддалена від всіх граней на 2 см. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини кута.

577. Усередині тригранного кута, всі плоскі кути якого дорівнюють 60°, взято точку, яка віддалена від усіх ребер цього кута на a. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини кута.



Мал. 115

578. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює α. Знайдіть кут між його ребром і бісектрисою протилежного плоского кута.

В

579*. Двогранні кути тригранного кута дорівнюють 90°, $\hat{A}$ і $\hat{A}$. Знайдіть його плоскі кути.

580. Доведіть, що коли всі двогранні кути тригранного кута рівні, то рівні й усі його плоскі кути.

581. Знайдіть плоскі кути тригранного кута, якщо кожний його двогранний кут дорівнює 120°.

582. З точки A, яка не лежить на площині, проведені до неї дві взаємно перпендикулярні похилі AB і AC, які утворюють з площиною кути 15° і 75°. Знайдіть кути B і C трикутника ABC.

583. Плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60°, 60° і 90°. Доведіть, що площина, яка відтинає від ребер кута рівні відрізки, перпендикулярна до площини прямого кута.

584. Доведіть, що всі три бісектори двогранних кутів тригранного кута мають спільну пряму.

585. Чи мають спільну пряму площини, які проходять через ребра непрямого тригранного кута і перпендикулярні до протилежних граней?

586. Знайдіть геометричне місце внутрішніх точок тригранного кута, рівновіддалених від його ребер.

587. Доведіть, що для плоских кутів будь-якого тригранного кута має місце нерівність

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha + 1 > 0.$$

Вправи для повторення

588. Чому дорівнює кут між ребром двогранного кута і довільною прямою, що лежить у площині його лінійного кута?

589. У різних гранях двогранного кута взято точки A і B. Точка A віддалена від ребра на 7,5 см, а від протилежної грані – на 6 см. Знайдіть відстань від точки B до протилежної грані, якщо від ребра вона віддалена на 10 см.

590. Відстань від центра основи правильної чотирикутної піраміди до бічного ребра дорівнює d. Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі та при ребрі основи піраміди, якщо сторона основи дорівнює $2d$.

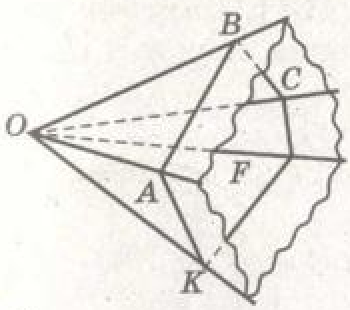
§ 17 МНОГОГРАННІ КУТИ

Нехай F – довільний многокутник, а O – точка, яка не лежить у його площині. Фігура, що складається з усіх променів, які виходять з точки O і перетинають многокутник F, називається *многогранним кутом* (мал. 116). Промені OA, OB, ..., OK – його *ребра*, плоскі кути AOB, BOC, ..., KOA – *грані*, а точка O – *вершина* даного многогранного кута.

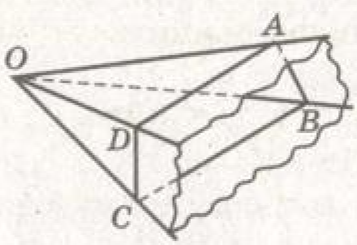
Залежно від кількості граней розрізняють тригранні, чотиригранні, ..., n-гранні кути.

Кутовими елементами многогранного кута є його плоскі кути і двогранні кути. Наприклад, у чотиригранному куті $OABCD$ є чотири плоскі кути AOB, BOC, COD, DOA та чотири двогранні кути $DOAB$, $AOBC$, $BOCD$ і $CODA$ (мал. 117).

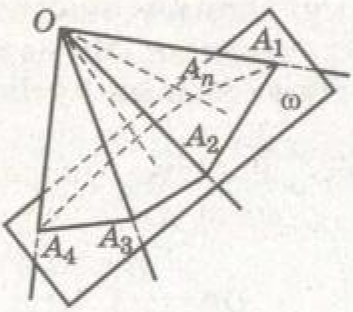
Многогранний кут розбиває простір на дві області – внутрішню та зовнішню. Об'єднання многогранного кута з його внутрішньою областю також називають многогранним кутом.



Мал. 116



Мал. 117



Мал. 118

Многогранний кут називається *опуклим*, якщо він розміщений з одного боку від площини кожної його грані.

Ми розглядатимемо в основному опуклі многогранні кути. Найпростіший з многогранних кутів – *тригранний кут*.

! **Теорема 18.** ***В опуклого многогранного кута сума плоских кутів менша від 360°.***

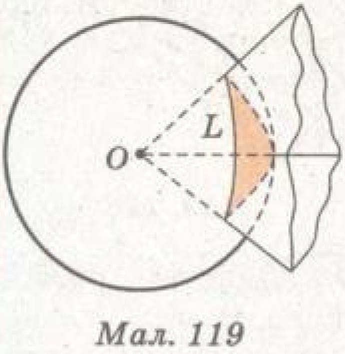
ДОВЕДЕННЯ. Проведемо яку-небудь площину ω, яка перетинає всі ребра даного n-гранного кута. Нехай A_1, A_2, ..., A_n – точки її перетину з ребрами многогранного кута (мал. 118). Многокутник $A_1A_2A_3...A_n$ – опуклий, сума всіх його плоских кутів дорівнює $180°(n-2)$.

Розглянемо тригранні кути $A_2OA_1A_3$, $A_3OA_2A_4$, ..., $A_1OA_nA_2$. Нехай S – сума їхніх плоских кутів, які не є кутами многокутника $A_1A_2A_3...A_n$. Оскільки плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів, то $S > 180°(n - 2)$.

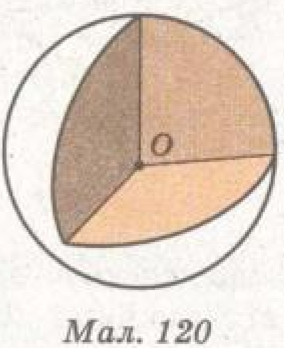
Якщо σ – сума всіх плоских кутів даного n-гранного кута, то $\sigma + S$ – сума всіх кутів n трикутників: $\sigma + S = 180°n$. Отже, $S = 180°n - \sigma$, $180°n - \sigma > 180°(n - 2)$, звідки $\sigma < 360°$. Це й треба було довести.

Многогранні кути – окремі види тілесних кутів. Уявіть сферу з центром O, а на ній лінію L, яка обмежує частину сфери. Множина всіх променів, що виходять із центра сфери і перетинають лінію L, – це *тілесний кут* (мал. 119). Об'єднання такого тілесного кута з частиною простору, яку він обмежує, також називають тілесним кутом. Поняття тілесного кута часто розглядають в оптиці.

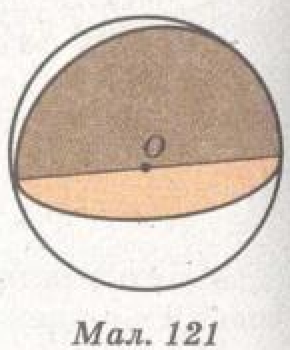
Кожний тілесний кут має певну міру. За одиницю міри тілесного кута прийнято 1 *стерадіан*. Це – тілесний кут, який на сфері радіуса r із центром у його вершині вирізає фігуру площею r^2. Оскільки площа всієї сфери радіуса r дорівнює $4\pi r^2$, то прямий тригранний кут (він вирізає восьму частину сфери) має $0{,}5\pi$ стерадіанів (мал. 120). Прямий двогранний кут вирізає четверту частину сфери (мал. 121), тому він має π стерадіан. Як бачимо, двогранні кути можна вважати окремими видами кутів многогранних.



Мал. 119



Мал. 120



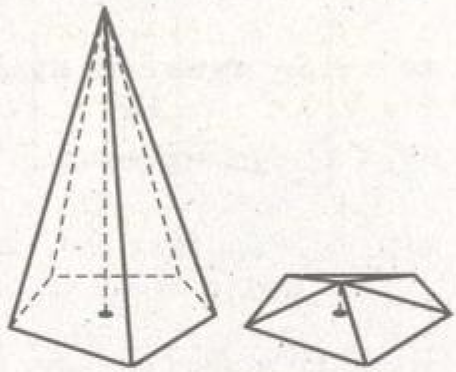
Мал. 121

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке многогранний кут? Назвіть його елементи.
2. Які многогранні кути називають опуклими?
3. Сформулюйте теорему про плоскі кути опуклого многогранного кута.
4. Як можна узагальнити поняття многогранного кута?
5. Як вимірюють тілесні кути? Що таке стерадіан?

Виконаємо разом

1. Многогранний кут, у якого всі плоскі кути рівні та всі двогранні кути рівні, називають *правильним*. Яким може бути плоский кут правильного многогранного кута? А двогранний кут?



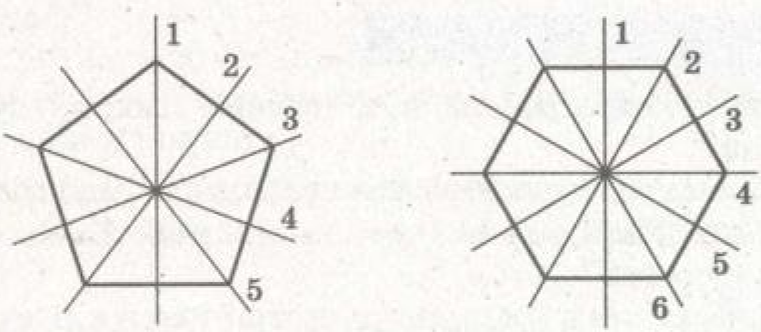
Мал. 122

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Уявимо многогранний кут при вершині правильної n-кутної піраміди (мал. 122). Якщо висоту такої піраміди зменшувати, то її бічні грані наближатимуться до площини основи. При цьому кожний двогранний кут прямуватиме до 180°, а сума плоских кутів – до 360°. Отже, плоский кут правильного n-гранного кута більший від 0° і менший від 360° : n.

Двогранний кут правильного n-гранного кута менший від 180°, але більший від 180°(n – 2) : n. Останній результат випливає з теореми 17.

2. Скільки площин симетрії має правильний 5-гранний кут? А правильний 6-гранний кут?

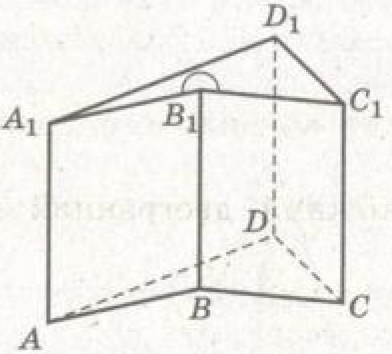
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Правильний n-гранний кут має стільки площин симетрії, скільки правильний n-кутник має осей симетрії (мал. 123). Отже, правильний 5-гранний кут має 5 площин симетрії, а 6-гранний – 6.



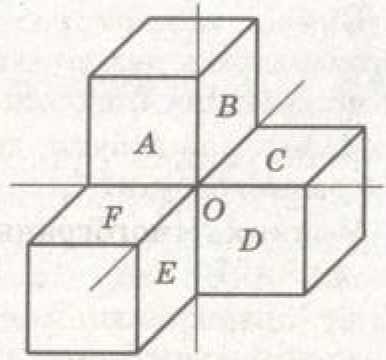
Мал. 123

3. Чи існує: а) неопуклий тригранний кут; б) шестигранний кут, усі 6 плоских кутів якого прямі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. а) Існує. Наприклад, при вершині B_1 неопуклої призми (мал. 124, *а*).



а)



б)

Мал. 124

б) Уявимо фігуру, утворену з трьох рівних кубів, розташованих, як на малюнку 124, *б*. Об'єднання прямих кутів, яким належать грані A, B, C, D, E, F кубів, утворюють шестигранний кут, кожний плоский кут якого – прямий. Три його двогранні кути прямі, а три – по 270°.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

591. Многогранний кут має n ребер. Скільки він має: вершин; граней; двогранних кутів?

592. Чи існує опуклий чотиригранний кут, плоскі кути якого 30°, 30°, 30° і 100°?

593. Учень стверджує, що коли всі плоскі кути многогранного кута рівні, то рівні й усі його двогранні кути. Чи правильно це для тригранного кута? А для n-гранного кута, де $n > 3$?

А

594. Чи існує чотиригранний кут, кожний плоский кут якого – прямий?

595. Скільки площин симетрії має правильний семигранний кут?

596. Чи існує п'ятигранний кут, який має тільки одну площину симетрії?

597. Чи можуть мати площини симетрії неопуклі многогранні кути?

598. Чи існує чотиригранний кут, плоскі кути якого дорівнюють $n°$, $2n°$, $3n°$, $4n°$? Яким може бути n?

599. Скільки існує різних чотиригранних кутів, плоскі кути яких дорівнюють $n°$, $n°$, $n°$, $2n°$? Яким найбільшим може бути значення n?

600. Відомо, що чотиригранний кут має тільки одну площину симетрії, а два його плоскі кути – 30° і 40°. Знайдіть міри двох інших його плоских кутів.

601. Яким може бути двогранний кут правильного чотиригранного кута?

602. У яких многогранних кутах кожний двогранний кут прямий?

603. Кожний плоский кут правильного чотиригранного кута дорівнює 60°. Знайдіть міри його двогранних кутів.

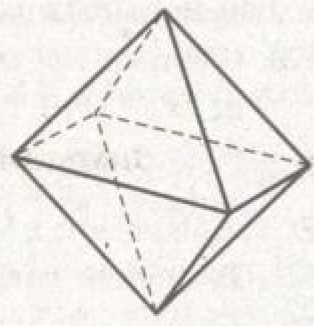
604. Кожний двогранний кут правильного п'ятигранного кута дорівнює 150°. Знайдіть міри його плоских кутів.

Б

605. Як прямий тригранний кут можна розрізати на три рівні чотиригранні кути? Знайдіть міри плоских (і двогранних) кутів такого чотиригранного кута.

606. Скількома способами правильний прямокутний тригранний кут можна розрізати на чотири рівні тригранні кути?

607. Правильний октаедр (мал. 125) має 8 граней, кожна з яких – правильний трикутник. Скільки він має многогранних кутів? Охарактеризуйте їх.



Мал. 125

608. Чи існує чотиригранний кут з плоскими кутами 40°, 70°, 110° і 140°? А опуклий чотиригранний кут?

609. Доведіть, що коли всі плоскі кути чотиригранного кута рівні, то:
   а) кожний його двогранний кут дорівнює протилежному;
   б) площини, які проходять через його протилежні ребра, перпендикулярні.

610. Доведіть, що опуклий чотиригранний кут можна перетнути площиною так, що в перерізі утвориться паралелограм.

В

611. Дослідіть, у яких випадках у перерізі чотиригранного кута площиною можна дістати прямокутник; квадрат; ромб.

612*. Доведіть, що у всякому многогранному куті кожний плоский кут менший від суми решти його плоских кутів.

613. Як змінюються лінійні та двогранні кути многогранного кута при гомотетії з коефіцієнтом $k \neq 1$?

614. За аналогією з кутами на площині сформулюйте означення вертикальних многогранних кутів.

615. Сформулюйте означення рівності многогранних кутів.

616. Доведіть, що будь-які два вертикальні многогранні кути рівні.

617. Яким рухом один з двох вертикальних многогранних кутів можна відобразити на другий?

618. *ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.* Зробіть із цупкого паперу моделі тригранного і чотиригранного кутів.

Вправи для повторення

619. Побудуйте переріз тетраедра $ABCD$ площиною, яка проходить через внутрішню точку грані ABD паралельно прямим CB і CD.

620. Скільки спільних точок мають сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і:

а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 4$;

б) $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 18$;

в) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$?

621. Визначте взаємне розміщення прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$ і площини:

а) $2x + y - z - 7 = 0$;

б) $x - 2y + 4z - 6 = 0$;

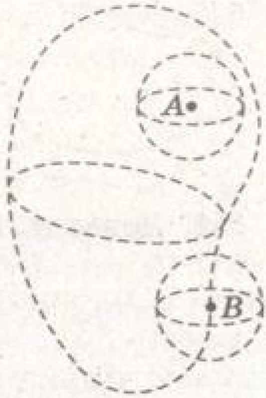
в) $3x - y - 3z - 8 = 0$.

§ 18 ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА

Надалі вивчатимемо властивості фігур, які називаються *геометричними тілами*. Зміст цього поняття розкриємо на основі понять «куля», «просторова область» та ін.

Кожна сфера розбиває простір на дві області: внутрішню, яка містить центр сфери, та зовнішню. Об'єднання сфери з її внутрішньою областю називається *кулею*. *Центром* і *радіусом кулі* називають відповідно центр і радіус сфери, що її обмежує. Куля – найпростіший приклад геометричного тіла; її внутрішня область – внутрішня область сфери – приклад просторової області.

Сама сфера – поверхня цієї просторової області та поверхня кулі.



Мал. 126

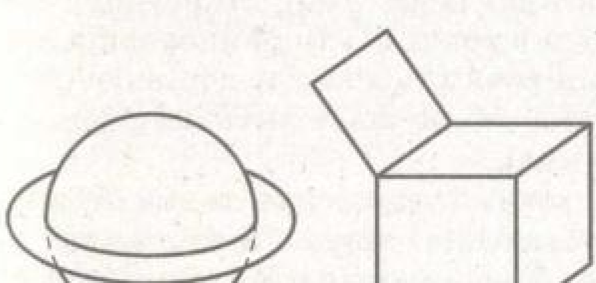
Узагальнимо цей приклад. Точка A неплоскої фігури називається *внутрішньою*, якщо існує куля з центром у цій точці, що цілком належить даній фігурі (мал. 126). Фігура називається *просторовою областю*, якщо всі її точки внутрішні та будь-які дві з них можна сполучити ламаною, що цілком належить даній фігурі. Точка B простору називається *граничною* для даної області, якщо будь-яка куля з центром у цій точці містить як точки, що належать області, так і ті, що не належать їй. Фігура називається *обмеженою*, якщо відстань між будь-якими двома її точками не перевищує деякої певної скінченної відстані. Наприклад, тригранний кут – фігура необмежена, а тетраедр – обмежена.

Обмежена просторова область разом з усіма її граничними точками називається геометричним тілом; множина всіх її граничних точок – поверхнею цього геометричного тіла.

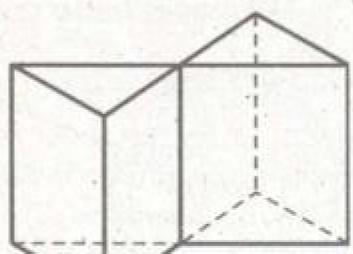
Оскільки ніяких інших тіл, крім геометричних, у геометрії не розглядають, далі ми їх називатимемо просто *тілами*.

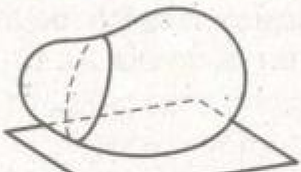
Такі фігури, як куб, паралелепіпед, тетраедр, – тіла. Кожне з них складається з деякої просторової області та всіх її граничних точок. Жодна лінія або поверхня не містить просторової області, тому не є тілом. Але не кожна фігура, яка містить просторову область, є тілом. Наприклад, об'єднання кулі та плоского кільця, куба і відрізка або якої-небудь плоскої фігури (мал. 127) – не тіло, бо багато точок цих фігур не належать ні просторовій області, ні її межі. Не є тілом і фігура, яка містить кілька просторових областей (мал. 128).

Відстань між найбільш віддаленими точками тіла називають його *діаметром*. Наприклад, діаметром куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є відстань AC_1, діаметром правильного тетраедра – довжина його ребра.



Мал. 127


Мал. 128



Мал. 129

Введемо ще поняття опорної площини тіла.

Якщо тіло має з площиною хоча б одну спільну точку і розміщене від неї з одного боку, таку площину називають *опорною* до цього тіла (мал. 129). Наприклад, опорними до тетраедра є: площина будь-якої його грані, площина, яка проходить через вершину або ребро тетраедра, але не перетинає його. Кожна площина, яка має з кулею тільки одну спільну точку, опорна до неї.

Матеріальною моделлю геометричного тіла є фізичне тіло. Просторову область можна тільки уявити: частина тіла без усієї його поверхні. Якщо фігури F і F_1 не мають спільних точок і принаймні одна з них – просторова область, то ці фігури не мають найближчих точок (див. наступну задачу і мал. 130).

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке просторова область геометричної фігури? Чи кожна геометрична фігура має її?
2. Що таке геометричне тіло? Наведіть приклади.
3. Які точки просторової області називаються її граничними точками?
4. Що таке поверхня геометричного тіла?
5. Що таке опорна площина геометричного тіла?

Виконаємо разом

Дано кулю та точку A, яка не належить їй. Чи існує точка внутрішньої області кулі, найближча до A? Чому?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано кулю з центром у точці O і точку A, яка не належить кулі (мал. 130). Якщо відрізок OA перетинає поверхню кулі в точці M, то найкоротша відстань від точки A до кулі дорівнює MA. Але точка M не належить внутрішній області кулі.

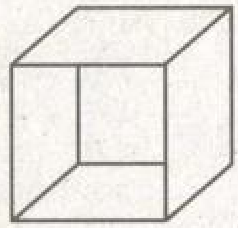
Мал. 130

Припустимо, що існує точка K внутрішньої області кулі, найближча до точки A. Тоді середина K_1 відрізка KM також належить внутрішній області даної кулі та знаходиться ближче до точки A, ніж K. Отже, припущення приводить до суперечності. Тому у внутрішній області кулі не існує точки, найближчої до даної точки A.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

622. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища.
623. Наведіть приклади фігур, які не є тілом.
624. Чи є тілом двогранний або многогранний кут?
625. Чи є тілом вертикальні двогранні кути? А суміжні?
626. Чи є тілом проекція якого-небудь тіла на площині?
627. Чи є тілом зображена на малюнку 131 фігура, складена з п'яти квадратів? Чому?



Мал. 131

А

628. Чи є тілом фігура, яка складається з двох рівних кубів, у яких спільна:
а) вершина; б) ребро; в) грань; г) діагональ?
Зробіть відповідні малюнки. Відповідь обґрунтуйте.
629. Чи є тілом фігура, яка складається:
а) з двох куль, які не мають спільних точок;
б) з двох куль, які мають одну спільну точку;
в) з двох куль, які перетинаються;
г) з перерізу двох куль різних радіусів і спільним центром?
Зробіть відповідні малюнки. Відповідь обґрунтуйте.
630. Дано точку O і додатну відстань r. Чим є множина всіх точок X простору, які задовольняють умову $OX \leqslant r$?
631. Означте сферу, кулю та внутрішню область кулі за допомогою нерівностей.
632. Чим є множина всіх точок простору, координати яких задовольняють умову:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$; в) $x^2 + y^2 + z^2 < 4$?
Яка з цих трьох фігур є геометричним тілом, яка – просторовою областю?
633. Зобразіть у декартовій системі координат фігуру, координати якої задовольняють умови: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Чи є ця фігура просторовою областю? А тілом?
634. Чи є тілом фігура, координати якої задовольняють умови $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$, $0 \leqslant z < 1$? А просторовою областю?

635. Чи є тілом фігура, координати якої задовольняють умови $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$? А просторовою областю?

636. Дано кулю та точку A, що їй не належить. Чи існує точка кулі, найближча до точки A? Як її знайти?

637. Знайдіть діаметр куба, ребро якого дорівнює $\sqrt{3}$ см.

638. Знайдіть діаметр прямокутного паралелепіпеда, якщо довжини трьох його ребер дорівнюють a, b, c.

Б

639. Відстань між паралельними опорними площинами до куба дорівнює h. Знайдіть межі значень h, якщо ребро куба дорівнює a.

640. Чому дорівнює відстань між паралельними опорними площинами, проведеними до кулі:

а) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 \leqslant 25$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z \leqslant 5$?

641. Чи можна провести опорну площину до кулі $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 \leqslant 1$ через точку $(-2; 1; 3)$?

642. Зобразіть дві фігури і розмістіть їх так, щоб:

а) їхнє об'єднання було тілом;

б) їхній переріз був тілом;

в) їхнє об'єднання не було тілом;

г) їхній переріз не був тілом.

643. Побудуйте тетраедр, симетричний правильному тетраедру $ABCD$ відносно середини його висоти DO. Чи буде тілом:

а) об'єднання; б) переріз даного і побудованого тетраедрів?

644. Знайдіть відстань між двома кулями, якщо радіус кожної дорівнює 3, а їхні центри – точки $O(0; 2; 0)$ і $O_1(0; 9; 0)$.

В

645. Чи існують найближчі точки внутрішніх областей куль, описаних у задачі 644?

646. Чи є тілом фігура, координати точок якої задовольняють систему нерівностей $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 4$ і $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$?

647. Знайдіть діаметр тетраедра $OABC$, вершини якого знаходяться в точках $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ і $C(0; 0; 2)$.

648. Ребро SB піраміди $SABCD$ перпендикулярне до площини основи. Знайдіть діаметр піраміди, якщо $SB = AB = a$ і:

а) $ABCD$ – квадрат; б) $ABCD$ – ромб, $\angle ABC = 120°$.

649. Знайдіть діаметр паралелепіпеда, всі грані якого – ромби зі стороною a і кутом $60°$.

650. Відстань між паралельними опорними площинами до правильного тетраедра дорівнює h. Знайдіть межі значень h, якщо ребро тетраедра дорівнює a.

651. Напишіть рівняння опорної площини, проведеної до кулі $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y \leqslant 20$ у точці $A(4; -2; 4)$.

652. Тетраедр $OABC$ задано координатами вершин: $O(0; 0; 0)$, $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Напишіть рівняння опорних площин, які проходять через грані тетраедра.

Вправи для повторення

653. У тригранного кута $OABC$ $\angle BOC = 90°$, $\angle AOB = \angle AOC = 60°$. Знайдіть кут між ребром AO і площиною кута BOC.

654. Плоскі кути AOB і AOC тригранного кута $OABC$ рівні. Доведіть, що проекцією ребра OA на грань BOC є бісектриса $\angle BOC$.

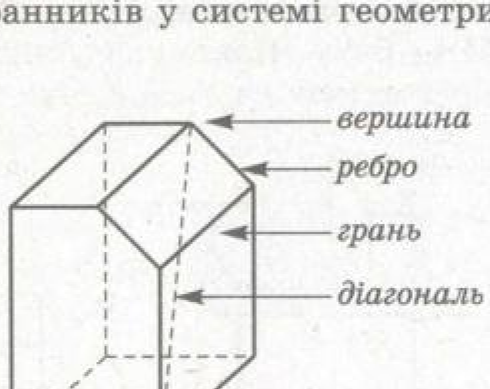
655. Знайдіть кут між площинами $4x - 3y - z + 2 = 0$ і $x - 4y - 3z - 5 = 0$.

§ 19 МНОГОГРАННИКИ

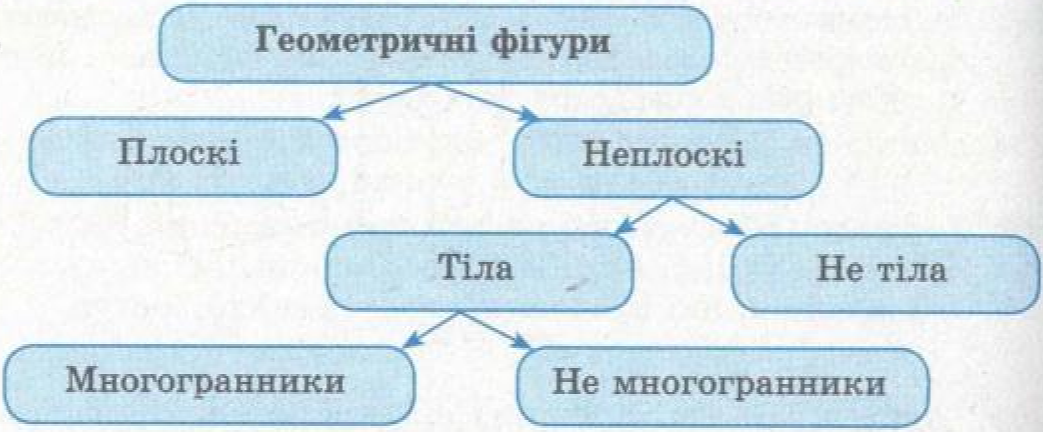
***Многогранником** називається тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників.*

Многокутники, які обмежують многогранник, називаються *гранями*. Сторони граней – *ребра*, а їхні кінці – *вершини* многогранника. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, – *діагональ* многогранника (мал. 132).

Місце многогранників у системі геометричних фігур показано на схемі.



Мал. 132

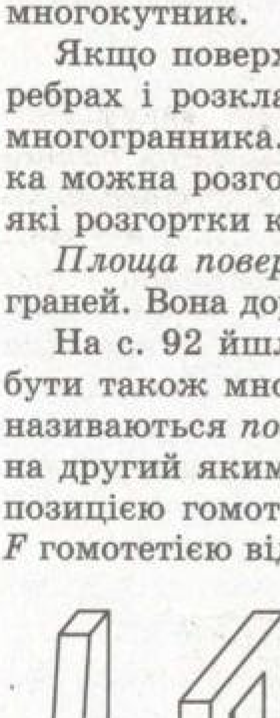


Як і інші геометричні фігури, многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі*. Фігура називається *опуклою*, якщо разом з кожними двома своїми точками вона містить і відрізок, що їх сполучає. Кожний тетраедр, куб, паралелепіпед – многогранники опуклі. А многогранники, зображені на малюнку 133, – неопуклі. Опуклий многогранник розміщений з одного боку від площини кожної його грані. Якщо многогранник неопуклий, площини деяких його граней розтинають його на частини (мал. 134). Кожна грань опуклого многогранника – опуклий многокутник.

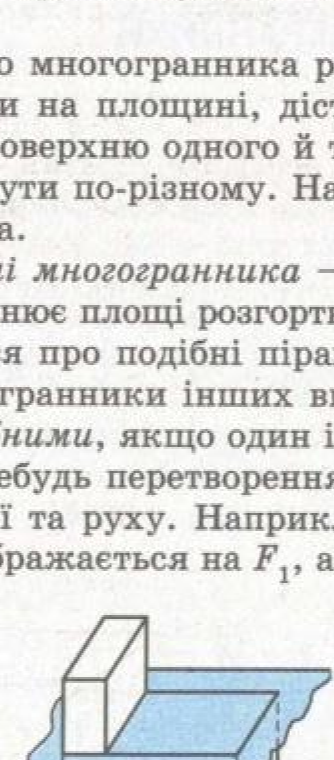
Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розкласти на площині, дістанемо *розгортку* даного многогранника. Поверхню одного й того самого многогранника можна розгорнути по-різному. На малюнку 135 подані деякі розгортки куба.

Площа поверхні многогранника – це сума площ усіх його граней. Вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.

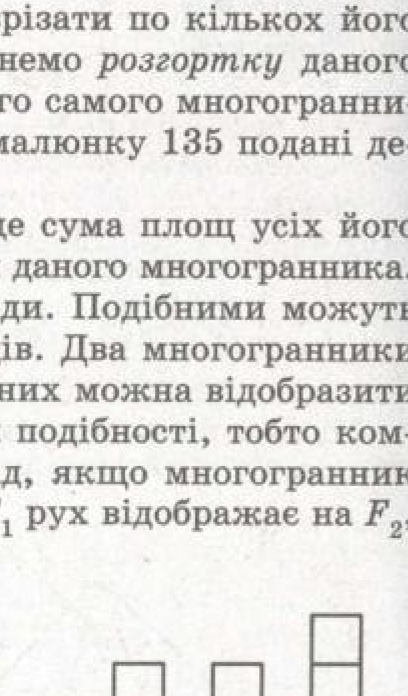
На с. 92 йшлося про подібні піраміди. Подібними можуть бути також многогранники інших видів. Два многогранники називаються *подібними*, якщо один із них можна відобразити на другий яким-небудь перетворенням подібності, тобто композицією гомотетії та руху. Наприклад, якщо многогранник F гомотетією відображається на F_1, а F_1 рух відображає на F_2,


а) б)

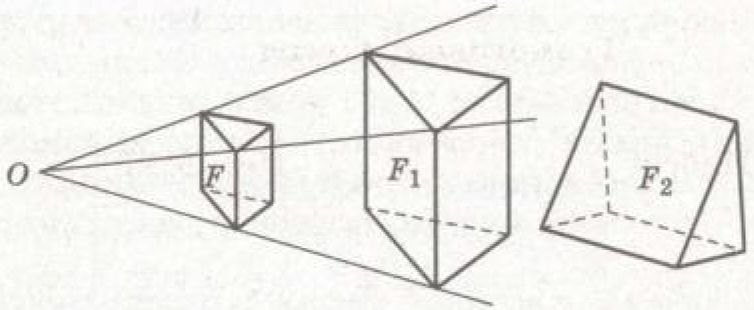
Мал. 133



Мал. 134



Мал. 135



Мал. 136

то кожний із цих трьох многогранників подібний кожному із двох інших (мал. 136). Оскільки усі лінійні розміри фігури гомотетія змінює в тому самому відношенні k, то відношення площі гомотетичних граней дорівнює k^2. Тому ***площі поверхонь подібних фігур відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних розмірів.*** Наприклад, якщо відношення відповідних ребер двох подібних тетраедрів дорівнює k, то відношення площ поверхонь цих тетраедрів дорівнює k^2.

Цікаву теорему про співвідношення між числом граней f, ребер k і вершин e довів Л. Ейлер.

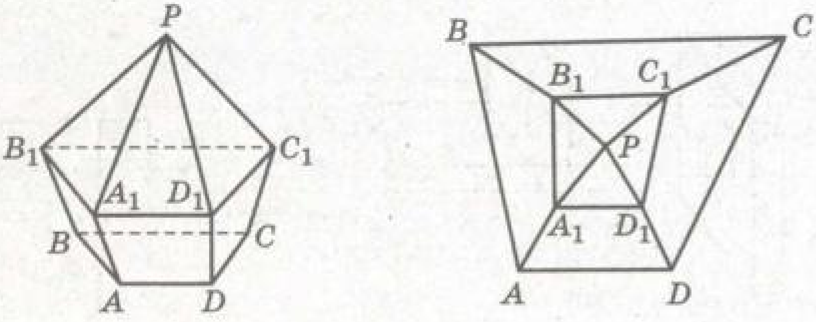
!

Теорема 19. ***Для будь-якого опуклого многогранника*** $e + f - k = 2$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано довільний опуклий многогранник, у якого f граней, k ребер і e вершин (мал. 137). Визначимо двома способами суму всіх його плоских кутів. Нехай $a_1, a_2, a_3, \dots, a_f$ – числа сторін у 1-й, 2-й, 3-й, ..., f-й грані. Тоді сума всіх плоских кутів даного многогранника в радіанах:

$$\Sigma\alpha = (a_1 - 2)\pi + (a_2 - 2)\pi + \dots + (a_f - 2)\pi =$$
$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_f)\pi - 2f\pi.$$

Оскільки кожне ребро многогранника є стороною двох граней, то $a_1 + a_2 + \dots + a_f = 2k$ і $\Sigma\alpha = 2\pi(k - f)$.



Мал. 137

Обчислимо суму $\Sigma\alpha$ іншим способом. Для цього деформуємо даний многогранник, не змінюючи значень f, k і e. Візьмемо одну з його граней за основу і уявно розтягнемо її так, щоб проекції усіх інших ребер многогранника виявились у внутрішній області цієї основи. Даний многогранник буде відображатися на f плоских многокутників, розміщених ніби у два шари.

Якщо основа має n вершин, то сума її плоских кутів дорівнює $(n-2)\pi$. Інших вершин $e-n$. Сума плоских кутів усіх граней многогранника, крім основи, дорівнює $(n-2)\pi + (e-n)\cdot 2\pi$. Отже,

$$\Sigma\alpha = (n-2)\pi + (n-2)\pi + (e-n)2\pi = 2\pi(e-2).$$

Прирівнявши цей результат до знайденого раніше, дістанемо: $2\pi(e-2) = 2\pi(k-f)$, звідки $e - k + f = 2$.

Доведена теорема виконується і для багатьох неопуклих многогранників, які можна деформувати описаним вище способом, не змінюючи числових значень e, f і k. Але, наприклад, для многогранників, зображених на малюнку 133, *б*, теорема Ейлера не виконується.

З різними, іноді дуже складними, матеріальними моделями многогранників мають справу каменярі, теслі, шліфувальники, стругальники, гранувальники, мінералоги, кристалографи та інші спеціалісти. Наприклад, столяр щодня робить десятки деталей у вигляді найрізноманітніших многогранників. Екскаваторники риють різні траншеї, котлovани та інші виїмки також переважно у вигляді многогранників.

На малюнку 138 зображені природні форми кристалів гранату.

Відомий чеський письменник Карел Чапек, ознайомившись з кристалами і зрозумівши їхню роль у житті людей, проспівав їм великий гімн – словом і малюнком (мал. 139). «І в людині захована сила кристалізації... Число і фантазія, закон

Мал. 138

Мал. 139

і достаток – ось живі, творчі сили природи: не сидіти під землею деревом, а створювати кристали й ідеї, ось що означає бути разом з природою!»

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке многогранник? Назвіть його елементи.
2. Як пов'язані поняття: геометричні фігури, тіла і многогранники? Покажіть на діаграмі.
3. Які многогранники називають опуклими, а які – неопуклими?
4. Що таке площа поверхні многогранника?
5. Сформулюйте теорему Ейлера про многогранники.

Виконаємо разом

1. Многогранник має 9 ребер. Доведіть, що його гранню не може бути п'ятикутник.

   ДОВЕДЕННЯ. До п'ятикутної грані многогранника прилягає не менш як 5 суміжних граней, які утворюють не менше 5 ребер. Отже, якщо хоча б одна з граней многогранника – п'ятикутник, то він має не менш як 10 ребер.

2. Доведіть, що коли всі грані опуклого многогранника – трикутники, то їхнє число – парне.

   ДОВЕДЕННЯ. Нехай усі грані опуклого n-гранника – трикутники. Усіх сторін у цих трикутників $3n$. Оскільки кожне ребро даного многогранника є спільною стороною для двох трикутників, то многогранник має $\frac{3n}{2}$ ребер. Число $\frac{3n}{2}$ має бути цілим. Отже, число n – парне.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

656. Наведіть приклади многогранників з навколишнього середовища. Які з них опуклі, а які – неопуклі?

657. Назвіть многогранник, який має найменшу кількість граней. Скільки у нього вершин? А ребер?

658. Одна з граней многогранника семикутник. Яку найменшу кількість ребер і граней він може мати?

659. Піраміда має 26 ребер. Скільки вона має вершин? А граней?

660. У призмі 36 ребер. Скільки вона має граней і вершин?

661. Чи завжди об'єднання опуклих фігур є фігурою опуклою?

662. Чи може опукла піраміда мати три бічні грані, перпендикулярні до площини основи? А якщо піраміда неопукла?

А

663. Укажіть кількість граней, ребер і вершин для многогранників, зображених на малюнку 140, і переконайтеся у справедливості теореми Ейлера для кожного з них.

664. Намалюйте неопуклий многогранник, усі грані якого опуклі многокутники.

665. Намалюйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і вершин він має? Як називається такий многогранник?

666. Намалюйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має?

667. Намалюйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має?

668. Чи існує многогранник, відмінний від тетраедра, всі грані якого трикутники? Зробіть малюнок.

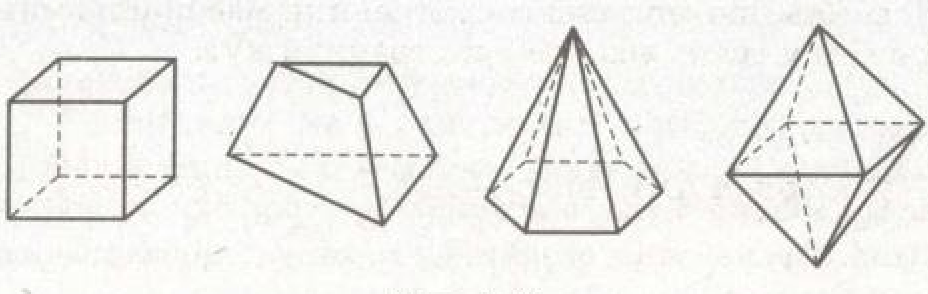
669. Доведіть, що довільний опуклий многогранник можна розбити на скінченну кількість трикутних пірамід.

670. Намалюйте розгортку правильного тетраедра, довжина ребра якого 2 см. Знайдіть площу розгортки.

671. Площа поверхні правильного тетраедра $36\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину його ребра.

672. Якщо від куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відрізати тетраедр $A_1AB_1D_1$, залишиться многогранник $ABCDD_1B_1C_1$. Скільки граней, ребер і вершин він має? Знайдіть площу його найбільшої грані, якщо $AB = a$.

673. Площі трьох граней паралелепіпеда 2 м^2, 3 м^2 і 4 м^2. Знайдіть площу його поверхні.



Мал. 140

674. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо довжина одного з ребер a, а площі прилеглих до нього граней S_1 і S_2.

Б

675. Гранями опуклого многогранника є тільки трикутники. Скільки у нього вершин і граней, якщо ребер: а) 12; б) 15? Виконайте відповідні малюнки.

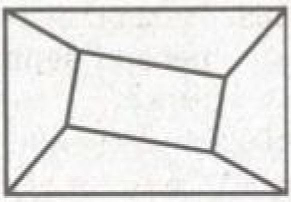
676. Накресліть многогранник, для якого не виконується теорема Ейлера.

677. Доведіть, що піраміда є опуклим многогранником тоді й тільки тоді, коли її основа – опуклий многокутник.

678. Знайдіть площу поверхні тетраедра $ABCD$, якщо $AC = CB = BD = DA = DC = a$ і $\angle ACB = \varphi$. Обчисліть, якщо $a = 1{,}2$ м, $\varphi = 50°$.

679. Довжина одного ребра тетраедра a, а кожного з решти b. Доведіть, що $0 < a < b\sqrt{3}$.

680. Чи може проекція многогранника мати вигляд, як на малюнку 141?



Мал. 141

В

681. Доведіть, що коли всі грані опуклого n-гранника – п'ятикутники, то він має $2{,}5n$ ребер.

682. Доведіть, що у довільного многогранника кількість граней з непарною кількістю сторін – парна.

683. Доведіть, що коли всі грані многогранника – чотирикутники, то ребер він має у 2 рази більше, ніж граней.

684*. Доведіть, що лише у тетраедра всі грані – трикутники і всі многогранні кути – тригранні.

685*. Доведіть, що коли всі грані многогранника – трикутники і всі многогранні кути чотиригранні, то він має 8 граней.

686*. Доведіть, що не існує многогранника з 7 ребрами.

687*. Чому дорівнює сума всіх плоских кутів опуклого многогранника, що має n вершин?

688*. Доведіть, що опуклий многогранник має принаймні одну трикутну грань або один тригранний кут.

Вправи для повторення

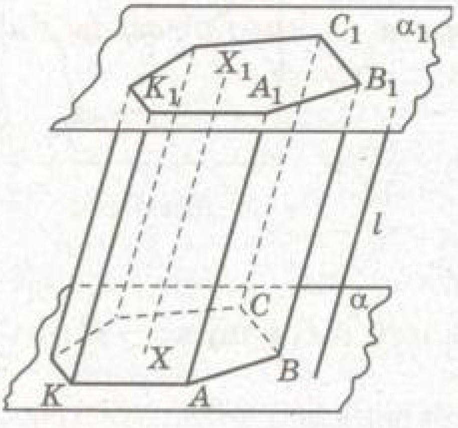
689. Які з фігур не є тілом: куб, тетраедр, круг, сфера, тригранний кут?

690. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Розкладіть вектор $\overline{AC}$ за векторами $\overline{AB_1}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{AD_1}$.

691. Точка M знаходиться на відстані 8 см від усіх сторін $\triangle ABC$. Знайдіть кут між площинами AMB і ABC, якщо сторони трикутника 13 см, 14 см, 15 см.

§ 20 ПРИЗМИ

Призмою називається многогранник, у якого дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми.



Мал. 142

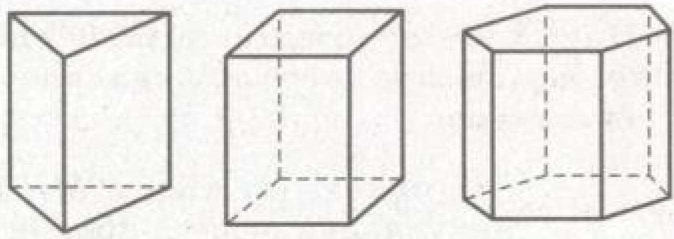
Покажемо, як можна побудувати такий многогранник. Нехай α і α_1 – дві паралельні площини, l – пряма, що їх перетинає, і $ABC...K$ – n-кутник у площині α (мал. 142). Проведемо через кожну точку X цього n-кутника пряму, паралельну прямій l, і позначимо через X_1 точку перетину її з площиною α_1. Усі побудовані так відрізки XX_1 заповнюють деякий многогранник. Цей многогранник – призма. Його грані $ABC...K$ і $A_1B_1C_1...K_1$ – рівні n-кутники з відповідно паралельними сторонами, а решта n граней: ABB_1A_1, BCC_1B_1, ... – паралелограми.

Рівні n-кутники $ABC...K$ і $A_1B_1C_1...K_1$ побудованої призми називають її *основами*, паралелограми AA_1B_1B, BB_1C_1C, ..., KK_1A_1A – *бічними гранями*, відрізки AA_1, BB_1, CC_1, ..., KK_1 – *бічними ребрами* призми. Поверхня такої n-кутної призми складається з двох рівних n-кутників і n паралелограмів, бічна поверхня – з n паралелограмів.

Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основи. Інші призми – *похилі*. Кожна бічна грань прямої призми – прямокутник.

Висота призми – відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

Призма називається *правильною*, якщо вона пряма та її основи – правильні многокутники. Усі бічні грані правильної

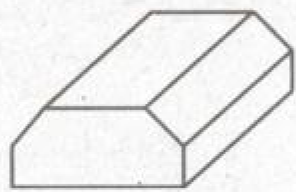


Мал. 143

призми – рівні прямокутники. На малюнку 143 зображені правильні трикутна, чотирикутна і шестикутна призми.

Якщо призма опукла, то будь-яка площина, що проходить через бічне ребро і діагональ основи, розтинає її на дві інші призми. Така площина називається *діагональною площиною*, а переріз призми цією площиною – *діагональним перерізом*. Діагональний переріз будь-якої призми – *паралелограм*, а прямої призми – *прямокутник*.

Форму призми має звичайна цеглина, залізобетонний блок, брусок, дошка, гранований олівець тощо. Чи можна вважати, що зображена на малюнку 144 фундаментна подушка має форму призми? Так, але поставлена на бічну грань.



Мал. 144

Площею бічної поверхні призми називають суму площ її бічних граней.

Теорема 20. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту призми.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай висота даної прямої призми дорівнює h, а периметр основи $AB + BC + \ldots + KA = P$ (мал. 145). Доведемо, що площа її бічної поверхні $S_б = Ph$.

Кожна бічна грань прямої призми – прямокутник. Його основа дорівнює відповідній стороні основи призми, а висота – висоті призми. Тому

$$S_б = AB \cdot h + BC \cdot h + \ldots + KA \cdot h = (AB + BC + \ldots + KA) \cdot h = Ph.$$

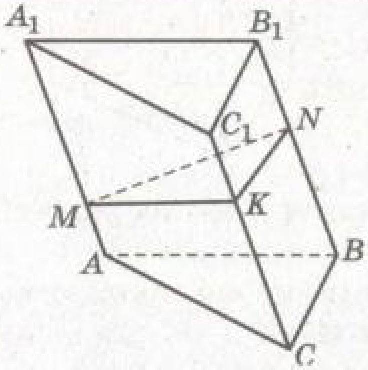
Теорему доведено.

Щоб знайти площу бічної поверхні похилої призми, треба знайти площу кожної її бічної грані та результати додати.

Мал. 145

Для знаходження площі бічної поверхні похилої призми інколи зручно користуватися такою теоремою.

Теорема 21. ***Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на бічне ребро.***

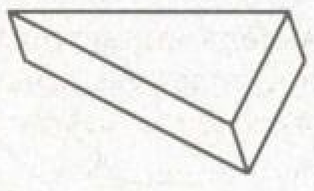


Мал. 146

ДОВЕДЕННЯ. Нехай MNK – перпендикулярний переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 146), тобто переріз, проведений перпендикулярно до її бічних ребер. Тоді MN, NK, MK – висоти бічних граней. Оскільки всі бічні ребра призми рівні, то

$$S_б = MN \cdot AA_1 + NK \cdot BB_1 + MK \cdot AA_1 = MN \cdot AA_1 + NK \cdot AA_1 + MK \cdot AA_1 = AA_1(MN + NK + MK) = AA_1 \cdot P_{MNK}.$$

Теорему доведено.



Мал. 147

ПРИМІТКА. Мається на увазі, що згадуваний у теоремі «перпендикулярний переріз» існує. Для похилих призм з малими бічними ребрами (мал. 147) формулювання теореми слід уточнити. Як?

Площа поверхні призми дорівнює сумі площі її бічної поверхні та подвоєної площі основи:

$$S_п = S_б + 2S_о.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

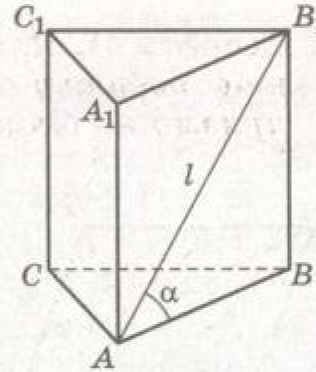
1. Що таке призма? Назвіть елементи призми.
2. Якими бувають призми?
3. Які призми називають прямими? А правильними?
4. Що таке діагональ призми? А діагональна площина; діагональний переріз призми?
5. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми? А похилої?
6. Чому дорівнює площа поверхні довільної призми?

Виконаємо разом

1. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть

площу бічної поверхні призми. Обчисліть, якщо $l = 28$ см, $\alpha = 53°$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай призма $ABCA_1B_1C_1$ правильна, а діагональ B_1A її бічної грані має довжину l (мал. 148). Сторона основи BA – проекція цієї діагоналі на площину основи, тому $\angle B_1AB = \alpha$. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми $S = 3ah$, де a – сторона основи, h – висота призми. З прямокутного $\triangle B_1AB$ знаходимо: $a = AB = l\cos\alpha$, $h = B_1B = l\sin\alpha$. Отже,



Мал. 148

$$S = 3 \cdot l\cos\alpha \cdot l\sin\alpha = 1{,}5l^2\sin 2\alpha.$$

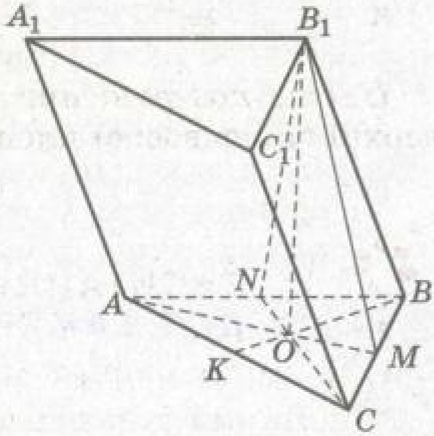
$$S = 1{,}5 \cdot 28^2\sin 106° \approx 1130 \text{ (см}^2\text{)}.$$

ВІДПОВІДЬ. $S = 1{,}5l^2\sin 2\alpha \approx 11{,}3$ (дм^2).

2. Вершина B_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ рівновіддалена від вершин правильного $\triangle ABC$. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо сторона основи дорівнює 10 см, а бічне ребро – 13 см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо точка B_1 рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$, то вона проектується в точку O – центр кола, описаного навколо цього трикутника. Вона є точкою перетину його медіан AM, CN і BK (мал. 149).

Якщо $B_1O \perp (ABC)$ і $AM \perp CB$, то за теоремою про три перпендикуляри $B_1M \perp CB$. Тоді $S_{CC_1B_1B} = B_1M \cdot CB$. Оскільки $B_1M = B_1N$ і $AB = CB$, то $S_{AA_1B_1B} = S_{CC_1B_1B}$.



Мал. 149

З $\triangle B_1MB$ за теоремою Піфагора знайдемо B_1M:

$$B_1M^2 = BB_1^{\,2} - MB^2,\ B_1M^2 = 169 - 25 = 144,\ B_1M = 12.$$

Тоді $S_{CC_1B_1B} = S_{AA_1B_1B} = 12 \cdot 10 = 120$ (см^2).

Пряма KB – проекція прямої B_1B на площину основи призми. З умови задачі $BK \perp AC$, тому за теоремою про три перпендикуляри $BB_1 \perp AC$. Оскільки $BB_1 \parallel CC_1$, то $CC_1 \perp AC$. Отже, AA_1C_1C – прямокутник і $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1$, $S_{AA_1C_1C} = 10 \cdot 13 = 130$ (см^2). Тоді $S_б = 2 \cdot 120 + 130 = 370$ (см^2).

ВІДПОВІДЬ. 370 см^2.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

692. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму призми.
693. Чи рівні діагональні перерізи правильної чотирикутної призми? А шестикутної?
694. Дано правильну трикутну призму. Чому дорівнює міра двогранного кута при:

а) ребрі основи; б) бічному ребрі?

695. Чому дорівнює площа поверхні куба з ребром 2 см?
696. В одній прямій n-кутній призмі сторона основи дорівнює a, а бічне ребро b ($a < b$). У другій прямій n-кутній призмі сторона основи дорівнює b, а бічне ребро a. Порівняйте площі бічних поверхонь цих призм; площі повних поверхонь.
697. Усі ребра правильної шестикутної призми дорівнюють 3 см. Знайдіть площу її бічної поверхні.
698. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 48 см^2. Знайдіть бічне ребро призми, якщо сторона основи дорівнює 4 см.
699. Чи можуть площі бічних граней правильної трикутної призми дорівнювати 20 см^2, 30 см^2 і 50 см^2?
700. Відстань між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнює 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

А

701. Чи існує призма, яка має рівно 100 ребер? Скільки вершин, ребер і граней має 100-кутна призма?
702. Скільки діагоналей і діагональних площин має правильна десятикутна призма? А n-кутна?
703. Знайдіть градусну міру двогранного кута при бічному ребрі правильної п'ятикутної призми.
704. Бічне ребро призми дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту призми.
705. Чи рівні діагональні перерізи правильної чотирикутної призми? А правильної п'ятикутної?
706. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h, а сторона основи a. Знайдіть площу:

а) бічної поверхні;

б) діагонального перерізу призми.

707. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу:

а) діагонального перерізу;

б) бічної поверхні призми.

708. У правильній чотирикутній призмі площа основи дорівнює 144 см^2, а висота – 10 см. Знайдіть площу діагонального перерізу.

709. Площа поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 40 см^2, а її бічної поверхні – 32 см^2. Знайдіть висоту призми.

710. Три грані призми – квадрати зі стороною 2 см, а дві інші – трикутники. Накресліть цю призму та її розгортку.

711. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні дорівнює 27 см^2. Знайдіть площу основи.

712. У правильній чотирикутній призмі площа діагонального перерізу S. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

713. Основа призми – ромб з кутом 60° і стороною a, а всі бічні грані – квадрати. Знайдіть довжини діагоналей призми та площі діагональних перерізів.

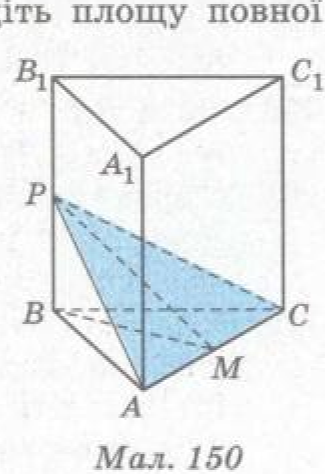
714. Доведіть, що коли діагональні перерізи призми перетинаються, то їхній спільний відрізок дорівнює бічному ребру призми і паралельний йому.

715. Знайдіть міру найбільшого двогранного кута при бічному ребрі трикутної призми, якщо сторони перпендикулярного перерізу дорівнюють 7 см, 8 см і 13 см.

716. Відстань між бічними ребрами трикутної призми дорівнює 18 см, 20 см і 22 см, а бічна поверхня рівновелика площі перпендикулярного перерізу. Знайдіть бічне ребро призми.

717. Основою прямої призми є трапеція $ABCD$, у якої $AD = 21$ см, $BC = 11$ см, $AB = CD = 13$ см. Знайдіть площу повної поверхні призми та площу перерізу, який проходить через ребра AD і B_1C_1, якщо периметр діагонального перерізу дорівнює 58 см.

718. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми, всі бічні грані якої квадрати, дорівнює 12 см^2. Знайдіть кут між площиною основи та площиною, проведеною через ребро основи і середину протилежного бічного ребра (мал. 150).



Мал. 150

Б

719. Через середини двох сторін основи правильної трикутної призми під кутом α до основи проведено площину, яка перетинає два бічних ребра. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи дорівнює a. Обчисліть, якщо $a = 15{,}7$ см, $\alpha = 30°$.

720. Площа бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює S. Знайдіть площу перерізу, який перпендикулярний до більшої діагоналі основи і ділить цю діагональ навпіл.

721. Через сторону основи правильної трикутної призми проведено площину, яка перетинає дві бічні грані по прямих, кут між якими дорівнює α. Знайдіть кут між цією площиною та площиною основи призми.

722. Діагоналі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють 10 см, $3\sqrt{29}$ см і $5\sqrt{13}$ см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо в її основі лежить прямокутний трикутник.

723. Доведіть, що у правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кут між діагоналями A_1C і B_1D дорівнює $60°$, якщо $B_1D \perp BD_1$.

724. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює з бічною гранню кут α. Знайдіть:
а) кут між діагоналлю призми і площиною основи;
б) площу діагонального перерізу;
в) площу бічної поверхні.

725. Через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи правильної шестикутної призми проведено площину. Знайдіть площу перерізу, якщо довжина кожного ребра призми дорівнює a.

726. Основа прямої призми – трапеція $ABCD$, $AB = BC = CD = 0{,}5DA$. Площа бічної поверхні призми дорівнює S. Знайдіть площу діагонального перерізу.

727. $ABCA_1B_1C_1$ – правильна трикутна призма. Знайдіть косинус кута A_1BA, якщо $\angle BA_1C = \alpha$.

728. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ кут між прямими A_1B і AC_1 дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо $AA_1 = b$.

729. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною a. Вершина B_1 проектується в середину сторони AC. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо:
а) бічні ребра утворюють з площиною основи кут $60°$;
б) двогранні кути при ребрах AB і BC дорівнюють $60°$.

730. Усі ребра похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють a. Бічне ребро BB_1 утворює зі сторонами AB і BC кут α. Знайдіть площу поверхні призми.

