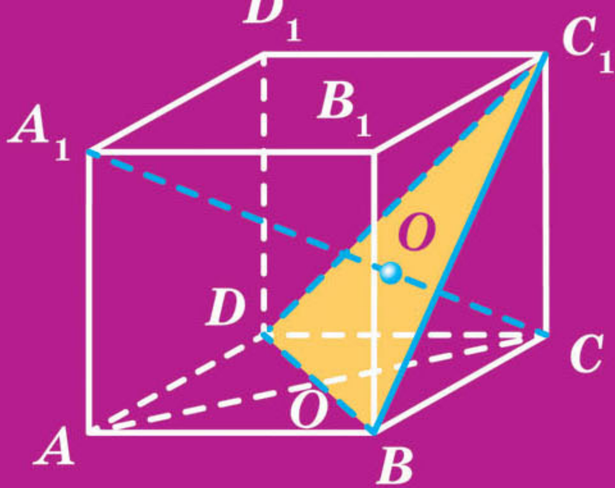
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

10

ГЕОМЕТРІЯ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 272 с. : іл.
ISBN 978-966-474-314-0.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

ISBN 978-966-474-314-0

ВІД АВТОРІВ

Любі десятикласники та десятикласниці!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях — вивчати математику за програмою поглибленого рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання.

У 9 класі ви завершили вивчення курсу планіметрії — розділу геометрії, у якому розглядали плоскі фігури та їхні властивості. Однак більшість об'єктів, що нас оточують, — створених як людиною, так і природою, — не є плоскими (рис. 1).

Дзвіниця Києво-Печерської лаври

Українській літак Ан-225 «Мрія» — найбільший літак у світі

Планета Земля

Рис. 1

*Розділ геометрії, у якому вивчають фігури в просторі та їхні властивості, називають **стереометрією**.*

Слово «стереометрія» походить від грецьких слів «стереос» — «об'ємний», «просторовий» і «метрео» — «вимірювати».

Ви починаєте вивчати стереометрію.

Знати стереометрію надзвичайно важливо. Без просторової уяви та глибоких геометричних знань неможливо опанувати інженерні професії, будівельну або архітектурну справу, працювати в галузі комп'ютерної графіки, дизайну, моделювання одягу та взуття тощо. І це зрозуміло, адже стереометрія досліджує математичні моделі тих матеріальних об'єктів, з якими люди щодня мають справу. Узагалі, стереометрія є одним з основних інструментів пізнання навколишнього світу.

Крім того, стереометрія — красивий та цікавий шкільний предмет, який розвиває логічне й абстрактне мислення, увагу й акуратність. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

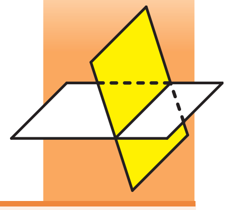
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
	завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;
◄	закінчення доведення теореми або розв'язання задачі;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

§1



У цьому параграфі ви ознайомитеся з основними поняттями стереометрії, аксіомами стереометрії та наслідками з них. Отримаєте початкові уявлення про многогранники.

1. Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії

Вивчаючи математику, ви з багатьма поняттями ознайомилися за допомогою означень. Так, із курсу планіметрії вам добре відомі означення чотирикутника, трапеції, кола тощо.

Означення будь-якого поняття основане на інших поняттях, зміст яких вам уже відомий. Наприклад, розглянемо означення трапеції: «Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні». Бачимо, що означення трапеції ґрунтується на таких уже введених поняттях, як чотирикутник, сторона чотирикутника, паралельні та непаралельні сторони тощо. Отже, означення вводять за принципом «нове основане на старому». Тоді зрозуміло, що мають існувати первинні поняття, яким означень не дають. Їх називають **основними поняттями** (рис. 1.1).

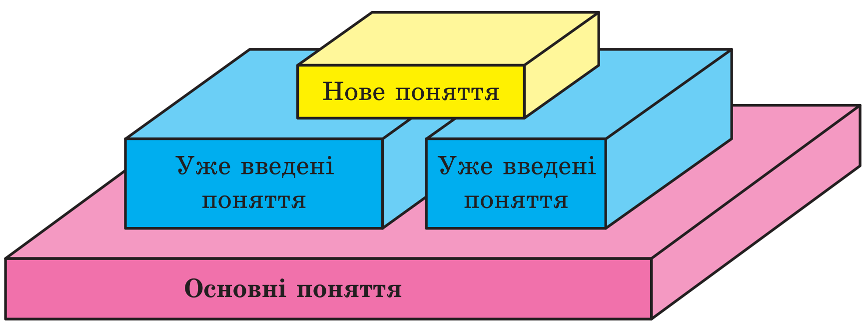


Рис. 1.1

У курсі планіметрії, який ви вивчили, означення не давали таким фігурам, як точка й пряма. У стереометрії, крім них, до основних понять віднесемо ще одну фігуру — **площину**.

Наочне уявлення про площину дають поверхня водойми в безвітряну погоду, поверхня дзеркала, поверхня полірованого стола, подумки продовжені в усіх напрямах.

Використовуючи поняття площини, можна вважати, що в планіметрії ми розглядали тільки одну площину, і всі фігури, які вивчалися, належали цій площині. У стереометрії ж розглядають безліч площин, розміщених у **просторі**.

Як правило, площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ, ... На рисунках площини зображають у вигляді паралелограма (рис. 1.2) або інших обмежених частин площини (рис. 1.3).

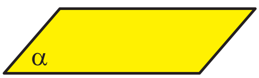


Рис. 1.2

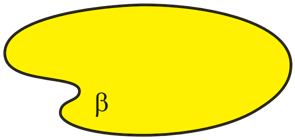


Рис. 1.3

Площина, так само як і пряма, складається з точок, тобто площина — це множина точок.

Існує кілька випадків взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі. Наведемо приклади.

На рисунку 1.4 зображено точку A, яка належить площині α. Також говорять, що *точка A лежить у площині* α *або площина* α *проходить через точку A*. Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$. Наведений запис означає, що точка A є елементом множини точок, які являють собою площину α.

На рисунку 1.5 зображено точку B, яка не належить площині β. Коротко це можна записати так: $B \notin \beta$.

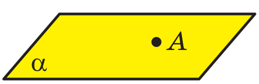


Рис. 1.4

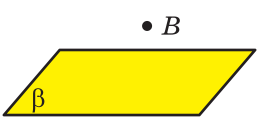


Рис. 1.5

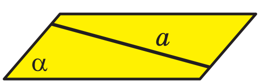


Рис. 1.6

На рисунку 1.6 зображено пряму a, яка належить площині α. Також говорять, що *пряма a лежить у площині* α *або площина* α *проходить через пряму a*. Коротко це можна записати так: $a \subset \alpha$. Наведений запис означає, що множина точок прямої a є підмножиною множини точок, які являють собою площину α.

Якщо пряма та площина мають тільки одну спільну точку, то говорять, що **пряма перетинає площину**. На рисунку 1.7 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A. Записують[1]: $a \cap \alpha = A$.

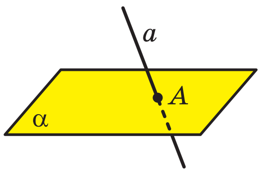


Рис. 1.7

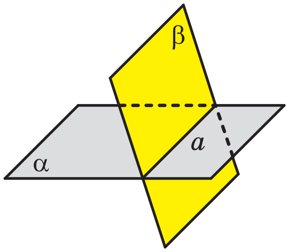


Рис. 1.8

Далі, говорячи «дві точки», «три прямі», «дві площини» тощо, матимемо на увазі, що це різні точки, різні прямі та різні площини.

Якщо всі спільні точки двох площин утворюють пряму, то говорять, що ці площини **перетинаються**.

На рисунку 1.8 зображено площини α і β, які перетинаються по прямій a. Записують: $\alpha \cap \beta = a$.

На початковому етапі вивчення стереометрії неможливо доводити теореми, спираючись на інші твердження, оскільки цих тверджень ще немає. З огляду на це перші властивості, які стосуються точок, прямих і площин у просторі, приймають без доведення. Як ви знаєте з курсу планіметрії, такого роду твердження називають аксіомами.

Зазначимо, що деякі аксіоми стереометрії за формулюваннями дослівно збігаються з відомими вам аксіомами планіметрії. Наприклад:

- *якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй*;
- *через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну*.

Ми не будемо ознайомлюватися зі строгою аксіоматичною побудовою стереометрії[2]. Розглянемо лише деякі твердження, що виражають основні властивості площин простору, спираючись на які зазвичай будують курс стереометрії в школі.

[1] Якщо формально строго скористатися символікою теорії множин, то потрібно було б записувати: $a \cap \alpha = \{A\}$. Проте в геометрії прийнято наведений у тексті запис без фігурних дужок.

[2] Докладніше про аксіоматичний метод ви можете дізнатися, прочитавши оповідання на с. 32–34.

Аксіома А1. Для будь-якої площини простору існує точка, яка їй не належить.

Із цієї аксіоми випливає, що площина не заповнює всього простору. Іншими словами, у стереометрії, на відміну від планіметрії, не всі фігури лежать в одній площині.

Аксіома А2. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

Якщо в будь-якій площині простору виконуються аксіоми планіметрії, то виконуються і наслідки із цих аксіом, тобто теореми планіметрії. Отже, у стереометрії можна користуватися всіма відомими нам властивостями плоских фігур.

Аксіома А3. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

Рисунки 1.9–1.11 ілюструють цю аксіому.

Рис. 1.9

Рис. 1.10

Рис. 1.11

Із наведеної аксіоми випливає, що три точки простору, які не лежать на одній прямій, визначають єдину площину, що проходить через ці точки. Отже, для позначення площини можна вказати будь-які три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, на рисунку 1.12 зображено площину ABC.

Запис $M \in ABC$ означає, що точка M належить площині ABC. Запис $MN \subset ABC$ означає, що пряма MN належить площині ABC (рис. 1.12).

Аксіома А4. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Наприклад, на рисунку 1.13 точки A, B і C належать площині ABC. Тоді можна записати: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Із цієї аксіоми випливає, що коли пряма не належить площині, то вона має з даною площиною не більше ніж одну спільну точку.

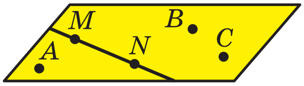


Рис. 1.12

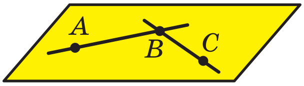


Рис. 1.13

Рис. 1.14

Твердження, сформульоване в аксіомі **А4**, часто використовують на практиці, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня рівною (плоскою). Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею (рис. 1.14).

Аксіома А5. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Цю аксіому можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або за допомогою вашого підручника (рис. 1.15).

Аксіома А6. Відстань між будь-якими двома точками простору є однаковою для будь-якої площини, що проходить через ці точки.

Сутність цієї аксіоми полягає в тому, що відстань між будь-якими двома точками простору не залежить від того, на якій площині, що проходить через ці точки, її виміряли.

Задача. Доведіть, що коли дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Розв'язання. Нехай точка A є спільною для двох площин α і β, тобто $A \in \alpha$ і $A \in \beta$ (рис. 1.16). За аксіомою **А5** площини α і β перетинаються по прямій. Нехай $\alpha \cap \beta = a$. Тоді всі спільні точки площин α і β належать прямій a. Точка A є спільною для площин α і β. Отже, $A \in a$. ◄

Рис. 1.15

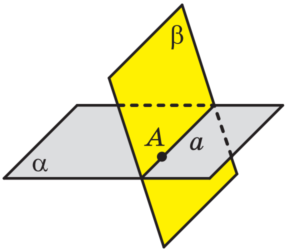


Рис. 1.16

1. Як у математиці називають первинні поняття, яким не дають означення?
2. Які фігури входять до списку основних понять стереометрії?
3. У якому разі говорять, що пряма перетинає площину?
4. У якому разі говорять, що площини перетинаються?
5. Сформулюйте аксіоми **А1, А2, А3, А4, А5, А6**.

ВПРАВИ

1.1.° Зобразіть площину α, точку M, що їй належить, і точку K, що їй не належить. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.2.° Зобразіть площину γ, яка проходить через пряму a. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.3.° Зобразіть площину α і пряму b, яка перетинає дану площину в точці A. Запишіть це за допомогою відповідних символів. Скільки точок прямої b належить площині α?

1.4.° Зобразіть площини β і γ, які перетинаються по прямій c. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.5.° Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає із цього, що пряма a перетинає площину α?

1.6.° Запишіть за допомогою символів взаємне розміщення точок, прямих і площини, зображених на рисунку 1.17.

1.7.° Дано точки A, B і C такі, що $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Скільки площин можна провести через точки A, B і C?

1.8.° Дано точки D, E і F такі, що $DE = 2$ см, $EF = 4$ см, $DF = 6$ см. Скільки площин можна провести через точки D, E і F?

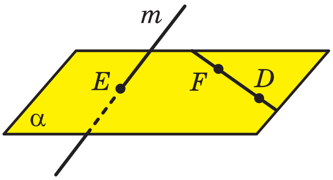


Рис. 1.17

1.9.° У кімнаті на люстрі сиділи три мухи. Одночасно вони почали літати: перша — кружляти навколо люстри на однаковій висоті, друга — спускатися від люстри вертикально вниз і підніматися вгору, третя — рухатися від люстри до ручки дверей та назад. Швидкість усіх мух однакова. Через який час усі три мухи опиняться в одній площині?

1.10.° Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

1.11.° Зобразіть площини α і β, пряму c, точки A і B, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$, $B \in \alpha$, $B \notin \beta$.

1.12.° Зобразіть площини α, β, γ і пряму m, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = m$, $\alpha \cap \gamma = m$.

1.13.° Зобразіть площини α, β, γ і прямі a, b, c, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$.

1.14.• Пряма m — лінія перетину площин α і β (рис. 1.18). Точки A і B належать площині α, а точка C — площині β. Побудуйте лінії перетину площини ABC із площиною α і з площиною β.

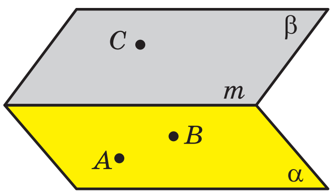


Рис. 1.18

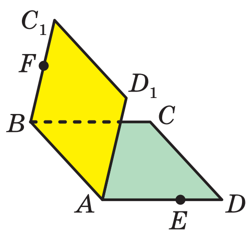


Рис. 1.19

1.15.• Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині (рис. 1.19). На відрізку AD позначили точку E, а на відрізку BC_1 — точку F. Побудуйте точку перетину:

1) прямої CE з площиною ABC_1;

2) прямої FD_1 із площиною ABC.