731. У трикутній призмі кожна сторона основи дорівнює a. Проекція однієї з вершин основи є центром другої основи. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть бічну поверхню призми.

В

732. У правильній трикутній призмі площа основи дорівнює S_1, а площа перерізу, який проходить через ребро нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, – S_2. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

733. У правильній чотирикутній призмі через середину відрізка, який з'єднує центри основ, і середини двох суміжних сторін основи проведено площину. Знайдіть кут між цією площиною і площиною основи, якщо сторона основи призми дорівнює a, а бічне ребро – b.

734. У правильній трикутній призмі зі стороною основи $2a$ і бічним ребром a через сторону нижньої основи під кутом α до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу. Розгляньте всі можливі випадки.

735. У правильній шестикутній призмі через середину більшої діагоналі, перпендикулярно до неї, проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо висота призми у 2 рази більша за сторону основи, а площа бічної поверхні дорівнює 48 см^2.

736. Назвіть місце центроїда всіх вершин правильної призми.

737. Основа призми – трапеція, паралельні сторони якої 8,8 дм і 5,6 дм, а непаралельні – по 3,4 дм. Один з діагональних перерізів призми перпендикулярний до основи і є ромбом з кутом 45°. Знайдіть висоту та діаметр призми.

738. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ***. Виріжте з цупкого паперу розгортку трикутної призми і зробіть з неї модель призми.

Вправи для повторення

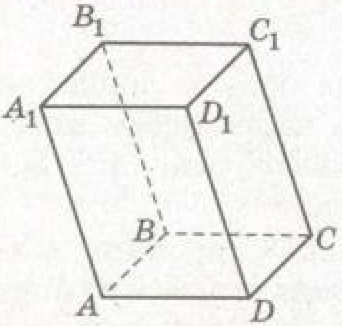
739. Площина BC_1D розбиває куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на два многогранники. Укажіть кількість вершин, ребер і граней у кожному з них.

740. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (-5; 1; -1)$.

741. Знайдіть сторони трапеції, описаної навколо кола радіуса R, якщо її основи відносяться як $m : n$.

§21 ПАРАЛЕЛЕПІПЕДИ

***Паралелепіпедом** називається призма, основа якої – паралелограм.*



Мал. 151

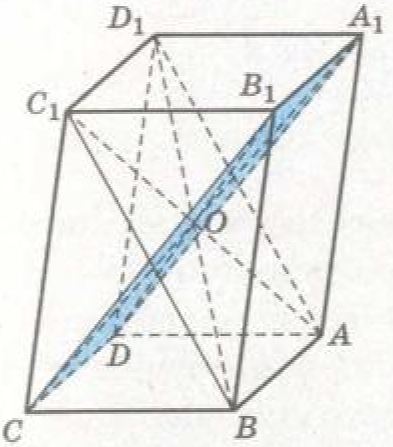
Усі шість граней паралелепіпеда – паралелограми (мал. 151). Протилежні грані паралелепіпеда рівні та лежать у паралельних площинах, протилежні ребра рівні та паралельні (чому?).

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається *прямим паралелепіпедом.* У ньому всі бічні грані – прямокутники, а основи – паралелограми. Якщо всі грані паралелепіпеда – прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом.* Довжини трьох його ребер, які виходять з однієї вершини, називаються *вимірами* прямокутного паралелепіпеда.

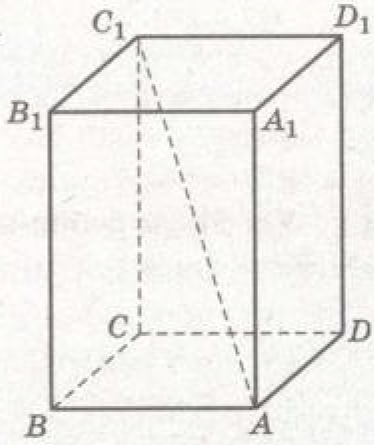
Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називається *кубом.* Правильна чотирикутна призма – окремий вид прямокутного паралелепіпеда. Співвідношення між різними видами паралелепіпедів подано на схемі.

Розглянемо найважливіші властивості діагоналей паралелепіпеда.

Теорема 22. ***Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.***



Мал. 152



Мал. 153

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – довільний паралелепіпед (мал. 152). Його ребра AB, DC, D_1C_1, A_1B_1 рівні та паралельні. Отже, чотирикутники ABC_1D_1 і DCB_1A_1 – паралелограми, їхні діагоналі перетинаються. Нехай діагоналі AC_1 і BD_1 першого паралелограма перетинаються в точці O, а діагоналі DB_1 і CA_1 другого – в точці O_1. Оскільки точкою перетину кожна діагональ паралелограма ділиться навпіл, то O і O_1 – середини відрізків AC_1 і DB_1. Ці відрізки – діагоналі паралелограма ADC_1B_1, їхні середини збігаються. Таким чином, середина кожної діагоналі AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 – одна й та сама точка O. А це й треба було довести.

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. Це випливає з просторової теореми Піфагора. Якщо AC_1 – діагональ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, то AB, AD, AA_1 – її проекції на три попарно перпендикулярні прямі (мал. 153). Отже:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

ЗАУВАЖЕННЯ. Зверніть увагу на те, що під «діагоналлю» в одному випадку розуміють відрізок, а в іншому – довжину цього відрізка. Назви «висота», «бічне ребро», «сторона основи» теж вживаються для позначення двох різних понять: відрізка та його довжини. Замість «довжина діагоналі дорівнює d» пишуть також «діагональ дорівнює d» або ще коротше: «діагональ d».

Форму прямокутного паралелепіпеда мають цеглини, бруски, контейнери, ящики для овочів і фруктів, деякі упаковки продуктів харчування, ліків тощо. З непрямокутними паралелепіпедами часто доводиться мати справу мінералогам і кристалографам.

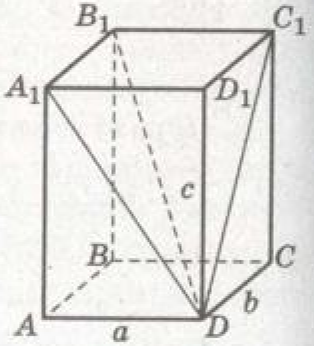
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення паралелепіпеда. Назвіть його елементи.
2. Які бувають паралелепіпеди? Покажіть на діаграмі.
3. Який паралелепіпед називається прямим?
4. Який паралелепіпед називається прямокутним?
5. Що таке виміри прямокутного паралелепіпеда?
6. Сформулюйте і доведіть властивості діагоналей паралелепіпеда.
7. Чому дорівнює квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда?

Виконаємо разом

1. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{10}$ см, а діагоналі бічних граней – 13 см і 15 см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, у якого $DB_1 = 5\sqrt{10}$ см, $DC_1 = 13$ см, $DA_1 = 15$ см (мал. 154). Позначимо виміри паралелепіпеда $AD = a$, $DC = b$, $DD_1 = c$. Тоді за теоремою Піфагора $DC_1^2 = b^2 + c^2$, $DA_1^2 = a^2 + c^2$ і $DB_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Отримаємо систему рівнянь



Мал. 154

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 250, \\ b^2 + c^2 = 169, \\ a^2 + c^2 = 225. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге і третє, отримаємо, що $a^2 = 81$ і $b^2 = 25$, тоді $c^2 = 144$.

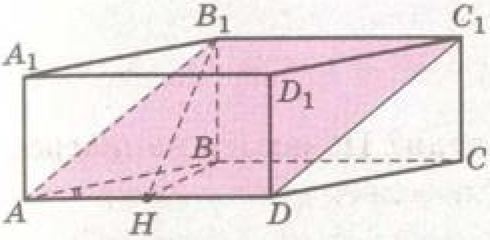
Отже, $AD = 9$ см, $DC = 5$ см, $DD_1 = 12$ см.

Тоді $S_б = P_о \cdot h = 2(5 + 9) \cdot 12 = 336$ (см^2).

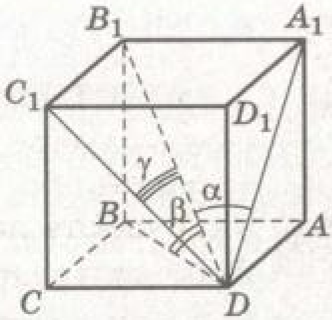
$S_п = S_б + 2S_о$.

Оскільки $S_о = 5 \cdot 9 = 45$ (см^2), то $S_п = 336 + 2 \cdot 45 = 426$ (см^2).

ВІДПОВІДЬ. $S_п = 426$ см^2.



Мал. 155



Мал. 156

2. Сторони AB і AD основи прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними 30°. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда, який проходить через AD і B_1C_1, якщо висота паралелепіпеда дорівнює 4 см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Переріз AB_1C_1D – паралелограм (мал. 155).

Нехай B_1H – висота цього паралелограма. Тоді $S_{AB_1C_1D} = AD \cdot B_1H$.

Якщо $B_1H \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $BH \perp AD$. Якщо $\angle BAD = 30°$, то $BH = 3$ см. Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle B_1BH$ знайдемо B_1H:

$$B_1H^2 = B_1B^2 + BH^2;\ B_1H^2 = 16 + 9 = 25.$$

Тоді $B_1H = 5$ см і $S_{AB_1C_1D} = 5 \cdot 8 = 40$ (см²).

ВІДПОВІДЬ. $S_{AB_1C_1D} = 40$ см².

3. Доведіть, що коли діагональ прямокутного паралелепіпеда з площинами його граней утворює кути α, β, γ, то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

ДОВЕДЕННЯ. Дані кути зображено на малюнку 156.

Оскільки паралелепіпед прямокутний, то ребро B_1A_1 перпендикулярне до площини DD_1A_1, а отже, і до діагоналі DA_1. Отже, $\angle B_1A_1D = 90°$. Аналогічно $\angle B_1C_1D = 90°$.

Якщо $DB_1 = d$, то з прямокутних трикутників B_1DA_1, B_1DB і B_1DC_1 знайдемо виміри паралелепіпеда:

$$B_1A_1 = d\sin\alpha,\ B_1B = d\sin\beta,\ B_1C_1 = d\sin\gamma.$$

Тому

$$d^2\sin^2\alpha + d^2\sin^2\beta + d^2\sin^2\gamma = d^2,$$

звідки

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

742. Наведіть приклади тіл, які мають форму паралелепіпеда, з навколишнього середовища.

743. Три грані паралелепіпеда – прямокутники. Чи випливає з цього, що даний паралелепіпед прямокутний?

744. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 4 см, 5 см і 10 см.

745. В основі прямого паралелепіпеда з висотою 5 см лежить ромб з діагоналями 6 см і 8 см. Знайдіть:
а) площі діагональних перерізів;
б) площу бічної поверхні;
в) площу повної поверхні.

746. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 3 см, 4 см і 12 см.

747. Дано паралелепіпед, кожна грань якого – ромб зі стороною a і кутом α. Знайдіть площу його поверхні.

А

748. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед, а K, L, M – середини ребер AB, A_1B_1, B_1C_1 відповідно. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки K, L, M. Знайдіть пло́щу перерізу, якщо $AA_1 = 3$ см, а $KM = 5$ см.

749. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – похилий паралелепіпед, M – середина його ребра A_1B_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки B, D, M.

750. Побудуйте переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, CD, BB_1. Визначте вид перерізу, якщо паралелепіпед:
а) прямокутний; б) прямий; в) похилий.

751. Виміри прямокутного паралелепіпеда 3, 4 і 5. Під яким кутом нахилена діагональ паралелепіпеда до площини найменшої його грані?

752. Як зв'язані між собою виміри a, b, c прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональний переріз – квадрат?

753. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо площі трьох його граней 42 см^2, 72 см^2 і 84 см^2.

754. Знайдіть площі діагональних перерізів прямого паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 2,3 м і 1,1 м, кут між ними 60°, а бічне ребро 1 м.

755. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, всі ребра якого дорівнюють a, а кут в основі $60°$.

756. Сторони основи прямого паралелепіпеда 6 см і 8 см, а одна з діагоналей основи дорівнює $2\sqrt{14}$ см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 5 см.

757. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 3 см, 5 см і кутом $60°$. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда, якщо площа більшого діагонального перерізу дорівнює 42 см^2.

758. Площі діагональних перерізів прямого паралелепіпеда, в основі якого лежить ромб, дорівнюють 9 см^2 і 12 см^2. Обчисліть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

759. Діагоналі бічних граней прямокутного паралелепіпеда утворюють з площиною основи кути $30°$ і $45°$. Який кут з площиною основи утворює діагональ паралелепіпеда?

Б

760. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, якщо вони утворюють з площиною основи кути $30°$ і $45°$, а сторони основи дорівнюють 7 см і 17 см.

761. Діагональ основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює зі стороною основи кут α, а з діагоналлю паралелепіпеда – кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

762. Знайдіть площу основи $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо $DB_1 = 6$ см, $DB = 5$ см, $BC_1 = 4$ см.

763. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда $d^2 = 0,5(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$, де d_1, d_2, d_3 – діагоналі трьох граней, які виходять з однієї вершини.

764. Чи можуть діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда мати довжини:

а) 30 см, 40 см і 70 см; б) 30 см, 40 см і 50 см?

765. Доведіть, що сума квадратів діагоналей будь-якого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

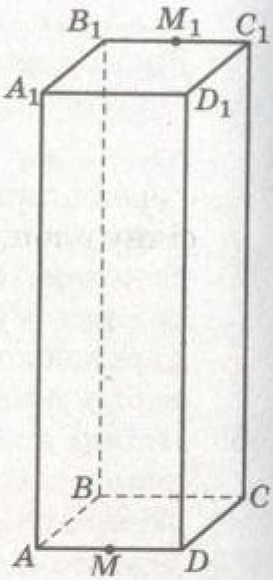
766. Доведіть, що сума квадратів площ діагональних перерізів прямого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів площ усіх його граней.

767. Чи можна перетнути прямокутний паралелепіпед площиною так, щоб у перерізі утворився:

а) рівносторонній трикутник;

б) прямокутний трикутник?

768. ***ЗАДАЧА З НЕСПОДІВАНОЮ ВІДПОВІДДЮ.*** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна призма, у якої $AA_1 = 15$ см, $AB = 5$ см. M і M_1 – середини її ребер AD і C_1B_1. Знайдіть найкоротшу відстань між точками M і M_1 по поверхні призми (мал. 157).



Мал. 157

769. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані – кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда. Обчисліть, якщо $d = 6$ м, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

770. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з бічними гранями кути α і β. Який кут ця діагональ утворює з площиною основи?

771. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Одна з діагоналей паралелепіпеда дорівнює l і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані – кут φ. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда. Обчисліть, якщо $l = 12$ м, $\alpha = 30°$, $\varphi = 45°$.

772. Знайдіть площу бічної поверхні прямого паралелепіпеда, діагоналі якого дорівнюють 14 см і 16 см, а сторони основи 6 см і 10 см.

773. Знайдіть площу бічної поверхні прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо $DA_1 = 15$ см, $DC_1 = 13$ см, а вершина B_1 віддалена від сторін AD і DC на $2\sqrt{61}$ см і $6\sqrt{13}$ см відповідно.

774. У прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено переріз AB_1C_1D. Площі чотирикутників $ABCD$ і AB_1C_1D дорівнюють 12 см^2 і 20 см^2. Знайдіть площу:

а) грані BB_1C_1C;

б) чотирикутника DA_1B_1C, якщо $AD : DC = 2 : 1$.

775. Основою паралелепіпеда є квадрат зі стороною 4 см. Одна з вершин основи рівновіддалена від вершин другої основи. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 3 см.

776. Основа паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат $ABCD$. Знайдіть BD_1, якщо $AB = AA_1 = a$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$.

777. Бічне ребро AA_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює $2\sqrt{17}$ см та утворює зі сторонами AB і AD рівні гострі кути. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 2 см, а в основі лежить ромб, у якого $AC = 20$ см і $BD = 15$ см.

В

778. Через сторону основи прямого паралелепіпеда проведено січну площину під кутом 60° до площини основи. Знайдіть площу перерізу, якщо в основі лежить ромб зі стороною $2a$ і кутом 30°, а висота паралелепіпеда дорівнює a.

779. Діагональ B_1D прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворює з бічним ребром кут 60° і віддалена від AA_1 та AC на 3 см і 2 см відповідно. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо $ABCD$ – ромб.

780. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами кути α, β, γ. Доведіть, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

781*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з трьома його ребрами кути α, β, γ. Доведіть, що $\alpha + \beta + \gamma < 180°$.

782*. Кожна грань паралелепіпеда – ромб зі стороною a і кутом 60°. Знайдіть довжини діагоналей паралелепіпеда.

783*. Дано паралелепіпед і сферу з центром у точці перетину його діагоналей. Знайдіть суму квадратів відстаней від будь-якої точки сфери до всіх вершин паралелепіпеда, якщо радіус сфери r, а сума квадратів усіх ребер паралелепіпеда σ.

784. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть з картону або дерева модель похилого паралелепіпеда.

Вправи для повторення

785. Вершина B_1 призми $ABCA_1B_1C_1$, в основі якої лежить правильний $\triangle ABC$, проектується в центр нижньої основи. Доведіть, що $\angle B_1BA = \angle B_1BC$.

786. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ дорівнює 9 см, а площа поверхні 144 см^2.

787. Знайдіть точки, симетричні середині відрізка AB відносно координатних площин, якщо:

а) $A(1; 4; 2)$, $B(3; 0; 4)$;

б) $A(0; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$;

в) $A(-1; 4; -2)$, $B(3; 0; -6)$.

§ 22 ПІРАМІДИ І ЗРІЗАНІ ПІРАМІДИ

***Пірамідою** називається многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а інші грані – трикутники, що мають спільну вершину* (мал. 158).

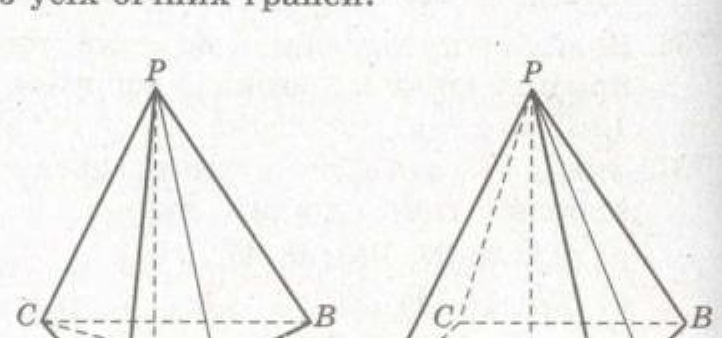
Ці трикутники, які мають спільну вершину, називають *бічними гранями*, їхню спільну вершину – *вершиною* піраміди. Грань піраміди, яка не є бічною, – *основа піраміди*. Залежно від числа сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., n-кутні піраміди. Трикутну піраміду називають ще *тетраедром*.

Кожне ребро піраміди, яке не є стороною основи, називають *бічним ребром*. Якщо піраміда опукла, то будь-яка площина, що проходить через бічне ребро і діагональ основи, розтинає її на дві інші піраміди. Така площина називається *діагональною площиною*, а переріз піраміди цією площиною – *діагональним перерізом*. Кожний діагональний переріз піраміди – трикутник. Трикутна піраміда діагональних перерізів не має.

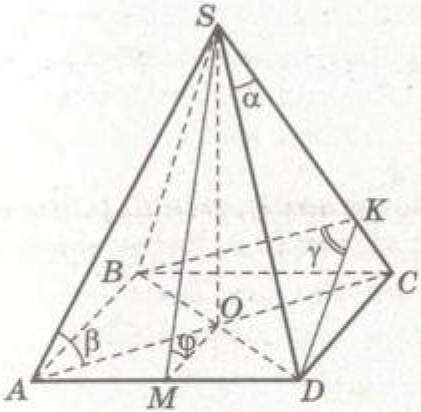
Висота піраміди – перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи, або довжина цього перпендикуляра.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основа – правильний многокутник, а його центр збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні та всі ребра при основі рівні. Усі бічні грані правильної піраміди – рівні рівнобедрені трикутники. Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*. Неправильні піраміди апофем не мають. На малюнку 159 зображено правильні трикутну і чотирикутну піраміди. Відрізки PO – їхні висоти, а PM – апофеми. Бічна поверхня піраміди складається з усіх бічних граней.

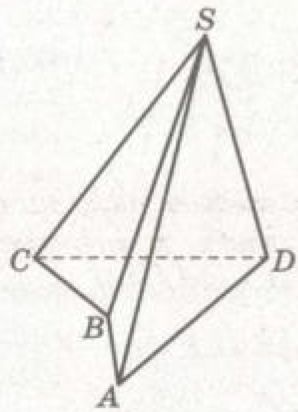
Мал. 158



Мал. 159



Мал. 160



Мал. 161

У піраміді бажано розрізняти кути: плоский кут при вершині α, кут нахилу бічного ребра до площини основи β, двогранний кут при бічному ребрі γ, двогранний кут при ребрі основи φ тощо (мал. 160). Зверніть увагу: двогранний кут при бічному ребрі може бути більшим від 180° (мал. 161). Двогранний кут при основі піраміди також може бути тупим. Тому двогранний кут при основі може не дорівнювати куту, під яким бічна грань нахилена до площини основи.

Теорема 23. ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди.***

ДОВЕДЕННЯ. Якщо сторона основи даної піраміди a, а апофема l, то площа однієї її бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}al$. Бічна поверхня $S_б$ розглядуваної піраміди складається з n таких граней, її площа в n разів більша. Тому, якщо периметр основи піраміди дорівнює P, то

$$S_б = \frac{1}{2}aln = \frac{1}{2}Pl.$$

Теорему доведено.

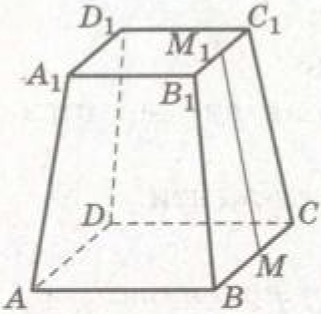
Площа поверхні піраміди дорівнює сумі площі її бічної поверхні та площі основи:

$$S_п = S_б + S_о.$$

Якщо кожний двогранний кут при основі піраміди дорівнює φ, а площа її основи $S_о$, то площа бічної поверхні:

$$S_б = \frac{S_о}{\cos\varphi}.$$

Це випливає з теореми про площу ортогональної проекції.



Мал. 162

Якщо довільну n-кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, ця площина відітне від піраміди многогранник, дві грані якого подібні n-кутники, а решта n граней – трапеції.

Таку частину піраміди називають *зрізаною пірамідою*. Паралельні грані зрізаної піраміди називають її *основами*, а всі інші – *бічними гранями*. Висота зрізаної піраміди – відстань між площинами її основ.

Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона є частиною правильної піраміди. На малюнку 162 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – її основи, відрізок MM_1 – апофема.

Теорема 24. ***Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай периметри основ і апофема даної правильної зрізаної n-кутної піраміди дорівнюють P_1, P_2 і m. Кожна її бічна грань – трапеція, сторони якої $\frac{P_1}{n}$ і $\frac{P_2}{n}$, а висота m. Площа однієї такої трапеції дорівнює

$$\left(\frac{P_1}{n}+\frac{P_2}{n}\right)\cdot\frac{m}{2}.$$

Площа бічної поверхні даної зрізаної піраміди

$$S_б = n\cdot\left(\frac{P_1}{n}+\frac{P_2}{n}\right)\cdot\frac{m}{2}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot m.$$

Це й треба було довести.

ЗАУВАЖЕННЯ. Зрізана піраміда не є пірамідою, оскільки не відповідає означенню піраміди. Тому не можна стверджувати, що «зрізана піраміда – це така піраміда, у якої...» або що «піраміди бувають повні та зрізані».

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення піраміди. Назвіть її елементи.

2. Що таке діагональна площина піраміди? А діагональний переріз?

3. Які піраміди називають правильними?
4. Що таке апофема правильної піраміди?
5. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?
6. Що таке зрізана піраміда? Назвіть її елементи.
7. Чи є зрізана піраміда пірамідою?
8. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди?

Виконаємо разом

1. Основа піраміди – трапеція. Побудуйте прямі, по яких перетинаються площини протилежних бічних граней піраміди.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано піраміду $PABCD$, у якої $AB \parallel CD$ (мал. 163). Площини її бічних граней PAB і PCD перетинаються по прямій PK, паралельній AB. Якщо прямі AD і BC перетинаються у точці M, то площини граней PAD і PBC мають спільні точки P і M. Отже, вони перетинаються по прямій PM. Тому будуємо:

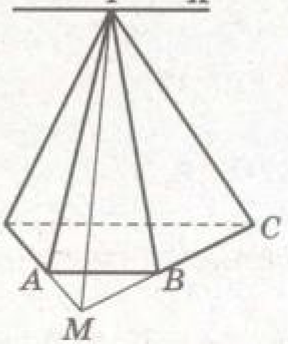
а) пряму PK, паралельну AB;

б) пряму PM, де M – точка перетину прямих AD і BC.

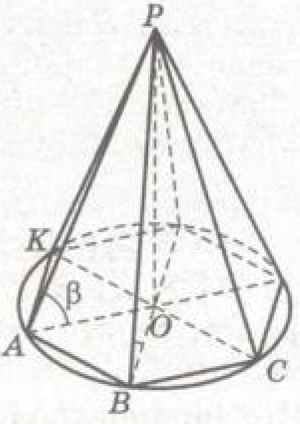
Прямі PK і PM шукані.

2. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основа її висоти – центр кола, описаного навколо основи піраміди.

ДОВЕДЕННЯ. Якщо всі бічні ребра піраміди $PABC...K$ нахилені до площини основи під кутом β (мал. 164), то прямокутні трикутники POA, POB, ..., POK рівні (за



Мал. 163

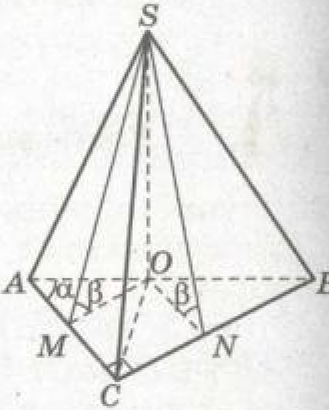


Мал. 164

катетом PO і протилежним кутом). Тоді рівні і відрізки OA, OB, ..., OK. Отже, всі вершини основи даної піраміди лежать на одному колі з центром у точці O.

3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Бічна грань піраміди, що проходить через гіпотенузу, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть висоту піраміди.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $SABC$ – піраміда, у якої $AB = c$, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$ (мал. 165).



Мал. 165

Бічна грань ASB перпендикулярна до площини основи, SO – висота піраміди.

Проведемо $OM \perp AC$ та $ON \perp BC$ і точки M та N з'єднаємо з точкою S. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AC$ і $SN \perp BC$. Отже, $\angle SMO$ і $\angle SNO$ – лінійні кути двогранних кутів при ребрах AC і BC: $\angle SMO = \angle SNO = \beta$.

Оскільки $\triangle SOM = \triangle SON$ (за катетом і протилежним кутом), то $OM = ON$.

Розглянемо $\triangle ABC$. Маємо: $AC = c\cos\alpha$, $BC = c\sin\alpha$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha.$$

Розглянемо $\triangle AOC$ і $\triangle BOC$. Нехай $OM = ON = x$.

Оскільки $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ і

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}AC \cdot OM = \frac{1}{2}cx\cos\alpha,$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot ON = \frac{1}{2}cx\sin\alpha,$$

то $\frac{1}{2}cx\cos\alpha + \frac{1}{2}cx\sin\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$,

або $2cx(\cos\alpha + \sin\alpha) = c^2\sin 2\alpha$,

звідки $x = \dfrac{c\sin 2\alpha}{2(\cos\alpha + \sin\alpha)}$.

Тоді з $\triangle SOM$ знайдемо SO:

$SO = OM\text{tg}\beta$, або $SO = \dfrac{c\sin 2\alpha\text{tg}\beta}{2(\cos\alpha + \sin\alpha)}$.

Спробуйте розв'язати цю задачу іншим способом, наприклад, використовуючи подібність трикутників.

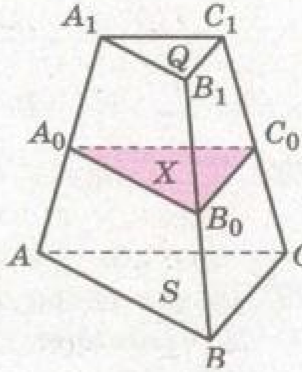
ВІДПОВІДЬ. $\frac{c\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta}{2(\cos\alpha+\sin\alpha)}$.

4. Через середину висоти зрізаної піраміди паралельно основам проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо площі основ S і Q.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Основи зрізаної піраміди і серединний переріз – подібні многокутники. Позначимо їхні відповідні сторони: $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $A_0B_0 = c$ (мал. 166). Тоді

$$c=\frac{a+b}{2} \text{ і } \frac{S}{Q}=\frac{a^2}{b^2},$$

звідки $$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{Q}},\ \frac{a+b}{b}=\frac{\sqrt{S}+\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}}.$$



Мал. 166

Якщо площа перерізу дорівнює X, то

$$\frac{X}{Q}=\frac{c^2}{b^2},\ X=Q\frac{c^2}{b^2}=Q\left(\frac{a+b}{2b}\right)^2=$$

$$=\frac{Q}{4}\left(\frac{\sqrt{S}+\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{S}+\sqrt{Q}\right)^2.$$

ВІДПОВІДЬ. $0{,}25\left(\sqrt{S}+\sqrt{Q}\right)^2$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

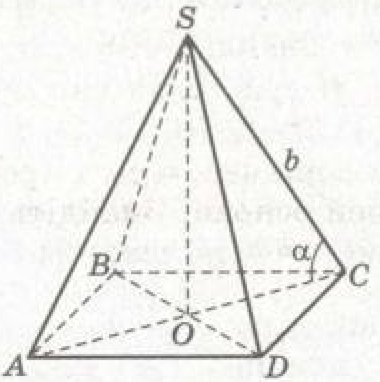
Виконайте усно

788. Скільки граней, вершин і ребер має n-кутна піраміда? Чи існує піраміда, яка має 125 ребер?

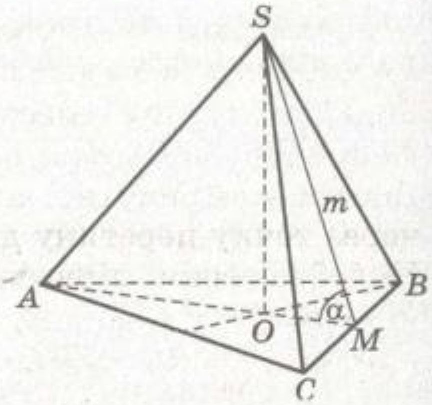
789. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а сторона основи – 6 см.

790. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°, а апофема – 10 см. Знайдіть площу основи.

791. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні піраміди, якщо сторону основи збільшити у 2 рази, а апофему – у 3 рази?



Мал. 167



Мал. 168

792. Чи можуть основами зрізаної піраміди бути прямокутники, у яких сторони одного дорівнюють 3 см і 5 см, а другого – 4 см і 6 см?

793. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α (мал. 167). Знайдіть:

а) висоту піраміди;
б) радіус кола, описаного навколо основи;
в) діагональ основи;
г) площу діагонального перерізу;
ґ) сторону основи.

794. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює m і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть:

а) висоту піраміди;
б) радіус кола, вписаного в основу;
в) радіус кола, описаного навколо основи;
г) сторону основи;
ґ) площу основи;
д) площу бічної грані (мал. 168).

795. Учень міркує: «Трикутна піраміда називається тетраедром. Отже, правильна трикутна піраміда – це правильний тетраедр». Чи правий він? Чи кожна правильна трикутна піраміда є правильним тетраедром?

А

796. Відома піраміда Хеопса в Єгипті – правильна чотирикутна піраміда, висота якої дорівнює 147 м, а площа основи – 5,3 га. Знайдіть міру двогранного кута при ребрі її основи і кут нахилу до площини основи її бічного ребра.

797. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди вдвічі менша за площу основи. Доведіть, що протилежні бічні ребра піраміди перпендикулярні.

798. Основа піраміди – прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро дорівнює 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

799. Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершини якого – точки $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$.

800. Висота чотирикутної піраміди дорівнює 4 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо в основі лежить:
а) квадрат зі стороною $8\sqrt{3}$ см;
б) прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см;
в) ромб з діагоналями 12 см і 16 см;
г) паралелограм площею 24 см^2 зі сторонами 3 см і 4 см.

801. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, якщо:
а) сторона основи дорівнює a;
б) апофема дорівнює l;
в) висота дорівнює h.

802. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо:
а) сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи α;
б) висота піраміди дорівнює h, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°;
в) бічне ребро дорівнює b та утворює з площиною основи кут β;
г) відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює d, а двогранний кут при ребрі основи α;
ґ) відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює l, а бічне ребро утворює з площиною основи кут β.

803. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, якщо:
а) сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи α;
б) висота піраміди дорівнює h, а двогранний кут при ребрі основи α;
в) бічне ребро дорівнює b та утворює з площиною основи кут β;
г) відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює d, а двогранний кут при ребрі основи α;
ґ) відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює l, а бічне ребро утворює з площиною основи кут β.

804. Основа піраміди – ромб, гострий кут якого 45°, а радіус вписаного кола 3 см. Висота піраміди проходить через центр цього кола і дорівнює 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

805. У правильній шестикутній піраміді сторона основи дорівнює a, бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди. Обчисліть, якщо $a = 7$ см, $\alpha = 45°$.

806. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим кутом α. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть висоту піраміди.

807. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом при вершині α. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть відстань від основи висоти піраміди до її бічного ребра.

808. Доведіть, що коли всі двогранні кути при ребрах основи піраміди рівні, то основа її висоти – центр кола, вписаного в основу піраміди.

809. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Кожний з двогранних кутів при ребрах основи дорівнює 60°. Знайдіть висоту піраміди.

810. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 11 см, 24 см і 31 см. Висота піраміди дорівнює 2 см. Усі двогранні кути при ребрах основи рівні. Знайдіть ці кути.

Б

811. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої – квадрат зі стороною a, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює h.

812. Основа піраміди – ромб, сторона якого a, а гострий кут 60°. Висота піраміди дорівнює a і проходить через вершину гострого кута основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

813. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

814. В основі піраміди $SABC$ лежить прямокутний $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо грані, які містять сторони AB і AC, перпендикулярні до площини основи, а третя грань утворює з нею кут β.

815. У трикутній піраміді плоскі кути при вершині дорівнюють α, α, β. Бічне ребро, яке є спільною стороною рівних кутів, перпендикулярне до площини основи і дорівнює a. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

816. Основа піраміди – правильний трикутник зі стороною a. Одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

817. Основа піраміди – правильний трикутник. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 60°. Як нахилене до площини основи найбільше бічне ребро?

818. Основа піраміди – прямокутний трикутник з кутом α і протилежним катетом a. Бічна грань, що проходить через цей катет, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом φ. Знайдіть висоту піраміди.

819. У правильній трикутній піраміді вершина основи знаходиться на відстані d від протилежної грані. Знайдіть площу поверхні піраміди, якщо двогранний кут при ребрі основи дорівнює α.

820. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Через діагональ основи, паралельно бічному ребру, проведено площину. Знайдіть площу перерізу, якщо апофема піраміди дорівнює l.

821. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи 288 см^2. На якій відстані від основи потрібно провести переріз, паралельний основі, щоб його площа дорівнювала 50 см^2?

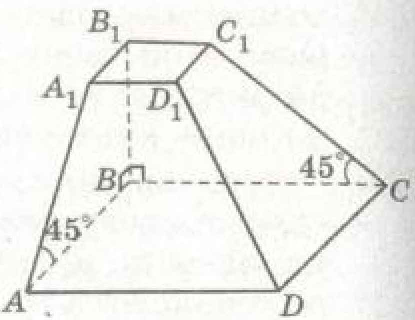
822. Переріз піраміди, паралельний основі, ділить бічне ребро у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини піраміди. Знайдіть площу основи, якщо вона більша за площу перерізу на 63 см^2.

823. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 12 см. Сторони основ 20 см і 38 см. Знайдіть:
а) довжину її бічного ребра;
б) площу перерізу, який проходить через діагоналі основ;
в) площу поверхні.

824. Сторони основи правильної зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть бічне ребро та апофему, якщо зрізана піраміда:
а) чотирикутна;
б) трикутна;
в) шестикутна.

825. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної зрізаної піраміди, діагональ якої дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 30°, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°.

826. Основою зрізаної піраміди є квадрат. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут 45°. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди, якщо сторони основ a і $2a$ (мал. 169).



Мал. 169

В

827. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює $\sqrt{2}$ см, а висота бічної грані, проведена до бічного ребра, – $\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

828. Основою піраміди є квадрат. Двогранні кути при основі пропорційні до чисел 1, 2, 4 і 2. Визначте ці кути.

829. Знайдіть площу основи правильної чотирикутної піраміди, у якої висота дорівнює h, а двогранний кут при бічному ребрі α.

830. Відстань від основи висоти правильної трикутної піраміди до середини бічного ребра дорівнює стороні основи. Знайдіть косинус кута між суміжними бічними гранями.

831. Основа піраміди – правильний трикутник. Знайдіть міри двогранних кутів при ребрах основи, якщо висота піраміди проходить через один з центрів зовнівписаного кола і дорівнює його радіусу.

832. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см, а площа поверхні 64 см^2. Знайдіть сторону основи піраміди.

833. Двогранні кути піраміди при основі дорівнюють 60°. Знайдіть площу перерізу, який паралельний основі та ділить висоту у відношенні 1 : 3, рахуючи від вершини, якщо площа поверхні піраміди дорівнює 192 см^2.

834. Знайдіть площу поверхні піраміди, в основі якої лежить правильний шестикутник зі стороною l, а одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи і теж дорівнює l.

835. В основі піраміди лежить квадрат зі стороною a. Двогранний кут при одному з ребер основи прямий, а двогранні кути при сусідніх з ним ребрах основи дорівнюють α і β. Знайдіть висоту піраміди.

836. В основі піраміди лежить трапеція $ABCD$, у якої $AB = CD = 2$ см, $BC = 4$ см, $AD = 6$ см. Грані SAB і SCD перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі AD дорівнює $30°$. Знайдіть висоту піраміди і двогранний кут при ребрі BC.

837. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи a, якщо площина, проведена через сторону основи перпендикулярно до протилежної бічної грані, ділить цю грань на дві рівновеликі частини.

838. Дано правильну піраміду, у якої: α – кут нахилу бічної грані до площини основи, β – кут нахилу бічного ребра до площини основи, γ – плоский кут при вершині піраміди, φ – двогранний кут при бічному ребрі. Знаючи один з цих кутів, знайдіть інші, якщо піраміда:

а) чотирикутна; б) трикутна; в) шестикутна.

839. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ всі ребра дорівнюють a. На сторонах BC і CD взято точки M і N, а на поверхні піраміди точку P так, що $PAMN$ – правильна трикутна піраміда з вершиною P. Знайдіть SP.

840. Знайдіть площу бічної поверхні правильної шестикутної піраміди $SABCDEF$, якщо сторона основи дорівнює a, а кут між гранями SAB і SEF – α.

841. Відстань від основи висоти правильної чотирикутної піраміди до бічного ребра і до бічної грані відповідно дорівнюють m і n. Знайдіть двогранний кут при ребрі основи піраміди.

842. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторона нижньої основи дорівнює m, двогранний кут при ребрі цієї основи $60°$, а площа поверхні Q. Знайдіть сторону верхньої основи.

843. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди дорівнює $18\sqrt{3}$ см^2, а площа поверхні $27\sqrt{3}$ см^2. Висоту піраміди поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено перерізи, паралельні основі. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди, обмеженої цими перерізами.

844. Площини перерізів, паралельних основам, ділять висоту зрізаної піраміди на три рівні частини. Знайдіть відношення площ цих перерізів, якщо площі основ відносяться як $1 : 4$.

845. Сторони верхньої та нижньої основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють $2a$ і $3a$, а бічна грань утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу перерізу зрізаної піраміди площиною, яка проходить через центр нижньої основи і середню лінію бічної грані.

846. Висота трикутної піраміди проходить через точку перетину висот основи. Доведіть, що суми квадратів мимобіжних ребер піраміди рівні між собою.

847. Доведіть, що в трикутній піраміді з прямим тригранним кутом при вершині квадрат площі основи дорівнює сумі квадратів площ бічних граней.

848*. З двох трикутних пірамід зі спільною основою одна розміщена всередині другої. Чи може бути сума ребер внутрішньої піраміди більшою за суму ребер зовнішньої?

849*. Доведіть, що коли у трикутній піраміді всі грані мають рівні площі, то всі вони рівні.

850*. Нехай AB і KP – дві сторони, які належать різним основам правильної зрізаної піраміди. Доведіть, що проекції AB і KP на пряму, яка проходить через їхні середини, рівні між собою.

Вправи для повторення

851. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і нахилена до площин двох його граней під кутами α і β. Знайдіть довжини ребер паралелепіпеда.

852. Знайдіть площу перерізу правильної шестикутної призми площиною, яка проходить через дві протилежні сторони верхньої та нижньої основ, якщо сторона основи дорівнює 3 см, а бічне ребро 13 см.

853. Точка простору P рівновіддалена від сторін прямокутної трапеції з основами 10 см і 15 см. Знайдіть ці відстані, якщо від площини трапеції точка P віддалена на 8 см.

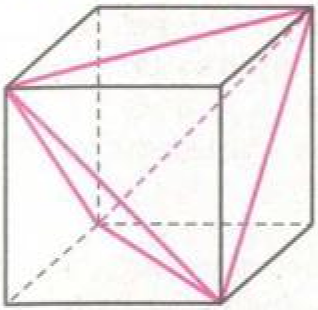
§23 ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

*Многогранник називається **правильним**, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а всі вершини однаково віддалені від деякої точки.*

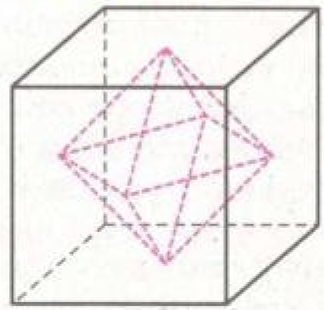
Ця точка називається *центром* правильного многогранника.

Наприклад, *куб* – правильний многогранник, оскільки всі його грані – рівні квадрати, а всі вершини однаково віддалені від точки перетину діагоналей куба.

Якщо сполучимо відрізками кінці двох мимобіжних діагоналей протилежних граней куба, дістанемо каркас *правильно-*



Мал. 170



Мал. 171

го тетраедра (мал. 170). Кожна його грань – рівносторонній трикутник, а кожна вершина однаково віддалена від центра куба. Сполучивши відрізками центри суміжних граней куба, дістанемо каркас *правильного октаедра* (мал. 171). Кожна його грань – рівносторонній трикутник, а всі вершини однаково віддалені від центра даного куба.

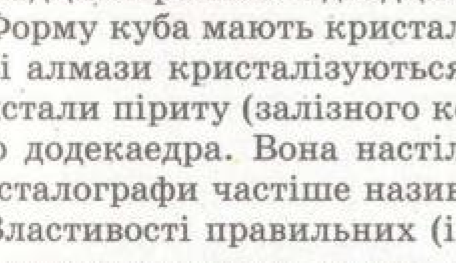
Існує всього п'ять видів правильних многогранників. Крім трьох названих, ще *правильний додекаедр* і *правильний ікосаедр* (мал. 172).

Куб називають ще *правильним гексаедром.* Назви тетраедр, гексаедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр у перекладі з грецької означають: чотиригранник, шестигранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник.

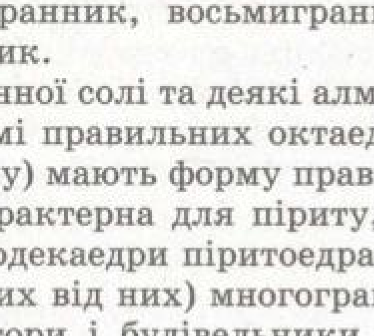
Форму куба мають кристали кухонної солі та деякі алмази. Інші алмази кристалізуються у формі правильних октаедрів. Кристали піриту (залізного колчедану) мають форму правильного додекаедра. Вона настільки характерна для піриту, що кристалографи частіше називають додекаедри піритоедрами.

Властивості правильних (і похідних від них) многогранників використовують також архітектори і будівельники, які споруджують сітчасті куполи, спеціалісти, що вивчають структури речовин, та ін.

Якщо центр O правильного n-гранника сполучити відрізками з усіма вершинами, його можна розбити на n правильних пірамід, основами яких є грані даного многогранника, а спільною вершиною – точка O (мал. 173). Ці піраміди у кожному



Мал. 172



Мал. 173

правильному многограннику рівні, бо рівні всі їхні основи і всі бічні ребра. У рівних правильних пірамідах рівні висоти і двогранні кути при основах. Тому в будь-якому правильному многограннику кожна грань однаково віддалена від центра і всі двогранні кути рівні.

π Центр O кожного правильного многогранника, крім тетраедра, є центром його симетрії. Мають правильні многогранники й інші елементи симетрії.

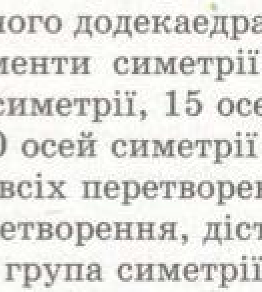
Площини симетрії, осі та центр симетрії, а також осі обертання різних порядків називають *елементами симетрії*. Перелічимо елементи симетрії куба: 1 центр симетрії, 9 площин симетрії, 6 осей симетрії другого порядку, 3 осі симетрії четвертого порядку, 4 осі третього порядку, 4 осі дзеркальної симетрії шостого порядку.

Такі самі елементи симетрії має і правильний октаедр. Адже вершини правильного октаедра розміщені в центрах граней деякого куба (ці многогранники взаємні). І при кожному самосуміщенні одного з цих многогранників самосуміщається і другий.

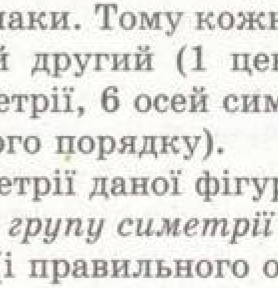
Так само центри граней правильного ікосаедра є вершинами правильного додекаедра і навпаки. Тому кожний з них має ті самі елементи симетрії, що й другий (1 центр симетрії, 15 площин симетрії, 15 осей симетрії, 6 осей симетрії п'ятого порядку і 10 осей симетрії третього порядку).

Якщо до всіх перетворень симетрії даної фігури приєднати тотожне перетворення, дістанемо *групу симетрії даної фігури*. Наприклад, група симетрії куба (і правильного октаедра) містить 28 елементів.

Багато елементів симетрії мають і *напівправильні многогранники*, кожний з яких обмежений правильними, але не однойменними многокутниками. Приклади таких тіл неважко дістати, якщо при кожній вершині правильного многогранника відрізати відповідних розмірів правильні піраміди (мал. 174).



а)



б)

Мал. 174

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які многогранники називаються правильними?
2. Назвіть правильні многогранники.
3. Що таке центр правильного многогранника?
4. Сформулюйте важливіші властивості правильних многогранників.
5. Які многогранники називають напівправильними?

Виконаємо разом

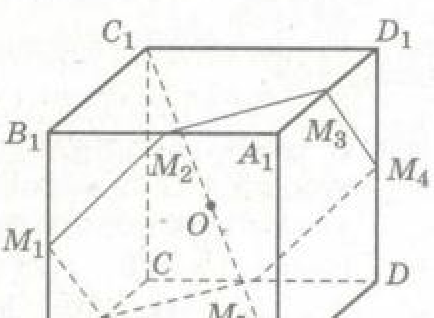
1. Скільки граней може мати правильний многогранник з п'ятикутними гранями? Скільки він має вершин і ребер?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо такий многогранник має n граней, то ребер він має $\frac{5n}{2}$, оскільки кожна грань має 5 сторін і кожне ребро є стороною для двох граней. В одній вершині такого многогранника збігається по 3 грані, тому вершин у нього $\frac{5n}{3}$. За теоремою Ейлера $n+\frac{5n}{3}-\frac{5n}{2}=2$, звідки $n = 12$. Отже, п'ятикутні грані з правильних многогранників має тільки 12-гранник. Це правильний додекаедр. Вершин у нього $5n : 3 = 20$, а ребер $5n : 2 = 30$.

ВІДПОВІДЬ. 12, 20, 30.

2. Покажіть, що куб має 4 осі дзеркальної симетрії шостого порядку.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Перерізом куба площиною α, яка проходить через середину O діагоналі AC_1 і перпендикулярна до неї, є правильний шестикутник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ (мал. 175). Уявно повернемо даний куб навколо прямої AC_1 на 60°. При цьому точка M_1 перейде в M_2, M_2 – в M_3, ..., M_6 – в M_1, а даний куб F – в F_1. Куби F і F_1 симетричні відносно площини α. Отже, композиція повороту на 60° навколо прямої AC_1 і симетрії відносно площини α відображає даний куб F на себе. Оскільки $360° : 60° = 6$, то пряма AC_1 – вісь дзеркальної симетрії



Мал. 175

шостого порядку. Усього діагоналей у куба чотири. Отже, куб має 4 осі дзеркальної симетрії шостого порядку.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

854. Учень міркує: «Кожна призма – многогранник, отже, кожна правильна призма – правильний многогранник». Чи правий він?

855. Чи є правильним многогранником правильна піраміда?

856. Чи існує піраміда, яка є правильним многогранником? А призма?

857. Чи буде правильним многогранник, який є об'єднанням двох правильних тетраедрів, що мають спільну основу?

858. Чому дорівнює плоский кут при вершині правильного ікосаедра? А гексаедра?

859. Площа грані правильного додекаедра дорівнює 10 см^2. Чому дорівнює його площа поверхні?

860. Площа поверхні правильного гексаедра дорівнює 54 см^2. Чому дорівнює його ребро?

861. Поверхню якого напівправильного многогранника нагадує поверхня футбольного м'яча?

А

862. З яких двох чотирикутних пірамід можна скласти правильний октаедр? Як відносяться висота і сторона основи такої піраміди?

863. Чи є правильним многогранник, вершини якого – центри всіх граней правильного:
а) тетраедра; б) октаедра?

864. Чи є правильним многогранник, вершини якого – середини всіх ребер:
а) куба;
б) правильного тетраедра;
в) правильного октаедра?

865. З однієї вершини куба проведено три діагоналі бічних граней і їхні кінці сполучено відрізками. Чи буде утворена піраміда правильним многогранником?

866. Знайдіть суму плоских кутів при вершині кожного правильного многогранника.

867. Від кожної вершини тетраедра з ребром 4 см відтинають тетраедр з ребром 2 см. Який многогранник залишиться? Знайдіть суму всіх його ребер.

868. Під яким кутом із центра куба видно його ребро? А із центра правильного октаедра?

869. Знайдіть довжину ребра правильного октаедра, якщо його вершина віддалена від центра на 1 дм.

870. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу цього октаедра його площиною симетрії.

871. Знайдіть площу поверхні правильного ікосаедра, якщо його ребро дорівнює a.

872. Знайдіть ребро правильного октаедра, якщо площа його поверхні дорівнює S.

873. У скільки разів збільшиться площа поверхні правильного ікосаедра, якщо його ребро збільшити у 3 рази?

Б

874. Знайдіть міру двогранного кута при ребрі правильного:
а) тетраедра; б) октаедра.

875. Зобразіть на малюнку всі осі симетрії правильного октаедра.

876. Покажіть, що правильний тетраедр має: 6 площин симетрії; 3 осі симетрії; 4 осі симетрії третього порядку.

877. Доведіть, що центри граней правильного октаедра є вершинами куба.

878. Доведіть, що можна вибрати 4 вершини куба так, що вони будуть вершинами правильного тетраедра. Скількома способами це можна зробити?

879. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть площу поверхні многогранника, вершинами якого є центри граней куба.

880. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу поверхні многогранника, вершинами якого є центри граней даного тетраедра.

881. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть площу поверхні многогранника, вершинами якого є центри граней даного октаедра.

882. Знайдіть площу поверхні правильного додекаедра, ребро якого дорівнює m.

883. Знайдіть міру двогранного кута при ребрі правильного:
а) додекаедра; б) ікосаедра.

884. Доведіть, що в правильному октаедрі протилежні:
а) ребра паралельні;
б) грані лежать у паралельних площинах.

885. Знайдіть відстань між протилежними вершинами правильного октаедра, ребро якого дорівнює a.

В

886. Знайдіть найменшу і найбільшу відстані між паралельними опорними площинами правильного октаедра, якщо його ребро дорівнює a.

887. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що перетином тетраедрів AB_1CD_1 і C_1BA_1D є правильний октаедр.

888. Доведіть, що не існує правильного многогранника, гранями якого є правильні n-кутники, коли $n \geqslant 6$.

889*. Два правильних тетраедри $ABCD$ і $MNPQ$ розміщені так, що площини BCD і NPQ збігаються, вершина M лежить на висоті AO першого тетраедра, а площина MNP проходить через центр грані ABC і середину ребра BD. Знайдіть відношення ребер тетраедрів.

890*. Доведіть, що існує тільки п'ять видів правильних многогранників.

891*. Скільки елементів має група симетрії правильного тетраедра?

892*. Скільки елементів має група симетрії напівправильного многогранника, зображеного на малюнку 174?

893*. Переріз правильного ікосаедра – правильний десятикутник. Знайдіть його площу, якщо ребро даного ікосаедра дорівнює a.

894. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ***. Виріжте із цупкого паперу розгортки правильного октаедра, правильного додекаедра, правильного ікосаедра і склейте з них многогранники.

Вправи для повторення

895. Висота правильної трикутної піраміди вдвічі більша за сторону основи. Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі.

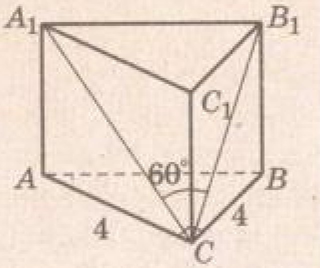
896. Усі ребра правильної чотирикутної піраміди рівні. Знайдіть кут між апофемою і площиною сусідньої бічної грані.

897. Три відрізки, які не лежать в одній площині, мають спільну точку і діляться нею навпіл. Доведіть, що кінці цих відрізків є вершинами паралелепіпеда.

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

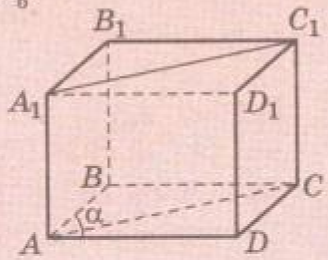
А

$ABCA_1B_1C_1$ – пряма призма, $\angle ACB = 90°$; $AC = BC = 4$.
Знайдіть $S_п$.



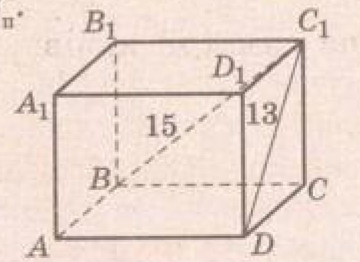
Б

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – пряма призма, $ABCD$ – ромб, $S_{AA_1C_1C} = S$.
Знайдіть $S_б$.



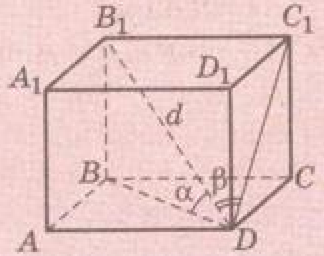
А

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $S_{DD_1C_1C} : S_{BB_1C_1C} = 5 : 9$, $BC_1 = 15$, $DC_1 = 13$.
Знайдіть $S_п$.



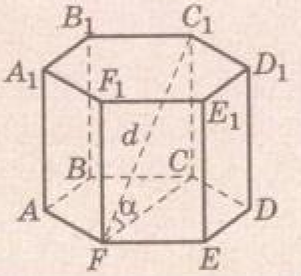
Б

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед.
Знайдіть $S_б$.



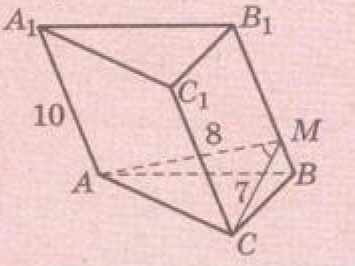
А

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильна призма, $C_1F = d$.
Знайдіть $S_п$.



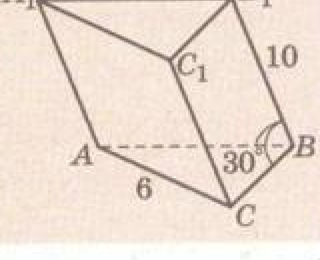
Б

$CM \perp BB_1$, $AM \perp BB_1$, $\angle AMC = 120°$, $CM = 7$, $AM = 8$.
Знайдіть $S_б$.



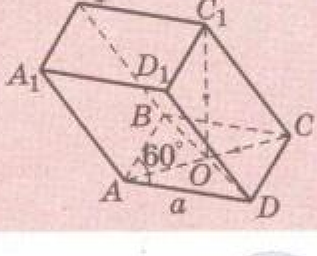
А

$\triangle ABC$ – правильний, $\angle B_1BC = \angle B_1BA = 30°$.
Знайдіть $S_б$.



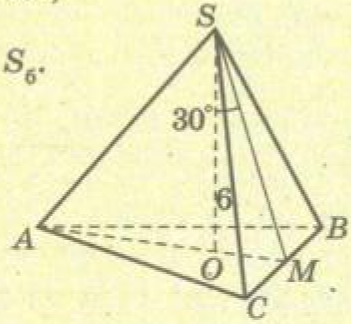
Б

$ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 60°$, $C_1O \perp (ABC)$, $C_1O = CO$.
Знайдіть $S_б$.

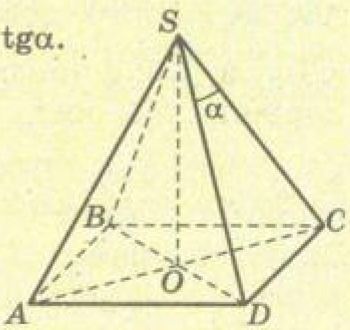


А

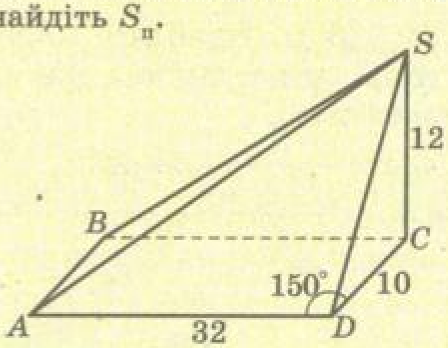
SABC – правильна піраміда,
$\angle OSM = 30°$,
$SO = 6$.
Знайдіть $S_б$.



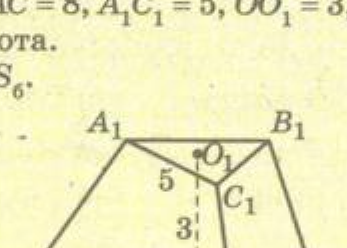
SABCD – правильна піраміда,
$SO = AB$.
Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$.



ABCD – паралелограм, $SC \perp (ABC)$.
Знайдіть $S_п$.

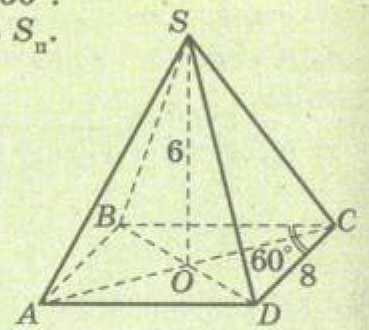


$ABCA_1B_1C_1$ – правильна зрізана піраміда, $AC = 8$, $A_1C_1 = 5$, $OO_1 = 3$, OO_1 – висота.
Знайдіть $S_б$.

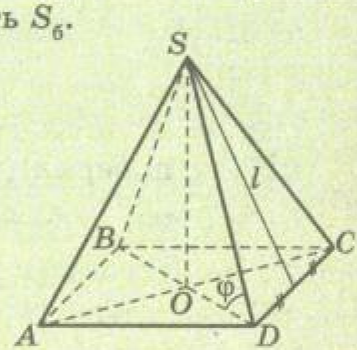


Б

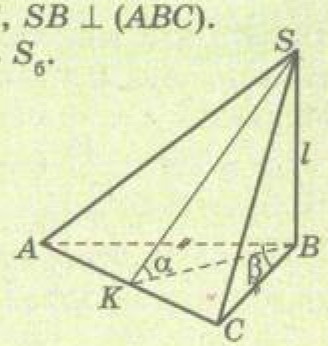
ABCD – ромб
$\angle BCD = 60°$.
Знайдіть $S_п$.



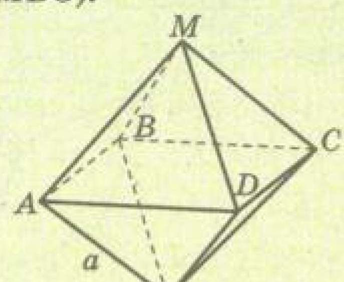
SABCD – правильна піраміда.
Знайдіть $S_б$.



$AB = BC$, $\angle ABC = \beta$, $\angle SKB = \alpha$, $BK \perp AC$, $SB \perp (ABC)$.
Знайдіть $S_б$.



MABCDN – правильний октаедр.
Знайдіть: а) *MN*; б) відстань від *A* до (*MDC*).



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Знайдіть площу поверхні куба, якщо його діагональ дорівнює d.

а) d^2; б) $2d^2$; в) $3d^2$; г) $6d^2$.

2. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут 45°.

а) $3\sqrt{2}$ см^2; б) 18 см^2; в) $9\sqrt{2}$ см^2; г) 36 см^2.

3. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть висоту піраміди.

а) 10 см; б) 5 см; в) $5\sqrt{2}$ см; г) $5\sqrt{3}$ см.

4. Знайдіть висоту правильної чотирикутної призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 32 см^2, а площа повної поверхні – 40 см^2.

а) $2\sqrt{2}$ см; б) 4 см; в) $4\sqrt{2}$ см; г) 8 см.

5. Сторони основи правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 4 см і 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть площу діагонального перерізу.

а) 10 см^2; б) 20 см^2; в) 5 см^2; г) $10\sqrt{2}$ см^2.

6. Кімната має розміри 8 м, 7 м і 3 м. Знайдіть площу стін, які необхідно пофарбувати, якщо площа вікон і дверей становить 20 % від площі стін.

а) 90 м^2; б) 108 м^2; в) 72 м^2; г) 54 м^2.

7. Знайдіть міру плоского кута при вершині правильної чотирикутної піраміди, у якої висота у 2 рази менша за діагональ основи.

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

8. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами a і b. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо двогранні кути при ребрах основи дорівнюють 60°.

а) $\sqrt{3}ab$; б) ab; в) $0{,}5ab$; г) $2ab$.

9. Знайдіть суму плоских кутів шестикутної призми.

а) 2160°; б) 1800°; в) 2880°; г) 3600°.

10. Знайдіть ребро октаедра, якщо площа його поверхні дорівнює $24\sqrt{3}$ см^2.

а) $2\sqrt{2}$ см; б) $2\sqrt{3}$ см; в) 2 см; г) $2\sqrt{6}$ см.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1°. Точка A двогранного кута віддалена від його ребра на 10 см, а від граней на 5 см. Знайдіть міру двогранного кута.

2°. Кожне ребро правильної шестикутної призми дорівнює a. Знайдіть площу поверхні призми.

3°. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо сторона основи дорівнює a, а діагональний переріз – прямокутний трикутник.

4°. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 8 см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з нею кути по 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

5°. Через сторону нижньої основи і середину протилежного бічного ребра правильної трикутної призми проведено переріз під кутом 45° до площини основи. Знайдіть площу поверхні призми, якщо площа перерізу $4\sqrt{3}$ см^2.

6°. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо двогранні кути при основі піраміди рівні між собою, а висота піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см.

7°. Знайдіть відстань між центрами двох сусідніх граней правильного октаедра, якщо його ребро дорівнює l.

8°. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 30° і стороною 4 см. Висота паралелепіпеда дорівнює 2 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через ребро основи та утворює з площиною основи кут 60°.

9°°. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основ дорівнюють $8\sqrt{3}$ см і $6\sqrt{3}$ см. Через бічне ребро і середину протилежної сторони нижньої основи проведена площина. Знайдіть площу поверхні зрізаної піраміди, якщо площа перерізу $10{,}5\sqrt{3}$ см^2.

10°°. У правильній шестикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а кут між суміжними бічними гранями α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

11°°. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Вершина B_1 проектується в середину ребра BC. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо бічне ребро дорівнює l та утворює з площиною основи кут α, а двогранний кут при ребрі BB_1 дорівнює β.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

1. Елементами многогранника є, крім інших, двогранні та многогранні кути.

2. *Двогранний кут* – фігура, утворена двома півплощинами, зі спільною прямою, що їх обмежує. Ця спільна пряма – *ребро* двогранного кута, півплощини – його *грані*. *Лінійним кутом* двогранного кута називають кут, по якому даний двогранний кут перетинає площина, перпендикулярна до його ребра. Двогранні кути бувають гострі, прямі, тупі, розгорнуті, більші від розгорнутих. Останні двогранні кути не опуклі.

3. *Тригранний кут* – це фігура, складена з трьох плоских кутів, кожні два з яких мають спільну сторону, і які не лежать в одній площині. Ці три плоскі кути називають *гранями*, їхні спільні сторони – *ребрами*, а спільну вершину – *вершиною* даного тригранного кута. Тригранні кути бувають опуклі та неопуклі (мал. 124, *а*). Кожний кут опуклого тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів. Сума всіх плоских кутів опуклого тригранного кута менша від 360°. Сума всіх трьох двогранних кутів тригранного кута більша від 180° і менша від 540°.

4. Якщо один із двогранних кутів опуклого тригранного кута прямий, то косинус протилежного йому плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його плоских кутів.

5. *Многогранний кут* – фігура, описана на с. 119. Кожен многогранний кут має *грані* (плоскі кути), *ребра* (сторони цих кутів) і *вершину* – спільну вершину всіх цих плоских кутів. Залежно від кількості граней (чи ребер) розрізняють тригранні, чотиригранні, ..., n-гранні многогранні кути. Многогранні кути бувають опуклі та неопуклі. Сума всіх плоских кутів опуклого многогранного кута менша від 360°.

6. Кожен з таких двогранних (тригранних чи многогранних) кутів – певна поверхня, яка поділяє весь простір на дві просторові області. Об'єднання такої поверхні й однієї з просторових областей називають таким самим словом: двогранним (тригранним чи многогранним) кутом.

7. Двогранні, тригранні та многогранні кути – це окремі види *тілесних кутів*. Це – геометричні фігури (множини точок). Їх не слід плутати з кутами і кутовими мірами. Жоден двогранний, тригранний чи многогранний кут не є кутом, бо не задовольняє означення кута.

8. Тілесні кути вимірюють у *стерадіанах*. Прямий двогранний кут має π стерадіанів, а прямий тригранний – удвічі менший.

9. *Многогранником* називають геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників. Найважливіші елементи многогранника – *грані, ребра, вершини*. Многогранники бувають опуклі та неопуклі. Об'єднання всіх граней многогранника – його поверхня. Найпростіші та найважливіші види многогранників – призми, піраміди, зрізані піраміди, правильні многогранники.

10. *Призмою* називають многогранник, у якого дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми. Згадувані рівні n-кутники – *основи* призми, всі інші n її граней – *бічні грані*. Усі бічні грані призми – паралелограми, їхні сторони, які не є сторонами основ, – *бічні ребра* призми. Усі бічні ребра призми попарно паралельні. Якщо вони перпендикулярні до основ, така призма *пряма*. Усі бічні грані прямої призми – прямокутники. Залежно від числа n розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., n-кутні призми. Призма називається *правильною*, якщо вона пряма та її основи – правильні многокутники.

11. *Паралелепіпедом* називають призму, в основі якої – паралелограм. Усі шість граней паралелепіпеда – паралелограми. Протилежні грані паралелепіпеда рівні та лежать у паралельних площинах. Усі чотири діагоналі кожного паралелепіпеда перетинаються в одній точці – центрі паралелепіпеда.

12. Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площин основ, його називають *прямим паралелепіпедом*. У прямому паралелепіпеді 4 грані – прямокутники. Якщо всі 6 граней паралелепіпеда прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*. *Правильна чотирикутна призма* – окремий вид прямокутного паралелепіпеда. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

13. *Пірамідою* називають многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а всі інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Елементи піраміди – основа, бічні грані, ребра основи, бічні ребра, вершина. Висота піраміди – перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи, або довжина такого перпендикуляра.

14. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а його центр збігається з основою висоти. Усі бічні грані правильної піраміди – рівнобедрені трикутники. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, – *апофема*. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи та апофеми.

15. Січна площина, паралельна основі піраміди, поділяє її на два многогранники: меншу піраміду і *зрізану піраміду*. Зрізана піраміда має дві основи, які лежать у паралельних площинах. Усі інші грані зрізаної піраміди – трапеції.

16. Многогранник називається *правильним*, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а всі вершини однаково віддалені від деякої точки. Існує всього 5 видів правильних многогранників: правильні тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр.

Тіла обертання

Основні теми розділу:

- Тіла і поверхні обертання.
- Циліндр.
- Конус і зрізаний конус.
- Куля та сфера.
- Комбінації геометричних тіл.

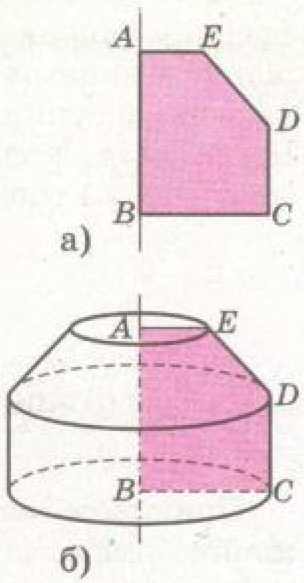
РОЗДІЛ 3

Обертання плоскої фігури навколо осі полягає в одночасному описуванні всіма її точками кіл у площинах, перпендикулярних до осі.

Михайло Остроградський

§ 24 ТІЛА І ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Уявимо, що плоский многокутник $ABCDE$ обертається навколо прямої AB (мал. 176, *а*). При цьому кожна його точка, що не належить прямій AB, описує коло з центром на цій прямій. Весь многокутник $ABCDE$, обертаючись навколо прямої AB, описує деяке тіло обертання (мал. 176, *б*). Пряма AB – вісь цього тіла.



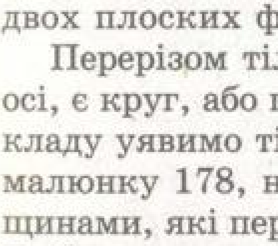
Мал. 176

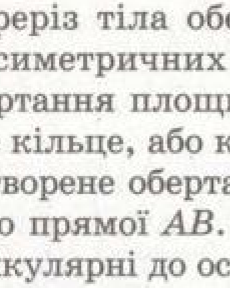
Площина, яка проходить через вісь тіла обертання, є його *площиною симетрії*. Таких площин симетрії кожне тіло обертання має безліч.

Будь-яка площина, що проходить через вісь тіла обертання, перетинає це тіло. Утворений переріз – його називають *осьовим перерізом* – симетричний відносно осі. Зокрема, осьовий переріз тіла обертання може складатися з двох плоских фігур, симетричних відносно осі (мал. 177).

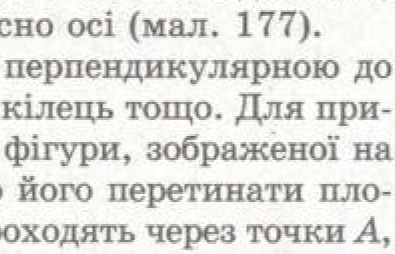
Перерізом тіла обертання площиною, перпендикулярною до осі, є круг, або плоске кільце, або кілька кілець тощо. Для прикладу уявимо тіло, утворене обертанням фігури, зображеної на малюнку 178, навколо прямої AB. Якщо його перетинати площинами, які перпендикулярні до осі та проходять через точки A, B, C, то в перерізі матимемо відповідно круг, круг і кільце, два кільця. Якщо тіло обертання опукле, то січна площина, перпендикулярна до осі обертання, перетинає його по кругу (мал. 179).

Щоб задати тіло обертання, достатньо назвати його вісь і фігуру, обертанням якої утворене дане тіло. Описуючи таке тіло словами, замість осі іноді називають відрізок, що їй належить. Наприклад, замість «тіло, утворене обертанням три-


Мал. 177



Мал. 178


Мал. 179

кутника навколо осі, яка містить його сторону», говорять і коротше: «тіло, утворене обертанням трикутника навколо його сторони».

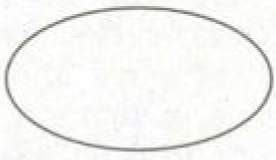
Слід розрізняти поняття «фігура обертання» і «тіло обертання». Не кожна фігура є тілом. Наприклад, круг, кільце, сфера – фігури обертання, але не тіла. Співвідношення між різними видами фігур обертання подано на схемі. Іншими тут названо фігури обертання, які не є ні тілами, ні поверхнями. Наприклад, коло, об'єднання кулі з плоским кільцем (див. мал. 127, *а*) тощо.

Фігури обертання

Тіла обертання | Поверхні обертання | Інші

Приклади матеріальних моделей тіл обертання: хокейна шайба, лінза, заклепка, снаряд, патрон, труба, котушка, звичайна пляшка, пробірка, колба, спортивний диск, обруч тощо. Більшість деталей, виготовлених на токарному верстаті, має форму тіл обертання. Але, наприклад, свердло, шпилька з нарізкою – не тіла обертання.

Кожна фігура обертання – це деяка множина кіл.



Мал. 180

Проекцією кола на площину, не перпендикулярну до площини кола, є *еліпс* (мал. 180). Тому наочне зображення тіла обертання містить еліпси. Еліпс має центр симетрії та дві осі симетрії. Найпростіше рівняння еліпса у декартовій системі координат має вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Будувати еліпси можна за допомогою шаблонів або від руки.

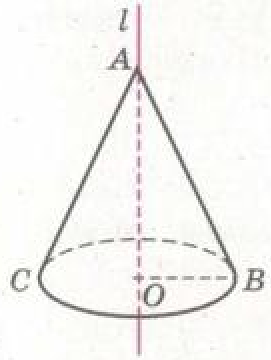
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як можна утворити тіло обертання?
2. Що таке вісь обертання; осьовий переріз тіла обертання?
3. Якою фігурою може бути осьовий переріз тіла обертання? А переріз площиною, перпендикулярною до осі обертання?
4. Як пов'язані між собою фігури обертання та тіла обертання? Покажіть це за допомогою діаграми.

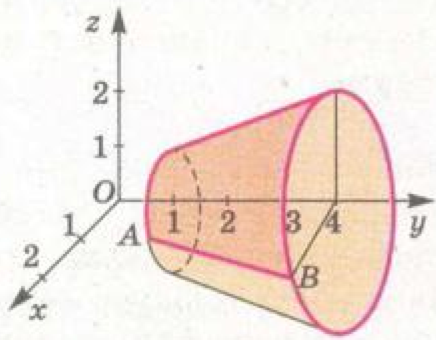
Виконаємо разом

1. Яку плоску фігуру потрібно обертати навколо прямої l, щоб отримати фігуру, зображену на малюнку 181?

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Дану фігуру можна отримати при обертанні навколо прямої l: а) $\triangle AOB$; б) $\triangle ABC$; в) $\triangle KAB$, де $K \in OC$. При обертанні навколо прямої l відрізка OB отримаємо круг, відрізок AB опише криву поверхню, а AO відобразиться на себе.



Мал. 181



Мал. 182

2. Зобразіть фігуру, яка утворюється при обертанні відрізка з кінцями в точках $A(1;\ 1;\ 0)$ і $B(2;\ 4;\ 0)$ навколо осі Oy.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Накреслимо систему координат у просторі та зобразимо в ній дані точки A і B (мал. 182). Обертаючись навколо осі Oy, точки A і B опишуть кола радіусів 1 і 2. Відрізок AB опише частину кривої поверхні (бічну поверхню зрізаного конуса).

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

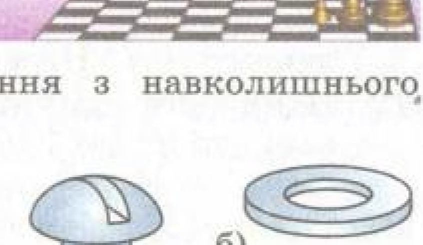
898. Назвіть приклади фігур обертання з навколишнього середовища.

899. Які з наведених на малюнку 183 фігур є тілами обертання?

900. Яка фігура утвориться при обертанні точки навколо прямої, що:

а) не проходить через дану точку;

б) проходить через дану точку?



Мал. 183

901. Яка фігура утвориться при обертанні відрізка AB навколо прямої, що перпендикулярна до AB і:
а) проходить через одну з точок A чи B;
б) не перетинає відрізок AB;
в) перетинає відрізок AB в точці C?

902. Рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 2 см обертається навколо одного з катетів. Знайдіть площу осьового перерізу.

903. Ромб з діагоналями 6 см і 8 см обертається навколо однієї з діагоналей. Знайдіть площу осьового перерізу.

904. Яка фігура буде осьовим перерізом тіла, утвореного при обертанні правильної чотирикутної піраміди навколо висоти?

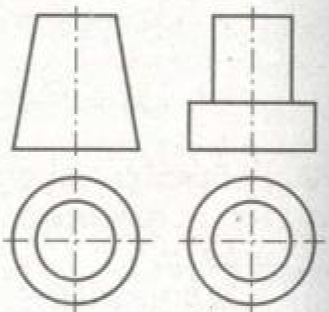
А

905. Намалюйте тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.

906. Намалюйте тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо:
а) катета; б) гіпотенузи.

907. Чи може площина симетрії тіла обертання не проходити через його вісь?

908. Намалюйте тіла обертання, проекції яких на дві взаємно перпендикулярні площини зображено на малюнку 184.



Мал. 184

909. У площині прямокутника зовні його і паралельно одній з його сторін проведено пряму. Намалюйте тіло, утворене обертанням цього прямокутника навколо даної прямої.

910. Чи може бути неопуклим тіло, утворене обертанням навколо осі опуклої плоскої фігури?

911. Чи може центр симетрії тіла обертання не належати даному тілу? Наведіть приклади.

912. Намалюйте фігуру, яка утвориться при обертанні куба навколо прямої, що з'єднує центри протилежних граней куба.

913. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника, яка дорівнює 30 см, точками K і P розділена на три рівні частини. Знайдіть довжини кіл, які описують ці точки під час обертання трикутника навколо його катета.

914. Знайдіть площу осьового перерізу тіла, утвореного обертанням рівностороннього трикутника навколо його сторони, якщо її довжина 2 дм.

915. Трапеція, бічна сторона якої перпендикулярна до основ, обертається навколо цієї бічної сторони. Знайдіть площі фігур, описаних при цьому обертанні основами трапеції, якщо їхні довжини 3,5 см і 5,2 см.

916. Скільки метрів стикових швів довелося зварити електрозварникам, які споруджували газопровід завдовжки 1450 км, якщо зварено його з двадцятиметрових труб діаметром 1420 мм?

917. Прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 5$ см і $AD = 7$ см обертається спочатку навколо сторони AB, а потім навколо сторони AD. Знайдіть відношення площ осьових перерізів утворених фігур.

Б

918. Крива задана рівнянням $y = x^2$, $x \in [0; 3]$. Намалюйте поверхню, яка утворюється при обертанні цієї кривої навколо: а) осі Oy; б) осі Ox.

919. Накресліть фігуру, утворену при обертанні кривої $y = \frac{4}{x}$, $x \in [1; 4]$ навколо: а) осі Ox; б) осі Oy; в) прямої $y = x$; г) прямої $y = -x$.

920. Намалюйте фігуру, отриману при обертанні прямої $y = x$ навколо осей координат, якщо: а) $x \in [0; 3]$; б) $x \in [1; 4]$; в) $x \in [-2; 5]$. У кожному з випадків знайдіть площу осьового перерізу.

921. Прямокутник $ABCD$, у якого $AC = d$ і $\angle CAD = \alpha$, є осьовим перерізом тіла обертання. Яку плоску фігуру при цьому обертали? Які її розміри? Розгляньте всі можливі випадки.

922. Рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині α є осьовим перерізом деякого тіла обертання. Яку плоску фігуру обертали? Які її розміри? Скільки розв'язків має задача?

923. Трикутник ABC, у якого $AC = BC = a$, $\angle C = 120°$, обертається навколо прямої, яка містить висоту трикутника, проведену з вершини A. Виконайте відповідний малюнок. Знайдіть довжини кіл, які при цьому обертанні опише кожна з вершин трикутника.

924. Тіло утворене обертанням прямокутного трикутника навколо меншого катета, який з гіпотенузою утворює кут α. Знайдіть відношення площі круга, описаного більшим катетом, до площі осьового перерізу тіла.

925. Квадрат $ABCD$ обертається навколо прямої, яка проходить через точку A, паралельно діагоналі BD.

а) Знайдіть сторону квадрата і площу осьового перерізу, якщо при цьому обертанні точка C описує коло завдовжки 8π см.

б) Розв'яжіть задачу а) у випадку, коли вісь обертання утворює зі стороною AB кут $15°$.

В

926. Побудуйте фігуру, утворену при обертанні паралелограма навколо кожної з його діагоналей.

927. Намалюйте фігуру, утворену обертанням плоскої w-подібної ламаної із чотирьох рівних ланок навколо її крайньої ланки.

928. Намалюйте фігуру, утворену обертанням кола навколо його дотичної. Чи є ця фігура тілом обертання?

929. Відрізок a і пряма l не лежать в одній площині. Намалюйте фігуру, утворену обертанням відрізка a навколо прямої l.

930*. Намалюйте осьовий переріз тіла, утвореного при обертанні куба навколо: а) його діагоналі; б) прямої, яка з'єднує середини протилежних ребер.

Вправи для повторення

931. Центр однієї основи куба і середини сторін другої основи є вершинами піраміди. Знайдіть поверхню піраміди, якщо ребро куба дорівнює a.

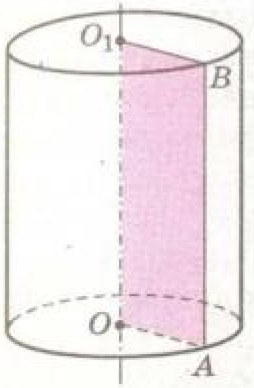
932. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді площі основ дорівнюють Q_1 і Q_2, а бічна поверхня S. Знайдіть площу діагонального перерізу.

933. Діагоналі основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 16 см, а кут між ними $60°$. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда, якщо його менша діагональ дорівнює 26 см.

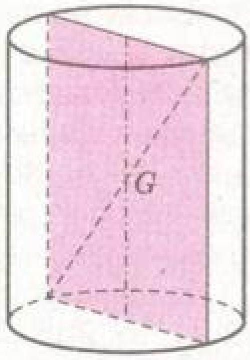
§ 25 ЦИЛІНДР

***Циліндром** називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.*

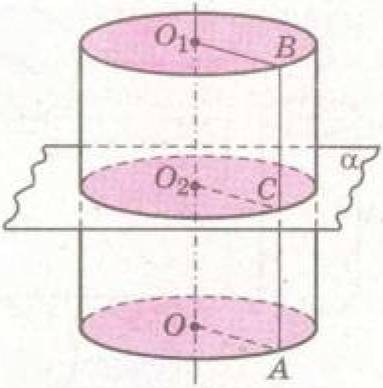
Якщо прямокутник $OABO_1$ обертається навколо осі OO_1 (мал. 185), його сторони OA і O_1B описують рівні круги, які лежать у паралельних площинах. Ці круги називають *основами*, а їхній радіус – *радіусом циліндра*. Сторона AB, паралельна осі циліндра, описує криву поверхню, яку називають *бічною поверхнею* циліндра. Кожний відрізок цієї поверхні,



Мал. 185



Мал. 186



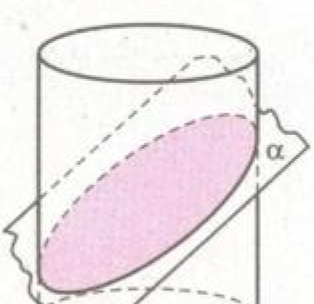
Мал. 187

що дорівнює AB, – *твірна циліндра*. Усі твірні одного циліндра рівні та паралельні одна одній, оскільки кожна з них дорівнює стороні прямокутника, який обертається, і паралельна осі циліндра. Довжина твірної – *висота циліндра*; вона дорівнює відстані між площинами основ.

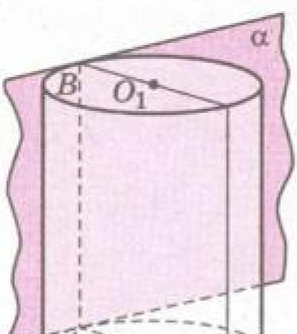
Усі осьові перерізи циліндра – рівні прямокутники (мал. 186). Їхні діагоналі проходять через середину G відрізка, який сполучає центри основ циліндра і ділиться цією точкою навпіл. Тому точка G – центр симетрії циліндра. Площина, яка проходить через точку G перпендикулярно до осі циліндра, – площина його симетрії. Інші площини симетрії циліндра проходять через його вісь.

Кожна січна площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його по кругу, який дорівнює основі (мал. 187). Адже будь-яка точка C твірної AB віддалена від осі OO_1 на відстань $CO_2 = OA$. Площина, яка перетинає всі твірні циліндра, але не перпендикулярна до них, перетинає бічну поверхню циліндра по еліпсу (мал. 188).

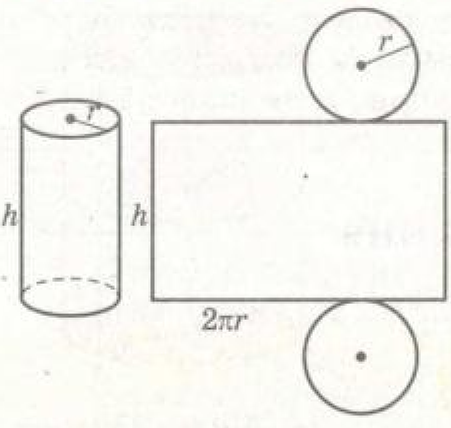
Площина, яка проходить через твірну циліндра і не має з ним інших спільних точок, називається *дотичною площиною* до циліндра. Вона перпендикулярна до осьового перерізу циліндра, проведеного через ту саму твірну (мал. 189).



Мал. 188



Мал. 189



Мал. 190

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і якій-небудь твірній, а потім розгорнути на площині, дістанемо *розгортку циліндра* (мал. 190). Вона складається з прямокутника – розгортки бічної поверхні циліндра – і двох рівних кругів.

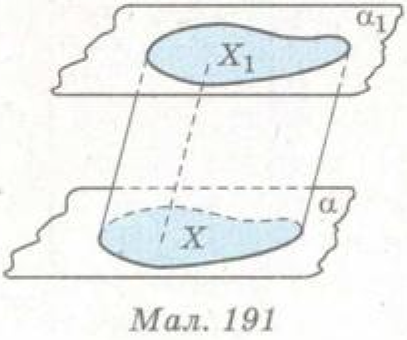
Якщо радіус циліндра r, а висота h, то його бічну поверхню розгортаємо у прямокутник зі сторонами $2\pi r$ і h. Площу цієї розгортки $2\pi rh$ приймають за площу бічної поверхні циліндра. Тому, якщо r і h – радіус основи і висота циліндра, то площа його бічної поверхні $S_б = 2\pi rh$. Більш строге виведення цієї формули наведено на с. 267.

Щоб знайти площу поверхні циліндра $S_ц$, треба до площі його бічної поверхні додати площі основ:

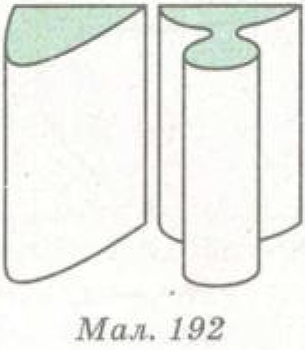
$$S_ц = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

Приклади фізичних тіл, які мають форму циліндра: металева бочка, консервна банка, хокейна шайба, графітний стержень у батарейці. Циліндр двигуна внутрішнього згоряння або поршневого насоса, стовбур шахти, отвір, просвердлений у дошці перпендикулярно до її поверхні, – порожнини циліндричної форми.

π **ЗАУВАЖЕННЯ.** Тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони, у курсах для вищих навчальних закладів називають *прямим круговим циліндром*. Циліндр у широкому розумінні – це тіло, яке складається з двох обмежених плоских областей, які можна сумістити паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають їхні відповідні точки (мал. 191). Під це означення підходять кожна призма і тіла, подібні зображеним на малюнку 192. Якщо твірні такого циліндра перпендикулярні до площини основи, його називають *прямим циліндром*. Якщо його



Мал. 191



Мал. 192

основи – круги, його називають *круговим*. З усіх циліндрів тільки прямий круговий є тілом обертання. Далі розглядатимемо тільки прямі кругові циліндри, називаючи їх просто циліндрами.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке циліндр? Назвіть його елементи.
2. Якою фігурою є осьовий переріз циліндра?
3. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, перпендикулярною (паралельною) до його осі?
4. Якою фігурою може бути переріз циліндра площиною, проведеною під деяким кутом до осі циліндра?
5. Що таке розгортка поверхні циліндра?
6. Як можна визначати площу поверхні циліндра?
7. Що таке «циліндр у широкому розумінні»? Якими бувають такі циліндри?

Виконаємо разом

1. Осьові перерізи двох різних циліндрів – рівні прямокутники зі сторонами 4 м і 6 м. Знайдіть площу поверхні того циліндра, у якого вона більша.

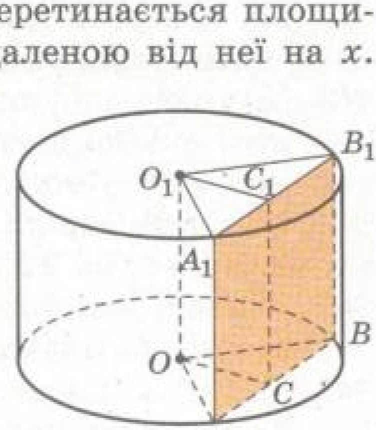
   РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо за формулою $S = 2\pi r(r + h)$ площі поверхонь обох циліндрів.

   1) Якщо $r = 2$ і $h = 6$, то $S = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$ (м^2);
   2) якщо $r = 3$ і $h = 4$, то $S = 2\pi \cdot 3 \cdot 7 = 42\pi$ (м^2).

   ВІДПОВІДЬ. 42π м^2.

2. Циліндр з радіусом 1 і висотою 0,5 перетинається площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою від неї на x. Як залежить площа і периметр перерізу від x?

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай переріз ABB_1A_1 циліндра віддалений від осі OO_1 на $OC = x$ (мал. 193). Тоді $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{1 - x^2}$. Шукана площа перерізу $S = AA_1 \cdot AC \cdot 2 = \sqrt{1 - x^2}$, а периметр $P = 2(AA_1 + AB) = 1 + 4\sqrt{1 - x^2}$.



Мал. 193

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

934. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають циліндричну форму.

935. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, висота якого дорівнює 10 см, а радіус основи – 2 см.

936. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

937. Діагональ осьового перерізу циліндра утворює з площиною основи кут 45°. Як відноситься висота циліндра до радіуса основи?

938. Радіус циліндра r, а висота h. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

939. Скільки існує площин, які розтинають даний циліндр: а) на два рівних циліндри; б) на дві рівні фігури?

А

940. Радіус циліндра r, а діагональ осьового перерізу d. Знайдіть:
а) висоту циліндра;
б) площу діагонального перерізу;
в) площу бічної поверхні;
г) площу поверхні циліндра.

941. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть:
а) висоту циліндра; б) діаметр основи;
в) площу основи; г) площу осьового перерізу;
ґ) площу бічної поверхні циліндра.

942. Площа осьового перерізу циліндра S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра. Чи можна за цими даними однозначно знайти площу поверхні циліндра?

943. Доведіть, що площина, яка проходить через твірну циліндра, але не дотикається до нього, перетинає циліндр по прямокутнику.

944. Площа поверхні та площа бічної поверхні циліндра дорівнює 50 см^2 і 30 см^2. Знайдіть радіус і висоту циліндра.

945. З квадрата, площа якого Q, згорнули бічну поверхню циліндра. Знайдіть площу основи циліндра.

946. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус r, а твірну з центра основи видно під кутом α.

947. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо діаметр його основи d з центра другої основи видно під кутом α.

948. Дано прямокутник з нерівними сторонами. Доведіть, що площі бічних поверхонь циліндрів, утворених обертанням цього прямокутника навколо нерівних сторін, рівні.

949. Як відносяться площі перерізів циліндра площинами, які проходять через його твірну, якщо кут між цими площинами $30°$, а одна з площин проходить через вісь циліндра?

950. Радіус циліндра r, а висота h. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, яка перпендикулярна до основи і відтинає від кола основи дугу $60°$.

951. Висота циліндра дорівнює 16 см, радіус 10 см. Знайдіть площу перерізу циліндра площиною, паралельною осі циліндра, яка віддалена від неї на 60 мм.

952. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює a, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу, градусна міра якої $90°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо утворений переріз – квадрат.

953. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Діагональ утвореного перерізу дорівнює d та утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Б

954. На якій відстані від осі циліндра, паралельно їй, потрібно провести переріз площею 48 см^2, якщо сторони перерізу пропорційні числам 1 і 2, а радіус основи дорівнює 5 см?

955. Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом $90°$. Відрізок, що з'єднує центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його твірна дорівнює 6 см.

956. Скільки квадратних метрів жерсті піде на виготовлення водостічної труби завдовжки 5 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 10 % площі поверхні труби?

957. Чи вистачить 8500 м^2 ізоляційної стрічки для двократного покриття нею кілометра газопроводу діаметром 1420 мм?

958. Висота консервної банки циліндричної форми дорівнює 4 см, а радіус основи – 6 см. Скільки таких банок можна виготовити з 15 000 м^2 жерсті, якщо 10 % матеріалу іде на відходи та шви?

959. Діаметр циліндричного парового котла завдовжки 3,8 м дорівнює 0,8 м. Знайдіть тиск пари на повну поверхню котла, якщо на 1 см^2 пара давить із силою 10 Н.

960. Точки A і B лежать на колах різних основ циліндра. Знайдіть відстань від осі циліндра до прямої AB, якщо радіус основи циліндра дорівнює R, а відрізок $AB = 2R$ і утворює з площиною основи кут $60°$.

961. Площини двох перерізів циліндра AA_1B_1B і AA_1C_1C проходять через твірну AA_1 та їхні площі дорівнюють 10 см^2, а площа перерізу BB_1C_1C дорівнює 16 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

962. Площина перетинає основи циліндра по хордах завдовжки 6 см і 8 см, відстань між якими дорівнює 14 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи дорівнює 5 см і площина: а) не перетинає внутрішню частину осі циліндра; б) перетинає вісь циліндра.

963. Вершини прямокутника лежать на колах основ циліндра, висота якого дорівнює 12 см, а радіус основи 8 см. Знайдіть площу прямокутника, якщо його сторони відносяться як $1 : 2$.

964. $ABCD$ – осьовий переріз циліндра. Його площа дорівнює 240 см^2. Точка M лежить на колі нижньої основи, E і F – середини відрізків MB і MD відповідно. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо $EF = 13$ см.

965. Точка M ділить дугу AB нижньої основи циліндра, міра якої дорівнює $90°$, у відношенні $1 : 2$, рахуючи від точки A. Твірна $AC = 8$ см. Знайдіть відстань від точки B до площини CAM і кут, який пряма BC утворює з цією площиною, якщо радіус основи циліндра дорівнює 2 см.

966. Усі вершини квадрата, сторона якого дорівнює a, лежать на бічній поверхні циліндра, вісь якого перпендикулярна до однієї із сторін квадрата й утворює з його площиною кут α. Знайдіть радіус циліндра.

В

967. $ABCD$ і $MNPK$ – два взаємно перпендикулярні осьові перерізи циліндра, причому діаметри AD і MK належать одній основі. Точка F – середина твірної AB. Знайдіть площу поверхні циліндра, якщо площа осьового перерізу дорівнює 16 см^2 і $FK \perp AC$.

968. Правильний тетраедр і циліндр розміщені так, що мимобіжні ребра тетраедра є діаметрами основ циліндра. Знайдіть бічну поверхню циліндра, якщо ребро тетраедра дорівнює a.

969*. Дві вершини куба лежать на осі циліндра, щість – на колах його основ. Знайдіть радіус і висоту циліндра, якщо ребро куба дорівнює a.

970. До циліндра радіуса r проведено дотичну пряму під кутом α до площини його основи. Знайдіть відстань від центра нижньої основи до цієї прямої, якщо відстань від цього центра до точки дотику дорівнює d.

971. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть із цупкого паперу розгортку циліндра, осьовий переріз якого – квадрат зі стороною 16 см.

Вправи для повторення

972. Основа прямої призми – ромб з гострим кутом α. Більший діагональний переріз призми має площу S. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

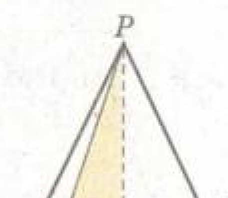
973. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема – 13 см. Обчисліть площу повної поверхні піраміди.

974. Основа піраміди – трикутник з кутами α і β та радіусом описаного кола R. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ.

§ 26 КОНУС І ЗРІЗАНИЙ КОНУС

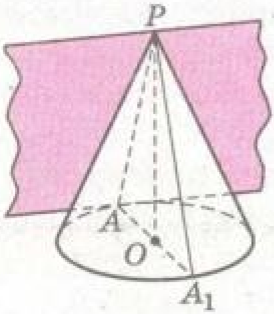
Конусом *називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.*

Якщо прямокутний трикутник OPA обертати навколо катета PO, його гіпотенуза PA опише *бічну поверхню*, а катет OA – круг – *основу конуса* (мал. 194). Радіус цього круга називають *радіусом конуса*, точку P, відрізок PO, пряму PO – відповідно *вершиною*, *висотою* і *віссю конуса*. Усі осьові перерізи конуса – рівні рівнобедрені трикутники. Кожна площина, яка проходить через вісь конуса, є площиною його симетрії. Центра симетрії конус не має.



Мал. 194

Відрізок, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола його основи, – *твірна конуса*. Усі твірні конуса рівні, оскільки кожна з них дорівнює гіпотенузі трикутника, обертанням якого утворено конус. Площина, що проходить через твірну конуса і не має з ним інших спільних точок, називається *дотичною площи-*



Мал. 195

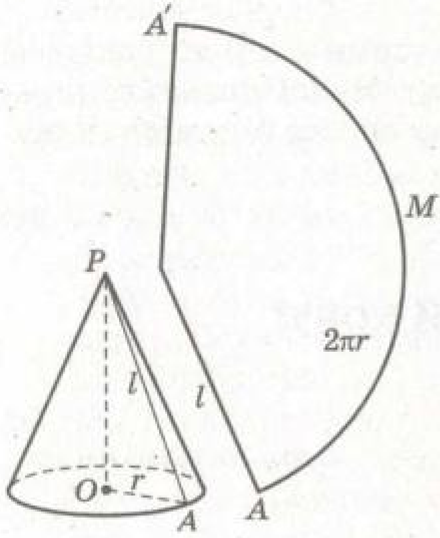
ною до конуса. Вона перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через ту саму твірну (мал. 195).

Якщо бічну поверхню конуса розрізати по якій-небудь твірній і розгорнути на площині, дістанемо її розгортку. Розгортка бічної поверхні конуса радіуса r із твірною l є сектором радіуса l, довжина дуги якого $2\pi r$ (мал. 196). Площу такої розгортки приймають за площу бічної поверхні конуса. Вона у стільки разів менша за площу круга радіуса l, у скільки разів $2\pi r$ менше ніж $2\pi l$. Тому

$$S_{\text{б к}} : \pi l^2 = 2\pi r : 2\pi l,$$

звідки

$$S_{\text{б к}} = \pi r l.$$



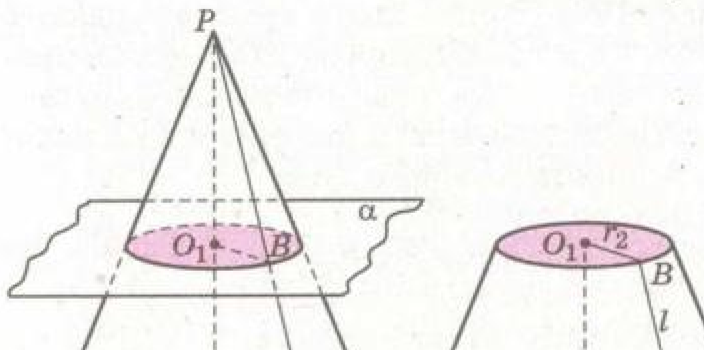
Мал. 196

Більш строге виведення цієї формули буде дано на с. 267.

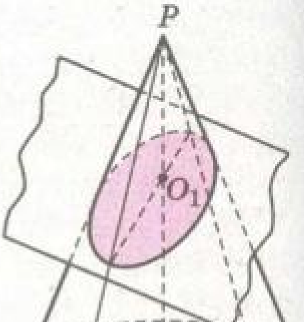
Щоб знайти площу поверхні конуса $S_{\text{к}}$, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи:

$$S_{\text{к}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$

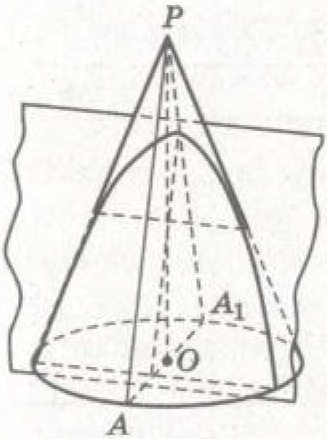
Січна площина, паралельна основі, перетинає конус по кругу. При цьому дістанемо два тіла обертання: менший конус, гомотетичний даному, і зрізаний конус (мал. 197). Зрізаний конус можна розглядати і як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції на-



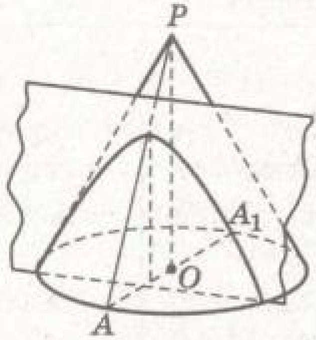
Мал. 197



Мал. 198



Мал. 199



Мал. 200

вколо меншої її бічної сторони. Зрізаний конус обмежений двома кругами – його *основами* – і *бічною поверхнею*. Відстань між основами – *висота* зрізаного конуса. Відрізок, який сполучає найближчі точки кіл основ, – *твірна*. Довжину цього відрізка також називають твірною зрізаного конуса.

Площу бічної поверхні зрізаного конуса обчислюють за формулою:

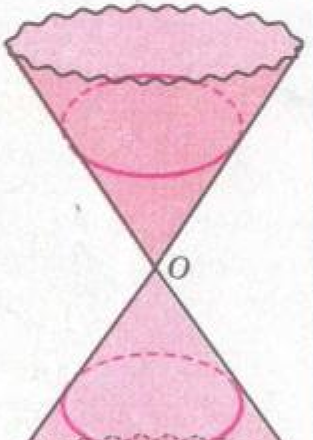
$$S = \pi l(r_1 + r_2),$$

де r_1, r_2, l – радіуси його основ і твірна (див. задачу 2 с. 195).

Якщо січна площина не паралельна основі конуса, але перетинає всі його твірні, вона перетинає конічну поверхню по еліпсу (мал. 198). Якщо січна площина паралельна тільки одній з твірних конуса, вона перетинає конічну поверхню по частині параболи (мал. 199). Якщо січна площина паралельна двом твірним, вона перетинає конічну поверхню по частині гіперболи (мал. 200).

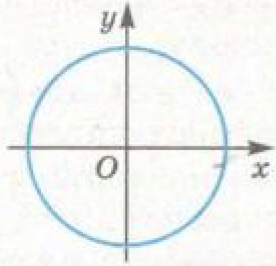
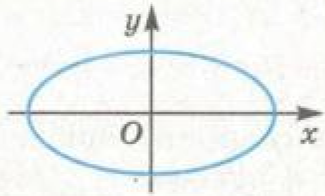
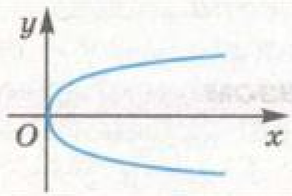
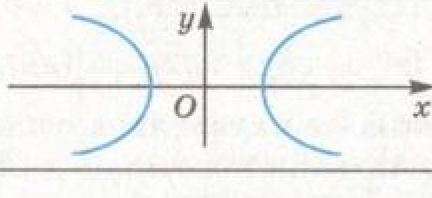
У теоретичних курсах конусом часто називають поверхню, утворену обертанням однієї з двох прямих, що перетинаються, навколо другої (мал. 201). Саме такі «конуси» мають на увазі, говорячи про конічні перерізи.

Якщо січна площина проходить через вершину такого «конуса», то вона перетинає його по двох пересічних прямих. Якщо ж вона не проходить через вершину конуса, то перетинає його поверхню по колу, еліпсу, параболі або гіперболі. Разом їх називають *кривими другого порядку*, оскільки в декартовій системі координат на площині їм відповідають рівняння другого степеня.



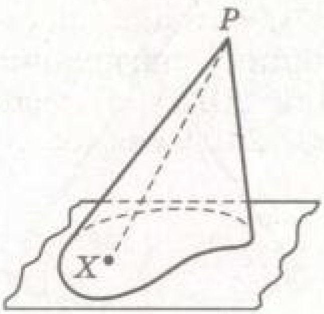
Мал. 201

Криві другого порядку

Фігура	Вигляд	Рівняння
Коло		$x^2 + y^2 = r^2$
Еліпс		$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Парабола		$y^2 = 2px$
Гіпербола		$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Форму конусів мають насипані на горизонтальній поверхні купи піску, зерна, вугілля, породи, щебеню тощо. Кожному такому матеріалу відповідає *кут природного укосу* – кут нахилу твірної до площини основи конуса. Для піску він дорівнює приблизно 30°, для вугілля – 42°, для породи – 46°.

ЗАУВАЖЕННЯ. У курсах вищої геометрії *конусом* (у широкому розумінні) називають тіло, утворене всіма відрізками, які сполучають дану точку – вершину конуса, з точками деякої обмеженої плоскої фігури – основи конуса (мал. 202).



Мал. 202

При цьому конус, в основі якого круг, називається *круговим*. А якщо пряма, яка сполучає вершину такого конуса з центром його основи, перпендикулярна до основи, його називають *прямим круговим конусом*. З усіх конусів тільки прямий круговий є тілом обертання. Вище йшлося саме про такі конуси. І далі розглядатимемо тільки прямі кругові конуси, називаючи їх просто конусами.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

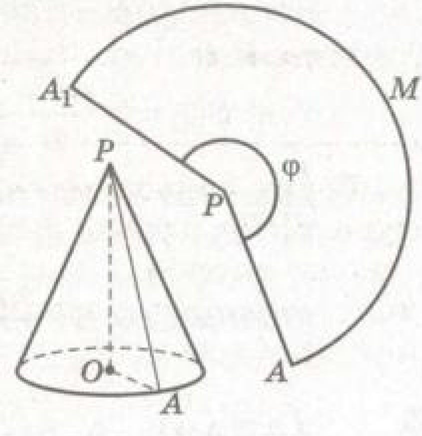
1. Сформулюйте означення конуса.
2. Назвіть елементи конуса.
3. Якою фігурою є осьовий переріз конуса? А переріз конуса площиною, перпендикулярною до його осі?
4. Як можна обчислити площу бічної поверхні конуса? А площу поверхні конуса?
5. Сформулюйте означення зрізаного конуса та його елементів.
6. Як обчислити площу бічної поверхні зрізаного конуса?
7. Що ви знаєте про конічні перерізи?
8. Що таке «конус у широкому розумінні»?

Виконаємо разом

1. Висота конуса 4, твірна 5. Знайдіть кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні цього конуса.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Радіус основи конуса $OA = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (мал. 203). Тому довжина кола його основи $C = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Така сама довжина дуги сектора AMA_1. Ця довжина у стільки разів менша за довжину кола радіуса $PA = 5$, у скільки разів шуканий кут φ сектора менший від 360°. Отже, $\varphi : 360° = 6\pi : 10\pi$, звідки $\varphi = 216°$.

ВІДПОВІДЬ. 216°.



Мал. 203

2. Виведіть формулу для обчислення площі бічної поверхні зрізаного конуса.

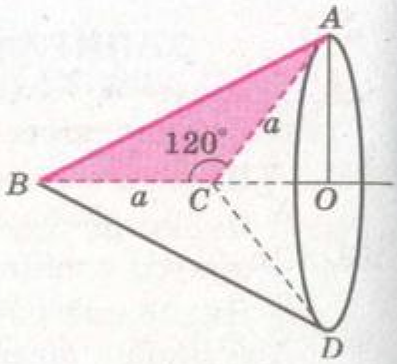
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо радіуси основ зрізаного конуса $OA = r_1$, $O_1B = r_2$, а твірна $AB = l$ (див. мал. 197), то площа його бічної поверхні дорівнює різниці площ бічних поверхонь конусів з твірними PA і PB. Позначимо: $PB = x$, тоді $PA = x + l$. З подібності трикутників PBO_1 і PAO маємо:

$$\frac{x}{r_2} = \frac{x+l}{r_1}, \quad x = \frac{r_2 l}{r_1 - r_2}.$$

Отже,

$$S = \pi r_1(x + l) - \pi r_2 x = \pi l(r_1 + r_2).$$

3. Обчисліть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника з бічною стороною a та кутом при вершині 120° навколо прямої, що містить бічну сторону трикутника.



Мал. 204

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $\triangle ABC$, у якого $AC = BC = a$, $\angle C = 120°$, обертається навколо прямої BC (мал. 204). Утворена фігура є конусом радіуса OA і висотою BO, з якого вирізали конус радіуса OA і висотою CO. Тоді площа утвореної фігури дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів, тобто $S = S_{BO} + S_{CO}$, де $S_{BO} = \pi \cdot AO \cdot AB$ і $S_{CO} = \pi \cdot AO \cdot AC$.

З $\triangle ABC$ за теоремою косинусів знайдемо AB:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 120°,$$

$$AB^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2,$$

$$AB = a\sqrt{3}.$$

Якщо $\angle ACB = 120°$, то $\angle ABC = 30°$ і $AO = \frac{1}{2} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $S_{BO} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3\pi a^2}{2}$ і $S_{CO} = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Отже, $S = \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

ВІДПОВІДЬ. $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

975. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму конуса або зрізаного конуса.

976. Висота конуса 8 м, радіус 6 м. Знайдіть твірну.

977. Осьовий переріз конуса – рівносторонній трикутник зі стороною 10 см. Знайдіть радіус і висоту конуса.

978. Чи може осьовим перерізом зрізаного конуса бути не рівнобічна трапеція?

979. Радіуси основ зрізаного конуса 4 см і 6 см, а висота 5 см. Знайдіть площу його осьового перерізу.

А

980. Висота конуса дорівнює радіусу основи. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.

981. Твірна конуса дорівнює 5 см, висота 4 см. Знайдіть площу його бічної поверхні.

982. Знайдіть площу бічної поверхні конуса радіуса R, осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник.

983. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть:

а) висоту конуса; б) площу осьового перерізу;
в) радіус основи; г) площу основи конуса;
ґ) периметр осьового перерізу.

984. Площа основи конуса 9 см^2, а площа його поверхні 27 см^2. Під яким кутом нахилена твірна до площини основи?

985. Висота конуса 6 см, радіус основи 4 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, що стягує дугу 60°.

986. Через вершину конуса проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 90° і нахилена до площини основи конуса під кутом 60°. Знайдіть кут при вершині перерізу.

987. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо розгорткою його бічної поверхні є круговий сектор з дугою, яка дорівнює:

а) 90°; б) 180°; в) 270°.

988. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібну палатку висотою 3 м і діаметром 4 м?

989. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 дм і 6 дм, а твірна 5 дм. Знайдіть:

а) висоту зрізаного конуса;
б) площу його осьового перерізу;
в) кут нахилу твірної до площини основи.

990. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, а твірна утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу його бічної поверхні.

991. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного при обертанні прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см навколо:

а) меншого катета; б) більшого катета; в) гіпотенузи.

992. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a навколо прямої, проведеної через вершину прямого кута, паралельно гіпотенузі.

993. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням прямокутної трапеції з основами 2 см і 6 см та висотою 3 см навколо:
а) меншої бічної сторони; б) більшої основи;
в) меншої основи.

Б

994. Доведіть, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.

995. Чи правильно, що з усіх перерізів конуса площинами, які проходять через вершину, найбільшу площу має осьовий переріз?

996. Твірні двох конусів нахилені до площин основ під рівними кутами. Доведіть, що висоти цих конусів відносяться як твірні. А як відносяться площі їхніх бічних поверхонь?

997. Доведіть, що площі основи конуса і його перерізу площиною, паралельною основі, відносяться як квадрати відстаней цих площин від вершини конуса.

998. Висота конуса h. На якій відстані від вершини треба провести площину паралельно основі, щоб площа перерізу була вдвічі менша від площі основи?

999. Різниця між твірною і висотою конуса дорівнює a, а кут між ними α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

1000. Радіус основи конуса 2 см, а площа бічної поверхні дорівнює сумі площ основи й осьового перерізу. Знайдіть висоту конуса.

1001. Знайдіть площу перерізу конуса площиною, проведеною через вершину конуса на відстані 12 см від його центра основи, якщо висота конуса дорівнює 20 см, а радіус основи 25 см.

1002. Через дві твірні конуса, кут між якими α, проведено площину, що утворює з площиною основи кут β. Знайдіть висоту конуса, якщо площа перерізу дорівнює S.

1003. Знайдіть кут між твірною і висотою конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює площі перерізу, проведеного через вершину конуса під кутом 60° до його площини основи.

1004. Знайдіть площу перерізу конуса площиною, яка проходить через вершину конуса під кутом α до його основи, якщо поверхня конуса дорівнює Q, а твірна утворює з площиною основи кут φ.

1005. Дві взаємно перпендикулярні твірні ділять площу бічної поверхні конуса на частини, площі яких пропорційні числам 1 і 2. Знайдіть висоту конуса, якщо радіус його основи дорівнює r.

1006. Круг поділили на два сектори так, що площа одного з них у 3 рази більша за площу другого. З кожного з цих секторів зробили бічні поверхні конусів. Знайдіть відношення висот утворених конусів.

1007. Знайдіть площу поверхні зрізаного конуса, якщо його твірна, яка дорівнює l, нахилена до площини основи під кутом α, а площі основ відносяться як $1 : 4$.

1008. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна l утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

1009. Площі основ зрізаного конуса та його бічної поверхні пропорційні числам a, b, c. Знайдіть кут між твірною конуса та площиною його більшої основи.

1010. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням ромба зі стороною a і кутом $60°$ навколо прямої, що містить його сторону.

1011. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням трикутника зі сторонами 7 см і 8 см та кутом між ними $120°$ навколо прямої, що містить:

а) найменшу сторону трикутника;

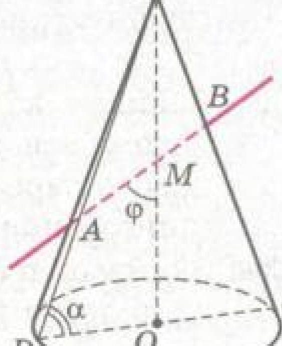
б) найбільшу сторону трикутника.

1012. Трикутник зі сторонами 6 см і 10 см та кутом між ними $120°$ обертається навколо висоти, проведеної з вершини найменшого кута. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

В

1013. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням тупокутного трикутника з гострими кутами α і β та найменшою висотою h навколо сторони, протилежної куту α.

1014*. Через середину висоти конуса проведено пряму, яка утворює з висотою кут φ і перетинає бічну поверхню конуса в точках A і B. Знайдіть відстань AB, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α (мал. 205).



Мал. 205

1015*. Через вершину конуса проведено площину, яка ділить його бічну поверхню на дві частини. Якщо ці частини розгорнути на площину, то дістанемо два сектори з кутами α і β. Знайдіть кут при вершині у проведеному перерізі.

1016. ***ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ.*** Зробіть із цупкого паперу розгортки конуса і зрізаного конуса.

Вправи для повторення

1017. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра, якщо площа основи відноситься до площі осьового перерізу як $\pi : 4$.

1018. Відрізок, який з'єднує точки кола верхньої та нижньої основ циліндра, дорівнює a й утворює з площиною основи кут α, а його проекцію на площину основи видно з центра цієї основи під кутом β. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

1019. Намалюйте розгортку правильного октаедра, ребро якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу його поверхні.

§27 КУЛЯ ТА СФЕРА

Поняття сфери і кулі введено раніше (див. с. 18 і 124). Дамо їм інші означення.