1.16.• Чи є правильним твердження: будь-яка пряма, що проходить через центри вписаного та описаного кіл даного трикутника, лежить у площині цього трикутника?

1.17.• Про площини α і β та пряму a відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = M$. Доведіть, що $a \cap c = M$.

1.18.• Про площини α і β та пряму a відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap c = A$. Доведіть, що $A \in \beta$.

1.19.• Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що жодні три з них не лежать на одній прямій.

1.20.• Доведіть, що коли дві сусідні вершини чотирикутника й точка перетину його діагоналей належать одній площині, то й дві інші вершини належать цій площині.

1.21.• Вершина D чотирикутника $ABCD$ належить площині α, а всі інші вершини лежать поза цією площиною. Продовження сторін BA і BC перетинають площину α в точках M і K відповідно. Доведіть, що точки M, D і K лежать на одній прямій.

1.22.• Вершина A трикутника ABC належить площині α, а вершини B і C лежать поза цією площиною. Продовження медіан BM і CN трикутника ABC перетинають площину α в точках K і E відповідно. Доведіть, що точки A, K і E лежать на одній прямій.

1.23.•• Про площини α, β і γ відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $a \cap c = M$. Доведіть, що $M \in b$.

1.24.•• Точка M — спільна точка двох площин ABC і BCD. Знайдіть відрізок BC, якщо $BM = 4$ см, $MC = 7$ см.

1.25.•• Дано n точок, $n > 4$, кожні чотири з яких лежать в одній площині. Доведіть, що всі ці точки лежать в одній площині.

1.26.•• Точки M, N, K і P, які належать відповідно ланкам AB, BC, CD і DA замкненої ламаної $ABCD$, лежать у площині α. Чи можна стверджувати, що точки A, B, C і D також належать площині α?

1.27.* П'ять точок, що є серединами ланок замкненої ламаної $ABCDE$, належать площині α. Доведіть, що точки A, B, C, D і E належать цій самій площині.

1.28.* Маємо n площин, $n \geqslant 2$, кожні дві з яких перетинаються. Яка найбільша кількість прямих, що є лініями перетину даних площин, може при цьому утворитися?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.29. У трикутнику ABC сторона AC дорівнює 30 см. Медіани AM і CN відповідно дорівнюють 39 см і 42 см. Знайдіть площу трикутника ABC.

1.30. Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) ділить кут BAD навпіл (рис. 1.20). Точка E — середина відрізка AB. Пряма, яка проходить через точку E паралельно основам трапеції, перетинає відрізок AC у точці K, а відрізок CD — у точці F. Знайдіть периметр трапеції $ABCD$, якщо $EK = 3$ см, $KF = 5$ см.

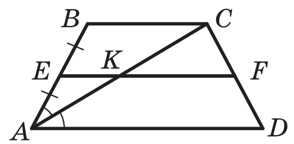


Рис. 1.20

2. Наслідки з аксіом стереометрії

У попередньому пункті ви ознайомилися з деякими аксіомами стереометрії. Крім аксіом, існують і інші наочно очевидні властивості, які описують взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі. Тепер, спираючись на аксіоми, ці властивості можна довести.

Теорема 2.1. ***Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A, яка не лежить на ній (рис. 2.1). Доведемо, що через пряму a і точку A проходить площина.

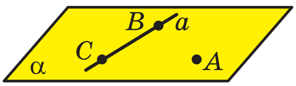


Рис. 2.1

Позначимо на прямій a дві довільні точки B і C. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тоді за аксіомою **А3** через точки A, B і C проходить деяка площина α. Дві точки B і C прямої a належать площині α. Тоді за аксіомою **А4** площині α належить і пряма a. Отже, через пряму a і точку A проходить площина α.

Доведемо, що α — єдина площина, яка проходить через пряму a і точку A. Припустимо, що існує ще одна площина β така, що $a \subset \beta$ і $A \in \beta$. Площина β проходить через точки A, B і C. Таким чином, через точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, проходять дві площини α і β, що суперечить аксіомі **А3**. Отже, наше припущення хибне, і площина α є єдиною площиною, яка проходить через пряму a і точку A. ◄

Так само, як і в планіметрії, дві прямі в просторі називають такими, що **перетинаються**, якщо вони мають спільну точку.

Задача. Доведіть, що дві прямі, які перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Розв'язання. Нехай прямі a і b, що перетинаються, мають дві спільні точки A і B. Розглянемо довільну площину α, яка проходить через точки A і B. Тоді за аксіомою **А4** площині α належать прямі a і b. Отже, отримали, що в площині α дві прямі мають дві спільні точки, що суперечить відповідній аксіомі планіметрії. ◄

Теорема 2.2. ***Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна.***

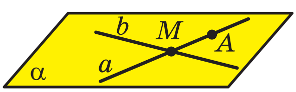


Рис. 2.2

Доведення. Нехай дано дві прямі a і b, які перетинаються в точці M (рис. 2.2).

Доведемо, що через прямі a і b проходить площина.

Позначимо на прямій a точку A, відмінну від точки M. Точка A не належить прямій b, оскільки у прямих a і b тільки одна спільна точка M. Тоді за теоремою 2.1 через точку A та пряму b проходить деяка площина α. Дві точки M і A прямої a належать площині α. Тоді за аксіомою **А4** пряма a також належить площині α. Отже, через прямі a і b проходить площина α.

Доведемо, що α — єдина площина, яка проходить через прямі a і b. Припустимо, що існує ще одна площина β така, що $a \subset \beta$ і $b \subset \beta$. Площина β проходить через пряму b і точку A. Таким чином, через пряму b і точку A, яка не лежить на ній, проходять дві площини α і β, що суперечить теоремі 2.1. Отже, наше припущення хибне, і площина α є єдиною площиною, яка проходить через прямі a і b. ◄

З аксіоми **А3** і теорем 2.1 і 2.2 випливає, що *площина однозначно визначається*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;
2) *прямою і точкою, яка не належить цій прямій;*
3) *двома прямими, що перетинаються.*

Таким чином, ми вказали три способи задання площини.

1. Які наслідки з аксіом стереометрії ви знаєте?
2. Укажіть способи однозначного задання площини.

ВПРАВИ

2.1.° Скільки площин можна провести через дані пряму та точку?

2.2.° Доведіть, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площину. Скільки можна провести таких площин?

2.3.° Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.

2.4.° Центр O і хорда AB кола лежать у деякій площині. Чи можна стверджувати, що в цій площині лежить будь-яка точка даного кола?

2.5.° Сторона AC і центр O описаного кола трикутника ABC лежать у площині α. Чи можна стверджувати, що в цій площині лежить вершина B?

2.6.° Прямі a і b перетинаються. Чи всі прямі, які перетинають прямі a і b, лежать в одній площині?

2.7.° Дано пряму a і точку A поза нею. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A та перетинають пряму a, лежать в одній площині.

2.8.° Прямі m і n перетинаються в точці A. Точка B належить прямій m, точка C — прямій n, точка D — прямій BC. Доведіть, що прямі m і n та точка D лежать в одній площині.

2.9.° Прямі AB і AC перетинають площину α в точках B і C, точки D і E належать цій площині (рис. 2.3). Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною ABC.