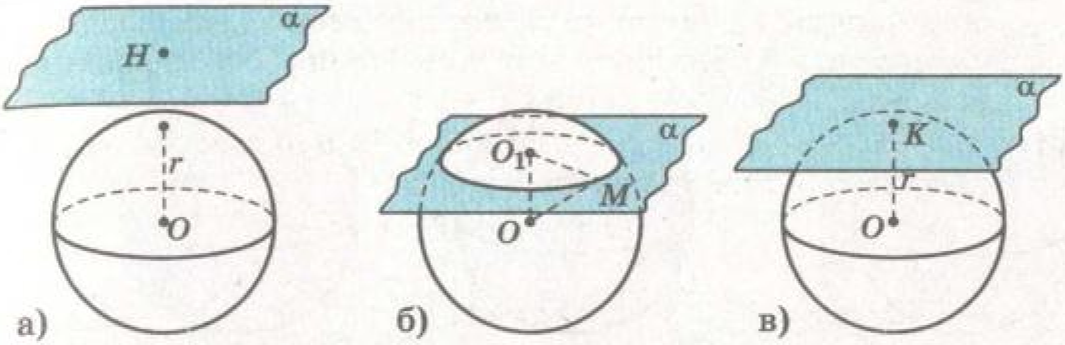
Кулею *називається тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра.* ***Сферою*** *називається фігура, утворена обертанням кола навколо його діаметра.*

Будь-який відрізок, що сполучає центр кулі з якою-небудь точкою його поверхні, називають *радіусом кулі*. Довжину цього відрізка також називають радіусом кулі.

Відрізок, який сполучає дві точки поверхні кулі та проходить через центр, – *діаметр кулі*, його кінці – *діаметрально протилежні точки* кулі.

Площина, яка проходить через діаметр кулі, – *діаметральна площина*. Вона є площиною симетрії кулі та розбиває її на дві рівні півкулі. Переріз кулі діаметральною площиною називають *великим кругом*. Одне з кіл великого круга називають *екватором* кулі, а точки перетину поверхні кулі з віссю, перпендикулярною до площини екватора, – *полюсами* кулі.

Як можуть розміщуватися у просторі куля та площина?



Мал. 206

Нехай відстань від центра кулі до площини дорівнює d, а радіус кулі r. Можливі три випадки (мал. 206):

1. Якщо $d > r$, площина і куля не мають спільних точок.
2. Якщо $d < r$, площина перетинає кулю по кругу радіуса $O_1M = \sqrt{r^2 - d^2}$.

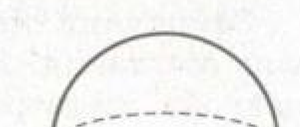
З цієї формули випливає, що переріз кулі тим більший, чим менше d, і що площини, рівновіддалені від центра, перетинають кулю по рівних кругах.

3. Якщо $d = r$, площина і куля мають тільки одну спільну точку. У цьому випадку говорять, що площина *дотикається до кулі*, а їхню спільну точку називають *точкою дотику*.

! **Теорема 25.** ***Дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано кулю з центром у точці O і площину α, яка дотикається до цієї кулі у точці A (мал. 207). Доведемо, що $OA \perp \alpha$.

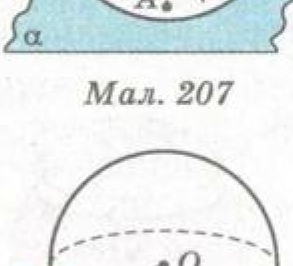
Припустимо, що OA – похила до площини α. Тоді повинен існувати і перпендикуляр OA_1 до цієї площини. Оскільки за припущенням $A_1 \in \alpha$ і $OA_1 < OA$, то точка A_1 спільна для площини і кулі. Отже, A не єдина їхня спільна точка. У такому випадку площина α не дотична до кулі, що суперечить умові теореми. Отже, радіус кулі OA не може бути похилою до площини α, тобто $OA \perp \alpha$.



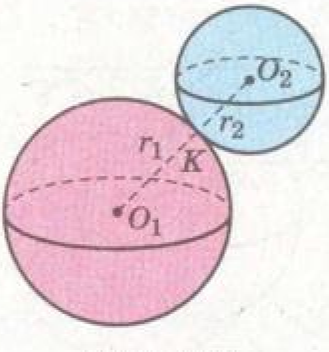
Мал. 207

Теорему доведено.

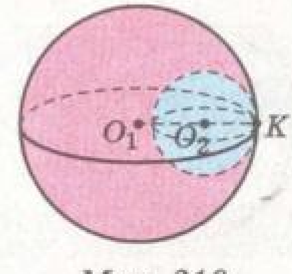
Пряма, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називається *дотичною до кулі* (і до її сфери). Вона перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику. Доведіть це за малюнком 208.



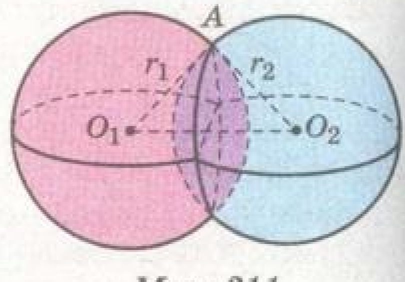
Мал. 208



Мал. 209



Мал. 210



Мал. 211

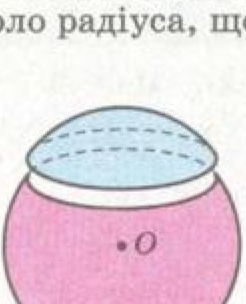
Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони *дотикаються одна до одної*. Дотик сфер може бути *зовнішнім* (мал. 209) і *внутрішнім* (мал. 210). У першому випадку відстань між їхніми центрами дорівнює сумі радіусів ($O_1O_2 = r_1 + r_2$), у другому – різниці радіусів ($O_1O_2 = r_1 - r_2$). Якщо $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, дані сфери перетинаються по колу (мал. 211).

Частина кулі, яку відтинає площина, називається *кульовим сегментом* (мал. 212). Його поверхня складається зі *сферичного сегмента* і круга – основи кульового сегмента. Відстань від основи кульового сегмента до паралельної їй площини, дотичної до нього, називають його *висотою*.

Частина кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами, називається *кульовим шаром* (мал. 213). Поверхня кульового шару називається *кульовим поясом*. Перпендикуляр, проведений з точки однієї основи до площини другої, називають *висотою* кульового шару (кульового поясу).

Сферичний сегмент і кульовий пояс можна розглядати і як тіла обертання. Якщо при обертанні півкола *CABD* (мал. 214) навколо діаметра *CD* утворюється сфера, то при обертанні дуги *AC* цього півкола навколо діаметра *CD* утворюється сегментна поверхня, а при обертанні дуги *AB* – кульовий пояс.

Тіло, утворене обертанням опуклого кругового сектора навколо радіуса, що обмежує його, називається *кульовим секто-*

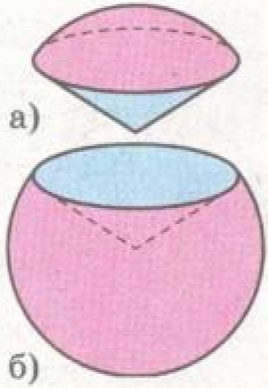


Мал. 212

Мал. 213

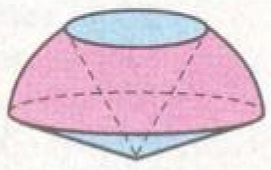
Мал. 214

ром. Поверхня кульового сектора складається зі сферичного сегмента і бічної поверхні конуса. На малюнку 215 зображено два кульових сектори: опуклий і не опуклий.



Мал. 215

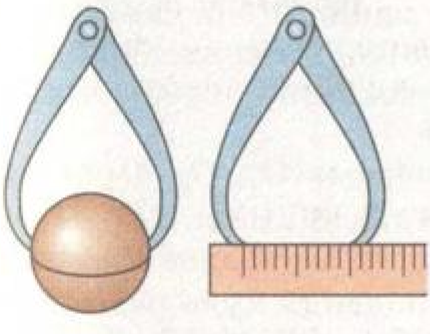
Тіло, утворене обертанням кругового сектора навколо прямої, що проходить через центр кола (мал. 216), також називають кульовим сектором. Його поверхня складається з поверхні кульового поясу і бічних поверхонь двох конусів.



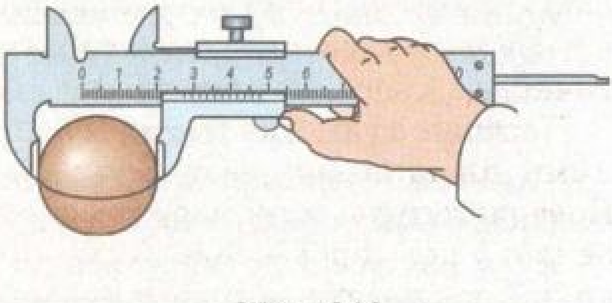
Мал. 216

Приклади матеріальних куль: кульки підшипника, спортивні ядра, дробини, цукерки-драже, деякі окатиші, які одержують з руди на збагачувальній фабриці, тощо.

Вимірюють діаметри куль кронциркулем (мал. 217) або штангенциркулем (мал. 218), а якщо потрібна більша точність – мікрометром.



Мал. 217



Мал. 218

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

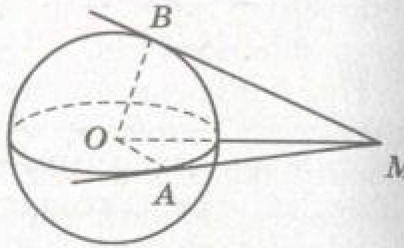
1. Що таке куля? Що таке сфера? Назвіть їхні елементи.
2. Що таке діаметральна площина кулі? А екватор; полюс?
3. Якою фігурою є переріз кулі площиною?
4. Яку площину називають дотичною до кулі? Які її властивості?
5. Яку пряму називають дотичною до кулі? Які її властивості?
6. За якої умови одна сфера дотикається до другої?
7. Що таке кульовий сегмент; сегментна поверхня; основа і висота кульового сегмента?

8. Що таке кульовий шар; кульовий пояс; основа і висота кульового поясу?

9. Яку фігуру називають кульовим сектором?

Виконаємо разом

1. З однієї точки до кулі проведено дві дотичні прямі. Доведіть, що відстані від даної точки до точок дотику рівні.



Мал. 219

ДОВЕДЕННЯ. Нехай MA і MB – відрізки дотичних, проведених до кулі з точки M, а O – центр даної кулі (мал. 219). Трикутники AMO і BMO рівні за спільною гіпотенузою MO і катетами OA, OB. Отже, $MA = MB$. А це й треба було довести.

2. Три кулі радіуса r дотикаються до однієї й тієї самої площини і кожна з них дотикається до двох інших. Знайдіть радіус кулі, що дотикається до площини і трьох даних куль.

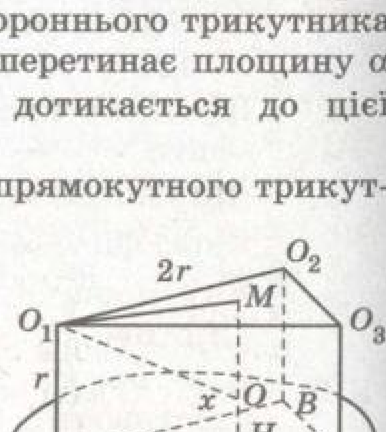
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай кулі з центрами O_1, O_2, O_3 дотикаються до площини α в точках A, B, C (мал. 220). Тоді $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r$ і $O_1A = O_2B = O_3C = r$. Якщо четверта куля радіуса x дотикається до трьох даних куль радіуса r, то її центр O розміщений так, що $OO_1 = OO_2 = OO_3 = x + r$. Точка O рівновіддалена від O_1, O_2, O_3. Отже, пряма, яка перпендикулярна до площини α і проходить через точку O, перетинає площину рівностороннього трикутника $O_1O_2O_3$ в його центрі M. Пряма MO перетинає площину α в точці H, у якій четверта куля дотикається до цієї площини.

Як бачимо, $OH = x$, $OM = r - x$. З прямокутного трикутника OMO_1 маємо:

$$OO_1^2 = OM^2 + MO_1^2,$$

$$(r + x)^2 = (r - x)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

звідки $x = \dfrac{r}{3}$.



Мал. 220

ВІДПОВІДЬ. $\dfrac{r}{3}$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконаємо усно

1020. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму кулі або сфери.
1021. Знайдіть площу великого круга кулі та довжину екватора, якщо її радіус 2 м.
1022. Діаметр кулі 38 дм, а площина віддалена від її центра на 20 дм. Чи має ця площина з кулею спільні точки?
1023. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 12 см. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо з центра кулі його видно під кутом 60°.
1024. Дві сфери радіусів r_1 і r_2 мають єдину спільну точку. Знайдіть відстань між їхніми центрами.
1025. Складіть рівняння сфери радіуса 5 із центром у точці $A(1; 2; 3)$.
1026. У кулі радіуса 10 м проведено січну площину на відстані 6 м від центра. Чому дорівнює висота утвореного кульового сегмента?
1027. Чому дорівнює висота кульового шару, якщо його основи знаходяться на відстані 2 см і 5 см від центра кулі?

А

1028. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань від центра кулі до відрізка AB завдовжки 80 см.
1029. Точка A лежить на поверхні кулі радіуса 13 см і віддалена від кінців діаметра MN на відстані, пропорційній числам 5 і 12. Знайдіть ці відстані.
1030. Кулю радіуса 10 см перетнули площиною, віддаленою від центра на 6 см. Знайдіть площу основи утвореного кульового сегмента.
1031. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну до нього площину. Як відноситься площа основи утвореного кульового сегмента до площі великого круга?
1032. Два кола радіусів 30 см і 40 см лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть висоту утвореного кульового поясу.
1033. Знайдіть радіус кулі, якщо площі основ кульового шару заввишки 15 см дорівнюють 64π см^2 і 19π см^2.
1034. Кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює 60°. Знайдіть відношення висоти кульового сегмента до висоти відповідного конуса.

1035. На поверхні кулі радіуса r дано дві точки, відстань між якими дорівнює радіусу кулі. Знайдіть найкоротшу відстань між цими точками по поверхні кулі.

1036. Радіус кулі дорівнює 2. Січна площина віддалена від її центра на x. Як залежить площа перерізу S від x?

1037. Радіус кулі дорівнює r. Через кінець радіуса проведено площину під кутом α до нього. Знайдіть площу перерізу.

1038. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 10 см лежать на поверхні кулі радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

1039. На сфері радіуса 26 см дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через ці точки.

1040. Прямі, яким належать сторони трикутника, дотикаються до кулі радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника, якщо його сторони дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.

1041. Прямі, яким належать сторони ромба з кутом 150°, дотикаються до сфери діаметра 20 см. Знайдіть периметр і площу ромба, якщо відстань від центра сфери до площини ромба дорівнює 8 см.

Б

1042. Куля радіуса r дотикається до граней двогранного кута. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра кута, якщо цей кут дорівнює:

а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) α.

1043. З точки M, яка віддалена від центра кулі радіуса 2 см на 6 см, проведені дотичні MA і MB (A, B – точки дотику). Знайдіть відстань AB, якщо площини MOA і MOB перпендикулярні.

1044. Скільки існує сфер радіуса 2, які дотикаються до координатних площин? Напишіть рівняння однієї з них.

1045. Знайдіть геометричне місце центрів сфер радіуса r:

а) які дотикаються до даної площини;

б) які проходять через дану точку.

1046. Знайдіть геометричне місце центрів сфер, які дотикаються:

а) до даної площини у даній на ній точці;

б) до даної прямої у даній точці.

1047. Радіус Землі дорівнює 6400 км. На яку висоту над горизонтом слід піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

1048. Радіус Землі 6,4 тис. кілометрів. Який шлях проходять за добу внаслідок обертання Землі міста Одеса, Львів і Київ, широти яких 46°29′, 49°49′ і 50°27′?

1049. *ЗАДАЧА З НЕСПОДІВАНОЮ ВІДПОВІДДЮ.* Уявимо, що дві кулі – одна велика, як Земля, а друга, як футбольний м'яч, – по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний обруч подовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль (рівномірно) на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою: у більшої чи меншої кулі?

1050. Сфера проходить через точки $A(2; 0; 1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(1; 4; 0)$, $D(1; 2; 2)$. Знайдіть її радіус і координати центра.

1051. Як розміщені куля радіуса a і площина рівностороннього трикутника зі стороною $3a$, якщо всі вершини трикутника віддалені від центра на $2a$?

1052. Точки M і N ділять діаметр AB кулі на частини, пропорційні числам 1, 2 і 3. Через точки M і N під кутом α до прямої AB проведені паралельні площини. Знайдіть відношення площ утворених перерізів.

1053. Куля радіуса 10 см дотикається до однієї грані двогранного кута мірою 120° і перетинає другу грань по кругу, площа якого дорівнює 36π см^2. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра двогранного кута.

1054. Два взаємно перпендикулярні перерізи кулі мають спільну хорду завдовжки 16 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площі цих перерізів дорівнюють 100π см^2 і 144π см^2.

1055. З точки поверхні кулі радіуса $2\sqrt{3}$ см проведено три рівні хорди під кутом α одна до одної. Знайдіть довжини цих хорд.

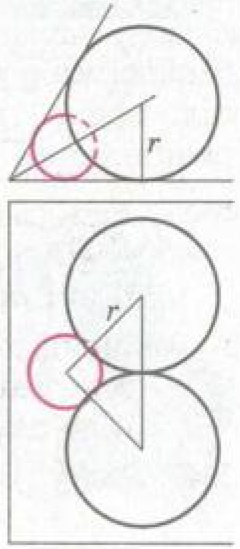
В

1056*. Як побудувати сферу, яка проходить через три дані точки і дотикається до даної площини?

1057. Знайдіть геометричне місце точок, з яких можна провести до даної кулі радіуса r три дотичні, що утворюють прямий тригранний кут.

1058. Знайдіть геометричне місце центрів перерізів кулі площинами, які проходять через дану пряму.

1059*. У двогранний кут, що дорівнює 60°, вписано дві сфери радіуса r, що дотикаються одна до одної. Знайдіть радіус сфери, що дотикається до двох граней двогранного кута й обох сфер (мал. 221).



Мал. 221

1060*. Чотири сфери рівних радіусів r розміщено так, що кожна з них дотикається зовні до трьох інших. Знайдіть радіус сфери, яка внутрішнім чином дотикається до всіх чотирьох сфер.

1061*. Шість сфер радіуса r, центри яких є вершинами правильного шестикутника зі стороною $2r$, дотикаються внутрішньо до сфери радіуса $3r$. Знайдіть радіус сфери, що дотикається до всіх семи сфер.

1062*. На прямій l розміщені центри трьох куль радіусів 1, 2 і 5, причому куля радіуса 2 дотикається до двох інших зовнішнім чином. Пряма p дотикається до всіх трьох куль. Знайдіть кут і відстань між прямими l і p.

Вправи для повторення

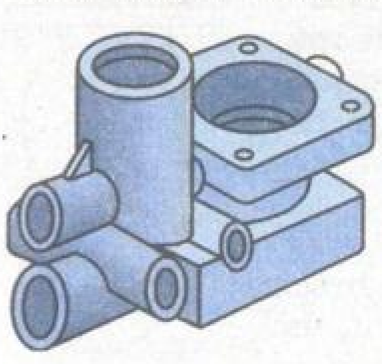
1063. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см навколо прямої, що проходить через вершину кута, протилежного до сторони завдовжки 14 см, паралельно цій стороні.

1064. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, якщо його бічна поверхня дорівнює 80π см^2, а твірна і висота відповідно дорівнюють 10 см і 8 см.

1065. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої апофема l утворює з висотою кут α.

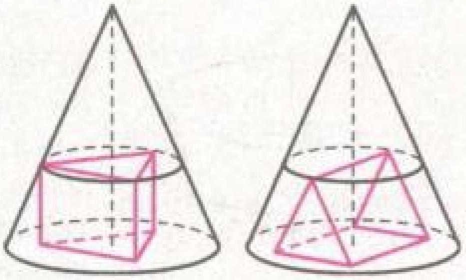
§ 28 КОМБІНАЦІЇ ТІЛ

Досі ми розглядали властивості найпростіших геометричних тіл: призм, пірамід, циліндрів, конусів, куль. Але багатьом спеціалістам часто доводиться мати справу зі складнішими тілами, які є різними *комбінаціями* (об'єднаннями) названих тіл. Наприклад, на малюнку 176 зображено тіло, яке складається зі зрізаного конуса і циліндра, на малюнках 210, 211 – інші комбінації тіл. А ливарникам, формувальникам, фрезерувальникам, електрозварникам, токарям, слюсарям та іншим робітникам доводиться створювати деталі й складніших конфігурацій (мал. 222).



Мал. 222

З різноманітних комбінацій геометричних тіл особливої уваги заслуговують *вписані й описані тіла*. Уточнимо ці поняття. Куля називається *вписаною у многогранник*, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника. Многогранник називається *вписаним у сферу*, якщо всі його вершини лежать на сфері.



Мал. 223

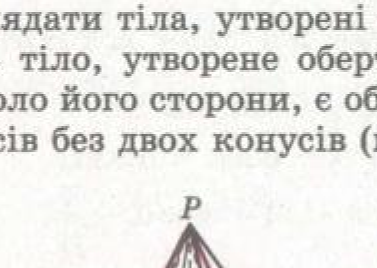
Аналогічні означення можна сформулювати і для інших фігур, вписаних одна в одну. Але слід мати на увазі, що такі загальні означення не гарантують однозначного розміщення вписаних фігур. Наприклад, правильну трикутну призму в конус можна вписати так, як показано на малюнку 223, і ще кількома способами.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо вписане тіло малюється іншими кольорами, то його видимі лінії можна зображати суцільно.

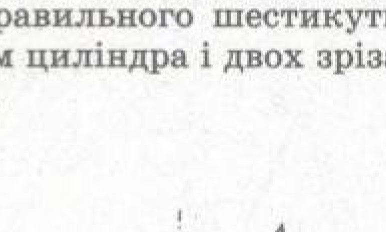
Для однозначного завдання комбінацій розглядуваних тіл слід уточнити, як саме вписано одне з них у друге. Але для пар призма–циліндр і піраміда–конус прийнято домовленість, яку виражають такими означеннями.

Призма називається *вписаною у циліндр*, якщо основи призми вписано в кола основ циліндра. Піраміда називається *вписаною в конус*, якщо їхні вершини збігаються, а основу піраміди вписано в коло основи конуса. Якщо одне тіло вписане в інше, друге тіло називають описаним навколо першого. На малюнку 224 зображено чотирикутні піраміди – вписана в конус і описана навколо конуса.

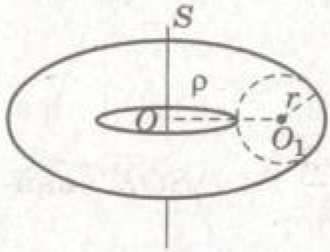
Як комбінації циліндрів, конусів і зрізаних конусів можна розглядати тіла, утворені обертанням многокутників. Наприклад, тіло, утворене обертанням правильного шестикутника навколо його сторони, є об'єднанням циліндра і двох зрізаних конусів без двох конусів (мал. 225).



Мал. 224



Мал. 225



Мал. 226

Фігура, утворена обертанням круга навколо осі, яка лежить у його площині, але не перетинає круг, називається *тором* (мал. 226). Форму тора мають надута камера автомобільної шини, бублик, спортивний обруч. Щоб задати тор, достатньо назвати радіус r круга, що обертається, і відстань ρ від центра цього круга до осі обертання.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

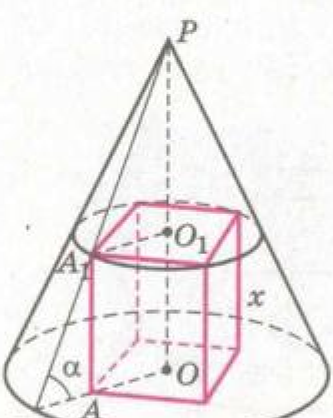
1. Яка куля називається вписаною у многогранник?
2. Який многогранник називається вписаним у кулю?
3. Дайте означення призми, вписаної у циліндр.
4. Дайте означення піраміди, вписаної у конус.
5. Яка фігура називається тором?

Виконаємо разом

1. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть довжину ребра куба, вписаного в конус так, що чотири його вершини лежать на основі, а чотири – на бічній поверхні конуса.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай PM – твірна конуса, яка проходить через вершину A_1 вписаного у конус куба (мал. 227).

Вершина A куба лежить на радіусі OM. За умовою задачі $PM = l$, $\angle PMO = \alpha$. Якщо ребро куба дорівнює x, то $OA = \frac{x}{\sqrt{2}}$.



Мал. 227

З прямокутного $\triangle POM$ маємо:

$$OM = PM \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha,$$

$$MA = MO - OA = l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\frac{A_1A}{MA} = \operatorname{tg}\alpha$, то $\frac{x}{l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \operatorname{tg}\alpha$,

звідки $x = \frac{\sqrt{2}l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.

ВІДПОВІДЬ. $\frac{\sqrt{2}l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.

2. У кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду. Знайдіть висоту піраміди, якщо двогранний кут при ребрі основи дорівнює α.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай сторона основи даної в задачі піраміди (мал. 228) дорівнює a. Тоді $OK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ і з $\triangle SOK$ знайдемо SO: $SO = OK\operatorname{tg}\alpha$, тобто $SO = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

Виразимо a через R.

З $\triangle O_1OA$ ($\angle O = 90°$)

$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Якщо $SO_1 < SO$, то $OO_1 = SO - R = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha - R$.

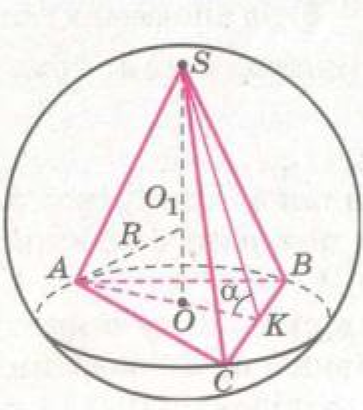
У загальному випадку $AO = |SO - R|$.

За теоремою Піфагора $AO_1^{\,2} = AO^2 + OO_1^{\,2}$, тобто $R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha - R\right)^2$. Спростивши це рівняння, отримаємо: $\frac{\sqrt{3}}{3}R\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{12}(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)$, звідки $a = \frac{4\sqrt{3}R\operatorname{tg}\alpha}{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

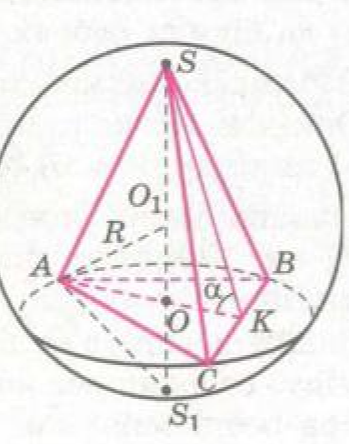
Тоді $SO = \frac{4\sqrt{3}R\operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{3}}{(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot 6}\operatorname{tg}\alpha = \frac{2R\operatorname{tg}^2\alpha}{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Для складання рівняння можна було скористатися й іншим способом. Нехай SS_1 – діаметр кулі (мал. 229). Тоді $\angle SAS_1 = 90°$. За властивістю висоти трикутника, проведеної з вершини прямого кута, $AO^2 = SO \cdot S_1O$, або $AO^2 = SO(2R - SO)$. Підставивши значення AO і SO, отримаємо таке саме рівняння, як і в першому випадку.

ВІДПОВІДЬ. $SO = \frac{2R\operatorname{tg}^2\alpha}{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.



Мал. 228



Мал. 229

14*

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1066. Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб з ребром a.

1067. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в куб з ребром 2 см.

1068. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, у який вписано кулю радіуса R.

1069. Чи у будь-який циліндр можна вписати кулю?

1070. Чому дорівнює висота зрізаного конуса, у який вписано кулю радіуса R?

1071. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною a. Чому дорівнює висота піраміди, вписаної у цей конус?

1072. Площа бічної поверхні конуса Q, а його радіус r. Знайдіть довжину бічного ребра вписаної у цей конус правильної піраміди:
а) трикутної; б) чотирикутної; в) n-кутної.

А

1073. Знайдіть діагональ куба, вписаного в кулю радіуса 8 см.

1074. Намалюйте описану навколо кулі правильну призму:
а) чотирикутну; б) трикутну; в) шестикутну.

1075. Намалюйте описану навколо кулі правильну піраміду:
а) чотирикутну; б) трикутну; в) п'ятикутну.

1076. Намалюйте вписану в конус правильну піраміду:
а) трикутну; б) чотирикутну; в) шестикутну.

1077. Впишіть у правильну чотирикутну піраміду куб так, щоб одна його грань лежала на основі піраміди, а вершини протилежної грані:
а) на бічних ребрах піраміди; б) на апофемах піраміди.

1078. В основі прямої призми – прямокутний трикутник. Опишіть навколо неї:
а) циліндр; б) сферу.

1079. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми 27 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні вписаного в неї циліндра.

1080. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну n-кутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи α, якщо:
а) $n = 4$; б) $n = 3$; в) $n = 6$; г) $n = m$.

1081. Навколо кулі радіуса r описано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса при $r = 2$ м, $\alpha = 50°$.

1082. У прямий паралелепіпед з діагоналями основи 6 см і 8 см вписано кулю. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

1083. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо піраміди.

1084. Навколо правильної шестикутної призми, висота якої дорівнює 12 см, описана сфера радіуса 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1085. Радіус кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, дорівнює 13 см, а відстань від її центра до площини основи піраміди – 5 см. Знайдіть бічне ребро піраміди. Розгляньте два випадки.

1086. У кулю радіуса 10 см вписана піраміда, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

1087. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 10 м і 24 м, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу поверхні конуса, вписаного в дану піраміду.

Б

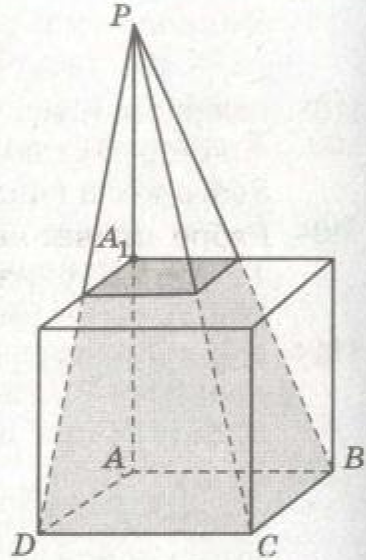
1088. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з основою a та кутом при основі α. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β. Знайдіть бічну поверхню конуса, описаного навколо піраміди.

1089. В основі прямої призми лежить трикутник зі стороною c та прилеглими кутами α і β. Діагональ бічної грані, що проходить через дану сторону, утворює з площиною основи кут φ. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми.

1090. У сферу радіуса r вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди.

1091. Знайдіть діаметр сфери:
а) описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b і c;
б) описаної навколо прямої призми, якщо висота призми дорівнює c, а в її основі лежить прямокутний трикутник з катетами a і b;
в) описаної навколо піраміди, бічні ребра якої попарно перпендикулярні, а їхні довжини a, b і c.

1092. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a; точка A_1 – середина відрізка AP. Знайдіть площу поверхні тіла, яке є спільною частиною даного куба і піраміди $PABCD$ (мал. 230).



Мал. 230

1093. Бічне ребро похилої призми дорівнює 12 см, а радіус вписаної сфери 3 см. Знайдіть кут нахилу бічного ребра призми до площини основи.

1094. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть радіус кулі:
а) вписаної;
б) описаної;
в) яка дотикається до всіх ребер даного правильного октаедра.

1095. Знайдіть площу поверхні призми, якщо периметр її основи дорівнює P, а радіус вписаної кулі r.

1096. Знайдіть радіус кулі, вписаної в зрізаний конус, якщо радіуси його основ дорівнюють r і R.

1097. Центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, ділить її висоту у відношенні 3 : 4. Знайдіть величину двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

1098. У правильний тетраедр $SABC$ вписана сфера радіуса R. Знайдіть радіус сфери, яка дотикається до даної та трьох граней тетраедра, які виходять з вершини S.

1099. Радіус основи конуса дорівнює R, а висота H. Знайдіть ребро вписаного в нього куба.

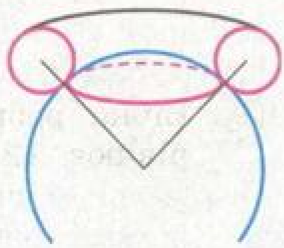
1100. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, висота якої у 2 рази більша за сторону основи, вписаної у конус, якщо висота конуса дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а радіус основи 10 см.

1101. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює α, а відстань від основи висоти до середини бічного ребра дорівнює m. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, вписаного в піраміду.

1102. В основі прямої призми лежить трикутник зі стороною c та прилеглими кутами α і β. Діагональ бічної грані, що проходить через дану сторону, утворює з площиною основи кут φ. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в призму.

В

1103. Сфера радіуса R дотикається до тора радіусів ρ і r по колу. Знайдіть довжину цього кола (мал. 231).



Мал. 231

1104. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до всіх ребер тетраедра.

1105*. Знайдіть радіус кулі, вписаної у тетраедр $ABCD$, якщо $AB = CD = 6$, а кожне з решти його ребер дорівнює $\sqrt{34}$.

1106*. Знайдіть плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо центри вписаної й описаної куль збігаються. Узагальніть задачу на випадок n-кутної піраміди.

1107. Центри двох рівних куль лежать на діагоналі куба. Кожна куля дотикається до трьох граней куба, які сходяться в одному з кінців зазначеної діагоналі, та до другої кулі. Знайдіть відношення радіуса кулі до ребра куба.

1108*. Ребро куба дорівнює a, AB – його діагональ. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до трьох граней, що сходяться у вершині A, і до трьох ребер, які виходять з вершини B.

1109*. Ребро куба дорівнює a. У цей куб вписано сферу. Знайдіть довжину хорди цієї сфери, яку вона відтинає на відрізку, що сполучає середини мимобіжних ребер куба.

Вправи для повторення

1110. Вершини трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см лежать на поверхні кулі. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань від її центра до площини трикутника дорівнює 10 см.

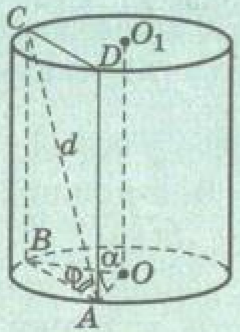
1111. Вершини квадрата зі стороною $12\sqrt{2}$ см лежать на поверхні кулі, а відстань від центра кулі до площини квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть висоти кульових сегментів, на які кулю розбиває площина квадрата.

1112. Два правильні трикутники лежать у різних площинах і мають спільну сторону. Доведіть, що всі вершини цих трикутників лежать на одній сфері.

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

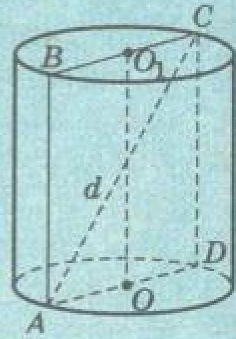
А

$OO_1 \parallel (ABC)$.
Знайдіть $S_б$.



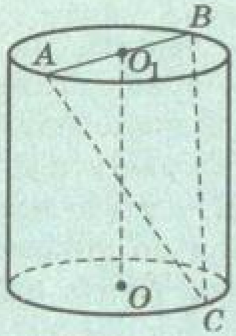
Б

$S_п = 2S_б$.
Знайдіть $S_п$.



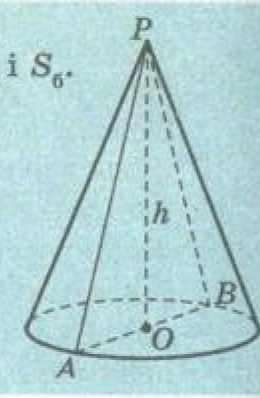
А

$AB = BC = AC$,
$S_{\triangle ABC} = Q$.
Знайдіть $S_б$.



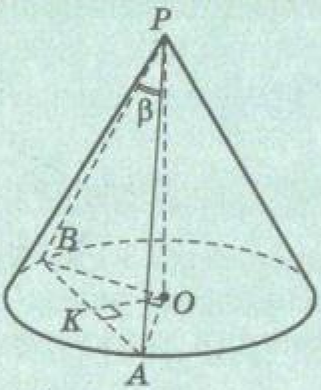
Б

$S_б : S_о = 5 : 3$.
Знайдіть $S_{\triangle APB}$ і $S_б$.



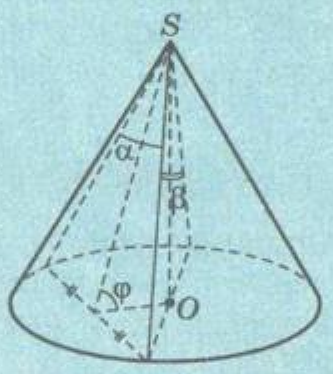
А

$OK = d$, $\angle AOB = 90°$.
Знайдіть $S_б$.



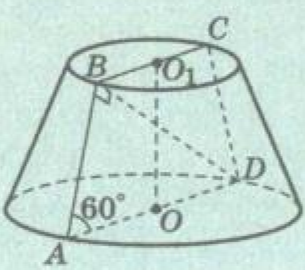
Б

Знайдіть φ.



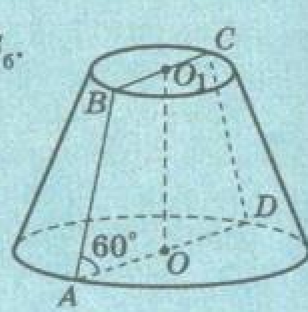
А

$OO_1 = 3$.
Знайдіть $S_п$.



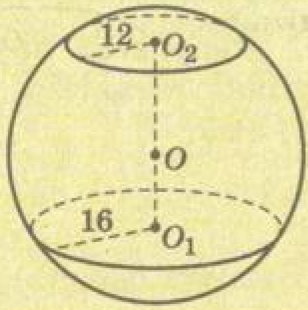
Б

$S_{ABCD} = Q$.
Знайдіть $S_б$.

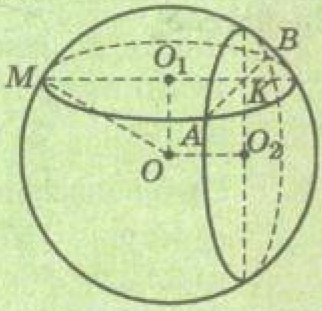


А | **Б**

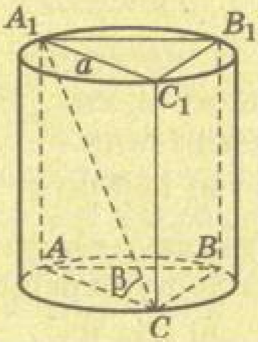
$OO_1 : OO_2 = 3 : 4.$
Знайдіть R кулі.



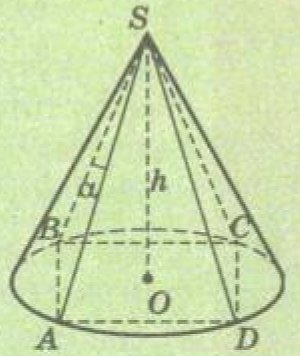
$AB = 18$, $OO_1 = 8$, $OO_2 = 12$, $\angle O_1KO_2 = 90°$.
Знайдіть OM.



$ABCA_1B_1C_1$ – правильна призма.
Знайдіть $S_{б\ ц}$

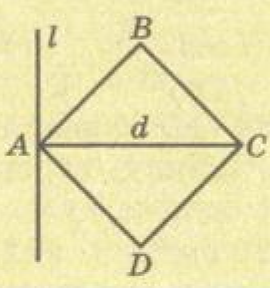


$SABCD$ – правильна піраміда, $\angle ASB = \alpha$.
Знайдіть $S_{б\ к}$

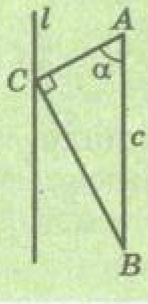


Знайдіть поверхню тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо прямої l.

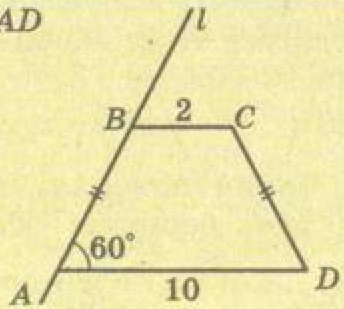
$ABCD$ – квадрат,
$l \perp AC$.

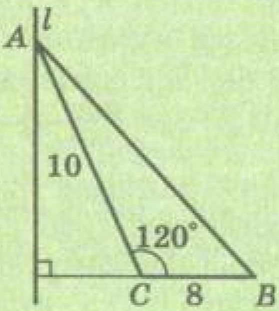


$l \parallel AB$.



$BC \parallel AD$





ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. У циліндр не можна вписати призму, в основі якої лежить:
а) квадрат; б) прямокутник; в) ромб; г) трикутник.

2. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного при обертанні прямокутника площею Q навколо однієї зі сторін.
а) $2Q$; б) πQ; в) $2\pi Q$; г) $4\pi Q$.

3. Ортогональною проекцією сфери є:
а) круг; б) коло;
в) еліпс; г) будь-яка з перерахованих фігур.

4. Площа діагонального перерізу куба дорівнює S. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо куба.
а) S; б) πS; в) $2\pi S$; г) $\pi S\sqrt{2}$.

5. Прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см обертається навколо більшого з них. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла обертання.
а) 90π см^2; б) 65 см^2; в) 120 см^2; г) 65π см^2.

6. Кулю радіуса 10 см перетнули площиною на відстані 6 см від центра. Знайдіть площу перерізу.
а) 16π см^2; б) 8π см^2; в) 64π см^2; г) 128π см^2.

7. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом 90°, а з вершини – під кутом 60°. Знайдіть кут між площиною основи і площиною перерізу.
а) 90°; б) $\arccos\sqrt{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. У циліндрі на відстані 4 см від осі, паралельно до неї, проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо висота циліндра 8 см, а радіус основи 5 см.
а) 8 см^2; б) 48 см^2; в) 72 см^2; г) 24 см^2.

9. Знайдіть кут нахилу твірної зрізаного конуса до площини нижньої основи, якщо радіуси його основ 3 см і 5 см, а площа осьового перерізу 16 см^2.
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) arctg2.

10. Центральний кут у розгортці бічної поверхні конуса дорівнює 180°. Знайдіть кут при вершині осьового перерізу конуса.
а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1°. Прямокутна трапеція обертається навколо більшої бічної сторони. Виконайте малюнок. З яких фігур складається утворене тіло обертання?

2°. Діаметр кулі перетинає кожну з двох площин під кутом 30° і ділиться точками перетину на три рівні частини. Знайдіть відстань від кожної площини до центра кулі, якщо її радіус 12 см.

3°. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом 90°, а з вершини – під кутом 60°. Знайдіть висоту конуса, якщо площа перерізу дорівнює $4\sqrt{3}$ м^2.

4°. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, у яку вписана куля радіуса 4 см, якщо двогранний кут при основі піраміди дорівнює 60°.

5*. Через дві твірні конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Знайдіть кути утвореного перерізу, якщо кут в осьовому перерізі конуса дорівнює 120°.

6*. Знайдіть площу поверхні циліндра, у який вписана правильна трикутна призма, діагональ бічної грані якої дорівнює d та утворює з площиною основи кут α.

7*. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом при вершині α навколо прямої, яка проходить через вершину трикутника паралельно його основі.

8*. Знайдіть висоту конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює $8\sqrt{2}$ см^2, а кут у розгортці бічної поверхні становить 120°.

9.** Точки A і B лежать на різних основах циліндра, радіус основи та висота якого дорівнюють 13 см і 10 см відповідно. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо від осі циліндра він віддалений на 5 см.

10.** Два взаємно перпендикулярні перерізи кулі мають спільну хорду завдовжки 10 см. Знайдіть відстані від центра кулі до площин перерізів, якщо площа одного з них 169π см^2, а площа великого круга кулі дорівнює 200π см^2.

11.** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d. Знайдіть радіус основи і висоту циліндра з найбільшою площею бічної поверхні.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

1. Якщо яку-небудь фігуру обертати (на кут, не менший від 360°) навколо якої-небудь осі, кожна точка цієї фігури, за винятком точок осі, описуватиме коло. Об'єднання усіх таких кіл становить *фігуру обертання*. Якщо утворена фігура обертання є тілом, її називають *тілом обертання*. Найважливіші тіла обертання – циліндр, конус, зрізаний конус, куля, кульовий сегмент, кульовий сектор.

2. *Циліндр* – тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. Якщо циліндр утворено обертанням прямокутника $OABO_1$ навколо сторони OO_1, то пряма OO_1 – *вісь циліндра*, відрізки OA і O_1A опишуть рівні круги радіусів r – *основи циліндра*, а відрізок AB опише криву поверхню – *бічну поверхню циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні, що дорівнює AB, – *твірна циліндра*. Поверхня циліндра складається з двох основ і бічної поверхні. Основи циліндра – рівні круги, що лежать у паралельних площинах, бічну поверхню можна розгорнути у прямокутник. Тому якщо радіус і висота циліндра r і h, площа його бічної поверхні $S = 2\pi rh$. А площа поверхні $S = 2\pi r(r + h)$.

3. *Конус* – тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета. При такому обертанні один катет описує круг – *основу конуса*, а гіпотенуза – криву поверхню, *бічну поверхню конуса*. Розгортка останньої – круговий сектор. Якщо радіус конуса r, а твірна l, то площа бічної поверхні конуса $S = \pi rl$, а площа поверхні $S = \pi r(r + l)$.

4. Січна площина, паралельна основі конуса, розрізає його на дві частини: менший конус і *зрізаний конус*. Зрізаний конус має дві основи – різні круги, що лежать у паралельних площинах, і бічну поверхню. Бічна поверхня зрізаного конуса – частина бічної поверхні конуса. Якщо радіуси основ зрізаного конуса r_1 і r_2, а твірна l, то площа його бічної поверхні $S = \pi l(r_1 + r_2)$.

5. *Куля* – тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра. *Центром кулі* називають центр круга, обертанням якого її утворено. Відрізок, який сполучає центр кулі з довільною точкою її поверхні, – радіус кулі. Відрізок, який сполучає дві довільні точки поверхні кулі, – її хорда. Хорда кулі, яка проходить через центр, – *діаметр* кулі. *Сфера* – поверхня кулі; її можна утворити обертанням кола навколо його діаметра. Площину (пряму), яка має з кулею тільки одну спільну точку, називають *дотичною площиною* (*прямою*) до кулі. Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони дотикаються в цій точці.

6. Січна площина розрізає кулю на два *кульові сегменти*, а сферу – на два *сферичні сегменти*. Дві паралельні січні площини розрізають кулю на два кульові сегменти і *кульовий шар*. Крива поверхня кульового шару – *сферичний пояс*. Тіло, утворене обертанням кругового сектора навколо радіуса, що його обмежує, – *кульовий сектор*.

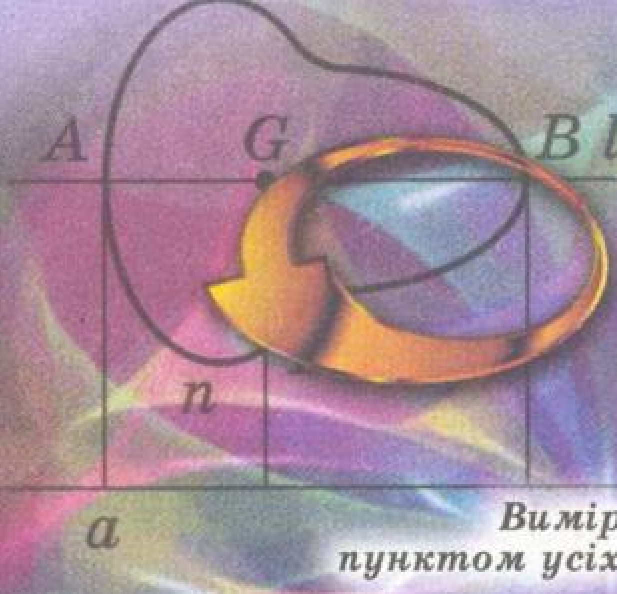
7. Куля називається *вписаною у многогранник*, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника. Многогранник називається *вписаним у сферу*, якщо всі його вершини лежать на сфері.

8. Призма називається *вписаною у циліндр*, якщо основи призми вписано в кола основ циліндра. Піраміда називається *вписаною в конус*, якщо їхні вершини збігаються, а основу піраміди вписано в коло основи конуса. Якщо одне тіло вписане в інше, друге тіло називають описаним навколо першого.

Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл

Основні теми розділу:

- Поняття об'єму.
- Об'єм прямої призми і циліндра.
- Об'єм піраміди і зрізаної піраміди.
- Об'єм конуса і зрізаного конуса.
- Об'єм кулі та її частин.
- Теорема Гульдіна.
- Площа поверхонь.



РОЗДІЛ 4

Вимірювання величин є вихідним пунктом усіх застосувань математики.

А. Лебег

§ 29 ПОНЯТТЯ ОБ'ЄМУ

Кожне тіло займає частину простору: цеглина – більшу, ніж олівець, куб з ребром 1 дм – більшу, ніж з ребром 1 см. Щоб можна було порівнювати такі частини простору, вводять поняття *об'єму*.

Об'єм – це кількісна характеристика тіла, яка задовольняє такі умови (властивості об'єму):

1. Кожне тіло має певний об'єм, виражений додатним числом.

2. Рівні тіла мають рівні об'єми.

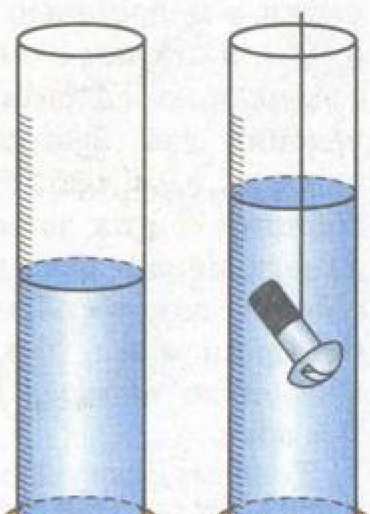
3. Якщо тіло розбито на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.

4. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Об'єм – одна з величин, як і довжина, площа, міра кута. Значення об'єму задається не тільки числом, а й найменуванням. Наприклад, об'єм 1 дм^3 можна подати як 1000 см^3 і як 0,001 м^3. Щоб не ускладнювати виклад, у теоретичних міркуваннях за одиницю довжини беруть довжину деякого (одиничного) відрізка і залежно від неї вводять одиниці площі та об'єму. Площа квадрата, сторона якого дорівнює одиничному відрізку, – одиниця площі, а об'єм куба, ребро якого дорівнює одиничному відрізку, – одиниця об'єму. За такої домовленості найменувань можна не писати.

ЗАУВАЖЕННЯ. Строгий виклад загальної теорії об'ємів дуже складний. Тому тут, говорячи про об'єми тіл, маємо на увазі тільки прості тіла: многогранники, циліндри, конуси, кулі і різноманітні комбінації зі скінченного числа таких тіл.

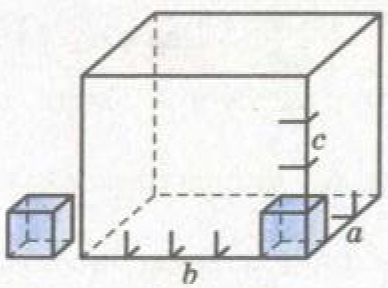
Об'єми тіл вимірюють або обчислюють. Наприклад, об'єм невеликої деталі можна виміряти за допомогою мензурки з поділками (мал. 232), об'єм відра, – наливаючи в нього воду посудиною відомого об'єму. Але об'єм кімнати, доменної печі подібним способом виміряти неможливо. Їх обчислюють. Наприклад, об'єм куба з ребром a дорівнює a^3, а об'єм прямокутного паралелепіпеда обчислюють, користуючись такою теоремою.



Мал. 232

! **Теорема 26.** ***Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.***

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо три випадки.



Мал. 233

1. Нехай виміри a, b, c прямокутного паралелепіпеда виражені натуральними числами. Такий паралелепіпед можна розрізати на c шарів, кожний з яких містить ab одиничних кубів (мал. 233). Отже, об'єм цього паралелепіпеда

$$V = abc.$$

2. Нехай a, b, c – десяткові дроби з числом десяткових знаків не більше як n. І нехай l – відрізок у 10^n раз коротший від одиничного. Ребра даного паралелепіпеда, довжини яких a, b, c, можна розбити відповідно на $10^n a$, $10^n b$ і $10^n c$ таких відрізків. Числа $10^n a$, $10^n b$, $10^n c$ натуральні. Оскільки $10^n a \cdot 10^n b \cdot 10^n c = 10^{3n} abc$, то даний паралелепіпед вміщує рівно $10^{3n} abc$ кубиків з ребром l. А одиничний куб вміщує 10^{3n} таких кубиків, адже $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$. Як бачимо, відношення об'єму даного паралелепіпеда до об'єму одиничного куба дорівнює abc. Це означає, що об'єм даного паралелепіпеда

$$V = abc.$$

3. Нехай хоча б одне із чисел a, b, c виражається нескінченним десятковим дробом. Позначимо через a_1 і a_2 наближені значення числа a з недостачею і з надлишком з точністю до n десяткових знаків. З тією самою точністю наближені значення з недостачею і з надлишком числа b позначимо через b_1 і b_2, а числа c – через c_1 і c_2. Кожне з чисел a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 виражається скінченним десятковим дробом. Тому за доведеним у п. 2 об'єми прямокутних паралелепіпедів з вимірами a_1, b_1, c_1 і a_2, b_2, c_2 відповідно дорівнюють $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2c_2$. Перший з цих паралелепіпедів можна помістити всередині даного паралелепіпеда, а даний – всередині другого. Отже, об'єм V даного паралелепіпеда міститься між $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2c_2$. Оскільки $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2c_2$ – наближені значення числа abc з будь-якою наперед заданою точністю, то і в цьому випадку $V = abc$.

Теорему доведено.

Наслідок. ***Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.***

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Перерахуйте властивості об'єму.
2. У яких одиницях визначають об'єм?
3. Як можна вимірювати об'єми?
4. Чому дорівнює об'єм куба з ребром a?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Виконаємо разом

1. Площі попарно перпендикулярних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Знайдіть його об'єм.

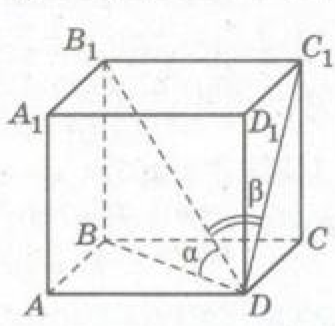
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо виміри паралелепіпеда y, x, z, то $xy = S_1$, $xz = S_2$, $yz = S_3$. Перемножимо ці рівності: $x^2y^2z^2 = S_1S_2S_3$. Отже, об'єм паралелепіпеда $V = xyz = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

ВІДПОВІДЬ. $V = \sqrt{S_1S_2S_3}$.

2. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані – кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює h.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $BB_1 = h$, $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle B_1DC_1 = \beta$ (мал. 234). З $\triangle B_1BD$ ($\angle B = 90°$) знайдемо BD і B_1D:

$$BD = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha \text{ і } B_1D = \frac{h}{\sin\alpha}.$$



Мал. 234

З $\triangle B_1C_1D$ ($\angle C_1 = 90°$) $B_1C_1 = B_1D\sin\beta$, тобто

$$B_1C_1 = \frac{h\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Тоді за теоремою Піфагора з $\triangle BCD$ ($\angle C = 90°$) можемо знайти ребро DC:

$$DC^2 = BD^2 - BC^2, \text{ тобто}$$

$$DC^2 = h^2\mathrm{ctg}^2\alpha - \frac{h^2\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = \frac{h^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{h^2\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{h^2}{\sin^2\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\beta),$$

звідки $DC = \frac{h}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Тоді

$$V = h\cdot\frac{h\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{h}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta} = \frac{h^3\sin\beta}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

ВІДПОВІДЬ. $V = \frac{h^3\sin\beta}{\sin^2\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1113. Поясніть співвідношення: 1 м^3 = 1000 дм^3 = 1 000 000 см^3 = = 1 000 000 000 мм^3.

1114. Ребро куба дорівнює 5 дм. Чому дорівнює його об'єм?

1115. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, довжини ребер якого дорівнюють 2 см, 3 см і 5 см.

1116. Чому дорівнює площа поверхні куба, якщо його об'єм дорівнює 27 см^3?

1117. З шматка пластиліну, який мав форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами $1 \times 2 \times 4$, виліпили куб. Знайдіть ребро цього куба.

1118. Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо всі його виміри збільшити в 3 рази?

1119. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи дорівнюють 6 см і 8 см, а діагональ утворює з площиною основи кут 45°.

1120. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи дорівнюють 3 см і 4 см, а площа діагонального перерізу 30 см^2.

А

1121. Розміри цеглини $250 \times 120 \times 65$ мм. Знайдіть її об'єм.

1122. Поле прямокутної форми площею 5 га зорано на глибину 35 см. Скільки кубометрів ґрунту перевернули?

1123. Знайдіть об'єм куба, якщо:

а) площа його грані Q;

б) діагональ куба d.

1124. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи 49 см^2, а площа бічної грані 56 см^2.

1125. Об'єм куба дорівнює V. Знайдіть довжину його діагоналі.

1126. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $d = 37$ см, $\alpha = 58°$.

1127. Три свинцевих куби з ребрами 1 см, 6 см і 8 см переплавили в один куб. Знайдіть довжину ребра цього куба.

1128. Для здоров'я учнів необхідно, щоб у класі на кожного учня припадало не менше як 6 м^3 повітря. На скількох учнів розрахована класна кімната, розміри якої $10 \times 6 \times 3{,}5$ м?

1129. Виміри прямокутного паралелепіпеда 15 дм, 36 дм і 50 дм. Знайдіть довжину ребра куба такого самого об'єму.

1130. Якщо кожне ребро куба збільшити на 3 см, то його об'єм збільшиться на 513 см^3. Знайдіть довжину ребра куба.

1131. Довжини ребер двох кубів відносяться як 1 : 3. Як відносяться їхні об'єми? Відповідь проілюструйте малюнком.

1132. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 39 см, а ребра пропорційні числам 3, 4 і 12.

1133. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 4. Знайдіть його об'єм, якщо площа поверхні дорівнює 112 см^2.

Б

1134. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a і b, а його діагональ нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1135. Об'єм прямокутного паралелепіпеда 38 дм^3. Чому дорівнює об'єм трикутної призми, яка відтинається від цього паралелепіпеда діагональною площиною?

1136. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{13}$ м, а діагоналі бічних граней нахилені до площини основи під кутами 30° і 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1137. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d та утворює з бічною гранню кут α, а з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1138. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює d та утворює з бічними гранями кути α і β.

1139. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо діагоналі його граней дорівнюють 3 см, 5 см і $\sqrt{22}$ см.