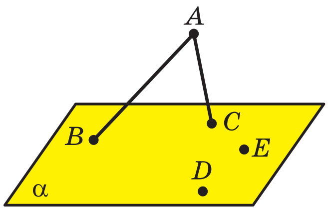


Рис. 2.3

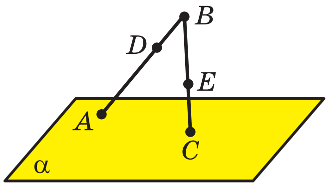


Рис. 2.4

2.10.° Пряма BA перетинає площину α в точці A, пряма BC — у точці C (рис. 2.4). На відрізку AB позначили точку D, на відрізку BC — точку E. Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною α.

2.11.• Дано п'ять точок, які не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість із них може лежати на одній прямій?

2.12.• Три прямі перетинаються в одній точці. Через кожні дві із цих прямих проведено площину. Скільки всього площин проведено?

2.13.• Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині?

2.14.• Знайдіть помилку на рисунку 2.5, якщо відомо, що вершина D чотирикутника $ABCD$ лежить у площині α, вершини A, B і C не лежать у цій площині, пряма AB перетинає площину α в точці E, пряма BC — у точці F. Зробіть правильний рисунок.

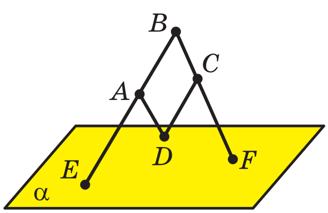


Рис. 2.5

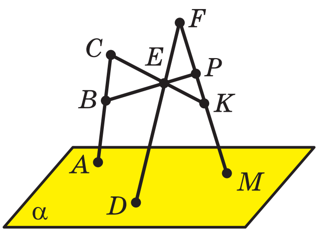


Рис. 2.6

2.15.° Знайдіть помилку на рисунку 2.6, якщо відомо, що прямі BP і CK перетинаються в точці E, пряма BP перетинає пряму AC у точці B, пряму FM — у точці P, пряма CK перетинає пряму FM у точці K, прямі AC, FE і FM перетинають площину α в точках A, D і M відповідно. Зробіть правильний рисунок.

2.16.° Точка C лежить на прямій AB, а точка D не лежить на цій прямій. Точка E лежить на прямій AD. Доведіть, що площини ABD і CDE збігаються.

2.17.° Доведіть, що коли три прямі не належать одній площині та кожні дві із цих прямих перетинаються, то всі дані прямі перетинаються в одній точці.

2.18.° Прямі a, b і c попарно перетинаються, причому точки їхнього перетину не збігаються. Чи лежать прямі a, b і c в одній площині?

2.19.° Точки M і N належать площині α, а точка K — площині β (рис. 2.7). Побудуйте пряму перетину площин β і MNK.

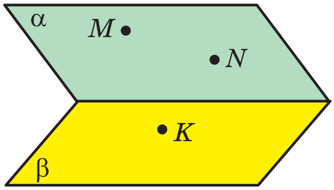


Рис. 2.7

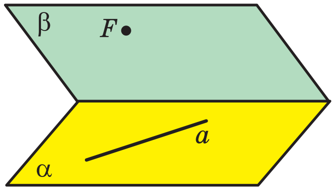


Рис. 2.8

2.20.° Пряма a належить площині α, а точка F — площині β (рис. 2.8). Побудуйте пряму, по якій площина, що проходить через пряму a та точку F, перетинає площину β.

2.21.°° Трикутники ABC і ABC_1 лежать у різних площинах. На сторонах AC, CB, BC_1 і C_1A позначили точки M, N, P і K відповідно так, як показано на рисунку 2.9. Чи можуть ці точки належати одній площині?

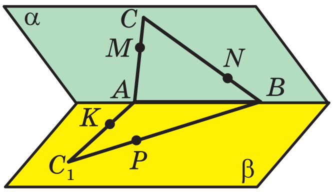


Рис. 2.9

2.22.•• Дано три площини, які попарно перетинаються. Дві з трьох прямих перетину цих площин перетинаються в точці A. Доведіть, що третя пряма проходить через точку A.

2.23.•• У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD непаралельні, X — довільна точка, яка не належить площині чотирикутника. Доведіть, що за будь-якого вибору точки X пряма перетину площин XAB і XCD проходить через деяку фіксовану точку.

2.24.* На рисунку 2.10 буквами P, E і Q позначено точки перетину прямих MK і BC, MN і CA, KN і AB відповідно. Чи можна стверджувати, що площини ABC і MNK збігаються?

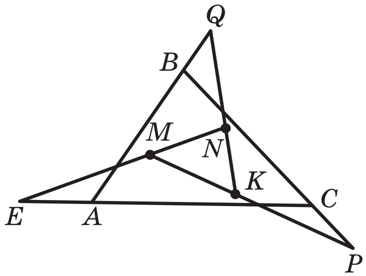


Рис. 2.10

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.25. На стороні BC паралелограма $ABCD$ позначили точку M. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо площа трикутника AMD дорівнює 16 см^2.

2.26. Відрізки AB і CD перетинаються в точці E, прямі AD і BC паралельні. Знайдіть відрізок BE, якщо $AE = 10$ см, $CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

3. Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники

У стереометрії, крім точок, прямих і площин, розглядають просторові фігури, тобто фігури, не всі точки яких лежать в одній площині. З деякими з просторових фігур ви вже ознайомилися. Так, на рисунку 3.1 зображено циліндр, конус і кулю. Ці фігури ви докладно вивчатимете в 11 класі.

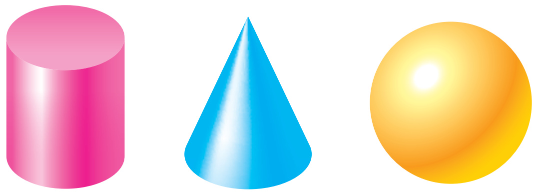


Рис. 3.1

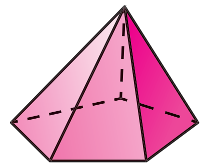


Рис. 3.2

На рисунку 3.2 зображено ще одну відому вам просторову фігуру — піраміду. Ця фігура є окремим видом **многогранника.**

Приклади многогранників показано на рисунку 3.3.

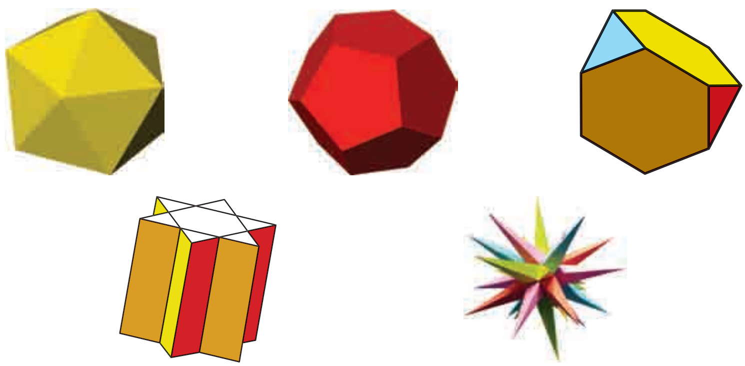


Рис. 3.3

Поверхня многогранника складається з многокутників. Їх називають **гранями многогранника.** Сторони многокутників називають **ребрами многогранника,** а вершини — **вершинами многогранника** (рис. 3.4).