1140. У прямокутному паралелепіпеді діагоналі бічних граней, які виходять з однієї вершини, дорівнюють 5 см і 8 см та утворюють кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1141. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо $AB = 3$ см, $BC = \sqrt{7}$ см, а площина AB_1C віддалена від вершини B на 2,4 см.

1142. Який найбільший об'єм може мати прямокутний паралелепіпед, якщо сторони його основи пропорційні числам 5 і 12, а периметр діагонального перерізу дорівнює 78 см?

1143. На виготовлення закритого ящика з квадратним дном потрібно S квадратних метрів фанери. Знайдіть розміри ящика, при яких його об'єм найбільший.

В

1144[1]**.** Об'єм куба дорівнює V. Знайдіть об'єм піраміди, вершина якої – середина діагоналі куба, а основа – його грань.

1145. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см, а сторона основи 10 см.

1146*. Знайдіть об'єм піраміди $PABCD$, висота якої PA дорівнює a, а основа – квадрат $ABCD$ зі стороною a.

1147*. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми зі стороною основи a, якщо сума кутів, утворених діагоналлю призми зі сторонами і з діагоналлю основи, які виходять з тієї самої вершини, дорівнює 135°.

Вправи для повторення

1148. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см^2 і 25 см^2. Через точку, яка ділить висоту у відношенні 1 : 2 проведено площину, паралельну основі. Знайдіть площу перерізу.

1149. Трикутник зі сторонами 12 см, 15 см і 17 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

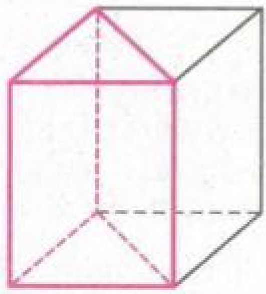
1150. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $|\overline{CC_1} + \overline{A_1C}| = |\overline{BD_1} - \overline{AA_1}|$.

---

[1] Задачі 1144–1146 розв'яжіть, не використовуючи формулу об'єму піраміди.

§ 30 ОБ'ЄМ ПРЯМОЇ ПРИЗМИ І ЦИЛІНДРА

Теорема 27. ***Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.***

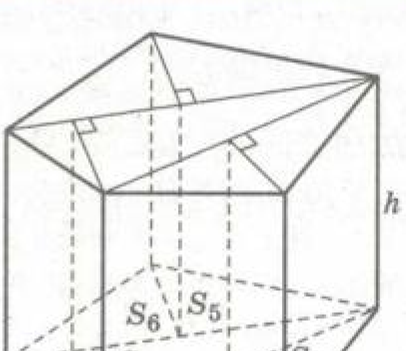


Мал. 235

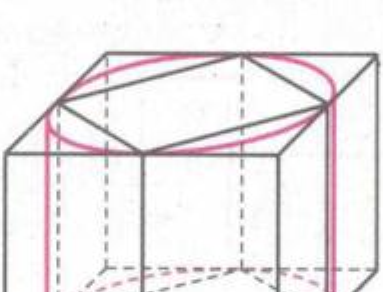
ДОВЕДЕННЯ. Якщо основа прямої призми – прямокутний трикутник, до неї можна добудувати призму, яка їй дорівнює, так, щоб утворився прямокутний паралелепіпед (мал. 235). Якщо об'єм, площа основи і висота даної призми дорівнюють V, S, h, то об'єм, площа основи і висота утвореного паралелепіпеда будуть $2V$, $2S$ і h. Отже, $2V = 2Sh$, звідси $V = Sh$.

Розглянемо довільну пряму n-кутну ($n > 3$) призму, площа основи якої S, а висота h. Її можна розбити (наприклад, діагональними перерізами) на кілька трикутних призм, а кожну трикутну – на дві призми, в основах яких – прямокутні трикутники (мал. 236). Будь-яку пряму призму можна розбити на скінченне число k прямих призм, в основах яких – прямокутні трикутники. Висота кожної з цих призм дорівнює h, а сума площ їхніх основ $S_1 + S_2 + \ldots + S_k = S$. Об'єм даної n-кутної призми дорівнює сумі об'ємів трикутних призм, що її складають. Тому $V = S_1h + S_2h + \ldots + S_kh = (S_1 + S_2 + \ldots + S_k)h = Sh$. Отже, об'єм прямої призми можна обчислити за формулою $V = Sh$. Теорему доведено.

Теорема 28. ***Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.***



Мал. 236



Мал. 237

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано циліндр з площею основи S і висотою h. Впишемо в нього правильну n-кутну призму й опишемо навколо нього правильну n-кутну призму (мал. 237). Якщо площі основ цих призм S_n і S'_n, то їхні об'єми дорівнюють $S_n h$ і $S'_n h$. Оскільки вписана призма міститься у циліндрі, а циліндр – в описаній призмі, то об'єм V даного циліндра більший, ніж $S_n h$, але менший, ніж $S'_n h$:

$$S_n h < V < S'_n h.$$

При досить великому n значення S_n і S'_n як завгодно мало відрізняються від S. Отже, ліва і права частини цієї подвійної нерівності, а також значення V, що міститься між ними, як завгодно мало відрізняються від Sh. Це може бути тільки тоді, коли $V = Sh$. Теорему доведено.

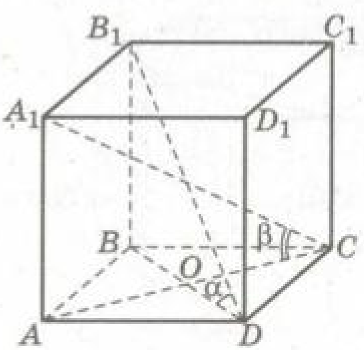
Наслідок. ***Якщо радіус циліндра r, а висота h, то його об'єм $V = \pi r^2 h$.***

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка призма називається прямою?
2. Чому дорівнює об'єм прямої призми?
3. Доведіть теорему про об'єм прямої призми.
4. Чому дорівнює об'єм циліндра?
5. Доведіть теорему про об'єм циліндра.
6. Як визначити об'єм циліндра, якщо відомі радіус його основи r і висота h?

Виконаємо разом

1. Знайдіть об'єм прямої призми, в основі якої лежить ромб зі стороною a, якщо діагоналі призми утворюють з площиною основи кути α і β.



Мал. 238

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – пряма призма, у якої $ABCD$ – ромб, $AB = a$ і $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle A_1CA = \beta$ (мал. 238). Знайдемо її об'єм, використовуючи формулу $V = S_о \cdot h$, тобто $V = S_{ABCD} \cdot BB_1$.

Нехай $BB_1 = h$. Тоді з $\triangle B_1BD$ ($\angle B = 90°$) $BD = h\text{ctg}\alpha$, а з $\triangle A_1AC$ ($\angle A = 90°$) $AC = h\text{ctg}\beta$. Оскільки

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD,$$

то $S_{ABCD}=\frac{1}{2}h^2\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta$, тоді $V=\frac{1}{2}h^3\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta$.

Виразимо h через a. З $\triangle AOD$ ($\angle O=90°$) за теоремою Піфагора $OD^2+AO^2=AD^2$. Оскільки $AO=\frac{1}{2}h\,\text{ctg}\beta$, $OD=\frac{1}{2}h\,\text{ctg}\alpha$, то

$$\frac{h^2}{4}\text{ctg}^2\alpha+\frac{h^2}{4}\text{ctg}^2\beta=a^2,\text{ або }\frac{h^2}{4}(\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta)=a^2,$$

звідки $h^2=\dfrac{4a^2}{\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta}$, тому $h=\dfrac{2a}{\sqrt{\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta}}$.

Тоді $V=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta}}\right)^3\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta=\dfrac{4a^3\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta}{\sqrt{(\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta)^3}}$.

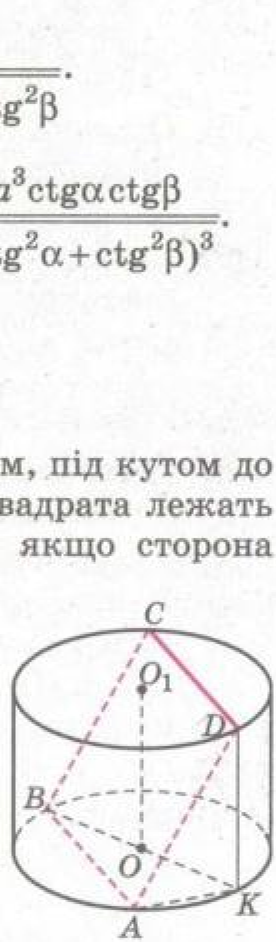
ВІДПОВІДЬ. $V=\dfrac{4a^3\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta}{\sqrt{(\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2\beta)^3}}$.

2. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 7 см, під кутом до осі вписано квадрат так, що всі вершини квадрата лежать на колах основ. Знайдіть об'єм циліндра, якщо сторона квадрата дорівнює 10 см.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $ABCD$ – квадрат, вписаний у циліндр, $AB=10$ см, $OB=7$ см (мал. 239).

Проведемо DK перпендикулярно до площини основи. Оскільки $AB\perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $AK\perp AB$, тобто $\angle BAK=90°$. Отже, BK – діаметр основи циліндра, $BK=14$ см.

З $\triangle BAK$ ($\angle A=90°$) за теоремою Піфагора знайдемо AK:



Мал. 239

$$AK^2=BK^2-AB^2,$$
$$AK^2=196-100=96.$$

Тоді $DK^2=AD^2-AK^2$, тобто $DK^2=100-96=4$. Отже, $DK=2$ см.

Оскільки $V=\pi r^2h$, то $V=\pi\cdot 49\cdot 2=98\pi$ (см³).

ВІДПОВІДЬ. $V=98\pi$ см³.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1151. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 2 см і 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 3 см.
1152. Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота 5 см.
1153. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють a.
1154. Основа прямої призми – прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, більша бічна грань – квадрат. Знайдіть об'єм призми.
1155. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною a. Знайдіть об'єм циліндра.
1156. Знайдіть об'єм циліндра, у який вписано кулю радіуса R.
1157. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата зі стороною a навколо прямої, що містить сторону квадрата.

А

1158. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює d і нахилена до сторони основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми.
1159. У правильній шестикутній призмі площа найбільшого діагонального перерізу 4 см^2, а відстань між двома протилежними бічними гранями 4 см. Знайдіть об'єм призми.
1160. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 6 см і 10 см. Через більшу основу трапеції та середину протилежного бічного ребра проведено площину під кутом 30° до площини основи. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює 48 см^2.
1161. Сторона основи прямого паралелепіпеда дорівнює a. Через неї та протилежну їй сторону верхньої основи проведено переріз під кутом α до площини основи. Площа перерізу S. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
1162. Основа прямого паралелепіпеда – ромб. Одна з діагоналей паралелепіпеда дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α, друга – під кутом β. Знайдіть об'єм.
1163. Знайдіть об'єм прямого паралелепіпеда, сторона основи якого дорівнює a, а радіус вписаної кулі r.

1164. Навколо циліндра описано прямий паралелепіпед з гострим кутом α в основі. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо висота циліндра дорівнює h, а радіус r.

1165. У пряму призму, сторони основи якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм призми.

1166. Треба викопати пряму канаву довжиною 200 м і глибиною 1,5 м. Ширина канави вгорі 3 м, біля дна 2 м. Скільки кубометрів ґрунту доведеться вийняти?

1167. Переріз залізничного насипу має вигляд трапеції з нижньою основою 18 м, верхньою 8 м і висотою 3 м. Знайдіть об'єм 1 км насипу.

1168. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм циліндра.

1169. Розгортка бічної поверхні циліндра – квадрат із стороною 1,8 дм. Знайдіть об'єм циліндра.

1170. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів, вписаного в правильну трикутну призму й описаного навколо цієї призми.

1171. Площі бічних поверхонь двох циліндрів рівні. Доведіть, що їхні об'єми відносяться як радіуси основ.

1172. Через твірну циліндра проведено дві площини, які перетинають циліндр і кут між якими $120°$. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см, а площі перерізів – по 30 см^2.

1173. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який знаходиться на відстані d від осі та відтинає від кола основи дугу α. Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа перерізу S.

1174. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, – квадрат, який відтинає від кола основи радіуса r дугу β. Знайдіть об'єм циліндра.

1175. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої 20 см, опущено деталь. При цьому рівень рідини у посудині піднявся на 12 см. Чому дорівнює об'єм деталі?

1176. Довжини двох круглих колод рівні, а їхні діаметри відносяться як 2 : 3. Як відносяться їхні об'єми?

Б

1177. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної кубометром вилитої нафти, якщо товщина плівки 1 мм.

1178. У циліндричній посудині рівень рідини досягає 16 дм. На якій висоті буде рівень рідини, якщо її перелити в посудину, діаметр якої в 2 рази більший від першого?

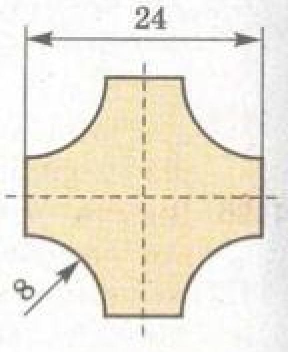
1179. Скільки метрів сталевого дроту в мотку, якщо його маса 30 кг, а діаметр дроту 6 мм? Густина сталі 7600 кг/м^3.

1180. Залізобетонна панель має розміри 600×120×22 см. По всій її довжині 6 циліндричних отворів, діаметри яких 14 см. Знайдіть масу панелі, якщо густина матеріалу 2,5 т/м^3.

1181. Скільки тонн сталевих труб пішло на спорудження газопроводу завдовжки 4450 км, якщо його зовнішній діаметр 1420 мм, а товщина труби 22 мм? Густина сталі 7600 кг/м^3.

1182. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого 85 см, а радіуси 45 см і 2 см? Товщина паперу 0,1 мм.

1183. Знайдіть об'єм двометрового прута, форму і розміри перерізу якого (у мм) зображено на малюнку 240.



Мал. 240

1184. Доведіть, що довільна площина, яка проходить через центр куба, ділить його на дві частини, об'єми яких рівні.

1185. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють m і n та утворюють кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його менша діагональ дорівнює більшій діагоналі основи.

1186. Кожне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 1 см, а одна з його діагоналей 2 см. Знайдіть об'єм цього паралелепіпеда.

1187. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 24 см^2, а площі бічних граней 3 см^2, 4 см^2 і 5 см^2. Знайдіть об'єм цієї призми.

1188. Знайдіть об'єм правильної п'ятикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a.

1189. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, у якої $A_1E = 12$ м, $A_1D = 13$ м.

1190. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ через сторону BC і вершину A_1 проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм призми, якщо відстань від вершини A до цієї площини дорівнює d.

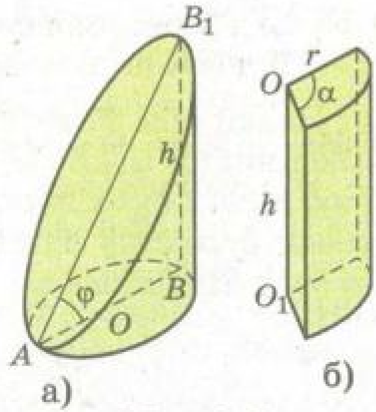
1191. Висота піраміди дорівнює 8 м, а площа основи – 12 м^2. Знайдіть об'єм призми, одна основа якої належить основі піраміди, а друга є перерізом піраміди площиною, проведеною на відстані 2 м від вершини.

1192. Через бічне ребро правильної шестикутної призми проведено переріз, який ділить призму на частини, об'єми яких відносяться як 1 : 5. Знайдіть площу перерізу, якщо площа бічної грані призми дорівнює S.

В

1193. Доведіть, що площина, яка перетинає бічну поверхню правильної $2n$-кутної призми, але не перетинає її основ, ділить її бічну поверхню й об'єм у одному і тому самому відношенні.

1194. Знайдіть об'єми частин циліндра, зображених на малюнку 241.



Мал. 241

1195. У правильній трикутній призмі через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо даної призми, якщо площа перерізу дорівнює Q.

1196. Висота циліндра h. Чотири точки, які лежать на колах його основ, – вершини квадрата зі стороною a. Знайдіть об'єм циліндра.

1197. Переріз, паралельний осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 60°. Знайдіть відношення об'ємів частин, на які ця площина розділила циліндр.

1198*. З усіх циліндрів даного об'єму знайдіть циліндр, площа поверхні якого найменша. Знайдіть відношення його висоти до радіуса.

1199*. З усіх циліндрів, вписаних у сферу радіуса r, знайдіть циліндр найбільшого об'єму. Чому дорівнює його об'єм?

Вправи для повторення

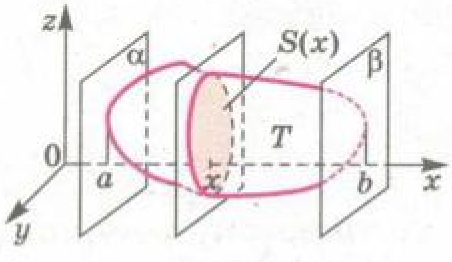
1200. Діагоналі бічних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 17 см, а їхні площі пропорційні числам 2 і 5. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1201. Прямокутний паралелепіпед, основою якого є квадрат зі стороною a, вписано у кулю радіуса R. Знайдіть його об'єм.

1202. Рівнобедрений трикутник з основою 6 см і кутом при вершині 120° обертається навколо прямої, що містить основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

§31 ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛА

Нехай тіло T міститься між двома опорними паралельними площинами α і β (мал. 242). Введемо систему координат так, щоб вісь x була перпендикулярною до цих площин. Абсциси точок перетину площин α і β з віссю x позначимо через a і b ($a < b$). Площини α і β не перетинають тіло T, а лише дотикаються до нього. Але домовимося й їх вважати січними площинами (виродженими). Виходить, кожна площина, яка перпендикулярна до осі x і проходить через точку x її відрізка $[a; b]$, перетинає тіло T. Нехай $S(x)$ – площа відповідного перерізу. Оскільки кожному значенню x з $[a; b]$ відповідає єдине значення площі $S(x)$, то $S(x)$ – функція, задана на $[a; b]$. Якщо ця функція неперервна, то об'єм даного тіла T можна виразити через $S(x)$, a і b.



Мал. 242

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин точками

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

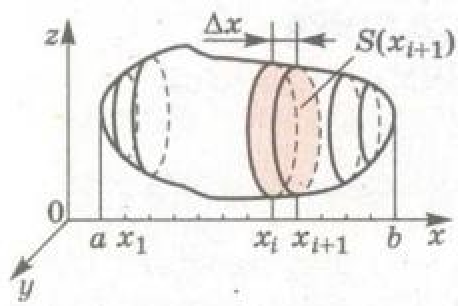
Проведені через ці точки площини, перпендикулярні до осі x, розтинають дане тіло на n шарів завтовшки $\triangle x = \dfrac{b-a}{n}$ (мал. 243). Об'єм i-го шару наближено дорівнює $S(x_i)\triangle x$, а об'єм усього тіла

$$V \approx S(x_1)\triangle x + S(x_2)\triangle x + \ldots + S(x_n)\triangle x. \qquad (*)$$

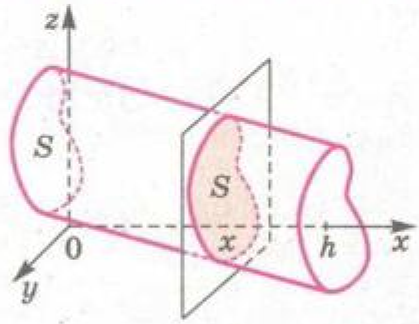
Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонший шар, тобто чим більше n. Можна довести, що коли $n \to \infty$, то інтегральна сума правої частини наближеної рівності (*) прямує до об'єму V даного тіла. Отже, за означенням інтеграла:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Розглянемо конкретний приклад. Нехай дане тіло – довільний циліндр (у широкому розумінні), площа основи якого S, а висота h (мал. 244). Розмістимо систему координат так, щоб одна основа циліндра була у площині yz, а площина другої основи перетинала вісь x у точці h. Кожна січна площина, перпендикулярна до осі x, перетинає даний циліндр по фігурі,



Мал. 243



Мал. 244

що дорівнює основі; площа кожного такого перерізу дорівнює S. Тому об'єм даного циліндра:

$$V = \int_0^h S dx = Sx \Big|_0^h = Sh.$$

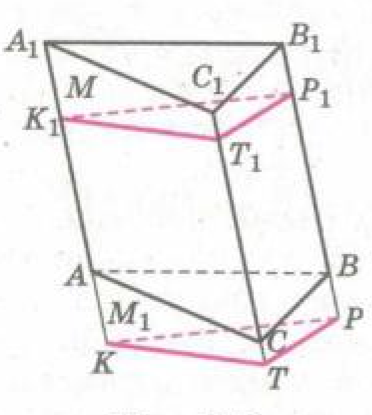
Отже, об'єм будь-якого циліндра (у широкому розумінні) дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Наслідки. ***Об'єм похилої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.***

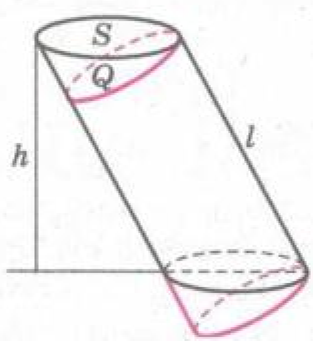
Об'єм кругового циліндра, у якого радіус основи r і висота h, можна обчислювати за формулою $V = \pi r^2 h$.

Якщо площина, перпендикулярна до бічного ребра, перетинає усі бічні ребра призми, то переріз призми такою площиною називають *перпендикулярним перерізом*. Якщо многогранник M, відрізаний від похилої призми її перпендикулярним перерізом, перенести паралельно в положення M_1, утвориться пряма призма такого самого об'єму (мал. 245). Отже, правильне таке твердження. Об'єм похилої призми дорівнює добутку площі її перпендикулярного перерізу та бічного ребра.

Аналогічне твердження правильне і стосовно довільного (у широкому розумінні) циліндра (мал. 246). Завжди $Sh = Ql$.



Мал. 245



Мал. 246

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як за допомогою інтеграла можна знайти об'єм тіла?
2. Виведіть формулу для знаходження об'єму тіла через інтеграл.
3. Яка площина називається опорною?
4. Чому дорівнює об'єм похилої призми?
5. Як знайти об'єм похилої призми через площу перпендикулярного перерізу?
6. Чому дорівнює об'єм будь-якого циліндра?

Виконаємо разом

1. Основою призми є правильний трикутник ABC зі стороною a. Вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, а ребро AA_1 утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $a = 25{,}3$ см, $\alpha = 68°12'$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Задачу задовольняє призма $ABCA_1B_1C_1$, зображена на малюнку 247. A_1O – її висота, $\angle A_1AO = \alpha$.

Мал. 247

Якщо O – центр правильного $\triangle ABC$, сторона якого $AB = a$, то його площа $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а радіус описаного кола $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. З прямокутного трикутника A_1OA знаходимо:

$$A_1O = AO\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha.$$

Тоді об'єм призми:

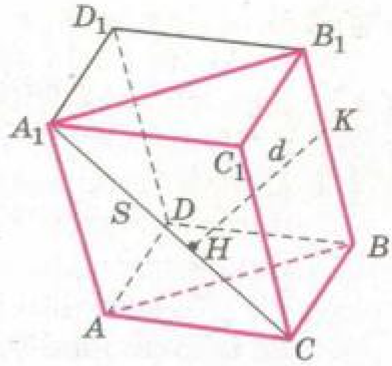
$$V = Sh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\alpha = \frac{a^3}{4}\mathrm{tg}\alpha.$$

Якщо $a = 25{,}3$ і $\alpha = 68°12'$, то $V = \frac{25{,}3^3}{4}\mathrm{tg}68°12' \approx 10119.$

ВІДПОВІДЬ. $V = \frac{a^3}{4}\mathrm{tg}\alpha$, $V \approx 10$ дм^3.

2. У похилій трикутній призмі відстань від бічного ребра до діагоналі протилежної бічної грані дорівнює d, а пло-

ща цієї грані Q. Знайдіть об'єм призми.



Мал. 248

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Відстань від бічного ребра BB_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ до діагоналі A_1C грані AA_1C_1C дорівнює відстані від ребра BB_1 до грані AA_1C_1C (мал. 248).

Добудуємо до даної призми $ABCA_1B_1C_1$ ще одну трикутну призму, щоб утворився паралелепіпед $ADBCA_1D_1B_1C_1$ (мал. 248). Добудована призма має такий самий об'єм, як і дана, оскільки в них рівні основи і висоти. Об'єм паралелепіпеда дорівнює Qd. Об'єм даної призми удвічі менший.

ВІДПОВІДЬ. $V = \frac{1}{2}Qd.$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1203. Знайдіть об'єм призми, якщо площа її основи дорівнює 10 м^2, а висота – 3 м.

1204. Знайдіть висоту похилої призми, об'єм якої дорівнює 12 см^2, а в основі лежить квадрат зі стороною 2 см.

1205. Основа призми – прямокутник зі сторонами a і b. Бічне ребро призми дорівнює c та утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми.

1206. В основі паралелепіпеда лежить квадрат зі стороною 3 см. Бічне ребро дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1207. Знайдіть об'єм похилої призми, у якої площа перпендикулярного перерізу дорівнює 9 м^2, а бічне ребро 5 м.

1208. Основа похилої призми – квадрат. Чи правильно, що довільна площина, яка проходить через центри основ, ділить призму на дві частини рівних об'ємів?

1209. Знайдіть об'єм похилого кругового циліндра, у якого радіус основи дорівнює 2 см, а твірна – 10 см і утворює з площиною основи кут 30°.

А

1210. Площа основи призми Q, бічне ребро дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм призми.

1211. Сторони основи паралелепіпеда дорівнюють 6 дм і 8 дм, кут між ними 45°. Бічне ребро дорівнює 7 дм і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1212. Дві грані паралелепіпеда – квадрати із стороною a, решта – ромби з кутами по 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1213. Основа паралелепіпеда – ромб зі стороною 4 см і кутом 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо більша діагональ дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 60°.

1214. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, основа якого ромб зі стороною 6 см і кутом 60°, а бічні грані – ромби з кутом 45°.

1215. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо всі його грані – ромби зі стороною a і кутом 60°.

1216. Побудуйте переріз похилого паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини двох суміжних ребер основи паралельно бічному ребру. Знайдіть відношення об'ємів отриманих призм.

1217. Основою призми є правильний трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є ромбом з гострим кутом α. Знайдіть об'єм призми. Обчисліть, якщо $a = 17$ см, $\alpha = 65°$.

1218. Основою призми є рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є ромбом, у якого менша діагональ дорівнює b. Знайдіть об'єм призми.

1219. У похилій трикутній призмі площа однієї з бічних граней Q, а відстань від протилежного ребра до площини цієї грані m. Знайдіть об'єм призми.

Б

1220. Основа похилої призми – рівнобічна трапеція, сторони якої 44 см, 17см, 28 см і 17 см. Один з діагональних перерізів призми перпендикулярний до основи і є ромбом з кутом 45°. Знайдіть об'єм призми.

1221. Знайдіть об'єм похилого кругового циліндра, якщо радіус його основи 12 см, а твірна дорівнює 23 см і нахилена до площини основи під кутом 72°.

1222. Бічні ребра похилої трикутної призми дорівнюють по 8 см, а відстані між ними 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть об'єм призми.

1223. Площі двох бічних граней похилого паралелепіпеда дорівнюють 21 см^2 і 49 см^2, а кут між ними 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 7 см.

1224. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне ребро дорівнює 10 см і віддалене від двох інших ребер на 5 см і 12 см. Знайдіть об'єм призми.

1225. Основа призми – правильний трикутник зі стороною a. Усі бічні грані – ромби. Одна з вершин верхньої основи рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайдіть об'єм призми.

1226. Основою паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 6 см, 14 см і меншою діагоналлю 12 см. Діагональний переріз, який проходить через більшу діагональ основи, перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 80 см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1227. Знайдіть об'єм похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $AC = 10$ см, $B_1D_1 = 8$ см, кут між ними дорівнює 30°, а відстань 5 см.

1228. Довжини трьох ребер паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, дорівнюють a, b і c. Ребра a і b перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним з них кут α. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1229. Побудуйте переріз похилого паралелепіпеда площиною, яка проходить через дану точку сторони основи і ділить цей паралелепіпед на дві призми рівних об'ємів.

1230. Побудуйте переріз трикутної призми площиною, яка проходить через бічне ребро і розтинає її на дві частини, об'єми яких відносяться як 1 : 2.

В

1231. У похилій призмі $ABCA_1B_1C_1$ $AC = 8$ см, $BB_1 = 6$ см, кут між AC і BB_1 дорівнює 60°, а відстань від BB_1 до грані AA_1C_1C дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм призми.

1232. Доведіть, що із всіх призм, які мають одну й ту саму основу і бічне ребро, найбільший об'єм має пряма призма.

1233. Знайдіть об'єм похилого циліндра, якщо його твірна дорівнює l, а січна площина, перпендикулярна до твірних, перетинає його по кругу радіуса r.

1234*. Користуючись формулою об'єму похилої призми, доведіть теорему про площу проекції многокутника на площину.

1235*. Користуючись формулою об'єму циліндра, виведіть формулу для обчислення площі еліпса.

Вправи для повторення

1236. Площина, паралельна осі циліндра, віддалена від неї на 15 см. Діагональ утвореного перерізу дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 17 см.

1237. Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якого $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, а діагональ B_1C утворює з площиною AA_1B_1 кут φ. Знайдіть об'єм призми.

1238. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням ромба з діагоналями 6 см і 8 см навколо прямої, що містить сторону ромба.

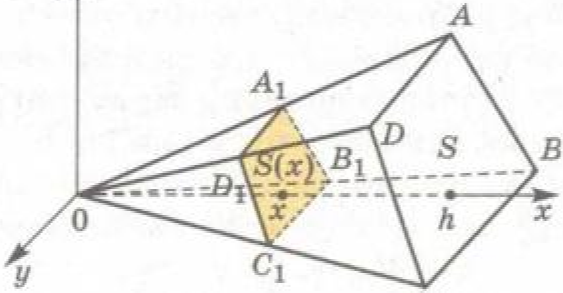
§ 32 ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ І ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ

Виведемо формули для обчислення об'ємів піраміди і зрізаної піраміди.

Теорема 29. ***Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано піраміду, площа основи якої S, а висота h. Візьмемо її вершину за початок координат, а вісь x направимо перпендикулярно до площини основи (мал. 249). Кожна січна площина, перпендикулярна до осі x, перетинає піраміду по многокутнику, подібному основі. Якщо січна площина віддалена від початку координат на x, то за теоремою 15 відповідна площа перерізу $S(x)$ задовольняє умову

$$S(x) : S = x^2 : h^2.$$



Мал. 249

Звідси $S(x)=\dfrac{S}{h^2}x^2$.

Ця функція квадратична, тому і неперервна на $[0; h]$. Отже, об'єм даної піраміди:

$$V=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}Sh,$$

$$V=\frac{1}{3}Sh.$$

Теорему доведено.

!

Теорема 30. ***Об'єм зрізаної піраміди, площі основ і висота якої дорівнюють відповідно S, S_1 і h, можна знаходити за формулою***

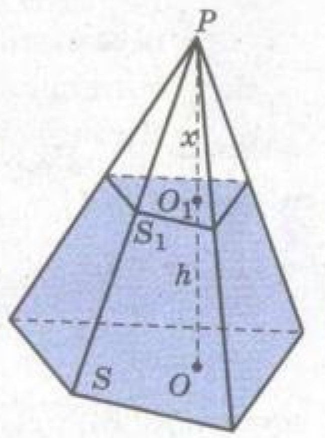
$$V=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS_1}+S_1).$$

ДОВЕДЕННЯ. Якщо P – вершина піраміди, частиною якої є дана зрізана піраміда, то об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів двох пірамід (мал. 250). Площі S і S_1 їхніх основ відносяться як квадрати відстаней від відповідних площин до вершини P. Тому, якщо $PO_1=x$, то

$$\frac{S}{S_1}=\frac{(x+h)^2}{x^2},$$

звідки

$$x=\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}.$$



Мал. 250

Отже, об'єм даної зрізаної піраміди:

$$V=\frac{1}{3}(x+h)\cdot S-\frac{1}{3}xS_1=\frac{1}{3}\left(hS+x(S-S_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(hS+\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}\cdot(S-S_1)\right)=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS_1}+S_1).$$

Тобто

$$V=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS_1}+S_1).$$

Теорему доведено.

Як відносяться об'єми подібних пірамід? Якщо коефіцієнт подібності k, то відношення їхніх висот дорівнює k, відношення площ основ – k^2, відношення об'ємів подібних пірамід дорівнює k^3. Отже, об'єми подібних пірамід відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів.

Подібні многогранники можна розбити на попарно подібні трикутні піраміди. Тому й ***об'єми подібних многогранників відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів.*** Можна довести, що й об'єми будь-яких подібних тіл відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як знайти об'єм піраміди?
2. Виведіть формулу для знаходження об'єму піраміди.
3. Чому дорівнює об'єм зрізаної піраміди?
4. Виведіть формулу для знаходження об'єму зрізаної піраміди.
5. Як відносяться об'єми подібних многогранників?
6. Як відносяться об'єми будь-яких подібних тіл?

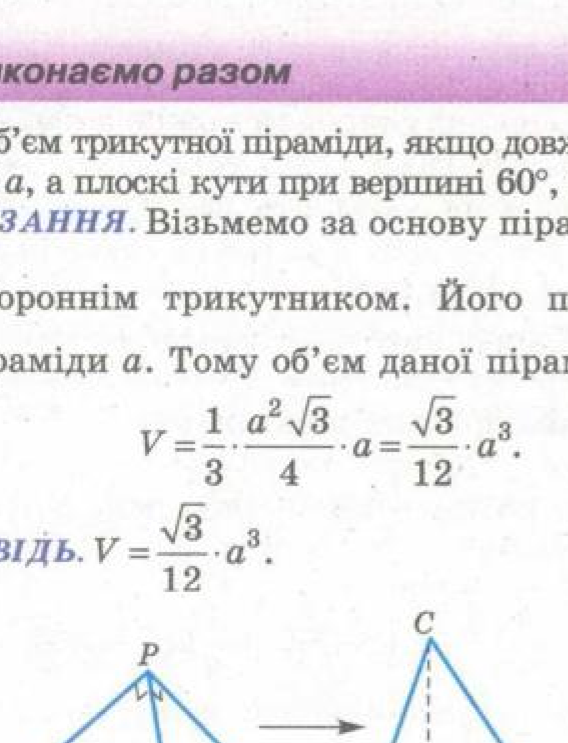
Виконаємо разом

1. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, якщо довжина кожного її бічного ребра a, а плоскі кути при вершині 60°, 90° і 90° (мал. 251).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Візьмемо за основу піраміди її грань, яка є рівностороннім трикутником. Його площа $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а висота піраміди a. Тому об'єм даної піраміди

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot a^3.$$

ВІДПОВІДЬ. $V=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot a^3.$



Мал. 251

2. Доведіть, що коли многогранник, описаний навколо кулі радіуса r, має площу поверхні S, то його об'єм $V = \frac{1}{3}Sr$.

ДОВЕДЕННЯ. Сполучивши центр кулі з кожною вершиною описаного n-гранника, дістанемо n пірамід. Висота кожної з них дорівнює радіусу кулі r, а площа основи – площі відповідної грані многогранника. Тому, якщо $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – *площі граней описаного многогранника, то його об'єм*

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \ldots + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)r = \frac{1}{3}Sr.$$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1239. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 4 см, а висота – 3 см.

1240. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а гіпотенуза дорівнює висоті піраміди.

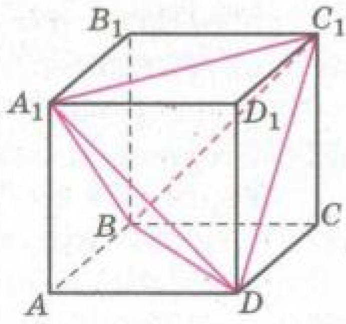
1241. Знайдіть об'єм піраміди, в основі якої лежить ромб з діагоналями a і b, якщо висота піраміди дорівнює h.

1242. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см^3, а висота – 6 см. Чому дорівнює сторона основи?

1243. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, у якої бічні ребра взаємно перпендикулярні та кожне з них дорівнює a.

1244. Об'єм куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює V (мал. 252). Знайдіть об'єм піраміди:

а) A_1ABD; б) A_1C_1BD.



Мал. 252

1245. Через середину висоти піраміди проведено січну площину, паралельну основі. Як відносяться об'єми утворених частин піраміди?

1246. Площі поверхонь двох подібних пірамід відносяться як $m : n$. Як відносяться їхні об'єми?

А

1247. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює 1 дм.

1248. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її діагональний переріз – правильний трикутник зі стороною a.

1249. Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, площа основи якої 5,3 га, а висота 147 м.

1250. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b, а плоский кут при вершині $90°$.

1251. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні, а їхні довжини дорівнюють a, b, c. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

1252. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює b і:

а) нахилене до площини основи під кутом α;
б) утворює кут β з висотою піраміди;
в) нахилене до сторони основи під кутом γ.

1253. Діагональний переріз правильної шестикутної піраміди ділить її на дві нерівні частини. Як відносяться їхні об'єми?

1254. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Знайдіть об'єм піраміди, якщо двогранні кути при ребрах її основи $90°$, $45°$ і $45°$.

1255. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

1256. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Двогранні кути при кожному ребрі основи дорівнюють по $45°$. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

1257. Основа піраміди – рівнобічна трапеція зі сторонами 4 см, 7 см, 7 см і 10 см, усі бічні грані нахилені до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

1258. За бічним ребром b і плоским кутом 2α при вершині знайдіть об'єм правильної піраміди:

а) трикутної; б) чотирикутної;
в) шестикутної; г) n-кутної.

1259. Сторони основи трикутної піраміди дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см, а її об'єм – 80 см^3. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при її основі рівні між собою.

Б

1260. Знайдіть об'єм трикутної піраміди, якщо одна зі сторін основи дорівнює 10 м, протилежне їй бічне ребро 16 м, а всі інші ребра мають довжину 13 м.

1261. Знайдіть об'єм правильного октаедра, якщо його ребро дорівнює a.

1262. Через середини кожних трьох ребер куба, які виходять з однієї вершини, проведено перерізи. Знайдіть об'єм утвореного 14-гранника, якщо ребро куба дорівнює a.

1263. Площина, паралельна основі, ділить піраміду на два многогранники рівних об'ємів. У якому відношенні ця площина ділить висоту піраміди?

1264. ***ЗАДАЧА ДЛЯ КМІТЛИВИХ.*** Ви витрачаєте мило рівномірно. Через сім днів усі розміри шматка мила зменшились удвічі. На скільки днів вам ще вистачить цього мила?

1265. Дно котлована – прямокутник зі сторонами 12 м і 24 м, його глибина 4 м. Знайдіть об'єм котлована, якщо його двогранні кути при основі по 120°. Чи можна об'єм такого многогранника обчислити за формулою об'єму зрізаної піраміди?

1266. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, основи якої – квадрати зі сторонами 2 см і 5 см, одна з бічних граней – рівнобічна трапеція, перпендикулярна до площини основи, а протилежна грань утворює з основою кут 45°.

1267. Висоту правильної трикутної піраміди поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основі. Визначте об'єм зрізаної піраміди, обмеженої цими площинами, якщо ребро основи дорівнює 6 см, а двогранний кут при ребрі основи 60°.

1268. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, площі основ якої дорівнюють 12 см^2 і 75 см^2, а висота повної піраміди 15 см.

1269. Одне ребро трикутної піраміди дорівнює b, а кожне з решти – a. Знайдіть об'єм піраміди.

1270. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений $\triangle ABC$, у якого $AB = BC$ і $\angle ABC = \alpha$. Грань ASC перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутами φ. Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічної грані ASB дорівнює l.

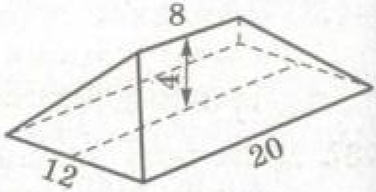
1271. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим кутом α. Бічна грань, яка проходить через гіпотенузу трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

1272. Знайдіть об'єм правильної шестикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює a, а кут між суміжними бічними гранями α.

1273. Кути правильного тетраедра з ребрами a зрізали так, що вийшов многогранник, у якого чотири грані – правильні трикутники і чотири грані – правильні шестикутники. Знайдіть об'єм утвореного многогранника.

1274. Знайдіть об'єм тетраедра, вершини якого – точки $P(1; 2; 6)$, $O(0; 0; 0)$, $A(2; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$.

1275. Знайдіть об'єм горища за розмірами, даними на малюнку 253.



Мал. 253

1276. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює a. При якій висоті її об'єм буде найбільшим?

В

1277. Бічне ребро правильної n-кутної піраміди дорівнює a. Знайдіть найбільше можливе значення об'єму піраміди.

1278. Обчисліть об'єм спільної частини двох пірамід з однаковою висотою h, якщо спільною їхньою основою є квадрат зі стороною a, а висоти проходять через протилежні вершини квадрата основи.

1279. Знайдіть об'єм тетраедра $ABCD$, якщо $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.

1280. В основі піраміди $SABCD$ лежить паралелограм $ABCD$. Через ребро AB і середину SD проведено площину. У якому відношенні ця площина ділить об'єм піраміди?

1281. У правильну чотирикутну піраміду, двогранний кут при основі якої дорівнює α, вписано кулю радіуса r. Знайдіть об'єм піраміди, вершина якої лежить у центрі кулі, а вершини основи – в точках дотику кулі до бічних граней даної піраміди.

1282. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. До кулі, паралельно основі піраміди, проведена дотична площина, яка ділить об'єм піраміди у відношенні $a : b$, рахуючи від вершини. Знайдіть кут між висотою піраміди та її бічною гранню.

1283. З середини висоти правильної чотирикутної піраміди до бічного ребра і бічної грані проведено перпендикуляри завдовжки m і n відповідно. Знайдіть об'єм піраміди.

1284. Знайдіть об'єм зрізаної трикутної піраміди, основами якої є правильні трикутники зі сторонами 2 м і 6 м, якщо одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з площиною основи кут 30°.

1285. У зрізаній трикутній піраміді через сторону верхньої основи проведено площину паралельно бічному ребру. У якому відношенні розділиться об'єм зрізаної піраміди, якщо відповідні сторони основ пропорційні числам 1 і 3?

1286*. Знайдіть об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, якщо відомі довжина l середньої лінії бічної грані та відстань d між центрами вписаної й описаної куль.

Вправи для повторення

1287. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а бічна поверхня – 32 см^2. Знайдіть об'єм призми.

1288. Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ зі стороною 4 см і кутом 60°. Ребро CC_1 також дорівнює 4 см та утворює з ребрами CB і CD кути 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

1289. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ площина, проведена через середину ребра AA_1 та ребро BC, перпендикулярна до площини AB_1C_1. Знайдіть об'єм призми, якщо $AB = a$.

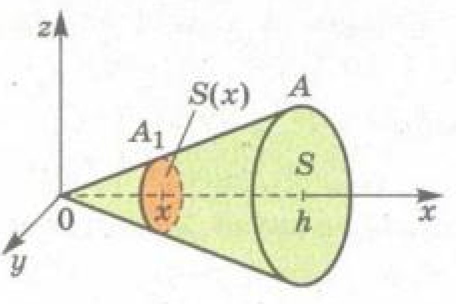
§ 33 ОБ'ЄМ КОНУСА І ЗРІЗАНОГО КОНУСА

Якщо у формулюваннях і доведеннях теорем 29 і 30 замінити слова «піраміда» на «конус», а «зрізана піраміда» на «зрізаний конус», дістанемо теореми про об'єми конуса та зрізаного конуса (мал. 254, 255).

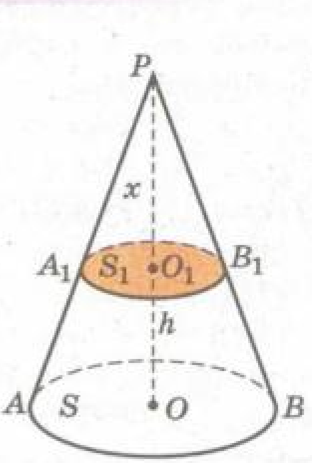
Теорема 31. ***Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту.***

Теорема 32. ***Об'єм зрізаного конуса, площі основ якого S і S_1, а висота h, можна знаходити за формулою***

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS_1} + S_1).$$



Мал. 254



Мал. 255

Основи конуса та зрізаного конуса – круги, а площа круга радіуса r дорівнює πr^2. Тому об'єм конуса можна обчислювати за формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

де h – його висота, а r – радіус основи.

Якщо h – висота зрізаного конуса, а r і r_1 – радіуси основ, то його об'єм

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rr_1 + r_1^2).$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому дорівнює об'єм конуса?
2. Чому дорівнює об'єм зрізаного конуса?
3. Чому дорівнює площа круга радіуса r?
4. Як знайти об'єм конуса, знаючи радіус його основи і висоту?

Виконаємо разом

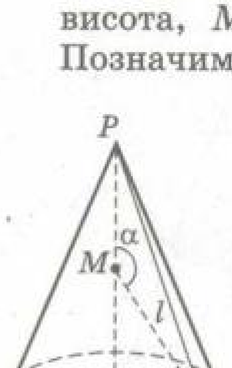
1. Конус і циліндр мають рівні радіуси та висоти. Як відносяться їхні об'єми?

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. $V_к : V_ц = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \pi r^2 h = 1 : 3.$

   ВІДПОВІДЬ. 1 : 3.

2. Знайдіть об'єм конуса, твірну якого l видно із середини висоти конуса під кутом α.

   РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $PA = l$ – твірна конуса, PO – його висота, M – середина висоти і $\angle PMA = \alpha$ (мал. 256). Позначимо $OA = x$. Тоді з прямокутного $\triangle AMO$ знайдемо: $MO = x\mathrm{ctg}\angle AMO = x\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -x\mathrm{ctg}\alpha$. $PO = 2 \cdot MO = -2x\mathrm{ctg}\alpha$. З $\triangle POA$ за теоремою Піфагора маємо:



Мал. 256

$$x^2 + (-2x\mathrm{ctg}\alpha)^2 = l^2,\ x = \frac{l}{\sqrt{1+4\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}.$$

Це радіус основи конуса. Знайдемо його висоту:

$$h = -2x\,\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{2l\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+4\,\mathrm{ctg}^2\alpha}}.$$

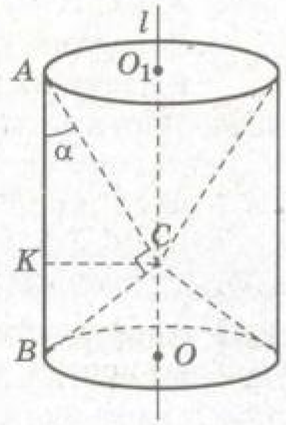
Отже, об'єм конуса:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{l}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}}\right)^2\cdot\left(-\frac{2l\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}}\right)=-\frac{2\pi l^3\operatorname{ctg}\alpha}{3\sqrt{(1+4\operatorname{ctg}^2\alpha)^3}}.$$

Тут $90° < \alpha < 180°$, адже $\angle AMO$ гострий.

ВІДПОВІДЬ. $V=-\dfrac{2\pi l^3\operatorname{ctg}\alpha}{3\sqrt{(1+4\operatorname{ctg}^2\alpha)^3}}$, де $90° < \alpha < 180°$.

3. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з гіпотенузою c і гострим кутом α навколо прямої, яка проходить через вершину прямого кута паралельно гіпотенузі.



Мал. 257

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $AB = c$ і $\angle BAC = \alpha$, обертається навколо прямої l (мал. 257).

У результаті утвориться циліндр, з якого вирізано два конуси з висотами CO і CO_1. Щоб знайти об'єм утвореного тіла, потрібно від об'єму циліндра відняти об'єми конусів, тобто

$$V=\pi\cdot KC^2\cdot OO_1-\left(\frac{1}{3}\pi\cdot KC^2\cdot CO+\frac{1}{3}\pi\cdot KC^2\cdot CO_1\right)=$$

$$=\pi\cdot KC^2\cdot OO_1-\frac{1}{3}\pi\cdot KC^2(CO+CO_1)=$$

$$=\pi\cdot KC^2\cdot OO_1-\frac{1}{3}\pi\cdot KC^2\cdot OO_1=\frac{2}{3}\pi\cdot KC^2\cdot OO_1.$$

Знайдемо KC з $\triangle ABC$ за методом площ:

$$KC=\frac{AC\cdot BC}{AB}.$$

Оскільки $AC = c\cos\alpha$, $BC = c\sin\alpha$, то

$$KC=\frac{c\cos\alpha\cdot c\sin\alpha}{c}=c\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}c\sin 2\alpha.$$

Тоді $V=\dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{4}c^2\sin^2 2\alpha\cdot c=\dfrac{1}{6}\pi c^3\sin^2 2\alpha.$

ВІДПОВІДЬ. $V=\dfrac{1}{6}\pi c^3\sin^2 2\alpha.$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1290. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 3 см, а радіус основи 1 см.

1291. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 2 м, а твірна утворює з площиною основи кут 45°.

1292. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник з катетом $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм конуса.

1293. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутного трикутника з катетами 3 см і 5 см навколо більшого з катетів.

1294. Через середину висоти конуса проведено площину, паралельну основі. Знайдіть відношення об'єму зрізаного конуса до об'єму всього конуса.

А

1295. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

1296. Свинцевий конус, висота якого 18 см, переплавили в циліндр з такою самою основою. Знайдіть висоту циліндра.

1297. Купа щебеню має форму конуса, твірна якого 4 м. Знайдіть її об'єм, якщо кут природного ухилу (кут нахилу твірної до площини основи) для щебеню 30°.

1298. Є два конуси однакового зерна, один удвічі вищий від іншого. У скільки разів у першому конусі більше зерна, ніж у другому?

1299. Доведіть, що об'єми двох подібних конусів відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів.

1300. Знайдіть об'єм конуса, розгортка бічної поверхні якого – півкруг радіуса 12 см.

1301. Доведіть, що об'єм конуса, вписаного у правильну трикутну піраміду, в 4 рази менший за об'єм конуса, описаного навколо цієї піраміди.

1302. Визначте об'єм конуса, якщо в його основі хорда m стягує дугу φ, а кут між твірною та висотою дорівнює α.

1303. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді a, яку видно із центра основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм конуса.

1304. З центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр завдовжки d. Знайдіть об'єм конуса, якщо цей перпендикуляр утворює з площиною основи кут α.

1305. Осьовий переріз конуса – рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його поверхні дорівнює 12π см^2.

1306. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус вписаної кулі дорівнює r, а твірна утворює з площиною основи кут α.

1307. У кулю радіуса $2r$ вписано конус, радіус основи якого r. Знайдіть об'єм конуса.

1308. У сферу радіуса r вписано конус, твірна якого з висотою утворює кут α. Знайдіть об'єм конуса.

1309. Радіуси основ зрізаного конуса 10 см і 16 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм цього зрізаного конуса.

1310. Об'єм зрізаного конуса, у якого радіуси основ 4 см і 22 см, дорівнює об'єму циліндра такої самої висоти. Знайдіть радіус циліндра.

1311. Через точки, які ділять висоту зрізаного конуса на три рівні частини, проведено площини, паралельні основам. Знайдіть об'єми утворених частин даного зрізаного конуса, якщо його висота дорівнює 18 см, а радіуси основ 5 см і 11 см.

1312. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні ромба зі стороною 6 см і кутом 60° навколо прямої, проведеної через вершину тупого кута перпендикулярно до меншої діагоналі.

Б

1313. Через дві твірні конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи кут α і перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом β. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює l.

1314. Через дві твірні конуса, кут між якими α, проведено площину під кутом β до площини основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа перерізу дорівнює Q.

1315. Площина, проведена через вершину конуса, перетинає основу по хорді, довжина якої дорівнює радіусу цієї основи. Знайдіть відношення об'ємів отриманих частин конуса.

1316. Два конуси мають концентричні основи і спільну висоту h. Різниця кутів, утворених твірними з віссю, дорівнює β, кут нахилу твірної внутрішнього конуса до площини його основи дорівнює α. Знайдіть об'єм частини простору, що міститься між поверхнями конусів.

1317. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 16 см, а бічне ребро – 10 см. Навколо бічної грані описане коло, яке є основою конуса, твірна якого належить прямій, що містить бічне ребро піраміди. Знайдіть об'єм конуса.

1318. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус вписаної в нього кулі дорівнює r, а кут, під яким із центра кулі видно твірну, дорівнює α.

1319. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює 10 дм. Яким має бути діаметр основи, щоб об'єм конуса був найбільшим?

1320. Знайдіть відношення висоти конуса до діаметра, якщо при заданій площі бічної поверхні він має найбільший об'єм.

1321. Знайдіть найменший об'єм конуса, описаного навколо кулі радіуса r.

В

1322. Бічна поверхня конуса дотикається до вписаної кулі по паралелі 60°. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус кулі дорівнює 2.

1323. Знайдіть залежність між радіусом кулі r, площею поверхні S і об'ємом V описаного зрізаного конуса.

1324. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, у який вписано кулю радіуса r, якщо із центра кулі діаметр більшої основи видно під кутом α.

1325. Знайдіть об'єм зрізаного конуса, у якого діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна дорівнює l та утворює з площиною більшої основи кут α.

1326. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні ромба зі стороною a і гострим кутом α навколо прямої, яка проходить через вершину гострого кута ромба перпендикулярно до його сторони.

1327*. У конус вписано кулю радіуса r. Знайдіть об'єм конуса, коли відомо, що площина, яка дотикається до кулі та перпендикулярна до однієї з твірних конуса, віддалена від вершини конуса на відстань d.

1328*. Вершина конуса збігається з вершиною куба. Основа конуса дотикається до трьох граней куба, які збігаються у протилежній вершині куба. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник. Знайдіть відношення об'єму конуса до об'єму куба.

Вправи для повторення

1329. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює m, а кут між суміжними бічними гранями дорівнює φ. Знайдіть об'єм піраміди.

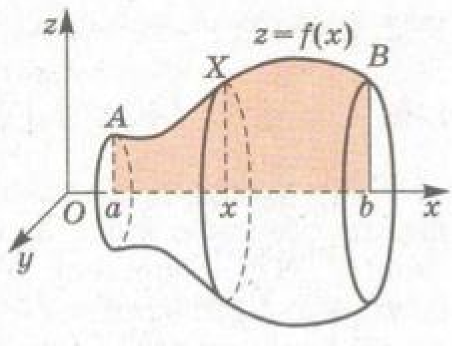
1330. У конус вписано циліндр, діагоналі осьового перерізу якого паралельні твірним конуса. Твірна конуса дорівнює l та утворює з площиною основи конуса кут α. Знайдіть об'єм циліндра. Обчисліть, якщо $l = 27$ см, $\alpha = 70°$.

1331. Знайдіть відстань від центра сфери до площини ромба, всі сторони якого дотикаються до цієї сфери, якщо радіус сфери 10 см, сторона ромба $8\sqrt{3}$ см, а гострий кут $60°$.

§ 34 ОБ'ЄМ КУЛІ ТА ЇЇ ЧАСТИН

Спочатку виведемо формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо її основи.

Уявимо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $z = f(x)$, віссю x, прямими $x = a$ і $x = b$ (мал. 258). Якщо цю криволінійну трапецію обертати навколо осі x, дістанемо деяке тіло обертання. Кожна площина, яка перпендикулярна до осі x і перетинає її в точці $x \in [a; b]$, перетинає дане тіло по кругу радіуса $f(x)$. Площа перерізу $S(x) = \pi f^2(x)$.



Мал. 258

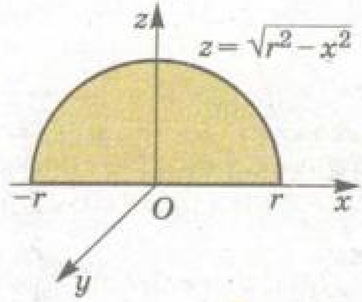
Якщо функція $f(x)$ неперервна, то неперервна і функція $S(x)$. Отже, об'єм даного тіла

$$V = \int_a^b S(x)dx,\ V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

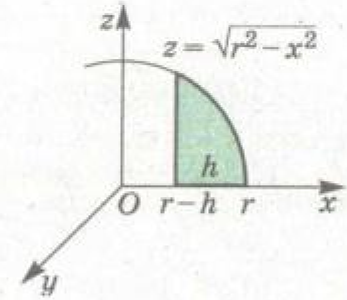
На основі цієї загальної формули доведемо теорему про об'єм кулі.

Теорема 33. *Об'єм кулі радіуса r дорівнює* $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ДОВЕДЕННЯ. Кулю радіуса r можна дістати обертанням навколо осі x криволінійної трапеції, обмеженої цією віссю та



Мал. 259



Мал. 260

графіком функції $z=\sqrt{r^2-x^2}$ (мал. 259). Отже, об'єм такої кулі

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left(r^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Повторимо деякі відомості про частини кулі. Частина кулі, яку відтинає площина, називається *кульовим сегментом*. Його поверхня складається із *сферичного сегмента* і круга – основи кульового сегмента. Відстань від основи кульового сегмента до паралельної їй площини, дотичної до сегмента, називають його *висотою*.

Формулу для обчислення об'єму кульового сегмента радіуса r і висоти h можна знайти так (мал. 260):

$$V_{\text{сегм}}=\pi\int_{r-h}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$

Тіло, утворене обертанням кругового сектора навколо радіуса, що обмежує його, називається *кульовим сектором*. На малюнку 215 зображено два кульових сектори: опуклий і неопуклий. Щоб знайти об'єм опуклого кульового сектора, треба до об'єму кульового сегмента додати об'єм відповідного конуса

$$V_{\text{сект}}=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)+\frac{\pi}{3}(r-h)(r^2-(r-h))^2=\frac{2}{3}\pi r^2h.$$

Щоб знайти об'єм неопуклого кульового сектора, треба відняти від об'єму кульового сегмента об'єм відповідного конуса. Результат в обох випадках буде однаковий (переконайтесь у цьому самостійно).

Якщо потрібно знайти об'єм кульового шару, то можна від об'єму кулі відняти об'єми двох сегментів.

Отже, обчислювати об'єм кулі, кульового сегмента, кульового сектора можна за формулами:

$$V_{\text{к}}=\frac{4}{3}\pi r^3,\ V_{\text{сегм}}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right),\ V_{\text{сект}}=\frac{2}{3}\pi R^2h.$$

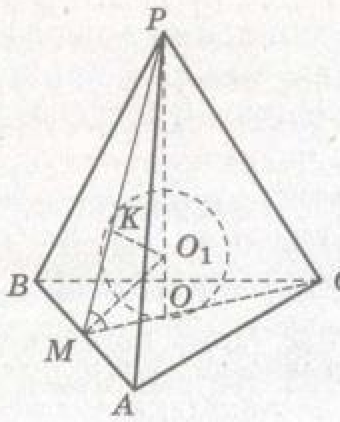
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Як знайти об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо її основи?
2. Доведіть формулу для знаходження об'єму кулі.
3. Сформулюйте означення кульового сегмента.
4. Як знайти об'єм кульового сегмента?
5. Сформулюйте означення кульового сектора.
6. Як знайти об'єм кульового сектора?
7. Сформулюйте означення кульового шару. Як знайти його об'єм?

Виконаємо разом

1. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильну трикутну піраміду, сторона основи якої a, а двогранний кут при ребрі основи α.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Центр O_1 кулі, вписаної у правильну піраміду, лежить на її висоті PO (мал. 261). Куля дотикається до бічної грані PAB у деякій точці K, яка лежить на апофемі PM.



Мал. 261

$$OM = \frac{1}{2}OC = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$\triangle O_1OM = \triangle O_1KM$, тому $\angle O_1MO = \frac{1}{2}\angle PMO = \frac{\alpha}{2}$.

З прямокутного трикутника O_1OM знаходимо:

$$OO_1 = OM\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отже, об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3 \mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

ВІДПОВІДЬ. $V = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3 \mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$, де $0° < \alpha < 90°$.

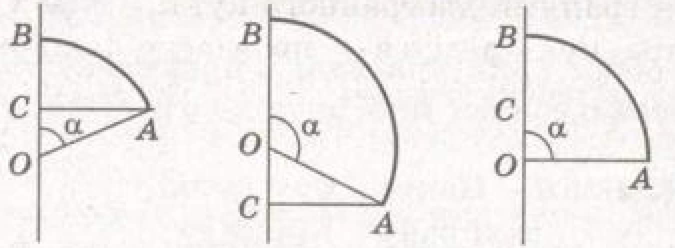
2. Круговий сектор з кутом α і радіусом r обертається навколо радіуса, що обмежує його. Доведіть, що об'єм утвореного тіла дорівнює $\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha)$.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай сектор OAB, у якого $OA = OB = r$ і $\angle O = \alpha$, обертається навколо прямої OB (мал. 262). Якщо C – проекція точки A на пряму OB, то коли $\alpha < 90°$, $BC = OB - OC = r - r\cos\alpha$. Якщо $\alpha > 90°$, $BC = BO + OC = r + r\cos(180° - \alpha) = r - r\cos\alpha$.

Якщо $\alpha = 90°$, $BC = OB = r - r\cos\alpha$.

Отже, при будь-якому значенні кута α $BC = r - r\cos\alpha = r(1 - \cos\alpha)$. Тоді

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r(1-\cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha).$$



Мал. 262

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1332. Чому дорівнює об'єм кулі радіуса 2 см?

1333. Як зміниться об'єм кулі, якщо її діаметр збільшити у 2 рази?

1334. Знайдіть об'єм кульового сегмента, висота якого дорівнює 3 см, а радіус –.5 см.

1335. Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо $r = 3$ см, $h = 1$ см.

1336. Чому дорівнює об'єм кулі, вписаної в куб, об'єм якого дорівнює 8 м^3?

1337. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, у який вписано кулю об'єму $\frac{4}{3}\pi$ см^3.

А

1338. Дано куб з ребром a. Знайдіть об'єм кулі:
а) вписаної в куб; б) описаної навколо куба.

1339. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у конус, твірна якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

1340. Доведіть теорему Архімеда: об'єм кулі в 1,5 раза менший від об'єму описаного навколо неї циліндра.

1341. З циліндра, висота якого дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого об'єму. Скільки процентів матеріалу сточено?

1342. З циліндра, осьовий переріз якого – квадрат зі стороною 10 см, коваль скував кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.

1343. Зі свинцевої кулі радіуса 10 мм роблять циліндричний диск завтовшки 3 мм. Який діаметр диска?

1344. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса, твірна якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α.

1345. Центр кулі радіуса r лежить на ребрі прямого двогранного кута. Знайдіть об'єми тіл, на які дана куля розтинається гранями двогранного кута.

1346. З центра кулі радіуса r проведено попарно перпендикулярні промені OA, OB і OC. Знайдіть об'єм меншої частини кулі, обмеженої площинами кутів AOB, BOC і COA.

1347. Кулю радіуса r розітнуто двома паралельними площинами так, що діаметр, перпендикулярний до цих площин, ділиться точками перетину на три рівні частини. Знайдіть об'єми цих частин кулі.

1348. Площина, перпендикулярна до діаметра кулі, розбиває цей діаметр на відрізки, пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть об'єми утворених кульових сегментів, якщо радіус кулі дорівнює 12 см.

1349. Знайдіть об'єм кульового шару, площі основ якого дорівнюють 225π см^2 і 264π см^2, а радіус кулі – 17 см.

1350. Півкруг радіуса 9 см, розбитий радіусами на три рівні кругові сектори, обертається навколо діаметра. Знайдіть об'єми тіл, утворених при обертанні цих секторів.

1351. Скільки кульок діаметра 0,6 см можна відлити зі шматка свинцю масою 1 кг? Густина свинцю 11,4 кг/дм^3.

1352. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра іншого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?

1353. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі радіуса r у конус, радіус і висота якого дорівнюють r, учень дійшов висновку, що об'єм півкулі у 2 рази більший від об'єму конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?

Б

1354. Маса порожнистої чавунної кулі 1,57 кг, її зовнішній діаметр 10 см. Знайдіть внутрішній діаметр, якщо густина чавуну 7,3 кг/дм^3.

1355. Якою має бути загальна маса космічного апарата, що має форму кулі радіуса 1 м, щоб він не тонув у воді?

1356. З краплини мильного розчину діаметра 6 мм хлопчик видув бульку діаметра 30 см. Знайдіть товщину плівки бульки.

1357. Куля плаває у воді так, що занурена у воду тільки її половина. Знайдіть густину матеріалу, з якого виготовлено кулю.

1358. Площина ділить кулю на два кульових сегменти, об'єми яких 252π см^3 і 720π см^3. Знайдіть висоту більшого сегмента.

1359. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильний тетраедр з ребром a.

1360. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у правильний октаедр з ребром a.

1361. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, об'єм якої дорівнює V, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм кулі.

1362. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди з висотою h і плоским кутом при вершині α.

В

1363. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильної зрізаної шестикутної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють 3 см і 4 см, а висота 7 см.

1364. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду. Знайдіть об'єм кулі, якщо відстань від центра кулі до сторони основи дорівнює $\sqrt{5}$ м, а до бічного ребра – $\sqrt{3}$ м.

1365. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Знайдіть відношення об'єму кулі до об'єму піраміди, якщо площа бічної грані піраміди дорівнює площі основи.

1366. Відношення об'єму зрізаного конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює m. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.

1367. Знайдіть радіуси основ зрізаного конуса, у який вписано кулю радіуса R, якщо його об'єм у k разів більший за об'єм кулі.

1368. Куля радіуса 6 дм плаває у воді. Знайдіть висоту частини кулі, яка виступає з води, якщо густина матеріалу кулі 0,7 г/см^3.

1369*. Куля дотикається до 12 ребер куба. Обчисліть відношення об'єму тієї частини кулі, що знаходиться всередині куба, до об'єму куба.

1370*. Куля дотикається до однієї грані куба і чотирьох ребер, які належать протилежній грані. Знайдіть відношення об'єму куба до об'єму цієї кулі.

Вправи для повторення

1371. Знайдіть відношення об'ємів конусів, один з яких описаний навколо правильної трикутної піраміди, а інший вписаний у цю піраміду.

1372. Осьовим перерізом конуса є трикутник, у якого кут при вершині дорівнює α, а радіус вписаного кола r. Знайдіть об'єм конуса.

1373. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), у якого $BC = a$, $\angle A = 60°$, навколо прямої, яка проходить через вершину кута A перпендикулярно до:

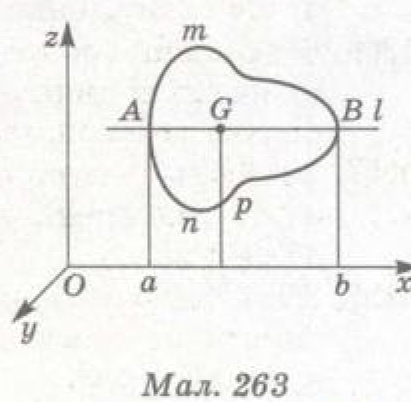
а) AC; б) AB; в) бісектриси кута A.

§35 ТЕОРЕМА ГУЛЬДІНА

Раціоналізувати обчислення об'ємів багатьох тіл обертання дає змогу теорема Гульдіна.

Теорема 34. **Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, яка лежить в її площині та не перетинає її, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного її центром мас.**

Повне доведення цієї теореми громіздке. Ми доведемо її тільки для випадку, коли фігура, яка обертається, симетрична відносно прямої або точки.



Мал. 263

Нехай дана фігура F симетрична відносно прямої l, паралельної осі x і віддаленої від цієї осі на відстань p (мал. 263). Якщо кривій AmB відповідає задана на відрізку $[a; b]$ функція $z = p + f(x)$, то кривій AnB – задана на цьому самому відрізку функція $z = p - f(x)$. Тому об'єм V тіла, утвореного обертанням фігури F навколо осі x, дорівнює

$$\pi\int_a^b (p+f(x))^2 dx - \pi\int_a^b (p-f(x)^2)dx = 4\pi p\int_a^b f(x)dx.$$

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ виражає площу фігури, обмеженої лінією AmB і віссю l, він дорівнює $0{,}5S$. Отже, об'єм розглядуваного тіла обертання $V = 2\pi pS$, де S – площа плоскої фігури, що обертається, $2\pi p$ – довжина кола, описаного центром мас G фігури F.

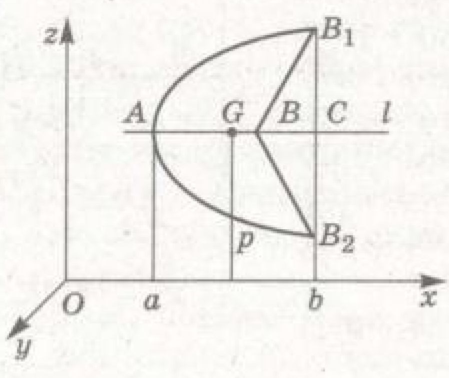
Якщо фігура F не опукла, її можна розбити на частини. Наприклад, якщо S, S_1, S_2 – площі фігур, обмежених лініями AB_1BB_2A, AB_1CB_2A і BB_1CB_2B (мал. 264), то $S = S_1 - S_2$ і шуканий об'єм

$$V = 2\pi pS_1 - 2\pi pS_2 = 2\pi p(S_1 - S_2) = 2\pi pS.$$

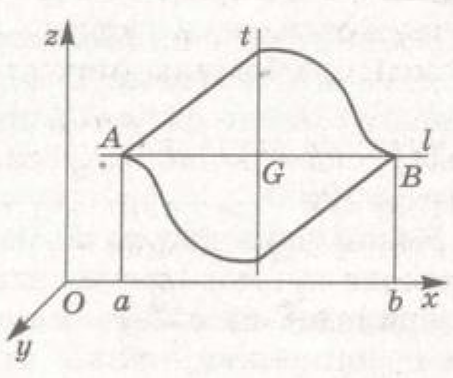
Якщо фігура обертання F центрально симетрична, то проведемо через її центр симетрії прямі l і t, паралельні відповідно осям x і z (мал. 265). Нехай S і p – площа фігури F і відстань від її центра мас до осі x. Замінимо у фігурі F ту її частину, яка знаходиться нижче від прямої l, на симетричну їй відносно прямої t. Дістанемо нову фігуру F_1, симетричну прямій l. Об'єм тіла, утвореного обертанням фігури F_1 навколо осі x, дорівнює $2\pi pS$. Площі фігур F і F_1 рівні, рівні й об'єми тіл, утворених обертанням цих фігур навколо осі x. Тому об'єм тіла, утвореного обертанням фігури F навколо осі x, і в цьому випадку дорівнює $2\pi pS$.

Наслідок. ***Об'єм тора, радіуси якого ρ і r*** **(див. мал. 226),** ***можна знаходити за формулою***

$$V = 2\pi^2\rho r^2.$$



Мал. 264



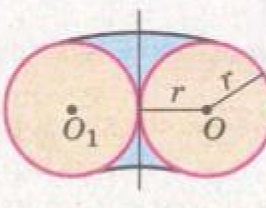
Мал. 265

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему Гульдіна.
1. Доведіть теорему Гульдіна у випадку, коли фігура, яка обертається, симетрична відносно прямої.
2. Чи виконується теорема Гульдіна у випадку, коли фігура, яка обертається, не опукла?
3. Доведіть теорему Гульдіна у випадку, коли фігура F симетрична відносно точки.
4. Чому дорівнює об'єм тора?
5. Як знайти центр мас для: а) трикутника; б) квадрата; в) правильного шестикутника?

Виконаємо разом

1. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга радіуса r навколо дотичної до його кола.



Мал. 266

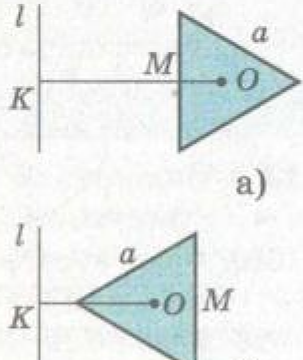
РОЗВ'ЯЗАННЯ. На малюнку 266 зображено осьовий переріз розглядуваного тіла обертання.

Площа круга, який обертається, дорівнює πr^2. Відстань центра круга O від осі обертання дорівнює r. Тому за теоремою Гульдіна об'єм тіла

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 r^3.$$

2. Рівносторонній трикутник зі стороною a обертається навколо прямої, яка паралельна стороні трикутника і знаходиться на відстані d ($d > a$) від неї. Знайдіть об'єм тіла обертання.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Можливі два варіанти розміщення трикутника відносно прямої l, навколо якої він обертається (мал. 267, *а*, *б*). Центр мас трикутника знаходиться в точці перетину його медіан. Медіана рівностороннього трикутника дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, тому $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Тоді OK – відстань від центра мас трикутника до прямої l – у першому випадку дорівнює $d + \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а у другому випадку $d - \frac{a\sqrt{3}}{6}$.



Мал. 267

Знаючи, що площа трикутника дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, можемо знайти об'єм утвореного тіла. У першому випадку

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi\left(d + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \pi\left(\frac{a^2 d\sqrt{3}}{2} + \frac{a^3}{4}\right),$$

а у другому випадку

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi\left(d - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \pi\left(\frac{a^2 d\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3}{4}\right).$$

ВІДПОВІДЬ.

$$V = \pi\left(\frac{a^2 d\sqrt{3}}{2} + \frac{a^3}{4}\right) \text{ або } V = \pi\left(\frac{a^2 d\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3}{4}\right).$$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1374. Чому дорівнює довжина кола, описаного центром мас квадрата при обертанні цього квадрата навколо його сторони, яка дорівнює a?

1375. Чому дорівнює довжина кола, описаного центром мас правильного шестикутника при обертанні цього шестикутника навколо сторони, яка дорівнює a?

1376. Визначте об'єм тіла, утвореного при обертанні квадрата зі стороною a навколо його сторони.

1377. Чому дорівнює об'єм тіла, утвореного обертанням рівностороннього трикутника зі стороною a навколо його сторони?

1378. Квадрат зі стороною 2 см обертається навколо прямої, яка паралельна його стороні та віддалена від неї на 3 см. Знайдіть відстань від цієї прямої до центра мас квадрата й об'єм утвореного тіла обертання. Скільки розв'язків має задача?

А

1379. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника з основою a і висотою h навколо його основи.

1380. Ромб зі стороною a і гострим кутом α обертається навколо осі, яка проходить через вершину гострого кута паралельно його діагоналі. Знайдіть об'єм тіла обертання.

1381. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням правильного шестикутника зі стороною a навколо сторони.

1382. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата навколо осі, яка проходить через вершину квадрата і паралельна його діагоналі, якщо довжина діагоналі d.

1383. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата навколо осі, яка проходить через вершину квадрата і перпендикулярна до його діагоналі, якщо довжина сторони квадрата a. Довизначте задачу.

Б

1384. Знайдіть розміщення центра мас даного півкруга.

1385. Півкруг радіуса r обертається навколо прямої, яка дотикається до півкола і паралельна діаметру. Знайдіть об'єм тіла обертання.

1386. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга радіуса $r = 25$ см навколо дотичної до його кола.

1387. Доведіть теорему Гульдіна для випадку, коли фігура F – трикутник.

1388. Рівнобедрений трикутник, у якого бічна сторона дорівнює b, а кут при вершині α, обертається навколо бічної сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

1389. $ABCD$ – прямокутник. Знайдіть відношення об'ємів тіл, утворених обертанням трикутників ABD і BCD навколо прямої AB. Узагальніть задачу на випадок паралелограма.

1390. Знайдіть відношення об'ємів тіл, утворених обертанням трикутника навколо кожної з його сторін, якщо вони дорівнюють a, b, c.

1391. Паралелограм обертається навколо осі, яка проходить через вершину тупого кута паралельно діагоналі. Знайдіть об'єм тіла обертання, якщо площа паралелограма дорівнює S, а більша діагональ d.

1392. $ABCD$ – паралелограм, $AK \parallel BD$. Знайдіть відношення об'ємів тіл, утворених обертанням трикутників ABD і BCD навколо прямої AK.

1393. Точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 4)$ – вершини трикутника. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо прямої:
а) AC; б) BC.

В

1394. У трикутнику дано основу a та прилеглі кути α і $90° + \alpha$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо його основи. Обчисліть, якщо $a = 18$ дм, $\alpha = 41°$.

1395. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням прямокутника $ABCD$ навколо осі, яка проходить через його вершину A паралельно діагоналі $BD = d$, якщо кут ADB дорівнює α.

1396. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата навколо осі, яка проходить через середини його суміжних сторін. Сторона квадрата дорівнює a.

1397. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо його ребра, якщо довжина ребра куба дорівнює a.

1398. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням правильного тетраедра навколо його ребра, якщо довжина ребра дорівнює a.

1399*. V – об'єм тіла, утвореного обертанням куба навколо його діагоналі, довжина якої дорівнює d. Що більше: V чи $\frac{2}{9}\pi d^3$?

Вправи для повторення

1400. Основи циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат, є перерізами кулі. Знайдіть відношення об'ємів кулі та циліндра.

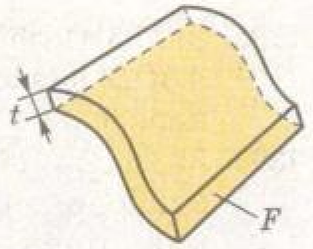
1401. Півкруг радіуса 9 см, який обертається навколо свого діаметра, розбито радіусами на три кругових сектори з кутами 60°, 90° і 30°, взятих у такому порядку. Знайдіть об'єми тіл, утворених при обертанні цих секторів.

1402. У правильну чотирикутну зрізану піраміду, сторони основ якої відносяться як $a : b$, вписано кулю. Знайдіть відношення об'ємів зрізаної піраміди і кулі.

§ 36 ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ

Формули для обчислення площ бічних поверхонь циліндра і конуса були виведені через розгортки цих поверхонь (див. § 25 і § 26). Але розгорнути сферу на площину неможливо. Тому узагальнимо поняття площі поверхні.

Нехай дано деяку поверхню F – плоску або криву, але таку, що в кожній її точці можна побудувати площину, дотичну до даної поверхні. Саме такими є поверхні кулі, циліндра, конуса, тора та інших тіл, які розглядаються у цьому підручнику. Уявимо, що від кожної точки даної поверхні з одного від неї боку проведено відрізок завдовжки t, перпендикулярний до площини, яка дотикається до поверхні у цій точці. Тіло, утворене всіма такими відрізками, назвемо *шаром товщини* t поверхні F (мал. 268). Наочно його можна уявити як шар фарби товщиною t, нанесений на дану поверхню з одного боку. Об'єм V_t цього шару може бути числовою характеристикою площі. Наприклад, якщо на фарбування кулі йде фарби в S раз більше, ніж на фарбування листа



Мал. 268

жерсті площею 1 м^2, то площа поверхні кулі дорівнює приблизно S м^2. Якщо товщина шару t, то на фарбування листа і кулі йде відповідно t м^3 і $V_t = St$ м^3 фарби. Отже, $S \approx \frac{V_t}{t}$. Ця рівність тим точніша, чим менше t. Ось чому є сенс прийняти таке означення.

Нехай V_t – об'єм шару товщини t поверхні F. Тоді *площею даної поверхні* будемо називати границю відношення $\frac{V_t}{t}$, коли $t \to 0$, тобто $S = \lim\limits_{t \to 0} \frac{V_t}{t}$.

Якщо поверхня F – плоский многокутник або круг площі S, то відповідний шар товщини t – призма або циліндр об'єму $V_t = St$. У цьому випадку

$$\lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{St}{t} = S.$$

Для бічної поверхні циліндра радіуса r і висоти h об'єм шару товщини t

$$V_t = \pi(r + t)^2 h - \pi r^2 h = \pi h t(2r + t).$$

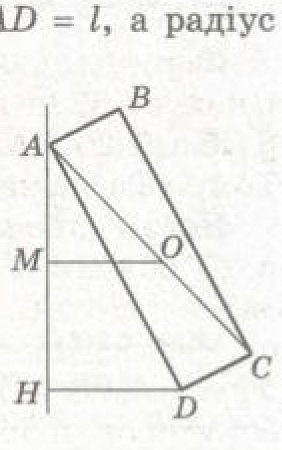
Тому її площа

$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} \pi h(2r + t) = 2\pi r h.$$

Для бічної поверхні конуса, твірна якого $AD = l$, а радіус $HD = r$, об'єм V_t шару товщини t дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням прямокутника $ABCD$ навколо прямої AH (мал. 269). Якщо OM – відстань від прямої AH до середини діагоналі AC, то за теоремою Гульдіна $V_t = 2\pi \cdot MO \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot MO \cdot lt$. Якщо $t \to 0$, то $C \to D$ і $MO \to \frac{r}{2}$.

Отже,

$$S = \lim_{t \to 0} \frac{V_t}{t} = \lim_{t \to 0} 2\pi l \cdot MO = \pi r l.$$



Мал. 269

Як бачимо, нове означення площі поверхні не суперечить попереднім трактуванням площі многокутника, круга, бічної поверхні циліндра і конуса. Але воно дає змогу обчислювати площі й таких поверхонь, які розгорнути на площині неможливо.

Теорема 35. ***Площа сфери радіуса r дорівнює $4\pi r^2$.***

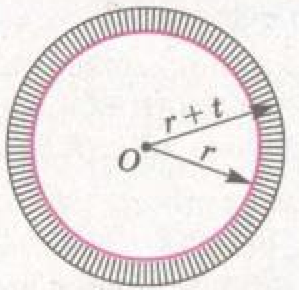
ДОВЕДЕННЯ. Нехай дано сферу радіуса r (мал. 270). Шар товщини t для неї – тіло, що міститься між двома концентричними сферами радіусів r і $r + t$. Його об'єм

$$V_t = \frac{4}{3}\pi(r+t)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3r^2t + 3rt^2 + t^3).$$

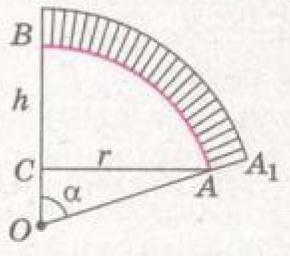
Отже, площа поверхні даної сфери

$$S = \lim_{t\to 0}\frac{V_t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rt + t^2) = 4\pi r^2.$$

Теорему доведено.



Мал. 270



Мал. 271

Формулу для знаходження площі сферичного сегмента можна вивести аналогічно. Нехай сферичний сегмент – поверхня, утворена обертанням дуги AB сектора OAB навколо прямої OB (мал. 271). Якщо $OB = r$, $BC = h$, $AA_1 = t$, то, як випливає із задачі 2 на с. 258:

$$V_t = \frac{2}{3}\pi(r+t)^3(1-\cos\alpha) - \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)(3r^2t + 3rt^2 + t^3).$$

Отже,

$$S = \lim_{t\to 0}\frac{V_t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2}{3}\pi(1-\cos\alpha)(3r^2 + 3rt + t^2) =$$

$$= 2\pi r^2(1 - \cos\alpha) = 2\pi rh.$$

Обчислимо ще площу поверхні тора, радіуси якого ρ і r. Об'єм шару товщини t для даного тора дорівнює різниці об'ємів двох торів:

$$V_t = 2\pi^2\rho(r + t)^2 - 2\pi^2\rho r^2 = 2\pi^2\rho(2rt + t^2).$$

Тому площа поверхні даного тора

$$S=\lim_{t\to 0}\frac{V_t}{t}=\lim_{t\to 0}2\pi^2\rho(2r+t)=4\pi^2\rho r.$$

Отже, площі сфери, сферичного сегмента і тора можна обчислювати за формулами:

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2,\ S_{\text{сегм}} = 2\pi rh,\ S_{\text{т}} = 4\pi^2\rho r.$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають площею поверхні F?
2. Виведіть формулу для знаходження площі бічної поверхні циліндра.
3. Як знайти площу бічної поверхні конуса?
4. За якою формулою обчислюють площу сфери?
5. Доведіть формулу для знаходження площі сфери.
6. Як знайти площу сферичного сегмента?
7. За якою формулою знаходять площу поверхні тора?

Виконаємо разом

1. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть площу сфери, описаної навколо піраміди.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Висота PO_1 піраміди $PABCD$ лежить на діаметрі PP_1 описаної сфери (мал. 272). Кут PAP_1 прямий, бо спирається на діаметр кола, яке проходить через точки A, P і P_1. Кути PP_1A і PAO_1 рівні, оскільки кожний з них доповнює кут APP_1 до 90°.

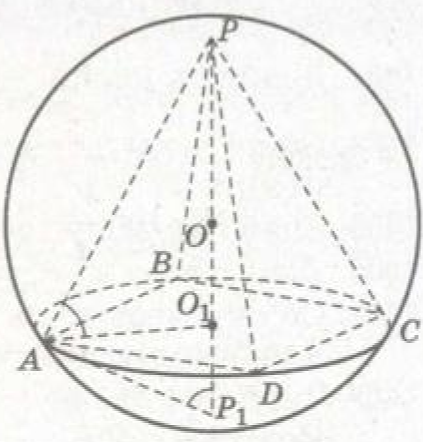
Якщо радіус сфери дорівнює r, то $PP_1 = 2r$. З прямокутного трикутника PAP_1 маємо:

$$2r=\frac{AP}{\sin\angle PP_1A}=\frac{b}{\sin\alpha},\ r=\frac{b}{2\sin\alpha}.$$

Отже, площа сфери

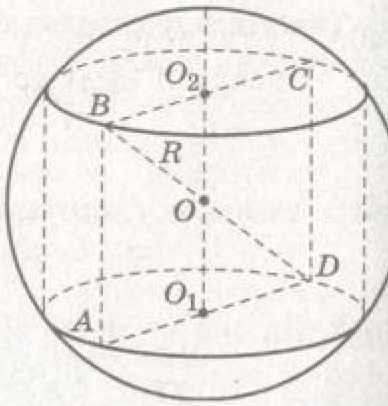
$$S=4\pi r^2=4\pi\frac{b^2}{4\sin^2\alpha}=\frac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}.$$

ВІДПОВІДЬ. $S=\dfrac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}$.



Мал. 272

2. Циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат, вписаний у кулю радіуса R. Знайдіть площу поверхні тіла, обмеженого бічною поверхнею циліндра і кульовим поясом, який міститься між площинами основ циліндра.



Мал. 273

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай радіус основи циліндра дорівнює r (мал. 273). За властивістю діагоналі квадрата $BD = AD\sqrt{2}$, тобто $2R = 2r\sqrt{2}$, звідки $r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Тоді $AB = R\sqrt{2}$ і можна знайти площу бічної поверхні циліндра: $S_{\text{б ц}} = 2\pi \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2} = 2\pi R^2$.

Щоб знайти площу поверхні кульового поясу, знайдемо спочатку площі поверхонь сферичних сегментів, які від кулі відтинають площини основ циліндра, а потім від площі поверхні кулі віднімемо площі сферичних сегментів.

Оскільки висота сегмента дорівнює $R - \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = R\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$, то $S_{\text{сегм}} = 2\pi R \cdot R\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \pi R^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Знайдемо площу поверхні кульового поясу:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{к}} - 2S_{\text{сегм}} = 4\pi R^2 - 2\pi R^2\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\pi R^2\left(2-2+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi R^2.$$

Тоді $S = 2\pi R^2 + 2\sqrt{2}\pi R^2 = 2\pi R^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Виконайте усно

1403. Знайдіть площу сфери радіуса 5 см.

1404. Об'єм кулі дорівнює $\dfrac{4}{3}\pi$ см^3. Чому дорівнює площа її поверхні?

1405. Знайдіть радіус сфери, якщо її площа дорівнює 36π м^2.

1406. Дано сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. Знайдіть площу її поверхні.

1407. Об'єми двох куль відносяться як $m : n$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

1408. Знайдіть площу поверхні кульового сегмента радіуса r і висоти $h = 0{,}5r$.

1409. Куля вписана у циліндр. Знайдіть відношення площі поверхні кулі до площі бічної поверхні циліндра.

А

1410. У якому випадку витрачається більше матеріалу: на нікелювання однієї кулі діаметром 8 см чи на нікелювання 15 куль діаметром 2 см кожна?

1411. Рівняння сфери $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = 4$. Знайдіть її площу.

1412. Точки $A(2;\ 0;\ 3)$ і $B(0;\ 4;\ 7)$ – кінці діаметра сфери. Знайдіть її площу.

1413. Сфера з центром $A(1;\ 1;\ 1)$ проходить через точку $M(2;\ -1;\ 8)$. Знайдіть площу сфери.

1414. Як відносяться площі сфер, вписаної в куб і описаної навколо нього?

1415. Знайдіть площу сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 3 дм, 4 дм і 5 дм.

1416. Знайдіть площу сфери, вписаної у правильну піраміду, апофема якої дорівнює m і нахилена до площини основи під кутом α. Обчисліть, якщо $m = 15$ см, $\alpha = 60°$.

1417. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи α. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в піраміду.

1418. Центр кулі, вписаної у правильну чотирикутну піраміду, ділить її висоту у відношенні $5 : 3$. Знайдіть відношення площі поверхні кулі до площі бічної поверхні піраміди.

1419. Знайдіть поверхню сфери, вписаної в правильний октаедр, площа поверхні якого дорівнює $72\sqrt{3}$ см^2.

1420. З центра O сфери радіуса r проведено три попарно перпендикулярні промені OA, OB, OC. Знайдіть площу меншої частини сфери, обмеженої плоскими кутами AOB, BOC і COA.

1421. Сферу радіуса r перетинає площина, віддалена від центра на відстань $d = \frac{1}{3}r$. Знайдіть площі сферичних сегментів.

1422. Знайдіть площу поверхні кульового сегмента радіуса r і висоти $h = 0{,}5r$.

1423. Знайдіть площу поверхні опуклого кульового сектора, якщо його радіус r, а висота конуса h.

1424. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням круга радіуса r навколо дотичної до його кола.

1425. Радіуси перерізів сфери двома перпендикулярними площинами дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть площу сфери, якщо перерізи мають тільки одну спільну точку. Чому дорівнює площа частини сфери, яка знаходиться між цими площинами?

1426. У кулі радіуса R проведено два паралельні перерізи, які ділять перпендикулярний до них діаметр на частини, пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть площу поверхні кульового шару, який міститься між площинами цих перерізів.

1427. Дві кулі радіусів 8 см розміщені так, що центр однієї лежить на поверхні іншої. Знайдіть площу поверхні тіла, яке є спільною частиною цих куль.

Б

1428. Основа конуса є перерізом кулі радіуса R, а його вершина знаходиться на поверхні кулі. Знайдіть площу поверхні тіла, обмеженого бічною поверхнею конуса і сегментною поверхнею кулі, яка містить вершину конуса, якщо кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює $60°$.

1429. Як відносяться площі сфер, вписаної у правильний октаедр і описаної навколо нього?

1430. Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо піраміди, в основі якої лежить правильний трикутник зі стороною 6 см, а одне з бічних ребер дорівнює 4 см і перпендикулярне до площини основи.

1431. Навколо правильної трикутної піраміди, сторона основи якої та висота дорівнюють 6 см, описано сферу. Друга сфера проходить через центр першої та всі вершини основи піраміди. Знайдіть відношення площ поверхонь сфер.

1432. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині піраміди α. Знайдіть площу поверхні вписаної кулі.

1433. Відношення об'єму конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює 8 : 3. Знайдіть відношення їхніх площ поверхонь.

1434. У вершинах правильного тетраедра з ребром a розміщені центри чотирьох рівних сфер, які попарно дотикаються одна до одної. Знайдіть площу поверхні сфери, яка дотикається до всіх цих сфер.

1435. Доведіть, що об'єми кулі та многогранника, описаного навколо неї, відносяться як площі їхніх поверхонь.

1436. Центр сфери радіуса r лежить на ребрі двогранного кута. Знайдіть площу частини сфери, яка вирізається гранями двогранного кута, якщо його лінійний кут дорівнює $n°$.

1437. Знайдіть площу частини сфери радіуса r, яка вирізається гранями прямого тригранного кута, якщо його вершина лежить у центрі сфери.

1438. Знайдіть площу поверхні велосипедної камери, радіуси якої дорівнюють 30 см і 30 мм.

1439. У кулю вписано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, у якої вершина A віддалена від площини A_1BC, яка утворює з площиною основи кут $45°$, на a. Знайдіть площі поверхонь сегментів, на які куля розбивається площиною бічної грані призми.

1440. Півкуля і конус з висотою 20 см та радіусом основи 15 см мають спільну основу. Знайдіть площу поверхні частини півкулі, яка знаходиться: а) зовні конуса; б) всередині конуса.

1441. Радіуси сегментних поверхонь двоопуклого скла дорівнюють 10 см і 17 см, а відстань між їхніми центрами 21 см. Знайдіть площу поверхні скла.

1442. Знайдіть площу поверхні опукло-вгнутої лінзи, у якої радіуси поверхонь дорівнюють 25 см і 29 см, а відстань між центрами 6 см.

В

1443. У зрізаний конус з площею бічної поверхні Q вписано кулю з площею поверхні q. Знайдіть кут між твірною та площиною більшої основи зрізаного конуса.

1444. Поверхня кулі, вписаної в правильну трикутну зрізану піраміду, відноситься до поверхні піраміди як $\pi : 6\sqrt{3}$. Знайдіть двогранний кут при ребрі основи піраміди.

1445*. Доведіть, що площа поверхні конуса більша від площі поверхні вписаної в нього кулі.

1446. Визначте радіуси двох куль, які, перетинаючись, утворюють двоопуклу лінзу, коли відомо, що товщина лінзи $2a$, площа її поверхні S і діаметр лінзи $2r$.

Вправи для повторення

1447. Радіуси двох куль пропорційні числам 1 і 3, а різниця їхніх об'ємів дорівнює 936π см^3. Знайдіть об'єми цих куль.

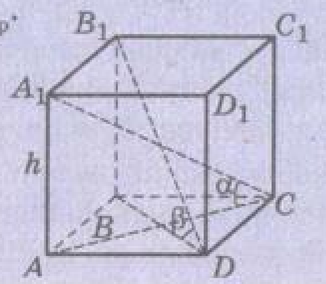
1448. Куля вписана в прямий паралелепіпед, діагоналі основи якого дорівнюють p і q. Знайдіть повну поверхню паралелепіпеда.

1449. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 16 см, а один з гострих кутів α. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні трикутника навколо гіпотенузи.

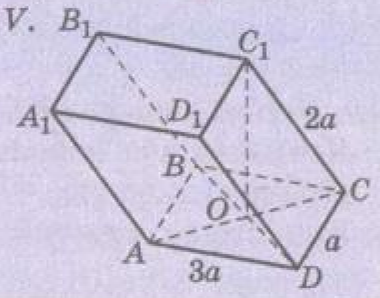
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

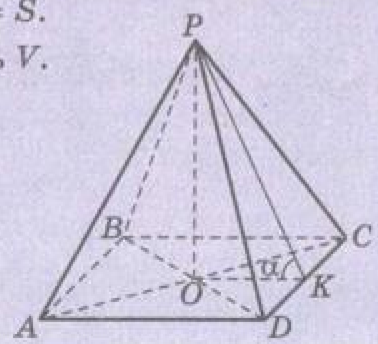
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – пряма призма,
$ABCD$ – ромб.
Знайдіть $V_{пр}$.



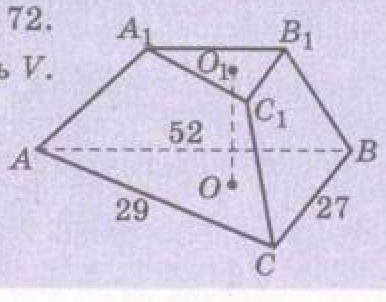
$ABCD$ – прямокутник,
$C_1O \perp (ABC)$.
Знайдіть V.



$PABCD$ – правильна піраміда,
$S_{поверхні} = S$.
Знайдіть V.

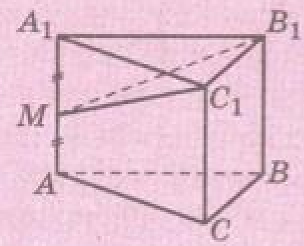


$ABCA_1B_1C_1$ – зрізана піраміда,
$OO_1 \perp (ABC)$,
$OO_1 = 20$,
$P_{A_1B_1C_1} = 72$.
Знайдіть V.

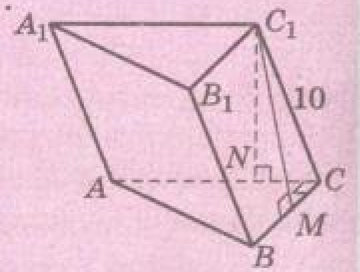


Б

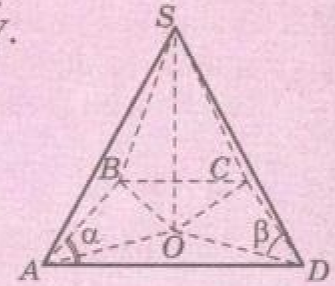
$ABCA_1B_1C_1$ – пряма призма,
$AM = A_1M$.
Знайдіть $V_{MA_1B_1C_1} : V_{ABCMB_1C_1}$.



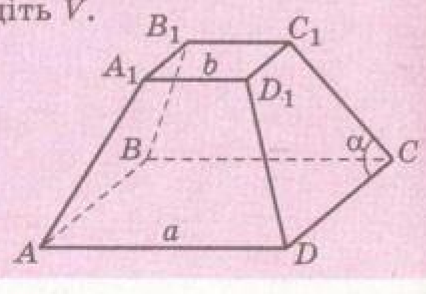
$\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 14$,
$C_1M = C_1N = 8$.
Знайдіть V.



$AB = BC = CD = a$,
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = \beta$,
$\angle BAD = \alpha$.
Знайдіть V.

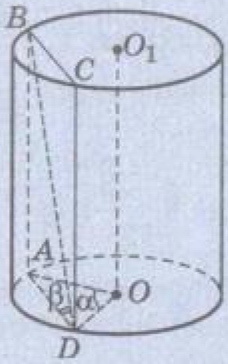


$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна зрізана піраміда,
$AD = a$, $A_1D_1 = b$.
Знайдіть V.

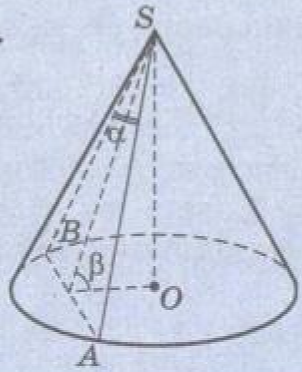


А

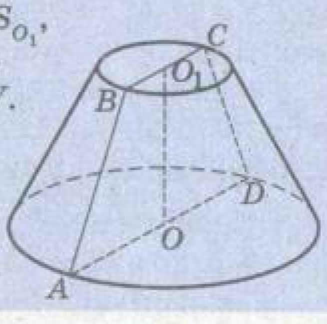
$OO_1 \parallel (ABC)$,
$\angle AOD = \alpha$,
$\angle ADB = \beta$,
$S_{ABCD} = Q$.
Знайдіть V.



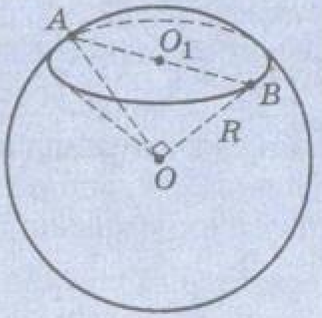
$AS = l$.
Знайдіть V.



$AO = 3BO_1$,
$S_б = S_O + S_{O_1}$,
$S_{ABCD} = 24$.
Знайдіть V.

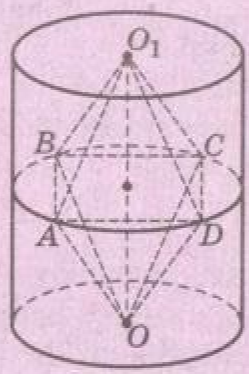


Знайдіть $V_{сект}$.

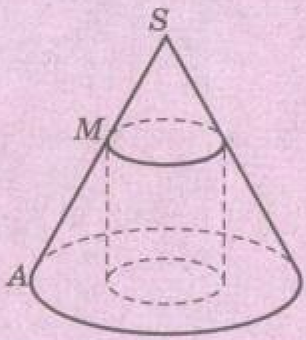


Б

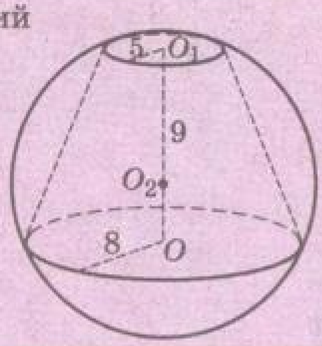
$OABCDO_1$ – правильний октаедр.
Знайдіть $V_ц : V_{окт}$.



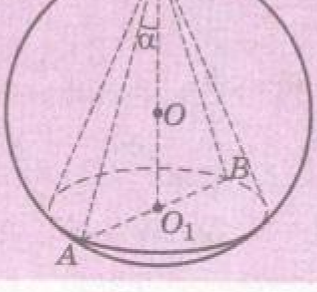
$SM : AM = 1 : 2$, $V_ц = 6$.
Знайдіть $V_к$.



OO_1 – зрізаний конус.
Знайдіть $V_к$.



$S_{\triangle APB} = Q$.
Знайдіть $S_{кулі}$.



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної у куб, об'єм якого дорівнює 27 $см^3$.

а) 36π $см^2$; б) 9π $см^2$; в) 3π $см^2$; г) 12π $см^2$.

2. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a.

а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$; г) $3a^3$.

3. У тетраедрі три ребра, які виходять з однієї вершини, взаємно перпендикулярні та дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Знайдіть об'єм тетраедра.

а) 60 $см^3$; б) 20 $см^3$; в) 10 $см^3$; г) 27 $см^3$.

4. Знайдіть площу поверхні кульового сегмента, у якого $R = 5$ см, $h = 0{,}4R$.

а) 10π $см^2$; б) 20π $см^2$; в) 200π $см^2$; г) 4π $см^2$.

5. Два циліндри мають рівні висоти, а площа бічної поверхні першого у 3 рази більша за площу бічної поверхні другого. Знайдіть відношення об'ємів цих циліндрів.

а) 3 : 1; б) 6 : 1; в) 9 : 1; г) 27 : 1.

6. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а висота – 6 см. Через середину висоти проведено площину, паралельну основі. Знайдіть об'єм утвореної зрізаної піраміди.

а) 24 $см^3$; б) 20 $см^3$; в) 28 $см^3$; г) 84 $см^3$.

7. Знайдіть об'єм циліндра, у який вписано кулю радіуса R.

а) πR^3; б) $2\pi R^3$; в) $\frac{2}{3}\pi R^3$; г) $\frac{1}{3}\pi R^3$.

8. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою c навколо прямої, що містить гіпотенузу.

а) $\frac{c^3}{8}$; б) $\frac{\pi c^3}{24}$; в) $\frac{c^3}{6}$; г) $\frac{\pi c^3}{12}$.

9. Центр верхньої основи правильної чотирикутної призми і середини сторін нижньої основи є вершинами піраміди. Знайдіть її об'єм, якщо об'єм призми дорівнює V.

а) $\frac{1}{2}V$; б) $\frac{1}{3}V$; в) $\frac{1}{6}V$; г) $\frac{2}{3}V$.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1°. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а діагональний переріз є правильним трикутником.

2°. Знайдіть об'єм призми, вписаної у кулю радіуса 7 см, якщо основою призми є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см.

3°. Визначте площі поверхонь частин кулі радіуса 13 см, на які вона розбивається січною площиною площею 25π см^2.

4°. Прямокутний трикутник з катетами 30 см і 40 см обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм і площу поверхні утвореного тіла обертання.

5*. Знайдіть об'єм конуса, якщо кут при вершині осьового перерізу дорівнює 60°, а відстань від центра основи конуса до його твірної – l.

6*. Радіуси основ двох циліндрів пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть відношення об'ємів цих циліндрів, якщо площі їхніх бічних поверхонь рівні.

7*. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, вписаної у кулю радіуса R, якщо бічне ребро піраміди утворює із площиною основи кут 45°.

8*. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см, а бічне ребро дорівнює 4 см і утворює із суміжними сторонами основи кути по 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

9.** У пряму призму, основою якої є рівнобічна трапеція, вписано куб таким чином, що його вершини лежать на серединах сторін основ призми. Знайдіть об'єм призми, якщо площа поверхні куба дорівнює S.

10.** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між діагоналями осьового перерізу 60°. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

11.** У півкулю вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайдіть відношення об'єму цього циліндра до об'єму півкулі.

12.** На площині лежать три однакові кулі радіуса R, кожна з яких дотикається до двох інших. Знайдіть об'єм кулі, яка лежить на тій самій площині та дотикається до всіх трьох куль.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

1. *Об'єм* – кількісна характеристика тіла, яка задовольняє такі умови:
- кожне тіло має певний об'єм, виражений додатним числом;
- рівні тіла мають рівні об'єми;
- якщо тіло розбито на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин;
- об'єм одиничного куба дорівнює одиниці.

2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добуткові трьох його вимірів: $V = abc$.

Об'єм призми (і циліндра) дорівнює добутку площі основи на висоту: $V = Sh$.

Об'єм циліндра $V = \pi r^2 h$.

3. Об'єм піраміди (і конуса) дорівнює третині добутку площі основи на висоту: $V = \frac{1}{3}Sh$. Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4. Об'єм зрізаної піраміди (і зрізаного конуса), площі основ якої S і S_1, а висота h, можна визначати за формулою $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS_1} + S_1)$.

5. Об'єм кулі радіуса r визначається за формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Об'єм кульового сегмента радіуса r і висоти h: $V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})$.

Об'єм кульового сектора радіуса r і висоти h: $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

6. Площа поверхні циліндра: $S_{б\ ц} = 2\pi rh$, $S_ц = 2\pi r(r + h)$;
конуса: $S_{б\ к} = \pi rl$, $S_к = \pi r(r + l)$;
зрізаного конуса: $S_{б\ з\ к} = \pi l(r_1 + r_2)$;
кулі: $S_{кулі} = 4\pi r^2$;
сферичного сегмента: $S_{сегм} = 2\pi rh$;
тора: $S_т = 4\pi^2 \rho r$.

7. Об'єми подібних тіл відносяться як куби їхніх відповідних лінійних елементів.

Задачі для повторення

1450. Чи існує многогранник, який однією площиною розтинається на п'ять многогранників?

1451. Намалюйте многогранник, відмінний від куба, всі грані якого – квадрати.

1452. Доведіть, що не існує многогранника, кожна грань якого має більше ніж п'ять сторін.

1453. Доведіть, що не існує многогранника, кожний многогранний кут якого має більше ніж п'ять граней.

1454. Сторона основи правильної чотирикутної призми a, а висота h. Знайдіть площу перерізу цієї призми площиною, яка ділить двогранний кут при бічному ребрі у відношенні $1 : 2$.

1455. Діагональ правильної чотирикутної призми нахилена до бічної грані під кутом $30°$. Знайдіть кут нахилу її до основи.

1456. Дано зображення куба. Побудуйте спільний перпендикуляр для діагоналі цього куба і мимобіжного з нею ребра.

1457. Сторона основи правильної чотирикутної призми 10 см. Знайдіть відстань від бічного ребра до мимобіжної з ним діагоналі призми.

1458. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15 см, висота призми – 20 см. Знайдіть відстань від сторони основи до мимобіжної з нею діагоналі призми.

1459*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між площинами AA_1C_1 і ABC_1.

1460*. Через середину діагоналі куба перпендикулярно до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

1461. На поверхні куба знайдіть точки, рівновіддалені від кінців однієї з його діагоналей.

1462. На поверхні куба знайдіть три точки, з яких його діагональ видно під найменшим кутом.

1463. Доведіть, що коли всі ребра паралелепіпеда дотикаються до сфери, то паралелепіпед – куб.

1464. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 дм, а двогранний кут при бічному ребрі $120°$. Знайдіть висоту піраміди.

1465. Яким може бути двогранний кут при бічному ребрі правильної п'ятикутної піраміди?

1466*. У грані ABC правильного тетраедра $ABCD$ дано точку M. Обчисліть DM, якщо $MA = \frac{a}{2}$, $MB = \frac{5}{6}a$, $DA = a$.

1467*. Ребра тетраедра, які виходять з вершини A, попарно перпендикулярні та дорівнюють a, b і c. Знайдіть довжину ребра куба, вписаного у тетраедр так, що одна з його вершин збігається з вершиною A.

1468. Доведіть, що квадрат площі будь-якої грані тетраедра дорівнює сумі квадратів площ решти його граней без подвоєних добутків площ цих граней, узятих попарно, на косинуси двогранних кутів між ними.

1469*. Знаючи площі основ зрізаної трикутної піраміди, знайдіть площу трикутника з вершинами у точках перетину діагоналей її бічних граней.

1470*. У просторі розміщені три правильних п'ятикутники $ABCDE$, $AEKPT$, $ATHMB$. Доведіть, що прямі AC, AK і AH попарно перпендикулярні.

1471. Чи можна через точку в просторі провести шість різних прямих так, щоб кути між будь-якими двома з них були рівні?

1472. Кут розгортки бічної поверхні конуса дорівнює 120°, а твірна 15 см. Знайдіть радіус основи.

1473. Вписана у тетраедр $ABCD$ куля дотикається до його граней ABC і CDB відповідно в точках M і K. Доведіть, що $\angle AMB = \angle CKD$.

1474. Знайдіть геометричне місце проекцій даної точки простору на площини, які проходять через другу дану точку.

1475. Чотири площини, перетинаючись між собою, утворюють тетраедр. Скільки існує сфер, кожна з яких дотикається до всіх чотирьох площин?

1476. Знайдіть геометричне місце точок простору, розміщених у даній площині та рівновіддалених від двох даних точок.

1477. Знайдіть множину прямих у просторі, рівновіддалених від двох даних точок.

1478. Побудуйте сферу, яка проходить через дві дані точки і дотикається до двох даних площин.

1479. Знайдіть геометричне місце центрів перерізів кулі площинами, які проходять через дану точку. Дослідіть випадки, коли дана точка знаходиться зовні, на або всередині кулі.

1480. H – точка перетину всіх висот тетраедра $ABCD$, а O – центр сфери, описаної навколо нього. Доведіть, що $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

1481. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть радіус сфери, яка проходить через вершину A і центри граней ABD, ABC, ACD.

1482*. Кожна з чотирьох ланок замкненої ламаної дотикається до сфери. Доведіть, що всі точки дотику лежать в одній площині.

1483*. На сфері дано точки A, B, C. Знайдіть на сфері такі точки M, щоб сума $MA^2 + MB^2 + MC^2$ була:
а) найбільшою; б) найменшою.

1484*. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки сфери радіуса r до вершин правильного трикутника, описаного навколо її екватора, стала. Знайдіть цю суму.

1485. Знайдіть суму квадратів довжин усіх ребер і діагоналей правильного ікосаедра, якщо радіус описаної навколо нього сфери дорівнює r.

1486*. У сферу радіуса r вписано два куби. Знайдіть суму квадратів відстаней від вершин одного куба до всіх вершин другого.

1487*. Сфера дотикається до трьох граней куба, які мають спільну вершину, і ділить кожне з трьох ребер, які мають протилежну вершину, на частини 2 см і 8 см. Знайдіть радіус сфери.

1488. З усіх правильних чотирикутних призм даного об'єму знайдіть призму, площа поверхні якої найменша.

1489. З усіх правильних чотирикутних призм, вписаних у сферу радіуса r, знайдіть призму найбільшого об'єму. Обчисліть її об'єм.

1490. На мимобіжних ребрах паралелепіпеда дано дві точки. Проведіть через них площину, яка ділить паралелепіпед на два многогранники рівних об'ємів.

1491*. Ребро куба дорівнює 1. Діагональ AC_1 куба є віссю вписаної в куб правильної шестикутної призми. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота втричі менша за діагональ куба.

1492*. З даного дерев'яного куба витесано правильну шестикутну призму найбільшого об'єму. Який відсоток матеріалу використано?

1493. У трикутній піраміді одна зі сторін основи дорівнює 16 см, протилежне їй бічне ребро – 18 см; кожне з решти чотирьох ребер дорівнює 17 см. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

1494. Доведіть, що кожна площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер тетраедра, ділить цей тетраедр на дві частини рівних об'ємів.

1495*. У трикутній піраміді $ABCD$ дано два ребра $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, кут між ними $\varphi = 60°$ і відстань між ними 5 см. Знайдіть об'єм піраміди.

1496. Січна площина ділить бічні ребра трикутної піраміди у відношеннях: $m_1 : n_1$, $m_2 : n_2$, $m_3 : n_3$ (рахуючи від вершини). Знайдіть відношення об'ємів утворених многогранників.

1497. Доведіть, що коли h_1, h_2, h_3, h_4 – висоти тетраедра, а r – радіус вписаної сфери, то $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}$.

1498. Точки перетину медіан граней тетраедра є вершинами другого тетраедра. Знайдіть відношення об'ємів цих тетраедрів.

1499. Доведіть, що коли всі висоти тетраедра рівні, то всі його плоскі кути гострі.

1500. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки основи правильної піраміди до площин бічних граней стала.

1501. Доведіть, що коли всі грані тетраедра рівні, то сума відстаней від будь-якої його внутрішньої точки до граней стала.

1502. Пряма, яка сполучає середини мимобіжних ребер правильного тетраедра, є віссю циліндра, кола основ якого дотикаються до граней тетраедра в їхніх центрах. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму тетраедра.

1503. Доведіть, що об'єм конуса дорівнює добутку площі його поверхні на $\frac{1}{3}$ радіуса вписаної кулі. Узагальніть задачу.

1504. Доведіть, що об'єм конуса у стільки разів більший від об'єму вписаної в нього кулі, у скільки разів поверхня конуса більша за поверхню кулі.

1505. У трикутнику дано основу a та прилеглі до неї кути α і $\alpha + 90°$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням цього трикутника навколо висоти.

1506. Відношення висоти конуса до радіуса описаної навколо нього кулі дорівнює n. Знайдіть відношення об'ємів цих тіл. При яких n задача має розв'язки?

1507. З усіх конусів даного об'єму знайдіть конус, площа бічної поверхні якого найменша.

1508. У конус вписано кулю. Площа поверхні кулі відноситься до площі основи конуса як 4 : 3. Знайдіть кут при вершині конуса.

1509. У правильній чотирикутній піраміді центр описаної кулі і центр кулі, що дотикається до всіх ребер піраміди, збігаються. Знайдіть відношення об'єму піраміди до об'єму вписаної в неї кулі.

1510. Покажіть, що об'єми призми, піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, кульового сегмента можна обчислювати за формулою Сімпсона $V = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_c + S_2)$, де S_1 і S_2 – площі основ, S_c – площа середнього перерізу, а h – висота тіла.

1511. Призматоїдом називається многогранник, у якого дві грані – основи – довільні многокутники, що лежать у паралельних площинах, а кожна з решти граней – трикутник або чотирикутник, усі вершини якого належать основам. Доведіть, що об'єм призматоїда можна обчислювати за формулою Сімпсона.

1512. Посудина має форму перевернутого конуса, осьовий переріз якого – рівносторонній трикутник. У нього налито воду так, що коли кинули в посудину металеву кулю радіуса r, поверхня води виявилася дотичною до кулі. На якій висоті буде вода, якщо кулю вийняти?

1513. Якщо для людини зростом 165 см вважається нормальною маса тіла 57 кг, то яка середня нормальна маса для людини зростом 170 см?

1514. В Антарктиді близько 30 млн км^3 льоду. На скільки метрів піднялася б вода в океанах, якби він весь розтанув? Радіус Землі дорівнює наближено 6000 км.

1515. З усіх конусів даного об'єму знайдіть конус, площа бічної поверхні якого найменша.

1516. Який найменший об'єм може мати конус, описаний навколо кулі радіуса r?

1517. Відношення висоти конуса до радіуса описаної кулі дорівнює n. Як відносяться об'єми цих тіл? При яких n задача має розв'язки?

1518. Всередині куба з ребром a міститься конус, вершина якого збігається з вершиною куба, а коло основи дотикається до трьох граней куба, які сходяться в протилежній вершині. Твірна конуса утворює з його віссю кут α. Знайдіть об'єм конуса.

1519. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює l та утворює з площиною основи кут α. У цю піраміду вписано рівносторонній циліндр так, що одна з його твірних лежить на діагоналі основи піраміди, а коло кожної основи дотикається до двох суміжних бічних граней піраміди. Знайдіть об'єм циліндра.