На рисунку 3.5 зображено п'ятикутну піраміду $FABCDE$. Поверхня цього многогранника складається з п'яти трикутників, які називають **бічними гранями піраміди,** та одного п'ятикутника,

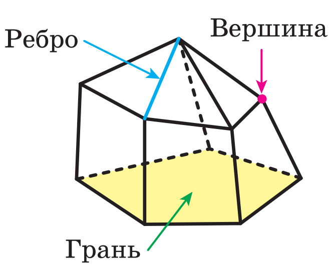


Рис. 3.4

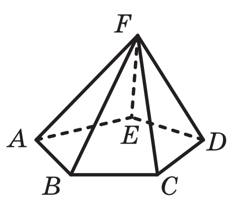


Рис. 3.5

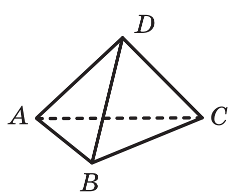


Рис. 3.6

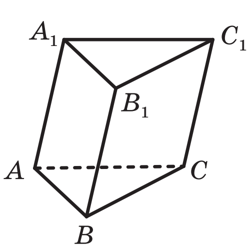


Рис. 3.7

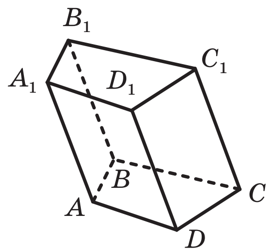


Рис. 3.8

який називають **основою піраміди**. Вершину F, яка є спільною для всіх бічних граней, називають **вершиною піраміди**. Ребра FA, FB, FC, FD і FE називають **бічними ребрами піраміди**, а ребра AB, BC, CD, DE і EA — **ребрами основи піраміди**.

На рисунку 3.6 зображено трикутну піраміду $DABC$. Трикутну піраміду також називають **тетраедром**.

Ще одним окремим видом многогранника є **призма**. На рисунку 3.7 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Цей многогранник має п’ять граней, дві з яких — рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Їх називають **основами призми**. Решта граней призми — паралелограми. Їх називають **бічними гранями призми**. Ребра AA_1, BB_1 і CC_1 називають **бічними ребрами призми**.

На рисунку 3.8 зображено чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Її поверхня складається з двох рівних чотирикутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (основи призми) і чотирьох паралелограмів (бічні грані призми).

Окремим видом чотирикутної призми є **прямокутний паралелепіпед**. На рисунку 3.9 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

У свою чергу, окремим видом прямокутного паралелепіпеда є **куб**. Усі грані куба — рівні квадрати (рис. 3.10).

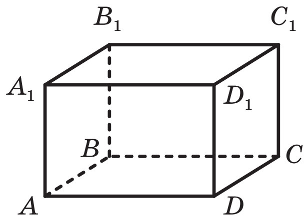


Рис. 3.9

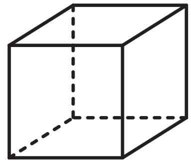


Рис. 3.10

Чотирикутну призму, основою якої є паралелограм, називають **паралелепіпедом.**

У курсі геометрії 11 класу ви докладніше ознайомитеся з многогранниками та їхніми окремими видами.

Задача 1. На ребрах AA_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM \neq DN$ (рис. 3.11). Побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC.

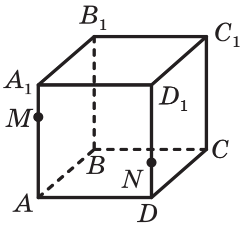


Рис. 3.11

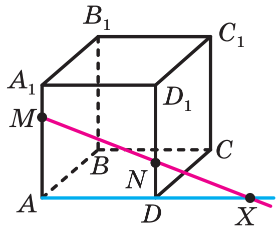


Рис. 3.12

Розв'язання. Точки M і N належать площині AA_1D_1. Тоді за аксіомою **A4** пряма MN належить цій площині. Аналогічно пряма AD також належить площині AA_1D_1. Із планіметрії відомо, що прямі, які лежать в одній площині, або є паралельними, або перетинаються. Оскільки $AM \neq DN$, то прямі AD і MN перетинаються. Нехай X — точка їхнього перетину (рис. 3.12).

Точки A і D належать площині ABC. Тоді за аксіомою **A4** пряма AD належить цій самій площині. Точка X належить прямій AD. Отже, точка X належить площині ABC. Оскільки точка X також належить прямій MN, то пряма MN перетинає площину ABC у точці X. ◄

Нехай у просторі задано многогранник і площину.

Якщо всі спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають **перерізом многогранника площиною**, а саму площину — **січною площиною.**

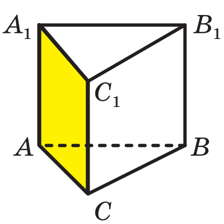


Рис. 3.13

На рисунку 3.13 січну площину задають точки A, A_1 і C_1. Перерізом призми цією площиною є бічна грань AA_1C_1C.

На рисунку 3.14 січну площину задають пряма AC і точка B_1. Перерізом призми цією площиною є трикутник AB_1C.

На рисунку 3.15 січну площину задають дві прямі AE і CE, що перетинаються. Перерізом піраміди цією площиною є трикутник AEC.

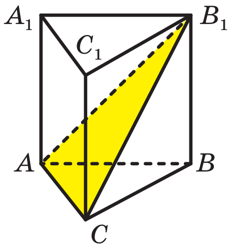


Рис. 3.14

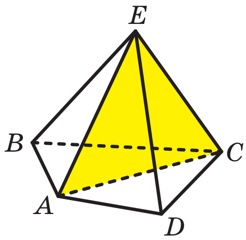


Рис. 3.15

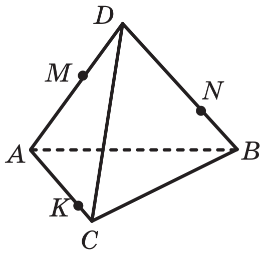


Рис. 3.16

Задача 2. На ребрах AD, DB і AC тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, N і K (рис. 3.16). Побудуйте переріз тетраедра площиною KMN, якщо відрізок MN не паралельний ребру AB.

Розв'язання. Точки M і N є спільними для площини KMN і площини ADB. Отже, ці площини перетинаються по прямій MN. Тоді січна площина перетинає грань ADB по відрізку MN (рис. 3.17). Аналогічно робимо висновок, що площина KMN перетинає грань ADC по відрізку KM.

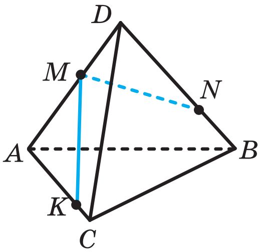


Рис. 3.17

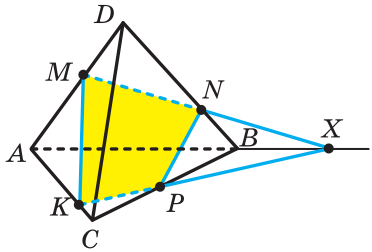


Рис. 3.18

Січна площина KMN і площина ABC мають спільну точку K. Отже, вони перетинаються по прямій, яка проходить через точку K. Щоби побудувати цю пряму, треба знайти ще одну спільну точку площин ABC і KMN. Для цього знайдемо точку перетину прямої MN і площини ABC.