1520. Тор дотикається до площини по колу радіуса r. Дотична до цієї площини куля радіуса r дотикається до тора також по колу. Знайдіть довжину цього кола й об'єм тора.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

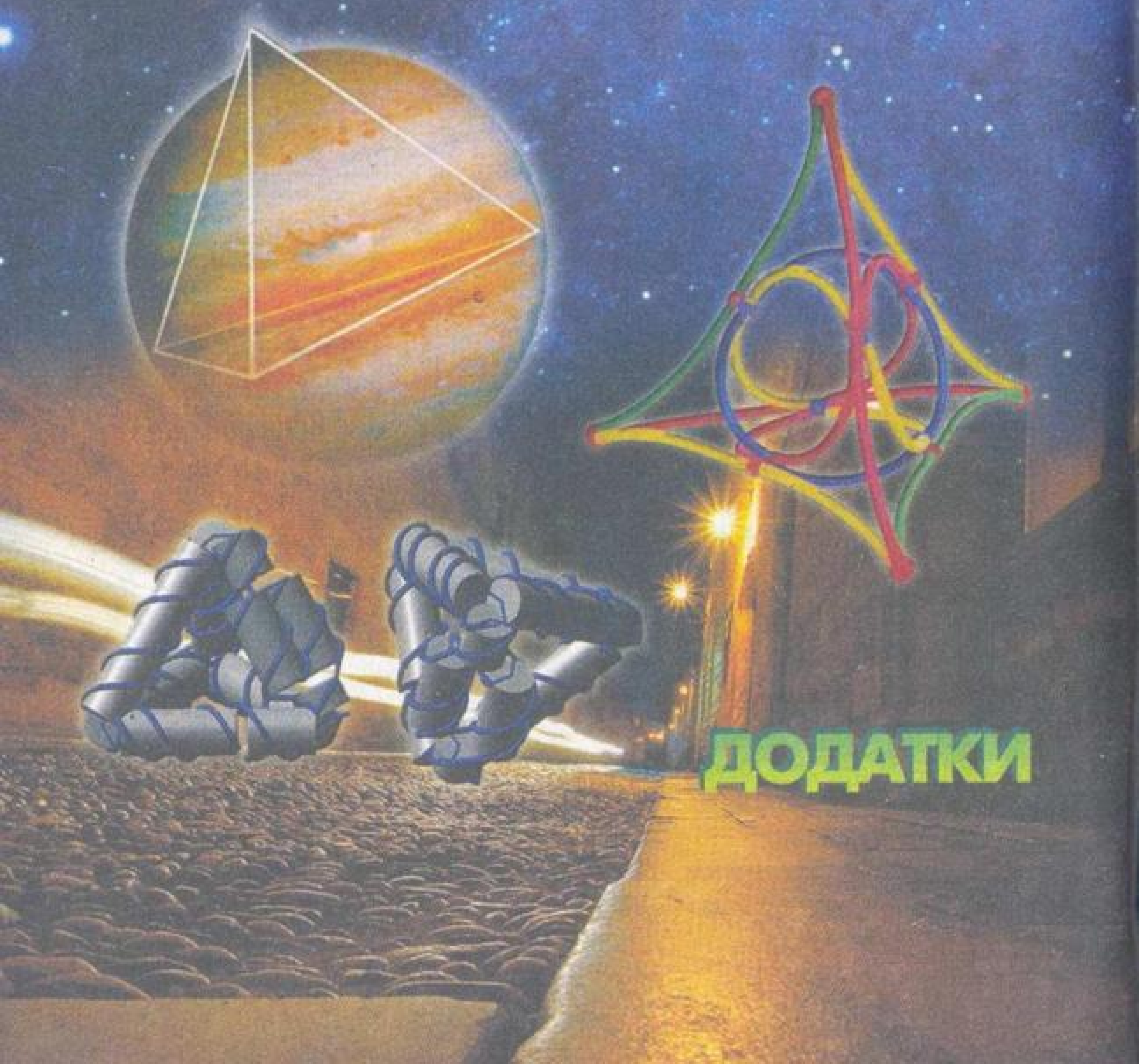
1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Доведіть теорему про квадрат відстані між точками.
3. Виведіть рівняння сфери; площини; прямої.
4. У чому суть координатного методу розв'язування задач?
5. Що таке вектор? Які бувають вектори?
6. Що таке координати вектора? Поясніть запис $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.
7. Сформулюйте правила додавання векторів (правила трикутника, паралелограма, многокутника, паралелепіпеда).
8. Що називають різницею векторів? Як її знаходити?
9. Як помножити вектор на число? Доведіть властивості цього множення.
10. Що означає розкласти вектор за трьома некомпланарними векторами?
11. Дайте означення скалярного добутку двох векторів.
12. Доведіть теорему про центроїд n точок. Сформулюйте наслідки з неї.
13. У чому суть векторного методу розв'язування задач?
14. Що таке рух? Які бувають рухи простору?
15. Доведіть найважливіші властивості рухів простору.
16. Доведіть, що паралельне перенесення, поворот, симетрії відносно точки і площини – рухи.
17. Що таке композиція рухів? Наведіть приклади.
18. Що таке центр симетрії; площина симетрії фігури?
19. Які геометричні фігури називають рівними?
20. Які фігури називають гомотетичними? Подібними?
21. Сформулюйте найважливіші властивості гомотетії.
22. Дайте означення правильного многогранника. Назвіть усі п'ять видів правильних многогранників.
23. Перерахуйте елементи симетрії куба.
24. Що таке двогранний кут; многогранний кут?
25. Сформулюйте і доведіть просторову теорему Піфагора.
26. Сформулюйте теорему косинусів для тригранного кута.
27. Що таке геометричне тіло; поверхня тіла?
28. Сформулюйте означення многогранника. Назвіть елементи многогранника.
29. Які многогранники називають опуклими?
30. Сформулюйте теорему Ейлера про многогранники.
31. Сформулюйте означення призми. Якими бувають призми?

32. Сформулюйте і доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми.
33. Що таке паралелепіпед? Якими бувають паралелепіпеди?
34. Доведіть теорему про перетин діагоналей паралелепіпеда.
35. Що таке піраміда? Перерахуйте елементи піраміди.
36. Дайте означення правильної піраміди.
37. Доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної піраміди і правильної зрізаної піраміди.
38. Сформулюйте і доведіть теорему про переріз піраміди площиною, паралельною основі.
39. Що таке тіло обертання? Наведіть приклади.
40. Дайте означення циліндра. Назвіть елементи циліндра.
41. Дайте означення конуса. Назвіть елементи конуса.
42. Як обчислюють площі поверхні циліндра; конуса?
43. Якими бувають конічні перерізи?
44. Дайте означення кулі; сфери. Назвіть їхні елементи.
45. Як можуть бути розміщені дві сфери? Сфера і площина?
46. Доведіть теорему про площину, дотичну до кулі.
47. Дайте означення кулі, вписаної у многогранник, і кулі, описаної навколо многогранника.
48. Дайте означення призми, вписаної в циліндр, і піраміди, вписаної в конус.
49. Перерахуйте властивості об'єму.
50. Чому дорівнює об'єм призми?
51. Чому дорівнює об'єм циліндра?
52. Чому дорівнює об'єм похилої призми?
53. Як за допомогою інтеграла знайти об'єм куба?
54. Як знайти об'єм піраміди?
55. Як знайти об'єм зрізаної піраміди?
56. Як знайти об'єм конуса?
57. Як знайти об'єм зрізаного конуса?
58. Як відносяться об'єми подібних многогранників?
59. Як знайти об'єм кулі?
60. Як знайти об'єм кульового: а) сегмента; б) сектора; в) шару?

Елементи геометрії тетраедра

Основні теми розділу:

- Тетраедр і куля.
- Рівногранні тетраедри.

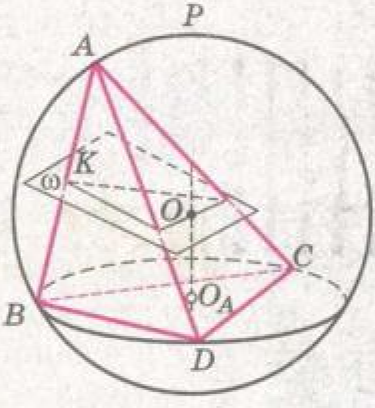


ДОДАТКИ

§37 ТЕТРАЕДР І КУЛЯ

1. Куля називається описаною навколо тетраедра, а тетраедр вписаним у кулю, якщо всі вершини тетраедра лежать на поверхні цієї кулі.

Навколо кожного тетраедра можна описати одну кулю. Справді, множиною точок, рівновіддалених від трьох вершин B, C і D тетраедра, є пряма OO_A, яка перпендикулярна до площини трикутника BCD і проходить через центр описаного навколо нього кола (мал. 274). Множиною точок, рівновіддалених від вершин A і B, є площина ω, яка перпендикулярна до ребра AB і проходить через його середину K. Площина ω обов'язково перетне пряму OO_A, адже AB не лежить у площині BCD, отже, ω не паралельна OO_A. Нехай ω і OO_A перетнуться в точці O. Тоді $OA = OB = OC = OD$, отже, усі вершини тетраедра $ABCD$ лежать на поверхні кулі з центром O радіуса OA. Така куля єдина, бо пряма OO_A і площина ω перетинаються тільки в одній точці.

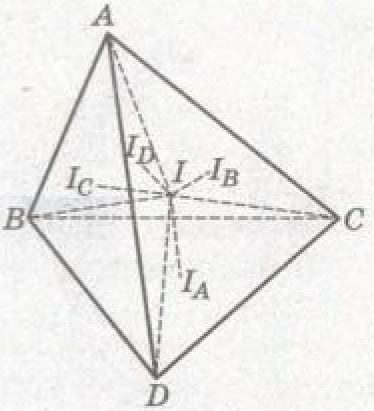


Мал. 274

2. Куля називається вписаною в тетраедр, а тетраедр описаним навколо кулі, якщо всі грані тетраедра дотикаються до цієї кулі.

У кожний тетраедр можна вписати кулю й тільки одну. Як відомо, множиною точок, рівновіддалених від площин граней ABC, ABD і ACD тетраедра $ABCD$, є бісектриса AA_1 його тригранного кута A (мал. 275), а множиною точок, рівновіддалених від площин граней ABD і BCD, є бісекторна площина BLD двогранного кута при ребрі BD. Ця площина перетинає пряму AA_1 в деякій точці I. Точка I рівновіддалена від усіх граней тетраедра, отже, вона є центром вписаної в цей тетраедр кулі. Існує тільки одна точка перетину прямої AA_1 і площини BLD. Отже, вписана в тетраедр куля існує тільки одна.

Мал. 275



Мал. 276

Визначимо радіус r вписаної кулі. Для цього сполучимо її центр з усіма вершинами даного тетраедра і тим самим розділимо тетраедр на чотири менші: $IABC$, $IADC$, $IABD$, $IBCD$ (мал. 276). Ці тетраедри мають рівні висоти $h_A = h_B = h_C = h_D = r$. Знайдемо об'єми тетраедрів:

$$V_{IABC} = \frac{r}{3}S_D,\ V_{IABD} = \frac{r}{3}S_C,\ V_{IACD} = \frac{r}{3}S_B,$$
$$V_{IBCD} = \frac{r}{3}S_A.$$

Сума їх дорівнює об'ємові даного тетраедра:

$$\frac{r}{3}(S_A + S_B + S_C + S_D) = V,$$

звідки

$$r = \frac{3V}{S_A + S_B + S_C + S_D}.$$

Так виражається радіус вписаної в тетраедр кулі через об'єм цього тетраедра і його площу поверхні.

Радіус r вписаної кулі можна виразити і через висоти h_A, h_B, h_C, h_D тетраедра:

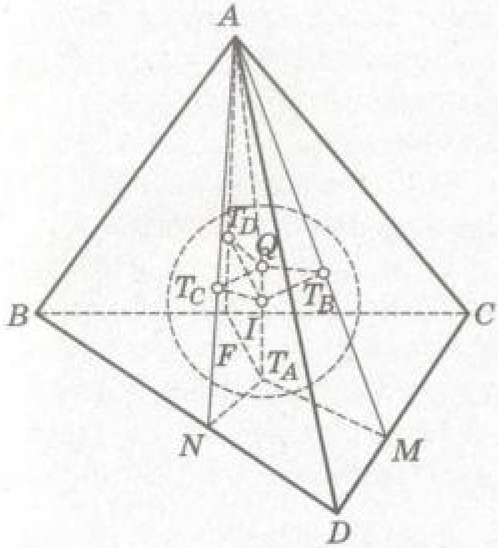
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

Виведіть її з попередньої рівності.

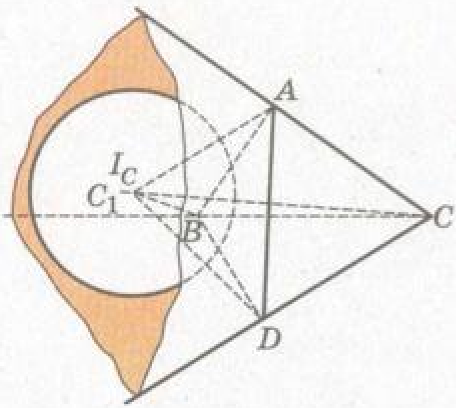
3. ***Точки, в яких вписана в тетраедр куля дотикається до трьох його граней, лежать у площині, перпендикулярній до бісектриси тригранного кута, утвореного цими гранями.***

Нехай вписана в тетраедр $ABCD$ куля з центром I (мал. 277) дотикається до граней ADC, ABD, ABC відповідно в точках T_B, T_C, T_D. Доведемо, що площина $T_BT_CT_D$ перпендикулярна до прямої IA.

Відрізки AT_B, AT_C, AT_D рівні між собою як дотичні до кулі, проведені з однієї точки A. Тому трикутники AIT_B, AIT_C, AIT_D рівні (за трьома сторонами). Перпендикуляри, проведені з точок T_B, T_C, T_D до бісектриси AI тетраедра, перетинають її в одній і тій самій точці Q. Тоді промінь AI перпендикулярний до QT_B, QT_C і QT_D. З цього випливає, що $AI \perp (T_BT_CT_D)$.



Мал. 277



Мал. 278

4. Куля, яка дотикається до однієї грані тетраедра і продовжень трьох інших його граней, називається *зовнівписаною кулею* тетраедра.

Проведемо бісектрису CC_1 тригранного кута C тетраедра $ABCD$ і бісекторну площину двогранного кута, суміжного з двогранним кутом при ребрі BD цього тетраедра (мал. 278). Вони перетинаються в деякій точці I_C (доводити цей очевидний факт не будемо). Точка I_C однаково віддалена від площин усіх чотирьох граней тетраедра, тобто є центром кулі, дотичної до всіх цих площин. Це і є одна із зовнівписаних куль тетраедра $ABCD$. Називатимемо її зовнівписаною кулею тетраедра $ABCD$ при грані ABD. Аналогічно можна побудувати зовнівписані кулі при трьох інших гранях тетраедра. Кожний тетраедр може мати чотири зовнівписані кулі.

Щоб вивести формули для визначення радіусів r_A, r_B, r_C, r_D зовнівписаних куль, сполучимо центр однієї з них, наприклад I_C, з усіма вершинами тетраедра. Тоді об'єм даного тетраедра дорівнюватиме:

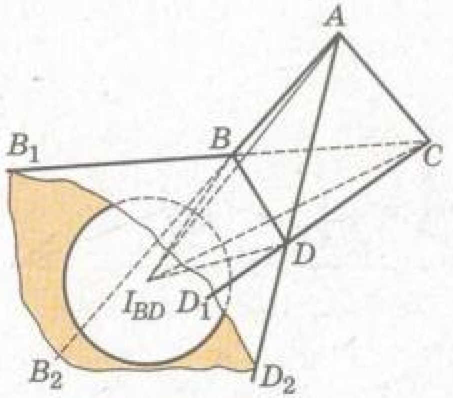
$$V = \frac{r_C}{3}S_A + \frac{r_C}{3}S_B + \frac{r_C}{3}S_D - \frac{r_C}{3}S_C,$$

звідки

$$r_C = \frac{3V}{S_A + S_B - S_C + S_D}.$$

Формули для визначення радіусів інших зовнівписаних куль аналогічні. Наприклад:

$$r_A = \frac{3V}{-S_A + S_B + S_C + S_D}.$$



Мал. 279

5. Крім зовнівписаних куль, у тетраедрі розглядають ще кулі, які дотикаються до продовжень усіх чотирьох граней.

Якщо продовжити кожну грань тетраедра $ABCD$, наприклад, за ребро BD (мал. 279), то дістанемо «клин» $BDB_1B_2D_1D_2$. У деяких випадках у такий «клин» можна вписати кулю так, щоб вона дотикалася до всіх чотирьох його граней. Цю кулю називають *зовнівписаною кулею другого роду*.

Виведемо формули для обчислення радіусів таких куль. Сполучимо центр I_{BD} однієї з них з усіма вершинами даного тетраедра. При цьому утворяться тетраедри $I_{BD}ABC$, $I_{BD}ACD$, $I_{BD}ABD$, $I_{BD}BCD$. Легко зрозуміти, що різниця між сумою об'ємів двох перших і сумою об'ємів двох останніх дорівнює об'єму даного тетраедра V. Тому, позначивши радіус розглядуваної кулі з центром I_{BD} буквою r_{BD}, дістанемо:

$$V = \frac{r_{BD}}{3}(S_B + S_D - S_A - S_C),$$

звідки

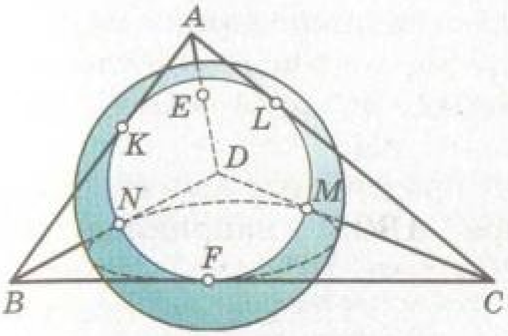
$$r_{BD} = \frac{3V}{S_B + S_D - S_A - S_C}.$$

З цієї рівності випливає, що r_{BD} існує і є додатним числом, якщо $S_B + S_D > S_A + S_C$. Тому якщо при одному ребрі тетраедра є зовнівписана куля другого роду, то при протилежному до нього ребрі такої кулі не буде. Отже, *тетраедр може мати не більше трьох зовнівписаних куль другого роду*. Проте їх може бути і дві, й одна, й зовсім не бути. Наприклад, у правильному тетраедрі таких куль немає, бо для нього $S_B + S_D - S_A - S_C = 0$, отже, r_{BD} не існує.

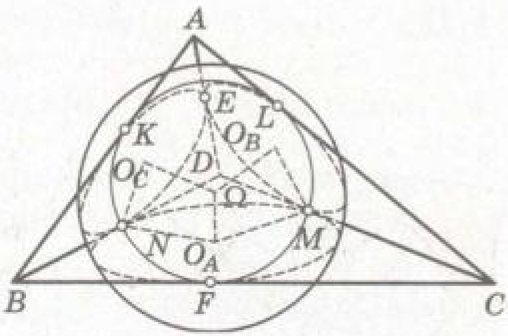
6. Чи можна побудувати кулю, яка б дотикалася до всіх шести ребер тетраедра? Не завжди.

Припустимо, що для тетраедра $ABCD$ така куля існує. Нехай вона дотикається до ребер у точках K, L, M, N, E, F (мал. 280). Тоді

$$\begin{aligned} AB + CD &= AK + KB + CM + MD, \\ AC + BD &= AL + LC + BN + ND, \qquad (*) \\ AD + CB &= AE + ED + BF + FC. \end{aligned}$$



Мал. 280



Мал. 281

Але, як відомо, відрізки дотичних до кулі, проведених з однієї точки, рівні між собою. Наприклад, $AK = AE = AL$, $BK = BN = BF$ і т. д. Таким чином, праві частини рівностей (*) рівні між собою.

Тоді рівні й ліві частини:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

Отже, щоб можна було побудувати кулю, яка б дотикалася до всіх ребер тетраедра, необхідно, щоб суми протилежних ребер цього тетраедра були рівні. Ця умова і достатня. Якщо вона виконується, то існує така куля, яка дотикається до всіх ребер даного тетраедра. Доведемо це.

Нехай у тетраедрі $ABCD$ (мал. 281) суми протилежних ребер однакові:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC. \qquad (**)$$

Впишемо в грані ACD і BCD кола з центром O_B і O_A. Нехай перше дотикається до ребра CD у точці M, а друге – у M_1. Тоді

$$CM - MD = CL - DE = AC - AD \text{ і } CM + MD = CD,$$

звідки

$$CM = \frac{1}{2}(AC - AD + CD).$$

Аналогічно з трикутника BCD знайдемо

$$CM_1 = \frac{1}{2}(CB - BD + CD).$$

Але з умови $AC + BD = AD + BC$ випливає: $AC - AD = CB - BD$, тому $CM_1 = CM$. Отже, якщо виконується умова (**), то вписані в грані ACD і BCD кола дотикаються до ребра CD в одній точці M. Так само можна довести, що кола, вписані в кожні дві грані розглядуваного тетраедра, дотикаються до їхнього спільного ребра в одній точці.

Проведемо з точок O_A і O_B перпендикуляри до граней BCD і ACD. Вони належать площині O_AMO_B і, отже, перетинаються в деякій точці Ω. Точка Ω однаково віддалена від F, N, M, E, L.

Аналогічно можна показати, що перпендикуляри, проведені до граней CBD і ABD через центри вписаних у них кіл O_A і O_C, теж перетинаються, наприклад у точці Ω_1. Отже, Ω_1 однаково віддалена від F, N, M, K, E. А це можливо лише тоді, коли Ω_1 збігається з точкою Ω, яка однаково віддалена від F, N, M, E, L, K. Отже, сфера Ω радіуса ΩM дотикається до всіх ребер даного тетраедра.

Сферу, яка дотикається до всіх шести ребер тетраедра, називають *напівуписаною сферою тетраедра*. А тетраедр, для якого така сфера існує, називатимемо *тетраедром напівуписаної сфери*.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

1521. Доведіть, що пряма, яка проходить через вершину D тетраедра $ABCD$ і його центроїд G, перетинає описану навколо нього сферу в точці D_1 так, що

$$DD_1 = \frac{DA^2 + DB^2 + DC^2}{4DG}.$$

1522. Доведіть, що в кожному тетраедрі

$$h_A h_B h_C h_D \geqslant 256r^4,$$

де h_A, h_B, h_C, h_D – висоти тетраедра, а r – радіус вписаної в нього кулі.

1523. Доведіть, що точки T_B, T_C, T_D, в яких вписана в тетраедр $ABCD$ куля з центром I дотикається до трьох граней тригранного кута A, лежать на сфері діаметра AI.

1524. Доведіть, що центр вписаної в тетраедр кулі лежить всередині тетраедра, утвореного точками дотику.

1525. Якщо накласти три грані тетраедра на четверту, повернувши їх навколо ребер, що утворюють четверту грань, то всі точки дотику вписаної в цей тетраедр кулі збіжаться в одну точку T, а вершини трьох перших граней розмістяться на колі з центром у точці T. Доведіть.

1526. Дано розгортку тетраедра. Вкажіть на ній точки дотику вписаної в цей тетраедр кулі.

1527. Виразіть радіуси зовнівписаних куль через висоти тетраедра.

1528. Доведіть, що

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{r},$$

де r – радіус кулі, вписаної в тетраедр, а r_A, r_B, r_C, r_D – радіуси зовнівписаних у нього куль.

1529. Якщо внаслідок перетину сфери з ребрами тетраедра утворюється шість рівних між собою хорд, то такий тетраедр напівуписаної сфери. Доведіть.

1530. Доведіть, що коли $ABCD$ – тетраедр напівуписаної сфери, то

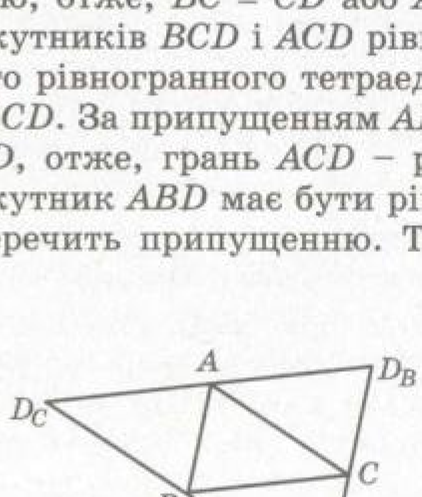
$$\widehat{AB}+\widehat{DC}=\widehat{AC}+\widehat{BD}=\widehat{AD}+\widehat{BC}.$$

§ 38 РІВНОГРАННІ ТЕТРАЕДРИ

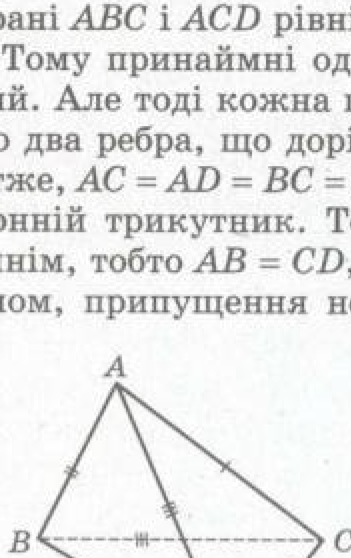
7. Тетраедр, усі грані якого є рівними між собою трикутниками, називається *рівногранним*. Візьмемо будь-який гострокутний трикутник $D_AD_BD_C$ і перегнемо його по середніх лініях AB, AC, BC (мал. 282) так, щоб вершини D_A, D_B, D_C збіглися. Дістанемо тетраедр, усі чотири грані якого є рівними між собою трикутниками. Це і є рівногранний тетраедр.

У рівногранному тетраедрі протилежні ребра попарно рівні між собою.

ДОВЕДЕННЯ. Припустимо, що в рівногранному тетраедрі $ABCD$ (мал. 283) $AB \neq CD$. У ньому грані ABC і ACD рівні між собою, отже, $BC = CD$ або $AC = CD$. Тому принаймні один із трикутників BCD і ACD рівнобедрений. Але тоді кожна грань цього рівногранного тетраедра має по два ребра, що дорівнюють CD. За припущенням $AB \neq CD$, отже, $AC = AD = BC = BD = CD$, отже, грань ACD – рівносторонній трикутник. Тоді й трикутник ABD має бути рівностороннім, тобто $AB = CD$, а це суперечить припущенню. Таким чином, припущення непра-



Мал. 282



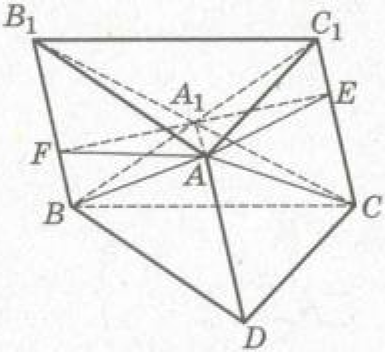
Мал. 283

вильне. У рівногранному тетраедрі протилежні ребра завжди рівні між собою.

Обернена теорема очевидна. Якщо $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, то всі грані тетраедра рівні між собою (за трьома сторонами).

8. ***Кожний тетраедр, усі чотири грані якого рівновеликі, є рівногранним.***

ДОВЕДЕННЯ. Нехай у тетраедрі $ABCD$ (мал. 284) площі всіх граней однакові.

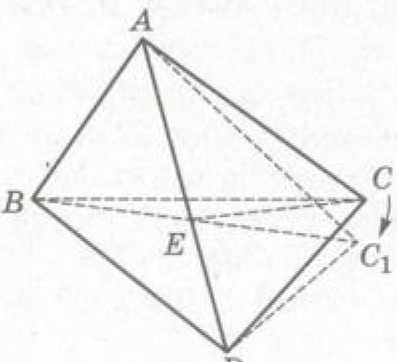


Мал. 284

Паралельно AD проведемо відрізки BB_1, CC_1, що дорівнюють AD, і сполучимо точки A, B_1, C_1, тобто добудуємо до даного тетраедра $ABCD$ чотирикутну піраміду $ABCC_1B_1$ так, щоб вийшла трикутна призма AB_1C_1DBC. Очевидно, що трикутники ABD і ABB_1, ACD і ACC_1, BCD і AB_1C_1 попарно рівні, тому всі бічні грані піраміди $ABCC_1B_1$ мають однакові площі, бо всі грані даного тетраедра рівновеликі. А якщо грані ABB_1 і ACC_1 мають однакові площі, то їхні висоти AF і EA, проведені до рівних відрізків BB_1 і CC_1, рівні між собою. Тому рівні між собою й проекції A_1F, A_1E цих висот на основу піраміди. Іншими словами, основа A_1 висоти піраміди $ABCC_1B_1$ однаково віддалена від BB_1 і CC_1. Аналогічно можна довести, що точка A_1 однаково віддалена від BC і B_1C_1, адже грані ABC і AB_1C_1 теж рівновеликі. Виходить, що A_1 – центр паралелограма BCC_1B_1. Тоді $A_1B = A_1C_1$ і, отже, $AB = AC_1 = CD$.

Аналогічно можна довести, що $AC = BD$ і $AD = BC$.

Таким чином, якщо всі грані тетраедра рівновеликі, то його протилежні ребра попарно між собою рівні. Отже, даний тетраедр рівногранний.



Мал. 285

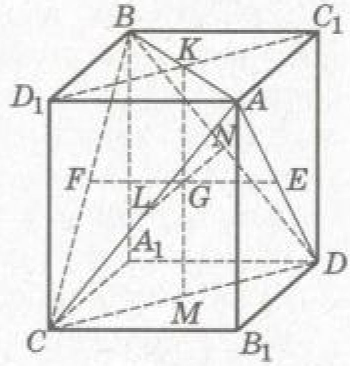
9. ***У рівногранному тетраедрі всі грані – гострокутні трикутники.***

ДОВЕДЕННЯ. Припустимо, що який-небудь плоский кут рівногранного тетраедра $ABCD$, наприклад $\angle ABD$, тупий або прямий (мал. 285). Повернемо грань ADC навколо AD так, щоб вона розмістилася в одній площині з гранню ABD. Оскільки в рівногранному тетраедрі $AB = DC$ і $AC = BD$, то матимемо паралелограм $ABDC_1$. Його діагональ AD, за припущенням, лежить проти тупого або прямого кута ABD, а тому вона не менша від другої діагоналі $BC_1 = BE + EC$. Але $BE + EC > BC$. Отже, $AD > BC$, а такого в рівногранному тетраедрі не може бути.

Як бачимо, не існує рівногранного тетраедра з прямими або тупими плоскими кутами. Усі плоскі кути рівногранного тетраедра гострі.

10. ***Кожна середня лінія рівногранного тетраедра перпендикулярна до двох інших його середніх ліній і до двох протилежних ребер, середини яких вона сполучає.***

Для доведення опишемо навколо даного рівногранного тетраедра $ABCD$ паралелепіпед (мал. 286). У рівногранному тетраедрі протилежні ребра між собою рівні, тому всі грані описаного паралелепіпеда – прямокутники. Наприклад, $BA = CD = C_1D_1$, а тому AC_1BD_1 – прямокутник.



Мал. 286

Як бачимо, навколо рівногранного тетраедра описано прямокутний паралелепіпед. Середні лінії KM, LN, EF рівногранного тетраедра сполучають центри протилежних граней прямокутного паралелепіпеда, отже, вони попарно перпендикулярні: $KM \perp LN \perp EF$. Кожна середня лінія перпендикулярна і до двох граней паралелепіпеда, а отже, і до тих двох ребер тетраедра, які лежать у цих гранях:

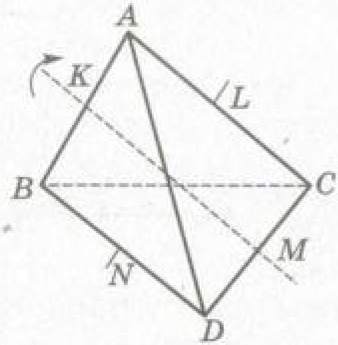
$$KM \perp AB \text{ і } CD,\ LN \perp BD \text{ і } AC,\ EF \perp AD \text{ і } BC.$$

Можна й інакше довести твердження. У рівногранному тетраедрі чотирикутники $KLMN$, $NELF$, $KEMF$ – ромби, тому їхні діагоналі KM, NL, EF (вони є середніми лініями тетраедра) попарно перпендикулярні.

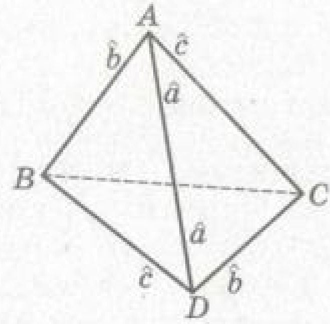
А якщо $KM \perp NL$ і $KM \perp FE$, то $KM \perp (ELFN)$, AB і CD паралельні площині $ELNF$, отже, $KM \perp AB$ і $KM \perp CD$.

11. Повернемо рівногранний тетраедр $ABCD$ на 180° навколо його середньої лінії KM (мал. 287). Оскільки $KM \perp AB$, $KM \perp CD$ і $AK = KB = CM = MD$, то внаслідок такого повороту вершини A і B, C і D поміняються місцями і тетраедр збіжиться із самим собою. При цьому збіжаться тригранні кути A і B, C і D, медіани AG_A і BG_B, CG_C і DG_D, висоти AH_A і BH_B, CH_C і DH_D, відрізки AG і BG, CG і DG і т. д.

Якщо повернути даний тетраедр на 180° навколо середньої лінії NL, то поміняються місцями вершини A і C, B і D.



Мал. 287



Мал. 288

Як бачимо, обертанням рівногранного тетраедра навколо його середніх ліній можна добитися, що будь-який його тригранний кут збігатиметься з кожним з трьох інших. Те саме можна сказати і про медіани, висоти, радіуси вписаних і описаних куль, протилежні двогранні кути тощо. Отже, у кожному рівногранному тетраедрі:

а) усі висоти рівні між собою;

б) усі медіани однакові;

в) усі тригранні кути рівні між собою (мал. 288);

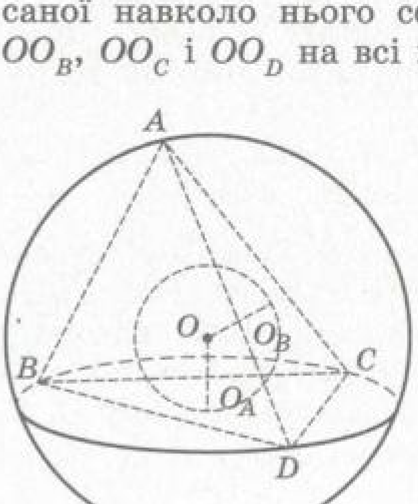
г) двогранні кути при протилежних ребрах однакові;

ґ) центроїд є центром вписаної й описаної куль.

Правильні й обернені твердження. Доведіть їх самостійно.

12. ***У кожному рівногранному тетраедрі (і тільки в рівногранному) центри вписаної й описаної сфер збігаються з центроїдом тетраедра.***

Перша частина цього твердження випливає з міркувань, наведених у п. 11. Тому досить довести другу частину. Для цього зі спільного центра O вписаної в тетраедр $ABCD$ й описаної навколо нього сфери опустимо перпендикуляри OO_A, OO_B, OO_C і OO_D на всі грані тетраедра (мал. 289). Ці перпендикуляри як радіуси вписаної сфери мають рівні довжини. Отже, усі грані тетраедра однаково віддалені від O. Тому кола, описані навколо його граней, теж рівні між собою. А в однакових колах на рівні між собою дуги спираються однакові вписані кути:



Мал. 289

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD},\ \widehat{BAD} = \widehat{BCD},$$
$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}.$$

Але

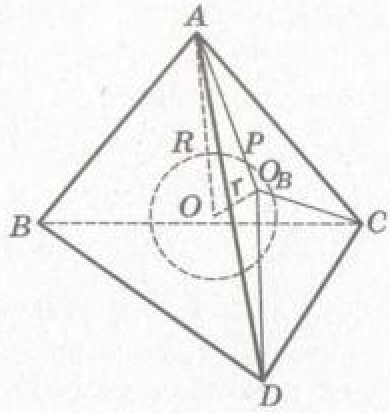
$$\widehat{CBD} + \widehat{BCD} + \widehat{BDC} = 180°,$$

тому

$$\widehat{CAD} + \widehat{BAD} + \widehat{BAC} = 180°,$$

тобто сума плоских кутів тригранного кута A дорівнює 180°.

Аналогічно можна довести, що сума плоских кутів кожного з інших тригранних кутів тетраедра дорівнює 180°. А таку властивість, як ми знаємо з п. 11, має лише рівногранний тетраедр.



Мал. 290

Розглянемо малюнок 290. Нехай вписана в рівногранний тетраедр $ABCD$ куля з центром O дотикається до грані ACD у точці O_B. Тоді O_B – центр описаного навколо трикутника ACD кола. З прямокутного трикутника AOO_B випливає:

$$OO_B^2 = AO^2 - AO_B^2, \text{ або}$$

$$r^2 = R^2 - \rho^2 = R^2 - \frac{r^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

звідки

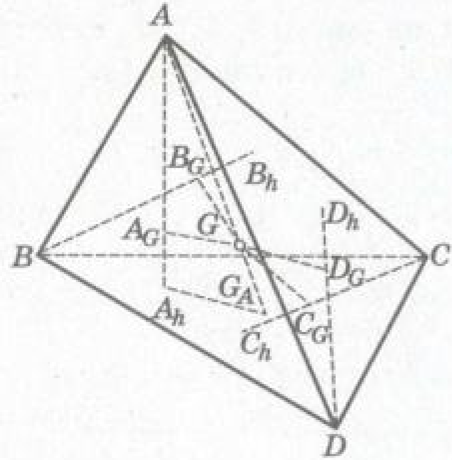
$$\frac{R^2}{r^2} = 1 + \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Така залежність існує між радіусами куль, вписаної в рівногранний тетраедр і описаної навколо нього.

Наслідок. ***Радіус вписаної в рівногранний тетраедр кулі не більший від $\frac{1}{3}$ радіуса кулі, описаної навколо цього тетраедра.***

13. ***Усі чотири висоти рівногранного тетраедра однаково віддалені від його центроїда.***

Опустимо з центроїда G рівногранного тетраедра $ABCD$ на його висоти AA_h, BB_h, CC_h, DD_h перпендикуляри GA_G, GB_G, GC_G, GD_G (мал. 291). Тоді $\triangle AA_GG \sim \triangle AA_hG_A$, причому $AG : AG_A = 3 : 4$. Отже, $AA_G = \frac{3}{4}AA_h$. Так само можна довести, що $BB_G = \frac{3}{4}BB_h$ і т. п. Але в



Мал. 291

рівногранному тетраедрі всі висоти рівні між собою: $AA_G = BB_G = CC_G = DD_G$. Крім того, $AG = BG = CG = DG$, бо це радіуси описаної кулі. Як бачимо,

$$\triangle AA_GG = \triangle BB_GG = \triangle CC_GG = \triangle DD_GG.$$

Тоді

$$GA_G = GB_G = GC_G = GD_G,$$

що й треба було довести.

З цих міркувань випливає, що *центроїд G рівногранного тетраедра є центром сфери, яка дотикається до всіх його висот*. Точки дотику ділять кожну висоту тетраедра у відношенні 1 : 3, рахуючи від основи.

З прямокутного трикутника AA_GG визначимо радіус R_h цієї сфери:

$$R_h^2 = AG^2 - AA_G^2.$$

Але

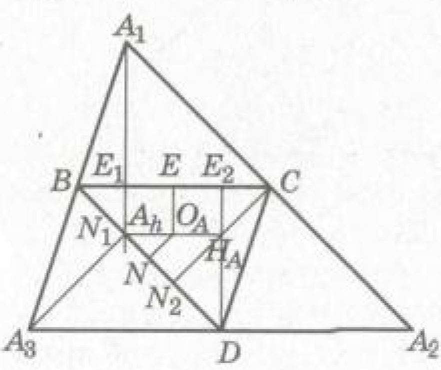
$$AG = R \text{ і } AA_G = \frac{3}{4}h_a = 3r.$$

Тому

$$R_h^2 = R^2 - 9r^2.$$

14. ***У рівногранному тетраедрі ортоцентр будь-якої грані й основа висоти тетраедра, опущеної на цю грань, симетричні відносно центра кола, описаного навколо цієї грані.***

Розглянемо розгортку рівногранного тетраедра $ABCD$ (мал. 292). Нехай O_A – центр кола, описаного навколо грані BCD. H_A – ортоцентр грані, а A_h – основа висоти тетраедра, опущеної на цю грань. Зрозуміло, що A_h – ортоцентр $\triangle A_1A_2A_3$. Нехай прямі A_1A_h і DH_A перетинають BC у точках E_1 і E_2, а прямі A_3A_h і CH_A перетинають BD відповідно у точках N_1 і N_2. Оскільки A_1BDC – паралелограм, то $\triangle A_1BE_1 = \triangle CDE_2$.

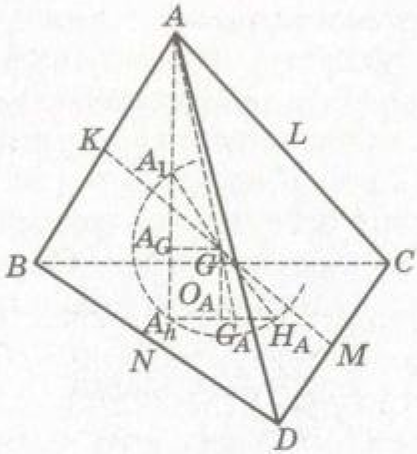


Мал. 292

Отже, $BE_1 = CE_2$ і середина E відрізка BC ділить навпіл E_1E_2. Аналогічно можна довести, що середина N відрізка BD ділить навпіл відрізок N_1N_2. Тоді O_A – точка перетину середніх ліній трапецій $E_1E_2H_AA_h$ і $N_1N_2H_AA_h$ – лежить на середині спільної сторони H_AA_h цих трапецій. Тому точки H_A і A_h симетричні відносно O_A.

15. Нехай A_h – основа висоти, опущеної на грань BCD рівногранного тетраедра $ABCD$ (мал. 293), а H_A і O_A – ортоцентр цієї грані та центр описаного навколо неї кола. Як показано вище, $H_AO_A = O_AA_h$. Отже, пряма H_AG перетинає висоту тетраедра AA_h у точці A_1 так, що $A_1A_h = 2GO_A$. Але GO_A – радіус вписаної кулі, він дорівнює $\frac{1}{4}AA_h$ (доведіть це). Тоді

$$A_1A_h = 2GO_A = 2\cdot\frac{1}{4}AA_h = \frac{1}{2}AA_h,$$



Мал. 293

тобто A_1 – середина висоти AA_h.

Центроїд G – середина гіпотенузи A_1H_A прямокутного трикутника $A_1A_hH_A$, тому $GA_1 = GA_h = GH_A$. Як бачимо, точка G однаково віддалена від ортоцентра грані H_A, основи висоти тетраедра A_h і середини цієї висоти A_1.

Якщо повернути даний тетраедр на 180° навколо його середньої лінії KM, то висота BB_h збіжиться з висотою AA_h, а центроїд G не змінить свого положення. Виходить, точки B_h, B_1, H_B містяться від центроїда G на таких самих відстанях, як і точки A_h, A_1, H_A. Повернувши даний тетраедр на 180° навколо середньої лінії LN, переконуємося, що ортоцентри всіх граней, основи і середини всіх висот даного тетраедра однаково віддалені від його центроїда G.

Отже, *у рівногранному тетраедрі ортоцентри всіх граней, основи і середини всіх його висот лежать на одній сфері.*

Назвемо її сферою дванадцяти точок рівногранного тетраедра.

Радіус цієї сфери R_{12} можна визначити з прямокутного трикутника A_1A_GG, де $A_1A_G = r$, $A_GG = R_h$ (див. п. 13). Звідси

$$R_{12}^2 = A_1G^2 = r^2 + R_h^2 = R^2 - 8r^2,$$

$$R_{12} = \sqrt{R^2 - 8r^2}.$$

Якщо всі грані тетраедра – правильні трикутники, то основи висот тетраедра збігаються з ортоцентрами граней і центрами описаних навколо них кіл. У цьому випадку сфера дванадцяти точок дотикається до граней тетраедра, тобто є вписаною сферою. В усіх інших випадках сфера дванадцяти точок рівногранного тетраедра перетинає площини його граней по рівних колах, центри яких збігаються з центрами кіл, описаних навколо граней тетраедра.

16. Окремий вид рівногранного тетраедра є правильний тетраедр. Правильний тетраедр має шість площин симетрії (які проходять через кожне ребро тетраедра і середину протилежного ребра), чотири осі симетрії третього порядку (кожна з них проходить через вершину і центр протилежної грані) та три осі симетрії другого порядку (вони проходять через середини протилежних ребер тетраедра).

Якщо ребро правильного тетраедра дорівнює a, то його

висота (медіана)	$h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$;
середня лінія	$n=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;
радіус вписаної кулі	$r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$;
радіус описаної кулі	$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$;
радіус зовнівписаної кулі	$r_A=\frac{a\sqrt{6}}{6}$;
площа поверхні	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
об'єм	$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$;
плоский кут	$\alpha=60°$;
двогранний кут	$\hat{a}=\arccos\frac{1}{3}\approx 70{,}5°$;
тригранний кут	$A\approx 0{,}55$ стерадіанів.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ

Доведіть твердження 1531–1542.

1531. Якщо сполучити відрізками центри кіл, описаних навколо граней рівногранного тетраедра, то утворений цими відрізками тетраедр теж буде рівногранним.

1532. У рівногранному тетраедрі синуси двогранних кутів відносяться як довжини відповідних їм ребер, тобто

$$\frac{\sin\hat{a}}{a}=\frac{\sin\hat{b}}{b}=\frac{\sin\hat{c}}{c}.$$

1533. Сума косинусів усіх двогранних кутів рівногранного тетраедра дорівнює 2.

1534. Якщо всі грані тетраедра мають рівні периметри, то тетраедр рівногранний.

1535. У кожному рівногранному тетраедрі:

а) $\cos\hat{a}\cos\hat{b}\cos\hat{c} \leqslant \frac{1}{27}$;

б) $\sin^2\frac{\hat{a}}{2}+\sin^2\frac{\hat{b}}{2}+\sin^2\frac{\hat{c}}{2}=1$;

в) $\sin\frac{\hat{a}}{2}+\sin\frac{\hat{b}}{2}+\sin\frac{\hat{c}}{2}=1$;

г) $\cos\hat{a} = 1 - 2\mathrm{ctg}\beta \cdot \mathrm{ctg}\gamma$;

ґ) $A = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} - \pi$;

д) $n_a^2 n_b^2 + n_a^2 n_c^2 + n_b^2 n_c^2 = 4S^2$;

е) $n_a n_b n_c = 3V$.

1536. У рівногранному тетраедрі радіус зовнівписаної кулі дорівнює діаметру вписаної.

1537. Квадрат діаметра описаної навколо рівногранного тетраедра кулі дорівнює сумі квадратів усіх середніх ліній цього тетраедра.

1538. З усіх тетраедрів, описаних навколо кулі з радіусом r, у рівногранному тетраедрі добуток висот найменший.

1539. Вписана в рівногранний тетраедр куля дотикається до всіх граней восьмигранника, вершинами якого є середини ребер даного тетраедра.

1540. Сума квадратів відстаней від усіх вершин рівногранного тетраедра до точки X, взятої на вписаній в нього сфері, не залежить від розміщення точки X на сфері.

1541. Вписана в рівногранний тетраедр куля дотикається до його граней у точках, що є центрами кіл, описаних навколо його граней.

1542. Кожну грань правильного тетраедра із середини висоти, опущеної на цю грань, видно під прямим тригранним кутом.

1543. Знайдіть косинус кута нахилу ребра PA правильного тетраедра $PABC$ до його грані ABC.

1544. Точка K – середина ребра PB правильного тетраедра $PABC$. Знайдіть кут нахилу прямої AK до площини грані ABC.

ІСТОРИЧНИЙ НАРИС

Геометрія – одна з найдавніших наук. Досліджувати різні просторові форми здавна спонукала людину їхня практична діяльність.

Багато початкових геометричних відомостей дістали єгипетські, шумеро-вавилонські, китайські та інші учені давніх часів. Встановлювалися вони спочатку тільки дослідним шляхом, без логічних доведень.

Як наука геометрія вперше сформувалась у Стародавній Греції, коли геометричні закономірності й залежності, знайдені спочатку дослідним шляхом, були зведені в систему і доведені як теореми. Одна з математичних праць тих далеких часів дійшла і до нас. Це – «Основи» александрійського математика Евкліда (бл. 365 – бл. 300 рр. до н. е.).

Розвивалася геометрія і після Евкліда. Зокрема, Архімед (III ст. до н. е.) запропонував нові способи обчислення площ і об'ємів геометричних тіл, Аполлоній (III–II ст. до н. е.) дослідив перерізи конуса, Менелай (I–II ст.) розвинув геометрію і тригонометрію сфери. Але в наступні століття аж до Відродження в Європі геометрія не розвивалася. Тільки у другій половині минулого тисячоліття тут знову почали з'являтися геометричні відкриття. Створювалися нові методи дослідження властивостей геометричних фігур і з'являлися невідомі раніше галузі стародавньої науки: аналітична, проективна, нарисна, диференціальна геометрії.

Далі зробимо короткий історичний огляд тем, розглянутих у цьому підручнику.

Координати і вектори. Метод координат. Вперше поняття координат (астрономічних і географічних, які називалися широтою та довготою) з'явилися у роботах давньогрецьких учених Ератосфена (III ст. до н. е.) і Гіппарха (II ст. до н. е.). З часом метод географічних координат було удосконалено та трансформовано на інші системи координат точок на площині та в просторі. Основоположниками методу координат вважаються П. Ферма і Р. Декарт. Ферма розглядав лише додатні значення x і y, а тому його система координат складалася фактично з одного першого квадранта. У Декарта система координат також складалася з однієї фіксованої осі (абсцис), але на відміну від Ферма він розглядав точки з додатними і від'ємними ординатами. За допомогою методу координат Декарта подавалася геометрична інтерпретація від'ємних чисел. У такий спосіб значення від'ємних і додатних чисел зрівнювалися.

Метод координат П. Ферма розробив раніше Р. Декарта, але останній першим опублікував свої результати. Терміни

Декарт Рене

(1596–1650)

Видатний французький філософ, математик, фізіолог, фізик. Р. Декарт увів метод координат, поняття змінної, заклав основи аналітичної геометрії, ввів сучасні позначення степенів, знаки «+» і «–» для позначення додатних і від'ємних чисел. Більш відомий як філософ, засновник картезіанства. Проти його поглядів різко виступали католики і протестанти. Його праці, зокрема «Міркування про метод», «Початок філософії», «Пристрасті душі» раніше були внесені до «Індексу заборонених книг».

«абсциса», «ордината» й «апліката» мають грецьке походження і використовувалися в теорії про конічні перерізи. У сучасному розумінні їх почав використовувати Г. Лейбніц, він також увів термін «координати», щоб підкреслити рівноправність «абсциси» й «ординати». Але загальновживаними ці терміни стали лише з середини XVIII ст. Термін «вісь абсцис» увів І. Барроу (1670 р.), а термін «вісь ординат» – значно пізніше Г. Крамер (1750 р.). Спочатку метод координат розробили для площини, а у XVIII ст. Й. Бернуллі, А. Клеро та інші математики поширили його на тривимірний простір. Вивів рівняння площини і розв'язав більшість задач тривимірної аналітичної геометрії Г. Монж. Систематичний виклад аналітичної геометрії простору дав Л. Ейлер.

Вектори у математику входили з трьох джерел: числення відрізків, дослідження векторних величин і теорії кватерніонів. Теорію напрямлених відрізків на площині та в просторі вперше виклав норвезький геодезист і картограф К. Вессель у праці «Досвід про аналітичне представлення напряму і його застосування, переважно до розв'язування плоских і сферичних многокутників». Нове числення напрямлених відрізків К. Вессель будував майже так, як воно подається у сучасних підручниках: уводив поняття напрямленого відрізка, базисної одиниці, напряму (відхилення) відрізка, формулював правила для виконання дій з напрямленими відрізками й показував їхнє застосування на площині та в просторі. К. Весселю також належить перша спроба векторної побудови тригонометрії зі строгим обґрунтуванням усіх її формул.

Векторні величини стосовно проблем механіки дослідив англійський математик Д. Валліс у праці «Механіка, чи геометричний трактат про рух». Геометричне додавання та віднімання векторів Д. Валліс здійснював за правилом паралелограма і паралелепіпеда. *Розглядаючи розкладання заданої сили на компоненти, він уточнював, що виконати таку дію можна нескінченною кількістю способів.*

Поняття «вектор» увів 1846 р. ірландський математик В.Р. Гамільтон, розглядаючи вектори у зв'язку з кватерніонами (числами виду $a + bi + cj + dk$, де i, j, k – уявні одиниці). Він писав: «Відрізок AB, у якого розглядається не тільки довжина, але і напрям, називається вектором. Його початкова точка називається origin, його кінцева точка – term. Вектор AB, ... – різниця двох своїх граничних точок». Позначення $\bar{r}$ запропонував 1887 р. О. Коші.

Одним з перших вітчизняних учених, які розробляли теорію векторів, був професор Київського університету П. Ромер. Систематичний і детальний виклад векторного числення та теорії кватерніонів він здійснив у докторській дисертації «Основні початки методу кватерніонів» (1866 р.). Серед вітчизняних учених геометричний напрям у формуванні теорії векторного числення представляв професор Київського університету В. Єрмаков. У Києві 1887 р. він видав працю «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів». 1890 р. в Одесі Н.Д. Зейлігер опублікував книжку «Теория векторов».

Найзагальніший погляд на вектори як елементи векторного простору запропонував Г. Вейль. *Векторним простором* називається будь-яка множина, для елементів якої визначені операції додавання і множення на число (при цьому мають виконуватися 4 закони додавання і 4 закони множення). Приклади векторних просторів: множина всіх пар точок простору;

Гамільтон Вільям Рован

(1805–1865)

Ірландський математик. Читати навчився в 3 роки, в 10 років став студентом, у 12 років знав 10 мов. З 22 років – професор астрономії та директор астрономічної обсерваторії. Його основні праці стосуються механіки, диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Досліджував числові множини, створив систему кватерніонів, ввів термін «вектор». У геометрії досліджував хвильові поверхні, в алгебрі – групи, одну з яких називають групою Гамільтона.

множина всіх трійок дійсних чисел; множина всіх паралельних перенесень площини чи простору тощо.

Поняття n-вимірного простору введено в математику майже одночасно з поняттям вектора – у середині XIX ст.

Щоб задати точку на площині (у двовимірному просторі), досить указати дві її координати: $A(a_1; a_2)$. Щоб задати точку у тривимірному просторі, треба вказати три її координати: $A(a_1; a_2; a_3)$. Між усіма точками тривимірного простору і впорядкованими трійками дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність: кожній точці простору відповідає єдина трійка чисел, а кожній трійці чисел – єдина точка. Тому математики множину всіх пар дійсних чисел майже ототожнюють з площиною (двовимірним простором), а множину всіх трійок дійсних чисел – з тривимірним простором. Природно множину всіх впорядкованих четвірок дійсних чисел назвати *чотиривимірним простором*.

Міркуючи за аналогією, домовилися, що $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$, $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$ – точки чотиривимірного простору. $C\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}; \frac{a_4+b_4}{2}\right)$ – середина відрізка AB, $(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2+(a_4-b_4)^2$ – квадрат довжини цього відрізка тощо. Ввівши ці та деякі інші поняття, математичними методами досліджують властивості в такий спосіб створення простору. Ці дослідження виявилися досить змістовними і корисними не тільки для математики. Наприклад, у механіці, крім трьох просторових координат x, y, z, розглядають і четвертий «вимір» – час t, який входить до всіх механічних співвідношень.

Подібним способом можна ввести п'ятивимірний та інші n-вимірні простори. Їх при $n \geqslant 4$ називають *багатовимірними просторами*. Історія виникнення вчення про багатовимірні простори досить цікава. Філософи та інші спеціалісти, далекі від математики, спочатку різко критикували такі дослідження, вважали все це математичними вигадками. Проте згодом вони змінили свої погляди, дехто став навіть стверджувати, що чотиривимірний простір існує в реальному світі. Допускали навіть існування «медіумів», які можуть переносити тіла з реального тривимірного простору у чотиривимірний і навпаки. Чудовий матеріал для фантастів! Але математики, які створили і добре знають багатовимірні простори, сприймають їх практичніше і реальніше.

Геометрію чотирьох вимірів один з перших опрацював український вчений і громадський діяч **Микола Іванович Гулак**.

Гулак Микола Іванович
(1822–1899)

Народився на Полтавщині, працював у канцелярії Київського генерал-губернатора. Був одним із засновників Кирило-Мефодіївського братства. За те 1847 р. його арештували. Тільки через 12 років він повернувся в Україну, працював учителем математики, географії, російської мови в Одесі, Керчі, Ставрополі, в Грузії. 1877 р. в Тифлісі опублікував монографію «Спроба геометрії чотирьох вимірів». Ще одну працю (французькою мовою) він надрукував в Одесі «Етюди про трансцендентні рівняння». Р. Іваничук про М. Гулака написав роман «Четвертий вимір».

Многогранники. Поняття «куб», «паралелепіпед», «призма», «піраміда», «тіло» були добре відомі давньогрецьким геометрам. Ось кілька означень з книги XI «Основ» Евкліда: «Тілом називається те, що має довжину, ширину і глибину. Межі тіла є поверхні... Піраміда є тіло, обмежене площинами, проведеними від якої-небудь площини до точки, яка лежить поза цією останньою. Призма є тіло, обмежене площинами, з яких дві протилежні рівні, подібні і паралельні, решта ж є паралелограми... Куб є тіло, обмежене шістьма рівними квадратами».

Правильні многогранники були відомі навіть попередникам Евкліда. У «Основах» доведено, що існує тільки 5 видів правильних многогранників, і показано, як можна побудувати кожний з них. Архімед відкрив існування 13 видів напівправильних многогранників.

Тіла обертання були відомі ще давньогрецьким геометрам. У «Основах» Евкліда сформульовані такі означення: «Кулю описано півкругом, який обертається на нерухомому діаметрі... Конус описано прямокутним трикутником, який обертається навколо нерухомої перпендикулярної сторони. Циліндр походить від обертання прямокутника навколо нерухомої сторони».

Об'єми деяких многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. В одному папірусі, який дійшов до наших днів, крім інших, розв'язується задача про визначення об'єму зрізаної чотирикутної піраміди з висотою 6 і сторонами основи 4 і 2. Архімед умів знаходити об'єми навіть параболоїда,

Кавальєрі Бонавентура

(1598–1647)

Італійський математик, викладач Болонського університету, автор «Геометрії», в якій викладено метод неподільних. По суті, він умів розв'язувати задачі, які тепер розв'язують, обчислювати інтеграли $\int_a^b x^n dx$ при натуральних $n < 10$. Інші його праці «Сто різних задач...», «Тригонометрія плоска і сферична, лінійна і логарифмічна».

гіперболоїда і еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса, кулі.

Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик Б. Кавальєрі. Його міркування були нестрогими, інтуїтивними, бо посилався він на ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу. У даному підручнику основне твердження Кавальєрі прийнято за аксіому, тому всі теореми про визначення об'ємів доведені цілком коректно.

Строгу сучасну теорію об'ємів, площ та інших величин розробив відомий французький математик А. Лебег. На основі загального поняття міри він увів нове, загальніше поняття інтеграла, який тепер називають інтегралом Лебега.