Нехай пряма MN перетинає пряму AB у точці X (рис. 3.18). Оскільки $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Оскільки $MN \subset KMN$, то $X \in KMN$. Отже, точки K і X є спільними для площин ABC і KMN. Таким чином, ці площини перетинаються по прямій KX.

Нехай пряма KX перетинає відрізок CB у точці P. Тоді січна площина перетинає грані ABC і CDB відповідно по відрізках KP і PN.

Отже, чотирикутник $KMNP$ — шуканий переріз. ◄

Задача 3. Точка M належить бічному ребру BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Пряма a належить площині ABC і розміщена так, як показано на рисунку 3.19. Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через пряму a і точку M.

Розв'язання. Нехай пряма AB перетинає пряму a в точці X (рис. 3.20). Точки M і X є спільними для січної площини та площини AA_1B_1. Отже, ці площини перетинаються по прямій MX. Нехай пряма MX перетинає ребро AA_1 у точці K. Тоді січна площина перетинає бічну грань AA_1B_1B по відрізку KM.

Аналогічно будуємо відрізок MN, по якому січна площина перетинає грань CC_1B_1B.

Для завершення розв'язання залишилося сполучити точки N і K. Трикутник KMN — шуканий переріз. ◄

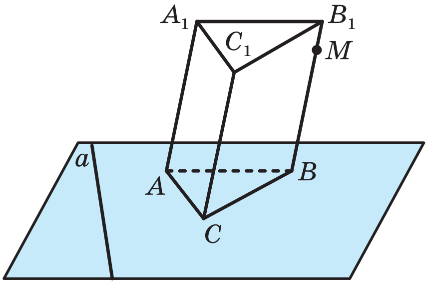


Рис. 3.19

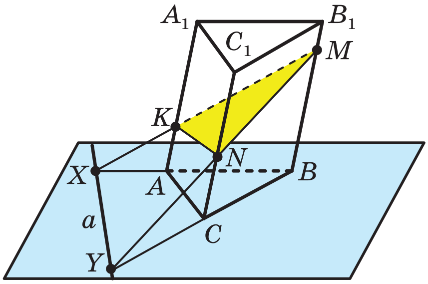


Рис. 3.20

Задача 4. На ребрах AD, DD_1 і B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M, N і K (рис. 3.21). Побудуйте переріз куба площиною MNK.

Розв'язання. Очевидно, що січна площина перетинає грань AA_1D_1D куба по відрізку MN (рис. 3.22).

Нехай $MN \cap A_1D_1 = X$. Точки X і K є спільними для площин MNK і $A_1D_1C_1$. Отже, $MNK \cap A_1D_1C_1 = XK$. Нехай пряма XK перетинає ребро D_1C_1 у точці E. Тоді площина MNK перетинає грань $A_1B_1C_1D_1$ по відрізку EK.

Нехай $MN \cap AA_1 = Z$ і $EK \cap A_1B_1 = Y$. Тоді $MNK \cap AA_1B_1 = YZ$. Нехай пряма YZ перетинає ребра AB і A_1B_1 куба відповідно в точках G і F. Залишилося сполучити точки M і G, G і F, F і K. Шестикутник $MNEKFG$ — шуканий переріз. ◄

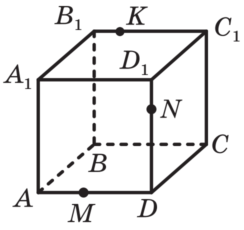


Рис. 3.21

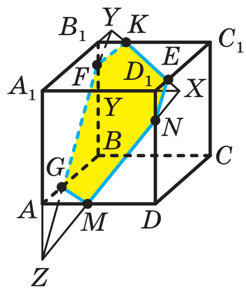


Рис. 3.22

Задача 5. Точка X є серединою ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У якому відношенні площина XCD_1 ділить ребро AB?

Розв'язання. Знайдемо точку перетину площини XCD_1 і прямої AB (рис. 3.23). Нехай пряма D_1X перетинає пряму DA в точці Y. Трикутник YAX подібний трикутнику YDD_1 (рис. 3.24), тому $\frac{YA}{YD}=\frac{AX}{DD_1}=\frac{1}{2}$. Оскільки точки Y і C належать площині перерізу, то й пряма YC також лежить у площині перерізу. Нехай пряма YC перетинає пряму AB у точці Z. Точка Z належить площині перерізу та прямій AB, тому точка Z є точкою перетину площини XCD_1 і прямої AB. Оскільки трикутник YAZ подібний трикутнику YDC (рис. 3.25), то $\frac{YA}{YD}=\frac{AZ}{DC}=\frac{1}{2}$. Звідси випливає, що точка Z є серединою сторони AB, тобто площина XCD_1 ділить ребро AB навпіл. ◄

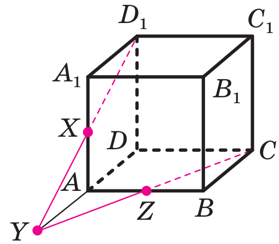


Рис. 3.23

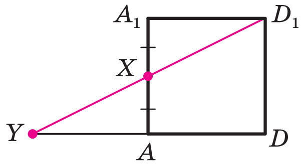


Рис. 3.24

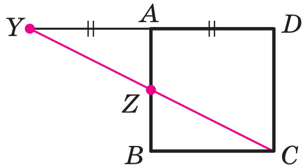


Рис. 3.25

Задача 6. На ребрах SA, SB і SC трикутної піраміди $SABC$ позначили відповідно точки A_1, B_1 і C_1. Відомо, що прямі AB і A_1B_1 перетинаються в точці X, прямі BC і B_1C_1 — у точці Y, а прямі AC і A_1C_1 — у точці Z. Доведіть, що точки X, Y і Z лежать на одній прямій.

Розв'язання. Розглянемо площини ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 3.26). Оскільки точка X належить прямій A_1B_1, то точка X належить і площині $A_1B_1C_1$. Крім того, точка X належить прямій AB, а отже, належить площині ABC. Таким чином, точка X належить прямій перетину площин $A_1B_1C_1$ і ABC. Аналогічно можна довести, що точки Y і Z також належать прямій перетину площин $A_1B_1C_1$ і ABC. Отже, точки X, Y і Z лежать на одній прямій. ◄

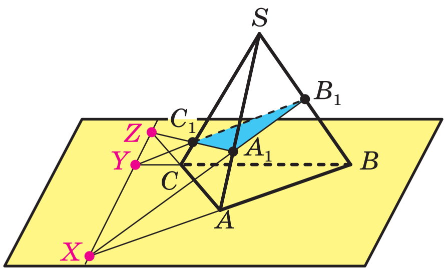


Рис. 3.26

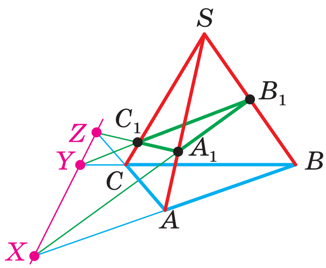


Рис. 3.27

Задача 6 пов'язана з важливою теоремою (теоремою Дезарга) розділу математики, який називають проективною геометрією. Якщо в шкільному курсі геометрії одними з головних об'єктів вивчення є величини (довжини відрізків, міри кутів, площі многокутників тощо), то в проективній геометрії головними «дійовими особами» є прямі та точки їхнього перетину. Характерним прикладом твердження проективної геометрії є теорема Дезарга.

Теорема Дезарга. ***Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені на площині так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці, то точки перетину прямих AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1 належать одній прямій.***

Жерар Дезарг
(1593–1662)

Французький математик, архітектор, військовий інженер. Заклав основи проективної та нарисної геометрії.

Семен Петрович Ярошенко
(1846–1917)

Український математик, народився в м. Херсоні. Його робота «Начала новой геометрии» (1873) — перша вітчизняна книга з проективної геометрії.

Зверніть увагу, що коли на рисунок 3.26 подивитися як на планіметричний (рис. 3.27), то він буде ілюстрацією теореми Дезарга.

Докладніше про інтерпретації такого роду розповімо в п. 8.

1. Назвіть відомі вам просторові фігури.
2. З яких фігур складається поверхня многогранника? Як їх називають?
3. Що називають ребрами многогранника? вершинами многогранника?
4. Які види многогранників ви знаєте? Опишіть ці многогранники.

ВПРАВИ

3.1.° На рисунку 3.28 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:
1) основи паралелепіпеда;
2) бічні грані паралелепіпеда;
3) бічні ребра паралелепіпеда;
4) ребра нижньої основи паралелепіпеда;
5) ребра, паралельні ребру AB;
6) ребра, паралельні ребру BB_1.

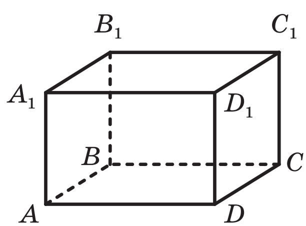


Рис. 3.28

3.2.° На рисунку 3.29 зображено піраміду $MABC$. Укажіть:
1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

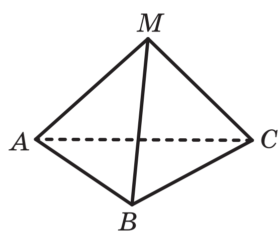


Рис. 3.29

3.3.° На ребрі BC тетраедра $SABC$ позначили точку D. Яка пряма є лінією перетину площин: 1) ASD і ABC; 2) ASD і BSC; 3) ASD і ASC? Побудуйте переріз тетраедра площиною ASD.

3.4.° Точка M належить грані ASC тетраедра $SABC$, точка D — ребру BC (рис. 3.30). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму SD і точку M.

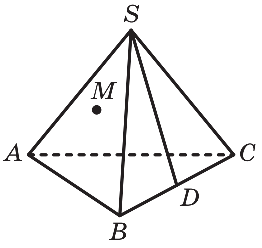


Рис. 3.30

3.5.° На бічних ребрах SA і SB піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AB не є паралельними.

3.6.° На бічних ребрах SA і SC піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AC не є паралельними.

3.7.° Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: 1) точки A, C і B_1; 2) пряму BD і точку C_1.

3.8.° Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через прямі AC_1 і BC_1.

3.9.• Дано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.31). Точка E належить прямій A_1B_1, точка F — прямій BB_1, точка M — прямій B_1C_1. Побудуйте переріз призми площиною EFM.

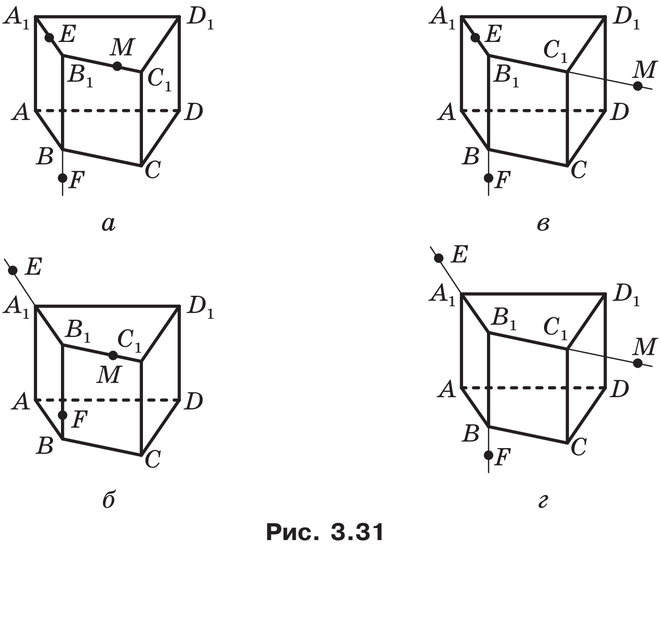


Рис. 3.31

3.10.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.32). Точка D належить прямій AC, точка E — ребру BC. Побудуйте переріз призми площиною DEC_1.

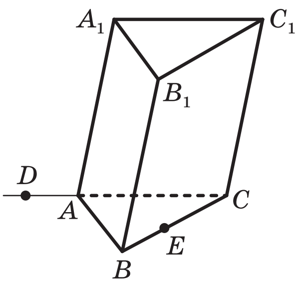


Рис. 3.32

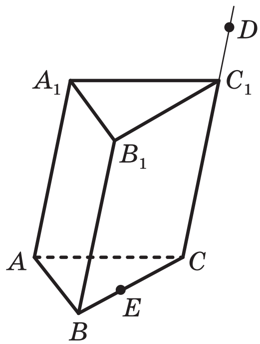


Рис. 3.33

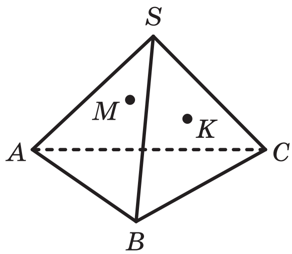


Рис. 3.34

3.11.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.33). Точка D належить прямій CC_1, точка E — ребру BC. Побудуйте переріз призми площиною AED.

3.12.• Точка M належить грані ASB тетраедра $SABC$, точка K — грані BSC (рис. 3.34). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

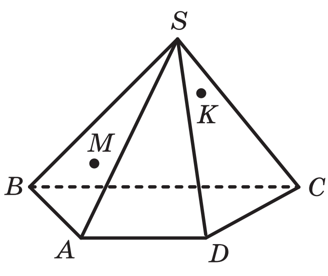


Рис. 3.35

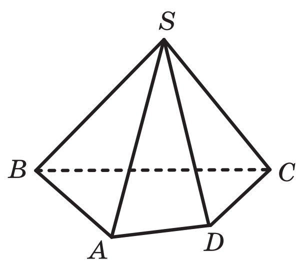


Рис. 3.36

3.13.• Точка M належить грані ASB піраміди $SABCD$, точка K — грані CSD (рис. 3.35). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

3.14.• Дано піраміду $SABCD$ (рис. 3.36). Побудуйте лінію перетину площин ASB і CSD.

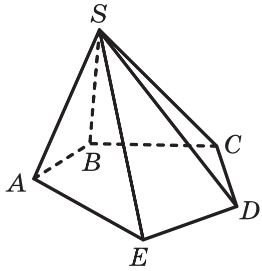


Рис. 3.37

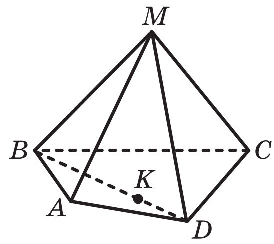


Рис. 3.38

3.15.• Дано піраміду $SABCDE$ (рис. 3.37). Побудуйте лінію перетину площин ASE і BSC.