Для розвитку шкільної геометрії багато зробив видатний український математик **М.В. Остроградський** (1801–1862). Він у 1855–1860 рр. надрукував у трьох частинах книгу «Руководство начальной геометрии», всього 748 сторінок. Книгу передруковано українською мовою 2001 р. у Тернополі.

Лебег Анрі Луї

(1875–1941)

Французький математик, доктор філософії. Один із засновників сучасної теорії функцій, створив теорію міри, ввів нове розуміння інтеграла – інтеграл Лебега. Нове поняття інтеграла дає можливість інтегрувати досить широкий клас функцій, а отже, розв'язувати багато важливих прикладних задач. З проблем середньої школи опублікував книги «Лекції про геометричні побудови», «Конічні перерізи», «Про вимірювання величин».

Георгій Феодосійович Вороний
(1868–1908)

Український математик. Народився в с. Журавка (Чернігівська обл.), досліджував проблеми геометричної теорії чисел та геометрії многогранників. Математики всього світу дедалі частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного тощо.

Багато зробив для розвитку геометрії відомий український математик **Г.Ф. Вороний** (1868–1908) – творець геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками.

Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики М.Є. Ващенко-Захарченко (1825–1912), С.Й. Шатуновський (1859–1929), О.С. Смогоржевський (1896–1969), М.І. Кованцов (1924–1988), О.В. Погорєлов (1919–2002) та багато інших.

Як бачимо, більшість властивостей геометричних фігур, які вивчаються у сучасній школі, були відомі й дві тисячі років тому. З часом їх доповнювали новими відкриттями, передавали від покоління до покоління, тому що ці відомості дуже потрібні людям. У наш час геометрія ще більш потрібна. Не можна не погодитися з думкою відомого архітектора Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до цього часу ми не жили у такий геометричний період. Варто поміркувати про минуле, пригадати те, що було й раніше, і ми будемо приголомшені, побачивши, що оточуючий нас світ – це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Усе навкруги – геометрія».

У майбутньому оточуючий нас світ, безумовно, зміниться, але геометрія залишиться. Навіть ще більше збагатиться новими відомостями і методами, тому що вона дуже потрібна людям.

ТЕМИ ДЛЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

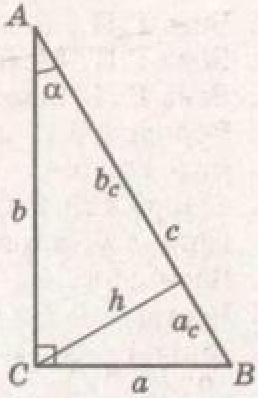
1. Аналогії в геометрії.
2. Геометрія та логіка.
3. Геометрія та кристалографія.
4. Геометрія й архітектура.
5. Геометрія та мистецтво.
6. Геометричні побудови у просторі.
7. Геометричні простори.
8. Геометричні перетворення та групи.
9. Геометрія та теорія ймовірностей.
10. Фрактали.
11. Геометричні місця точок простору.
12. Рухи у просторі.
13. Інверсії на площині та в просторі.
14. Поверхні обертання та гвинтові поверхні.
15. Лист Мебіуса.
16. Періодичні поверхні.
17. Геометрична теорія чисел.
18. Стереометричні екстремальні задачі.
19. Просторові узагальнення теореми Піфагора.
20. Коло Ейлера і його просторові аналоги.
21. Тетраедр і сфера.
22. Ортоцентричні тетраедри.
23. Рівногранні тетраедри.
24. Прямокутні тетраедри.
25. Напівправильні многогранники.
26. Многогранники на полотнах відомих художників.
27. Тор і його властивості.
28. Нарисна геометрія.
29. Проективна геометрія.
30. Тіла обертання та токарна справа.
31. Тіла обертання та гончарство.
32. Заповнення простору рівними тетраедрами.
33. Заповнення простору рівними многогранниками.
34. Від циркуля до штангенциркуля.
35. Творення української геометричної термінології.
36. Історія шкільних підручників геометрії.
37. Підручник геометрії М.В. Остроградського.
38. Стереометрія допомагає планіметрії.
39. Стереометричні задачі на олімпіадах.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці / упоряд. О.К. Романчук. – Львів, 1992.
2. Бевз В.Г. Історія математики. – Харків, 2006.
3. Безв Г.П., Бевз В.Г. Математика – К., 2005.
4. Бевз Г.П. Математика в школах України. – К., 2009.
5. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К., 2009.
6. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К., 1973.
7. Бродський Я.С., Павлов О.Л. Статистика, ймовірність, комбінаторика у старшій школі. – Харків, 2008.
8. Василенко О. Серенада математиці. – Харків, 2003, 2009, 2011.
9. Василенко О.О. Жінки й математика. – Харків, 2008.
10. Вірченко Н.О. Математика в афоризмах і висловлюваннях. – К., 1974.
11. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Харків, 2008. – Кн. 1, 2.
12. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М., 1982.
13. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX–X классы. – М., 1983.
14. Демьянов В.П. Геометрия и Марсельеза. – М., 1979.
15. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов, 1995.
16. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К., 1980.
17. Кованцов М.І. (редактор). Математична хрестоматія. – К., 1977.
18. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М., 1991.
19. Конфорович А.Г. Колумби математики. – К., 1982.
20. Конфорович А., Сорока М. Остроградський. – К., 1980.
21. Конфорович А.Г. У пошуках інтеграла. – К., 1990.
22. Ліо Кі. Ломиголовки. – К., 1996.
23. Маркова І.С. (упорядник). Математика після уроків. – Харків, 2004.
24. Математика в школі: журнал.
25. Математика у школах України: журнал.
26. Математика: газета.
27. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К., 1991.
28. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К., 1988.
29. Тадеєв В.О. Геометрія, 11 клас. – Тернопіль, 2004.
30. Тадеєв В.О. Математика. Тлумачний словник-довідник. – Тернопіль, 1999.
31. У світі математики. – К., 1968–1991. – Вип. 1–20.
32. У світі математики: журнал для школярів.
33. Шафаревич И. Есть ли у России будущее? – М., 1991.
34. Шляхами математики / упоряд. Т.М. Хмара. – К., 1999.
35. Шмигевський М.В. Видатні математики. – Харків, 2004.
36. Энциклопедический словарь юного математика. – М., 1985.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Прямокутний трикутник



$\frac{a}{c}=\sin\alpha$; $a^2+b^2=c^2$ (теорема Піфагора);

$\frac{b}{c}=\cos\alpha$; $a^2=a_c\cdot c$;

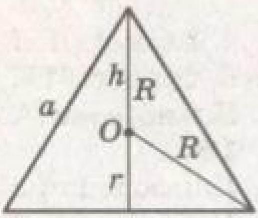
$\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha$; $b^2=b_c\cdot c$;

$\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha$; $h^2=a_c\cdot b_c$;

$S=\frac{1}{2}ab$; $S=\frac{1}{2}ch$; $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$; $h=\frac{ab}{c}$;

$R=\frac{c}{2}$; $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Рівносторонній трикутник

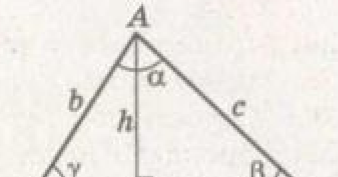


$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r=\frac{1}{3}h$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $R=\frac{2}{3}h$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$R=2r$; $h=R+r$.

Довільний трикутник



$S=\frac{1}{2}ah$; $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

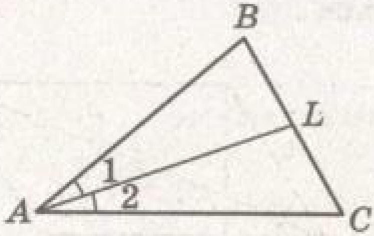
$p=\frac{a+b+c}{2}$,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

$R=\frac{abc}{4S}$; $r=\frac{S}{p}$; $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$;

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (теорема косинусів);

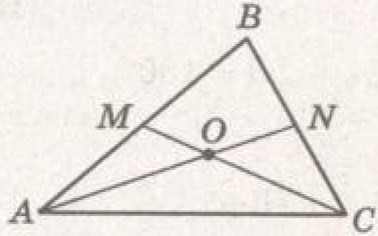
$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ (теорема синусів).



AL – бісектриса

1) $\angle 1 = \angle 2$;

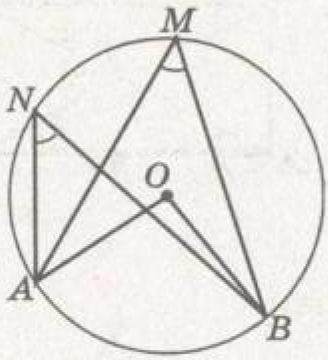
2) $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$.



AN, CM – медіани

$AO : ON = 2 : 1$.

Коло

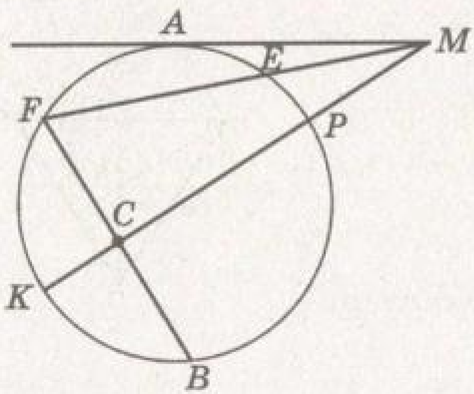


$C = 2\pi r$;

$S = \pi r^2$.

$\angle AMB = \dfrac{1}{2}\angle AOB = \dfrac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$;

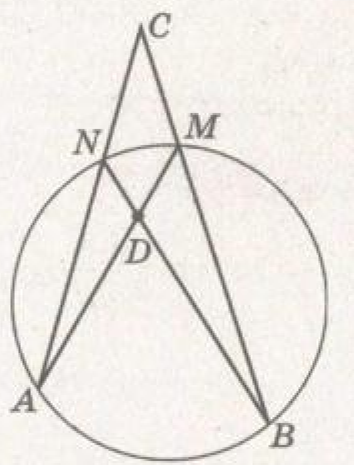
$\angle AMB = \angle ANB$.



$AM^2 = ME \cdot MF$;

$ME \cdot MF = MP \cdot MK$;

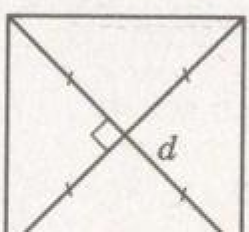
$FC \cdot CB = KC \cdot CP$.



$\angle ADB = \dfrac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{MN})$;

$\angle ACB = \dfrac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} - \overset{\smile}{MN})$.

Квадрат



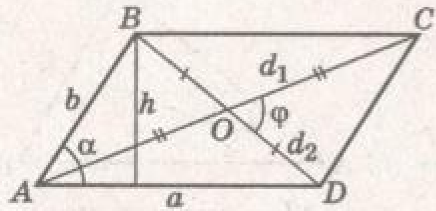
$d = a\sqrt{2}$; $\quad r = \dfrac{a}{2}$;

$P = 4a$; $\quad R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S = a^2$; $\quad S = \dfrac{1}{2}d^2$.

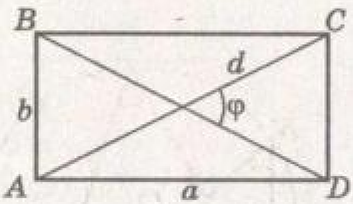
Паралелограм

$\angle A + \angle B = 180°$;
$P = 2(a + b)$;
$S = ah$;
$S = ab\sin\alpha$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$;
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.



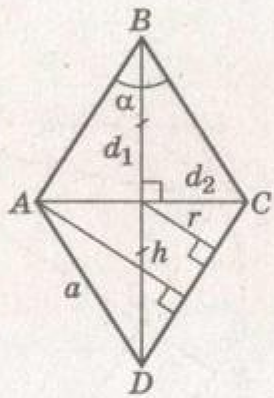
Прямокутник

$AC = BD$;
$P = 2(a + b)$;
$S = ab$;
$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$; $R = \frac{1}{2} d$.

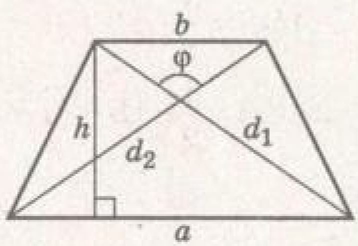


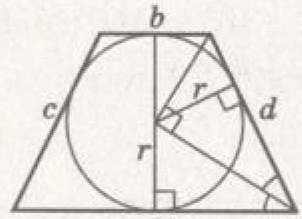
Ромб

$P = 4a$;
$S = ah$;
$S = a^2\sin\alpha$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$;
$r = \frac{1}{2} h$; $r = \frac{d_1 d_2}{4a}$.



Трапеція

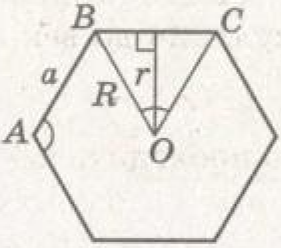




$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$;

$a + b = c + d$;
$h = 2r$.

Правильний многокутник



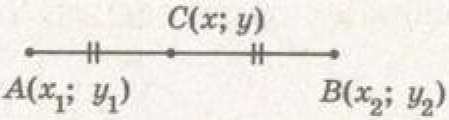
Сума кутів: $180(n-2)$; $P = na$;

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n}; \qquad S = \frac{1}{2}arn;$$

$$\angle BOC = \frac{360^\circ}{n}; \qquad S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}; \qquad a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Координати на площині



$$x = \frac{x_1+x_2}{2};\ y = \frac{y_1+y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – рівняння кола із центром $O(a; b)$ радіуса R.

Рівняння прямої

$ax + by + c = 0$ – загальне рівняння прямої;

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$;

$y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

для прямих $y_1 = k_1x + b_1$ і $y_2 = k_2x + b_2$:

$k_1 = k_2$ – умова паралельності;

$k_1 \cdot k_2 = -1$ – умова перпендикулярності;

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ – відстань від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$.

Координати у просторі

Нехай дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$.

$C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}; \dfrac{y_1+y_2}{2}; \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ – координати точки C – середини відрізка AB;

$M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}; \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$ – координати точки M, яка ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = \lambda$;

$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ – довжина відрізка AB;

$ax + by + cz + d = 0$ – загальне рівняння площини;

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a; b; c)$;

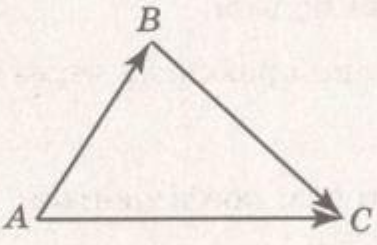
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$;

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (a; b; c)$;

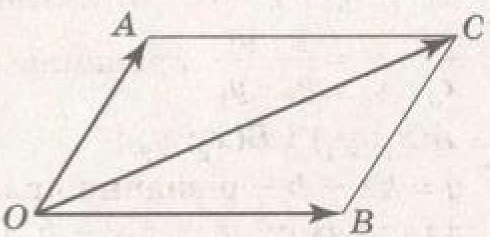
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ – рівняння сфери радіуса R із центром у точці $(a; b; c)$;

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ – відстань від точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до площини $ax + by + cz + d = 0$.

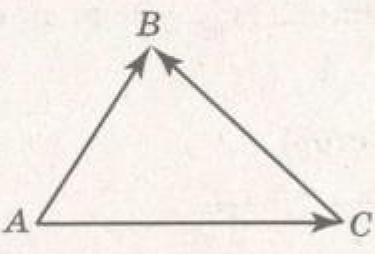
Вектори



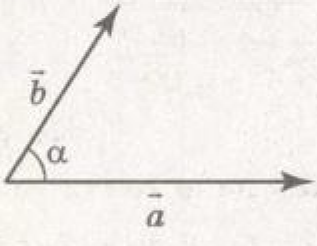
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ – додавання векторів за правилом трикутника.



$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ – додавання векторів за правилом паралелограма.



$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$ – різниця векторів.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$\vec{a} = \lambda\vec{b}$ – умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Вектори, задані координатами

$\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ – координати вектора $\overline{AB}$, де $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Нехай $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$;

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)$;

$k\vec{a} = (kx_1;\ ky_1;\ kz_1)$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ – умова колінеарності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

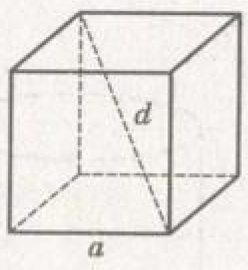
$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ – умова перпендикулярності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина вектора $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$;

$$\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

МНОГОГРАННИКИ

Куб

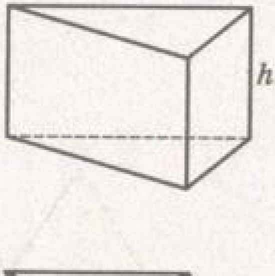


$d = a\sqrt{3}$;

$S_п = 6a^2$;

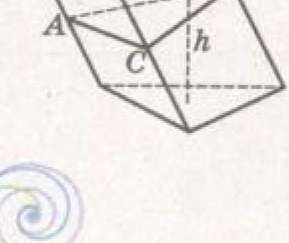
$V = a^3$.

Пряма призма



$S_п = S_б + 2S_о$;
$S_б = P_о \cdot h$;
$V = S_о \cdot h$.

Похила призма

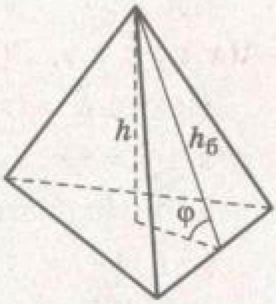


ABC – перпендикулярний переріз.
$S_п = S_б + 2S_о$;
$S_б = P_{пер} \cdot l$;
$V = S_о \cdot h$.

Піраміда

$S_п = S_б + S_о$;

$V = \frac{1}{3} S_о \cdot h$.



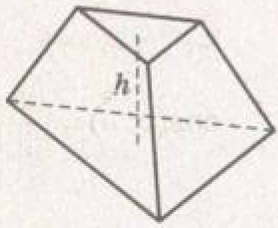
Для правильної піраміди $S_б = \frac{1}{2} P_о \cdot h_б$, де $h_б$ – апофема;

$S_б = \frac{S_о}{\cos\varphi}$.

Зрізана піраміда

$S_п = S_б + S_1 + S_2$, де S_1 і S_2 – площі основ;

$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.



Для правильної зрізаної піраміди $S_б = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h_б$.

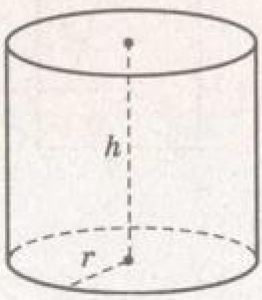
ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Циліндр

$S_б = 2\pi rh$;

$S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2$;

$V = \pi r^2 h$.

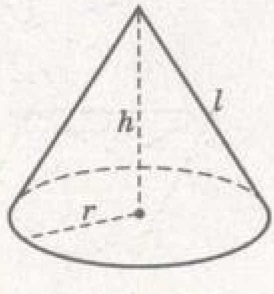


Конус

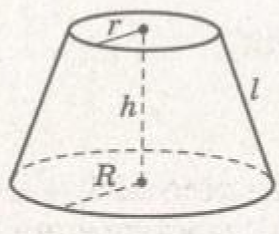
$S_б = \pi rl$;

$S_п = \pi rl + \pi r^2$;

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



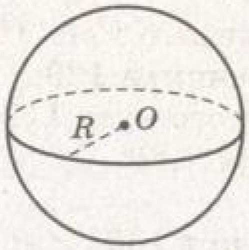
Зрізаний конус



$$S_б = \pi l(R + r);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

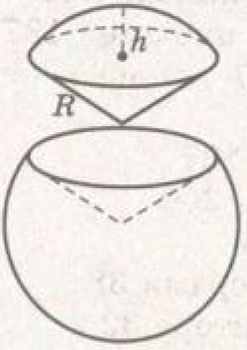
Куля та сфера



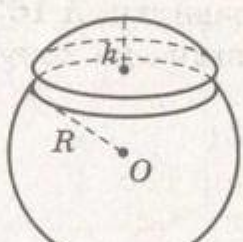
$$S_{сф} = 4\pi R^2;$$

$$V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Сектор і сегмент



$$V_{сект} = \frac{2}{3}\pi R^2 h;$$



$$V_{сегм} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Тор

$$V_т = 2\pi^2 \rho r^2.$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ВІДПОВІДІ

15. $3\sqrt{6}$. **16.** -4. **17.** Ні. **19.** $(0; -2; 0)$. **22.** в) Рівнобедрений, $P = 6(1 + \sqrt{3})$, $S = 9\sqrt{2}$. **23.** а) Квадрат, $S = 25$. **25.** $60°$. **26.** $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **29.** $(-0,25; 0,25; 0)$. **30.** $(2; 2; 2)$ або $(-2; -2; -2)$. **31.** $(3; 9; 0)$ або $(2; 8; 0)$. **32.** а) $(0; 0; 0)$; $(0; 0; 6)$; $(0; 0; -4)$; $(0; 0; 3 \pm \sqrt{33})$. **34.** $B_1(0; 0; 2\sqrt{3})$, $D_1\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}; 0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ або $D_1\left(-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}; 0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; $B_2(0; 0; -2\sqrt{3})$, $D_2\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}; 0; -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ або $D_2\left(-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}; 0; -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **35.** а) Точки відрізка AB, де $A(6; 0; 0)$, $B(0; 0; 8)$; б) таких точок не існує. **46.** $B(0; 9; -6)$. **47.** $A(5; -4; 0)$, $B(-7; 5; 6)$. **48.** 5; $\sqrt{70}$; $\sqrt{91}$. **50.** $A(4; -2; 8)$; $C(0; -8; 4)$. **52.** а) Так; б) ні. **54.** $C(1; -3; 6)$; $D(6; 0; -1)$. **55.** а) $(-1; 2; 0)$; в) $\left(3; -\dfrac{3}{4}; 0\right)$. **56.** $\left(\dfrac{1}{3}; 3; 3\right)$. **57.** а) $a = -2$; $b = 2$. **58.** $h = 3\sqrt{2}$; $S = 9\sqrt{2}$. **59.** а) $\sqrt{2}$; б) $30°$; $30°$; $120°$; в) $2\sqrt{3}$. **61.** 3. **62.** а) $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$; б) $(1; 2; 2)$. **63.** б) $\left(2; \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}; \dfrac{7-3\sqrt{3}}{2}\right)$. **65.** $C(-7; -4; -1)$. **66.** $\left(\dfrac{25}{8}; \dfrac{33}{8}; \dfrac{9}{4}\right)$. **67.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$. **68.** $2\sqrt{3}$. **70.** а) $SO = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **84.** $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ або $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. **85.** $(6; 0; 0)$ і $(-2; 0; 0)$. **87.** 8π. **88.** а) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 1$. **89.** а) $(1; -2; 1)$, $R = 5$. **92.** $y - z = 0$. **93.** $z = 4$. **94.** $4x - 11y - 6z = 0$. **95.** $M_z\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 0\right)$; $M_y\left(\dfrac{4}{5}; 0; -\dfrac{1}{5}\right)$; $M_x\left(0; \dfrac{4}{7}; \dfrac{1}{7}\right)$. **98.** $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-2}{2}$. **99.** $(4; 7; 9)$. **100.** $\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{10}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ і $\left(-\dfrac{12}{7}; \dfrac{22}{7}; -\dfrac{3}{7}\right)$. **102.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. **103.** $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 29$. **105.** $a \in (-\infty; -8) \cup (-2; 2) \cup (8; \infty)$ – спільних точок немає, $a \in (-8; -2) \cup (2; 8)$ – перетинаються, $a = \pm 8$ – внутрішній дотик, $a = \pm 2$ – зовнішній дотик. **109.** $x + y + z - 2 = 0$. **112.** Прямокутний паралелепіпед. **113.** Ні. **114.** $7\sqrt{2}\pi$. **115.** $2 : 1$. **127.** $D(6; 6; 6)$ або

$D(-2; -2; -2)$, $h = 4\sqrt{3}$. **129.** 2 : 3. **130.** а) Так. **131.** $\frac{a\sqrt{17}}{6}$. **132.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **133.** $9\sqrt{3}$. **136.** $6a^2$. **140.** 3 : 1. **142.** $\left(2a \pm \sqrt{5b^2 - a^2}\right):5$. Бажано зробити дослідження. **143.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **144.** 3. **145.** $2\sqrt{14}$ або $\sqrt{206}$. **162.** $A(-8; 0; -1)$. **165.** а) Так; б) ні. **166.** $x = \pm 3$. **171.** $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ або $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. **172.** (2; 4; 6) або (6; 4; 2). **173.** а) (2; −8; 8). **175.** (−4; 1; 1). **176.** б) $a = 3$ і $a = -1$; г) $a = -\frac{5}{3}$ і $a = 3$. **177.** б) $m = -3$; в) $m = 2$; г) $m = 1$. **178.** а) Ні; б) так. **179.** а) Так; б) так. **180.** Так. **203.** $\sqrt{123}$ і $\sqrt{370}$. **205.** (2; 3; −1). **207.** Так. **208.** а) $k = -5$. **213.** а) $x = 4$; $y = -3{,}5$; $z = 1$. **214.** (4; −4; −2). **215.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$. **217.** $P(2; 5; 0)$ або $P(6; -7; 4)$. **218.** б) $a = -2$; в) $a = 1$. **219.** $a = -2$; $b = \frac{1}{3}$. **220.** а) Ні; б) так. **222.** $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$. **233.** а) 40°; б) 130°; в) 140°. **235.** а) 72; б) −72. **237.** а) 16; в) 150. **239.** а) 45°; б) 120°; в) 135°; г) 60°. **241.** а) $x = -9$; в) $x = 1$; г) $x = -4$; $x = 3$. **242.** 6. **243.** а) 30°; б) 135°. **244.** а) 1; б) 5. **245.** а) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{2}$; г) $|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{13}$; $|\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{37}$. **250.** $\arccos\frac{4}{9}$. **251.** а) $D(-0{,}5; 0; 0)$. **252.** $l = -10$. **254.** а) 174; б) 0; в) 2. **256.** $\pi - \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. **257.** (2; 2; 2) або (−2; −2; −2). **258.** а) arccos 0,7; б) arccos 0,7. **259.** $\arccos\frac{5}{6}$; $\arccos\frac{2}{3}$; $\arccos\frac{1}{6}$; $\arccos\frac{1}{3}$. **272.** $2x - 3y + z - 16 = 0$. **273.** $\arccos\frac{1}{9}$. **274.** $\arccos\frac{5}{2\sqrt{21}}$. **275.** $x - y + 2z = 0$. **279.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}$. **283.** $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **285.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$. **290.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$. **292.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **293.** $\frac{3\sqrt{2}}{10}$. **294.** а) 2 при $x = 0$; б) 10 при $x = 0{,}6$. **310.** $x^2 + (y - 5)^2 + (z + 6)^2 = 4$. **316.** Ні. **317.** а) Ні; в) ні. **322.** $x - 2y + 3z + 2 = 0$. **323.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-1}$. **341.** 2φ, якщо $\varphi \leqslant 45°$, $180° - 2\varphi$, якщо $\varphi > 45°$. **343.** 5. **344.** 3. **345.** 4. **350.** 2.

353. $4x - 3y + z + 3 = 0$. **355.** $x + 2y - 5z + 11 = 0$; $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 30$. **357.** 3 м. **358.** Ні. **361.** $(-3; 0; -3)$. **374.** Таких поворотів існує безліч. **375.** $(1; 0; 2)$ або $(1; 0; -2)$. **379.** Якщо n – число парне, то одну. Якщо дана піраміда – правильний тетраедр, то 3. **382.** Так. **385.** 9. **394.** 4. **395.** Так. **396.** Ні. **410.** $(-3; 5; -4)$. **411.** $(-3; 13; 0)$. **414.** $A'(0; 5; 2)$; $B'(-3; 3; 3)$; $C'(-2; 3; 1)$. **415.** а) Так; б) ні. **417.** Ні. **419.** а) Так; б) ні. **420.** Не завжди. **429.** 30°. **431.** Так. **432.** Так. **433.** $2\sqrt{3}a$. **434.** а) $(0; 8; -7)$. **435.** $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-3}{-3}$. **436.** $x + y - 22z + 69 = 0$. **448.** а) $(-2; 4; -1)$; б) $(4; 12; -3)$. **449.** $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 14$. **455.** Так. **461.** Ні, якщо піраміда не є правильним тетраедром. **463.** Так. **464.** Не обов'язково. **466.** Так. **485.** Так. **488.** а) $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 9)^2 = 36$; б) $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 6)^2 = 16$. **489.** а) $2x + y - 3z + 12 = 0$; б) $2x + y - 3z - 18 = 0$. **492.** Так. **493.** Ні. **497.** а) $(10; 0; 20)$; б) $(-8; 0; 20)$. **501.** 16 см². **502.** $0{,}01S$, $0{,}04S$, ..., $0{,}81S$. **504.** Ні. **506.** $\sqrt{2} : 1$; піраміди не подібні. **507.** Ні. **508.** $\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **520.** $8\sqrt{3}$ см. **523.** 15 дм. **524.** 5 дм. **525.** 2,8 дм. **526.** $24\sqrt{3}$ м. **527.** 75°. **528.** 120°. **529.** 10°. **532.** а) $\arccos\frac{3}{4}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. **533.** 45°. **535.** 120°. **538.** arctg2. **539.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. **540.** 6 см і 16 см. **541.** 22 см. **543.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2bc\cos\varphi}$. **545.** 45°. **564.** $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \arccos\frac{1}{3}$. **567.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **568.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **570.** 7 см. **571.** $4\sqrt{17}$ см. **573.** $0{,}5\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$. **574.** 14 см. **576.** $2\sqrt{5}$ см. **577.** $a\sqrt{3}$. **578.** $\arccos\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **579.** α, α і φ, де $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\hat{A}$, $\cos\varphi = \operatorname{ctg}^2\hat{A}$. **581.** α, де $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. **582.** 15° і 75°. **585.** Так. **608.** Неопуклий існує. **630.** Куля. **632.** а) Сфера; б) куля; тіло; в) внутрішня область кулі; просторова область. **633.** Тіло. **634.** Ні. **635.** Просторова область. **636.** Існує. **637.** 3 см. **638.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **639.** $a \leqslant h \leqslant a\sqrt{3}$. **641.** Так. **644.** 1. **645.** Ні. **646.** Так. **647.** $2\sqrt{2}$. **648.** а) $a\sqrt{3}$; б) $a\sqrt{3}$. **649.** $a\sqrt{6}$. **650.** $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant h \leqslant a$. **651.** $3x + 4z - 28 = 0$. **652.** $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y + z = 3$. **665.** Тетраедр. **666.** 8. **667.** 9. **668.** Так. **670.** $4\sqrt{3}$см². **671.** 6 см. **672.** 7 граней, 12 ребер, 7 вершин, a^2. **673.** 18 м². **674.** $2\left(S_1+S_2+\frac{S_1S_2}{a^2}\right)$.

678. $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\varphi\right)$, $S \approx 2{,}3$ м^2. **680.** Ні. **684.** Покажіть, що розглядуваний n-гранник має $\frac{3n}{2}$ ребер, а вершин n. **686.** Розглядуваний n-гранник має $\frac{3n}{2}$ ребер і $\frac{3n}{4}$ вершин. Далі застосуйте теорему Ейлера. **687.** $360°(n-2)$. **707.** а) $d^2\sin\varphi\cos\varphi$; б) $2\sqrt{2}\,d^2\sin\varphi\cos\varphi$. **709.** 4 см. **712.** $2\sqrt{2}S$. **715.** 120°. **716.** $2\sqrt{2}$ см. **717.** $S = 906$ см^2; $S_{\text{пер}} = 240$ см^2. **718.** 30°. **719.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{16\cos\alpha}$, $S \approx 92{,}4$ см^2. **720.** $\sqrt{3}S$. **721.** $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **722.** 360 см^2. **725.** $3a^2$. **726.** $\frac{\sqrt{3}S}{5}$. **727.** $2\sin\frac{\alpha}{2}$. **728.** $\frac{6b^2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha}}$. **729.** а) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{13})}{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{4}$. **730.** $a^2\left(2\sin\alpha+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **731.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3\cos\alpha}\left(\sqrt{4-3\cos^2\alpha}+1\right)$. **732.** $6\sqrt{S_2^2-S_1^2}$. **733.** $\mathrm{arctg}\frac{b\sqrt{2}}{a}$. **734.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}$, якщо $\alpha \leqslant 30°$; $\frac{a^2\left(2\sqrt{3}-\mathrm{ctg}\alpha\right)}{\sqrt{3}\sin\alpha}$, якщо $\alpha > 30°$. **737.** $h = 3{,}9\sqrt{2}$ дм; $d = 7{,}8\sqrt{2+\sqrt{2}}$ дм. **748.** 12 см^2. **751.** 45°. **752.** $a^2 + b^2 = c^2$. **753.** 6 см; 7 см; 12 см. **755.** $a\sqrt{2}$ і $2a$. **756.** 9 см і 13 см. **757.** $(96 + 15\sqrt{3})$ см^2. **758.** 30 см^2. **759.** arcctg2. **760.** $13\sqrt{2}$ см і 26 см. **762.** 10 см^2. **764.** а) Ні; б) ні. **767.** Ні. **768.** $5\sqrt{13}$ см. Скористайтеся розгорткою призми. **769.** $2d^2\sin\alpha\left(\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}+\sin\beta\right)$. **770.** $\arccos\left(\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\right)$. **771.** $\frac{2l^2\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\varphi}}$. **772.** $96\sqrt{10}$ см^2. **773.** 336 см^2. **774.** а) 16 см^2; б) $4\sqrt{13}$ см^2. **775.** $4\sqrt{2}$ см^2 і $12\sqrt{2}$ см^2. **776.** $a\sqrt{3}$. **777.** 560 см^2. **778.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$. **779.** $\frac{16(10\sqrt{3}+9)}{3}$ см^2. **782.** $d_1 = a\sqrt{6}$; $d_2 = d_3 = d_4 = a\sqrt{2}$. **783.** $8r^2 + \frac{\sigma}{2}$. **798.** 24 см. **799.** $2(3 + \sqrt{3})$. **800.** а) $128\sqrt{3}$ см. **801.** а) $a^2\sqrt{3}$; б) $\frac{4\sqrt{3}l^2}{3}$; в) $\frac{3\sqrt{3}h^2}{2}$. **803.** а) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\cos\alpha)}{4\cos\alpha}$;

б) $3\sqrt{3}h^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; в) $\frac{3\sqrt{3}b^2\cos\beta}{4}\left(\sqrt{4-3\cos^2\beta}+\cos\beta\right)$; г) $\frac{6\sqrt{3}d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$;

г) $\frac{3\sqrt{3}l^2(\sqrt{4-3\cos^2\beta}+\cos\beta)}{4\sin^2\beta\cos\beta}$. **804.** $60\sqrt{2}$ см². **805.** $\frac{3a^2\sqrt{4-\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha}$;

$S \approx 194{,}5$ см². **806.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. **807.** $\frac{a\sin\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **809.** $4\sqrt{3}$ см. **810.** 30°.

811. $ah + a\sqrt{a^2+h^2}$. **812.** $\frac{a^2\left(2+\sqrt{7}\right)}{2}$. **813.** a^2. **815.** $\frac{a^2}{2\cos^2\alpha}(\sin 2\alpha +$

$+ \sin\beta)$. **816.** $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sin\alpha)}{8\cos\alpha}$. **817.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **818.** $\frac{a\cos\alpha\operatorname{tg}\varphi}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}$

819. $\frac{2\sqrt{3}d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{3\sin 2\alpha}$. **820.** $\frac{\sqrt{2}}{2}l^2\cos\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}$. **821.** 7 см. **822.** 75 см².

825. $50\sqrt{7}$ см. **826.** $3a^2(\sqrt{2}+1)$. **827.** 2 см. **828.** 30°; 60°; 120°;

60°. **829.** $-\frac{2h^2\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **830.** $\frac{7}{15}$. **832.** $2\sqrt{2}$ см. **833.** 4 см².

834. $\frac{l^2}{2}\left(6+\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)$. **836.** 3 см; $\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **837.** $a^2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

839. $\frac{a(2\sqrt{3}-3)}{3}$. **840.** $\frac{9a^2}{2\sqrt{1-2\cos\alpha}}$. **841.** $\arccos\frac{\sqrt{2n^2-m^2}}{m}$.

842. $\sqrt{\frac{9m^2-4\sqrt{3}Q}{3}}$. **843.** $6\sqrt{3}$ см². **844.** $\frac{16}{25}$. **845.** $\frac{3a^2\sqrt{72\cos^2\alpha+3}}{16\cos\alpha}$.

848. Може. **862.** $1 : \sqrt{2}$. **863.** Так. **864.** а) Ні; б) так; в) ні.

868. $\arccos\frac{1}{3}$; 90°. **869.** $\sqrt{2}$ дм. **870.** 16 см² і $8\sqrt{2}$ см². **872.** $\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{6}}$.

874. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. **879.** $a^2\sqrt{3}$. **880.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

882. $3m^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. **885.** $a\sqrt{2}$. **886.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; $a\sqrt{2}$. **893.** $\frac{5a^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$.

913. $10\sqrt{2}\pi$ см; $20\sqrt{2}\pi$ см. **923.** 0; $3\pi a$; πa. **924.** $\pi\operatorname{tg}\alpha$.

925. а) $2\sqrt{2}$ см; 16 см²; б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ см; $\frac{64}{3}$ см². **944.** $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ см і

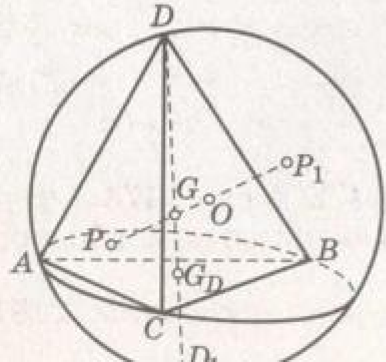
$1{,}5\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ см. **945.** $\frac{Q}{4\pi}$. **946.** $2\pi r^2\operatorname{tg}\alpha$. **947.** $\frac{1}{2}\pi d^2(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})$. **950.** rh.

953. $\frac{\pi d^2 \sin 2\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **954.** $\sqrt{19}$ см або 1 см. **956.** ≈ 3,5 м^2. **957.** Ні. **960.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **961.** $\frac{50}{3}\pi$ см^2. **962.** а) $10\pi\sqrt{195}$ см^2; б) $10\pi\sqrt{147}$ см^2. **963.** 160 см^2 або 72 см^2. **964.** 290π см^2 або 528π см^2. **965.** $\sqrt{2}$ см; $\operatorname{arcctg}\sqrt{35}$. **966.** $\frac{a}{2}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. **967.** 24π см^2. **968.** $0,5\pi a^2\sqrt{2}$. **969.** $r=\frac{a\sqrt{6}}{3}$; $h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **970.** $\sqrt{d^2\cos^2\alpha+r^2\sin^2\alpha}$. **974.** $\frac{R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$. **984.** 60°. **985.** $8\sqrt{3}$ см^2. **986.** arctg0,5. **987.** а) $2\arcsin\frac{1}{4}$; б) 60°; в) $2\arcsin\frac{3}{4}$. **988.** ≈ 23 м^2. **989.** 4 дм; 36 дм^2; arcsin 0,8. **990.** $\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{\cos\alpha}$. **992.** $\pi a^2(2+\sqrt{2})$. **993.** а) 80π см^2; б) 36π см^2; в) 60π см^2. **998.** $\frac{\sqrt{2}}{2}h$. **999.** $\frac{\pi a^2\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}$. **1000.** $\frac{4\pi}{\pi^2-1}$. **1001.** 500 см^2. **1002.** $\sqrt{\frac{S\sin^2\beta}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **1003.** $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **1004.** $\frac{Q\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi-\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\pi\sin\alpha\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}$. **1005.** $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. **1006.** $\sqrt{15}:\sqrt{7}$. **1007.** $\pi l^2\cos\alpha \times (3 + 5\cos\alpha)$. **1008.** $\pi l^2\sin\alpha$. **1009.** $\arccos\frac{b-a}{c}$. **1010.** $2\sqrt{3}\pi a^2$. **1011.** а) $84\sqrt{3}\pi$. **1012.** 300π. **1013.** $\frac{\pi h^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha\sin\beta}(\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta)$. **1014.** $-\frac{l\sin\alpha\sin2\alpha\sin\varphi}{\cos2\alpha+\cos2\varphi}$. **1015.** $2\arcsin\left(\frac{\alpha+\beta}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\alpha+\beta}\right)$. **1029.** 10 см і 24 см. **1030.** 64π см^2. **1032.** 10 см або 70 см. **1033.** 10 см. **1035.** $\frac{\pi r}{3}$. **1036.** $S = \pi(4 - x^2)$. **1038.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ см. **1039.** 24 см. **1040.** 6 см. **1041.** 288 см^2; 96 см. **1043.** $\frac{8}{3}$ см. **1044.** 8; $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$. **1045.** а) Дві площини, паралельні даній площині; б) сфера радіуса r. **1048.** Київ $\approx$ 26 тис. км. **1049.** Відстані рівні. **1050.** $O(8; 4; 2)$, $R = \sqrt{53}$. **1051.** Дотикаються. **1052.** $\frac{9-4\sin^2\alpha}{9}$. **1053.** $4\sqrt{7}$ см. **1054.** $6\sqrt{5}$ см. **1055.** $4\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ см. **1057.** Сфера радіуса $r\sqrt{3}$ з центром O, де r і O – радіус і центр даної кулі. **1059.** $\frac{r}{3}(5 \pm \sqrt{13})$. **1060.** $(1 + \sqrt{1,5})r$. **1061.** $1,5r$. **1079.** $3\sqrt{3}\pi$ см. **1081.** $r^2\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; ≈ 22 м^2. **1082.** 144 см^2. **1083.** $4\sqrt{3}$ см. **1085.** $4\sqrt{13}$ см або $6\sqrt{13}$ см. **1087.** 32π см^2. **1088.** $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 2\alpha\cos\beta}$. **1089.** $\frac{\pi c^2\mathrm{ctg}\,\varphi}{\sin(\alpha+\beta)}$. **1090.** $r\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$. **1091.** а) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **1092.** $\frac{a^2}{4}(11 + 3\sqrt{5})$. **1093.** 30°. **1094.** $\frac{\sqrt{6}}{6}a$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; $\frac{a}{2}$. **1095.** $3rP$. **1096.** $\sqrt{Rr}$. **1097.** $\pi - \arccos\frac{1}{15}$. **1098.** $\frac{R}{2}$. **1099.** $\frac{\sqrt{2}RH}{H+\sqrt{2}R}$. **1101.** $\frac{4\pi m^2}{\cos\alpha(4+\mathrm{tg}^2\alpha)}$. **1102.** $\frac{2\pi c^2\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$. **1103.** $2\pi R\rho : (R \pm r)$. **1104.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **1105.** 1,2. **1106.** 45°. **1107.** $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$. **1108.** $a(2 - \sqrt{2})$. **1109.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **1121.** 1,95 дм^3. **1122.** 17500 м^3. **1123.** а) $\sqrt{Q^3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{9}d^3$. **1124.** 392 см^3. **1125.** $\sqrt[6]{27V^2}$. **1126.** $\frac{1}{4}d^3\sin 2\alpha\cos\alpha$; ≈ 6 дм^3. **1127.** 9 см. **1129.** 30 дм. **1130.** 6 см. **1134.** $ab\,\mathrm{tg}\alpha\sqrt{a^2+b^2}$. **1135.** 19 дм^3. **1140.** $20\sqrt{11}$ см^3. **1144.** $V : 6$. **1145.** $\frac{1}{6}$ дм^3. **1146.** $\frac{a^3}{3}$. **1158.** $\frac{\sqrt{3}}{4}d^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **1163.** $4ar^2$. **1165.** 672 см^2. **1166.** 750 м^3. **1167.** 39 000 м^3. **1168.** $\frac{\pi}{4}d^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **1172.** 180π см^3. **1176.** 4 : 9. **1188.** $\frac{5}{4}a^3\mathrm{tg}54°$. **1194.** а) $\frac{\pi}{8}h^3\mathrm{ctg}^2\varphi$; б) $\frac{1}{2}r^2h\alpha$, α – радіанна міра кута. **1199.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi r^3}{9}$. **1210.** $Ql\sin\alpha$. **1211.** 168 дм^3. **1212.** $a^3 : \sqrt{2}$.

1217. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3\sin\alpha$. **1220.** $10\,530\sqrt{2}$ см³. **1222.** 672 см³. **1230.** Січна площина проходить через точку, яка ділить сторону основи призми у відношенні 1 : 2. **1233.** $\pi r^2 l$. **1248.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **1252.** а) $\frac{2}{3}b^3 \times \sin\alpha\cos^2\alpha$; б) $\frac{2}{3}b^3\cos\beta\sin^2\beta$; в) $\frac{4}{3}b^3\cos^2\gamma\sqrt{-\cos 2\gamma}$. **1254.** $\frac{a^3}{16}$. **1255.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **1256.** 112 см³. **1258.** а) $\frac{b^3}{3}\sin^2\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}$. **1261.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **1262.** $\frac{5a^3}{6}$. **1263.** 1 : $(\sqrt[3]{2}-1)$. **1264.** 1 день. **1265.** Ні. **1269.** $\frac{ab}{12}\sqrt{3a^2-b^2}$. **1274.** 10. **1278.** $\frac{a^2h}{6}$. **1279.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$. **1280.** 3 : 5. **1281.** $\frac{1}{3}r^3\sin 2\alpha\sin\alpha$. **1282.** $\sin\alpha=\left(\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a}\right):\left(\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a}\right)$. **1285.** 3 : 10. **1295.** $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **1296.** 6 см. **1297.** 8π м³. **1298.** У 8 разів. **1305.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см. **1308.** $\frac{2}{3}\pi r^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha$. **1311.** 218π см³; 386π см³; 602π см². **1316.** $\frac{\pi h^3\sin(2\alpha-\beta)\sin\beta}{3\sin^2(\alpha-\beta)\sin^2\alpha}$. **1318.** $-\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha$. **1319.** 4 дм. **1322.** $\frac{8\pi}{9}\left(45+26\sqrt{3}\right)$. **1323.** $rS=3V$. **1327.** Два розв'язки. Один з них $\pi r^2\left(r+\sqrt{r^2+(d-r)^3}\right)^3:\left(3(d-r)^2\right)$. **1328.** $3\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$. **1338.** а) $\frac{\pi a^3}{6}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **1339.** $\frac{4}{3}\pi l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. **1341.** $\approx 33{,}3$ %. **1344.** $\pi l^3 : (6\sin^3\alpha)$. **1345.** πr^3 і $\frac{1}{3}\pi r^3$. **1346.** $\frac{1}{6}\pi r^3$. **1347.** $\frac{28}{81}\pi r^3$; $\frac{52}{81}\pi r^3$; $\frac{28}{81}\pi r^3$. **1348.** 360π см³ і 1944π см³. **1352.** У 8 разів. **1354.** $\approx 8{,}4$ см. **1355.** Менше ніж 4,18 т. **1356.** $\approx 0{,}1^4$ мм. **1357.** 0,5 кг/дм³. **1358.** 12 см. **1360.** $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. **1362.** $\frac{9\pi h^3}{2\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3}$.

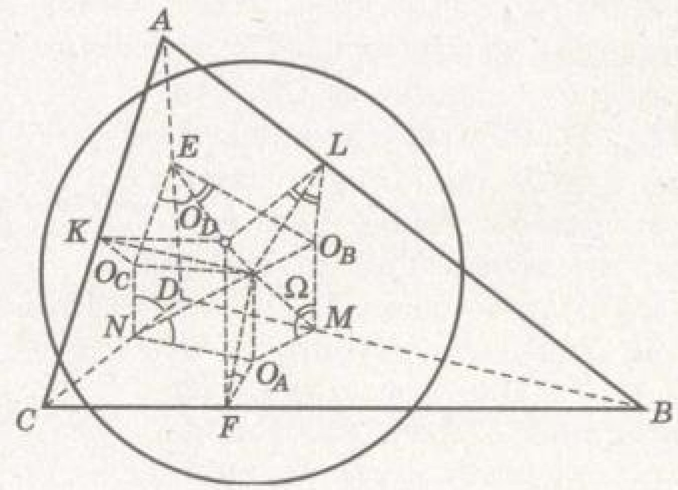
1369. $\frac{\pi}{12}(15-8\sqrt{2})$. **1370.** 384 : 125$\pi$. **1379.** $\frac{1}{3}\pi ah^2$. **1380.** $2\pi a^3 \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. **1381.** $\frac{9}{2}\pi a^3$. **1382.** $\frac{\pi}{2}d^3$. **1383.** У задачі не сказано, чи лежить вісь у площині квадрата. **1384.** Знайдіть об'єм кулі двома способами. **1385.** $\pi^2 r^3\left(1-\frac{4}{3\pi}\right)$. **1388.** $\frac{1}{3}\pi b^3 \sin^2\alpha$. **1390.** Об'єми даних тіл пропорційні числам $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ і $\frac{1}{c}$. **1391.** $2\pi S^2 : d$. **1392.** 1 : 2. **1395.** $\frac{\pi}{2}d^3\sin^2 2\alpha$. **1397.** $2\pi a^3$. **1399.** $\frac{2}{9}\pi d^3$. **1411.** Знайдіть радіус сфери, перетворивши її рівняння; 36π. **1412.** 36π. **1413.** 216π. **1414.** 1 : 3. **1415.** 50π дм^2. **1416.** $\pi\cdot\left(2m\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$, ≈ 235 см^2. **1417.** $\frac{\pi}{3}a^2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **1420.** $\frac{\pi}{2}r^2$. **1421.** $\frac{4}{3}\pi r^2$ і $\frac{8}{3}\pi r^2$. **1422.** πr^2. **1423.** $\pi r(2r - 2h + \sqrt{r^2-h^2})$. **1424.** $4\pi^2 r^2$. **1425.** 100π см^2, 70π см^2. **1429.** 1 : 3. **1430.** 64π см^2. **1434.** $2\pi a^2(5\pm2\sqrt{6})$. **1436.** $\frac{\pi n r^2}{90}$. **1437.** $\frac{\pi}{2}r^2$. **1439.** $\frac{5}{3}\pi a^2$ і $\frac{35}{9}\pi a^2$. **1441.** 148π см^2. **1446.** $\left(\frac{S}{4\pi}+aM\right):(a+M)$ і $\left(\frac{S}{4\pi}-aM\right):(a-M)$, де $M^2=\frac{S}{2}-r^2-a^2$. **1450.** Так. **1451.** Наприклад, симетричний многогранник, складений із семи рівних кубів. **1452.** Скористайтесь теоремою Ейлера. **1454.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}ah$. **1455.** 45°. **1457.** $5\sqrt{2}$см. **1458.** 12 см. **1459.** 60°. **1460.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. **1461.** Правильний шестикутник. **1464.** 1 дм. **1465.** $108° < \varphi < 180°$. **1466.** $\frac{a}{18}\sqrt{315-12\sqrt{42}}$. **1467.** $\frac{abc}{ab+ac+bc}$. **1469.** $\frac{SQ}{\left(\sqrt{S}+\sqrt{Q}\right)^2}$, де S і Q – площі основ. **1472.** 5 см. **1474.** Сфера. **1475.** 5, 6, 7 або 8. **1476.** Пряма або вся площина, або порожня множина. **1479.** Сфера, частина сфери або точка. **1481.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$. **1483.** M – точка на сфері така, що вектори $\overrightarrow{MO}$ і $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ протилежно напрямлені або співнапрямлені. O – центр сфери. **1484.** $15r^2$. **1485.** $40r^2$. **1486.** $128r^2$.

1487. $(11 - \sqrt{19})$ см. **1488.** Такою призмою є куб. **1489.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$. **1490.** Січна площина має проходити через центр симетрії паралелепіпеда. **1491.** $\frac{1}{3}$ куб. од. **1493.** 306 см^3. **1495.** $20\sqrt{3}$ см^3. Опишіть навколо даної піраміди паралелепіпед, діагоналі протилежних граней якого – AB і CD. **1496.** $\frac{m_1m_2m_3}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3)}$. Доведіть, що об'єми двох тетраедрів з рівними тригранними кутами відносяться як добутки ребер, що утворюють ці тригранні кути. **1497.** 1 : 18. Скористайтесь формулою об'єму піраміди. **1502.** $\frac{\pi\sqrt{14}}{63}$. **1505.** $\frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{6\cos^2 2\alpha}$. **1506.** $\frac{1}{4}n^2(2 - n)$, де $0 < n < 2$. **1508.** 60°. **1509.** $\frac{3\sqrt{3}+5}{\pi}$. **1512.** $r\sqrt[3]{15}$. **1513.** ≈ 62 кг. Об'єми подібних тіл відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів. **1514.** ≈ 100 м. **1521.** Якщо пряма GO перетинає описану навколо тетраедра $ABCD$ сферу в точках P і P_1 (мал. 294), то хорда PP_1, як і DD_1, проходить через центроїд G, тому $DG \cdot GD_1 = PG \cdot GP_1$. Але $PG \cdot GP_1 = (R - GO)(R + GO) = R^2 - GO^2$, $DG \cdot GD_1 = DG \cdot (DD_1 - DG) = DG \cdot DD_1 - DG^2$. Отже, $DG \cdot DD_1 = DG^2 + R^2 - GO^2$. Далі виразіть DG^2 і $R^2 - GO^2$ через ребра даного тетраедра. **1522.** Використайте співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним чисел $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}, \frac{1}{h_C}, \frac{1}{h_D}$. **1525.** Якщо I – центр вписаної в тетраедр $ABCD$ кулі, T_A і T_B – точки дотику її з гранями BCD і ACD, то $IT_A \perp CD$ і $IT_B \perp CD$. Отже, площина IT_AT_B перпендикулярна до CD (мал. 277). Позначимо буквою M точку перетину цієї площини із CD. Тоді $MT_A = MT_B$. Виходить, що коли накласти грань ACD на BCD, то точки T_A і T_B сумістяться. Аналогічно можна довести, що точки T_C, T_D теж сумістяться з T_A, якщо грані ABD і ABC накласти на BCD, повернувши їх навколо BD і BC. Друга частина твердження випливає з того, що всі відрізки дотичних, проведених до кулі з однієї точки, однакові за довжиною.



Мал. 294

1527. З рівності п. 4 § 37 випливає, що $\frac{1}{r_A} = \frac{-S_A}{3V} + \frac{S_B}{3V} + \frac{S_C}{3V} + \frac{S_D}{3V} =$ $= -\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}$ і т. д. **1528.** Скористайтесь результатом попередньої задачі. **1530.** Нехай напівуписана сфера з центром Ω дотикається до ребер тетраедра $ABCD$ у точках K, L, M, N, E, F. Якщо O_A, O_B, O_C, O_D – центри кіл, вписаних у грані даного тетраедра (мал. 295), то $\Delta\Omega O_A M = \Delta\Omega O_A N = \Delta\Omega O_A F$. $\Delta\Omega O_B L = \Delta\Omega O_B M = \Delta\Omega O_B E$ і т. д. Нехай $\widehat{\Omega N O_A} = \widehat{\Omega M O_A} = \widehat{\Omega F O_A} =$ $= \alpha$, $\widehat{\Omega M O_B} = \widehat{\Omega L O_B} = \widehat{\Omega E O_B} = \beta$, $\widehat{\Omega N O_C} = \widehat{\Omega K O_C} = \widehat{\Omega E O_C} = \gamma$, $\widehat{\Omega F O_D} =$ $= \widehat{\Omega K O_D} = \widehat{\Omega L O_D} = \delta$. Тоді $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, $\widehat{AC} + \widehat{BD} =$ $= \alpha + \beta + \gamma + \delta$, $\widehat{AD} + \widehat{BC} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Отже, $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AC} +$ $+ \widehat{BD} = \widehat{AD} + \widehat{BC}$. **1531.** Зверніть увагу на те, що внаслідок повороту даного тетраедра на 180° навколо його середньої лінії утворюється тетраедр, який накладається сам на себе. **1532.** Покажіть спочатку, що об'єм рівногранного тетраедра можна обчислювати за формулою $V = \frac{2}{3a} \cdot S^2 \sin\alpha$. **1533.** Використайте теорему косинусів для довільного тетраедра. **1535.** а) З теореми косинусів для рівногранного тетраедра випливає, що $\cos\hat{a} + \cos\hat{b} + \cos\hat{c} = 1$. Використайте співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним чисел $\cos\hat{a}$, $\cos\hat{b}$, $\cos\hat{c}$; г) використайте формули теореми косинусів для тригранного кута; ґ) врахуйте, що в рівногранному тетраедрі всі тригранні кути рівні між собою, а протилежні двогранні кути теж однакові. **1536.** Радіуси зовнівписаних куль будь-якого тетраедра можна визначити за формулами. У рівно-



Мал. 295

гранному тетраедрі площі всіх граней рівні між собою, тому $r_A = = r_B = r_C = r_D = \frac{3V}{2S}$. Але $\frac{3V}{2S} = \frac{Sh}{2S} = \frac{h}{2S} = 2r$, тому $r_A = r_B = r_C = r_D = 2r$.

1537. У рівногранному тетраедрі центр описаної кулі O і центроїд G збігаються, тому $R^2 = \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$. Слід врахувати ще співвідношення $n_a^2 + n_b^2 + n_c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$.

1538. Покажіть, що $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{h_A} \cdot \frac{1}{h_B} \cdot \frac{1}{h_C} \cdot \frac{1}{h_D}}$.

1539. Зверніть увагу на те, що діаметр вписаної в рівногранний тетраедр кулі дорівнює половині висоти цього тетраедра. **1540.** Центр O вписаної в рівногранний тетраедр кулі збігається з його центроїдом G. Тому для кожної точки X, взятої на поверхні цієї кулі, сума $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$ має одне й те саме значення (теорема Лейбніца). **1541.** Сформульоване в задачі твердження випливає з того, що в рівногранному тетраедрі центри вписаної й описаної куль збігаються. **1542.** Позначте ребро правильного тетраедра якою-небудь буквою і виконайте обчислення.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна
ВЛАДІМІРОВ Володимир Миколайович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень, профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Редактор *Н. Дашко.*
Обкладинка, ілюстрації *В. Марущинця.*
Макет *С. Железняк.*
Художній редактор *В. Марущинець.*
Технічний редактор
Комп'ютерна верстка *О. Білохвост.*
Коректори *І. Іванюсь, Л. Леуська.*

Формат $60\times90/_{16}$.
Умовн. друк. арк. 21,0. Обл.-вид. арк. 20,65.
Тираж 5023 пр. Вид. № 1110.
Зам. № 214а.

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців серія ДК № 3966 від 01.02.2011 р.

Віддруковано з готових позитивів на
ДП «Видавництво і друкарня "Таврида"»,
вул. Генерала Васильєва, 44, м. Сімферополь, АРК, 95000
E-mail: marketing@tavridabook.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців серія ДК № 1174 від 25.12.2002.