3.16.• На ребрах AB і CD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F. Побудуйте лінію перетину площин AFB і CED.

3.17.• Дано піраміду $MABCD$, точка K належить відрізку BD (рис. 3.38). Побудуйте лінію перетину площин MCK і MAB.

3.18.• На ребрах AD і CD піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K (рис. 3.39). Побудуйте лінію перетину площин BSC і MSK.

3.19.•• На ребрах AB, AD і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E, F і M (рис. 3.40). Побудуйте переріз куба площиною EFM.

3.20.•• На ребрах AA_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E і F (рис. 3.41). Побудуйте переріз куба площиною EB_1F.

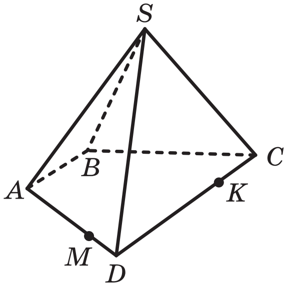


Рис. 3.39

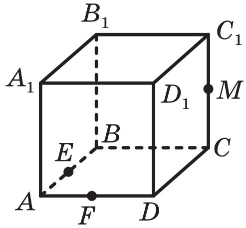


Рис. 3.40

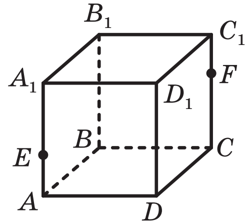


Рис. 3.41

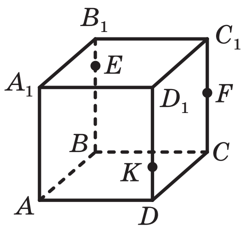


Рис. 3.42

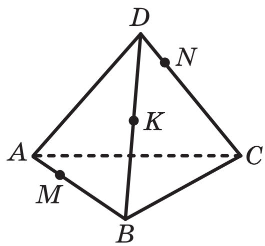


Рис. 3.43

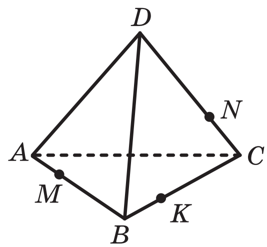


Рис. 3.44

3.21.•• На ребрах BB_1, CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E, F і K (рис. 3.42). Побудуйте переріз куба площиною EFK.

3.22.•• На ребрах AB, BD і CD тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, K і N (рис. 3.43). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.23.•• На ребрах AB, BC і CD тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, K і N (рис. 3.44). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.24.•• На ребрах AC і BD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F, а на ребрі CD — точки M і K так, що точка K лежить між точками C і M (рис. 3.45). Побудуйте лінію перетину площин ABM і EFK.

3.25.•• На бічних ребрах MB і MC піраміди $MABCD$ позначили відповідно точки E і F (рис. 3.46). Побудуйте лінію перетину площин AEC і BDF.

3.26.•• На ребрах AA_1 і A_1B_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ позначено точки D і E відповідно (рис. 3.47). Побудуйте переріз призми площиною CDE.

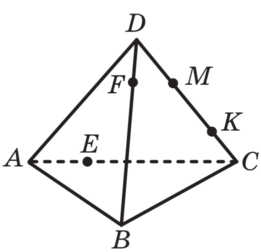


Рис. 3.45

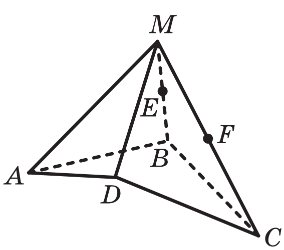


Рис. 3.46

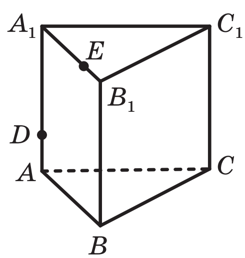


Рис. 3.47

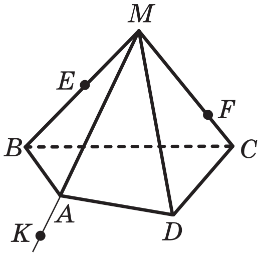


Рис. 3.48

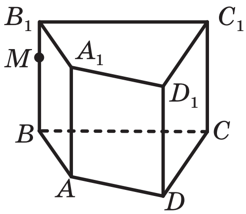


Рис. 3.49

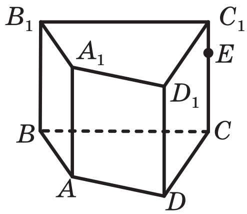


Рис. 3.50

3.27.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 3.48). На бічних ребрах MB і MC позначили відповідно точки E і F, а на продовженні ребра MA за точку A — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною EFK.

3.28.•• На бічному ребрі BB_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точку M (рис. 3.49). Побудуйте переріз призми площиною CMD.

3.29.•• На ребрі CC_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точку E (рис. 3.50). Побудуйте переріз призми площиною BA_1E.

3.30.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Позначте на його ребрах три точки так, щоби переріз куба площиною, яка проходить через ці точки, був п’ятикутником.

3.31.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 3.51). На ребрі AD позначили точку E, на грані AMB — точку F, на грані CMD — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною EFK.

3.32.•• Точка K належить ребру AC тетраедра $DABC$, точка E — грані ADB, точка F — грані BDC (рис. 3.52). Побудуйте переріз тетраедра площиною EFK.

3.33.•• На ребрах BC, CA і CD тетраедра $DABC$ позначили точки M, N і P відповідно (рис. 3.53). Побудуйте точку перетину площин ABP, ADM і BDN.

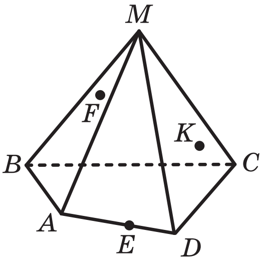


Рис. 3.51

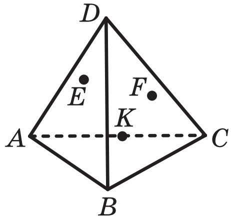


Рис. 3.52

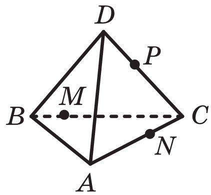


Рис. 3.53

3.34.•• На ребрах BC, CA і CD тетраедра $DABC$ позначили точки M, N і P відповідно (рис. 3.53). Побудуйте точку перетину площин BPN, AMP і MND.

3.35.* Чи можна стверджувати, що коли всі грані многогранника — рівні квадрати, то цей многогранник — куб?

3.36.* Точки M, N і K належать відповідно граням ADB, BDC і CDA тетраедра $DABC$ (рис. 3.54). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.37.* Точки F, M і K належать відповідно граням ASB, ABC і CSD піраміди $SABCD$ (рис. 3.55). Побудуйте переріз піраміди площиною FMK.

3.38.* Точки F, M і K належать відповідно граням ASB, ASD і DSC піраміди $SABCD$ (рис. 3.55). Побудуйте переріз піраміди площиною FMK.

3.39.* Чи може рисунок 3.56 бути зображенням деякого многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

3.40.* Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. На ребрах SB, SC і SD позначили відповідно точки M, N і K так, що $SM : MB = 3 : 2$, $SN : NC = 1 : 2$ і $SK : KD = 1 : 3$.
1) Побудуйте переріз піраміди площиною MNK.
2) У якому відношенні, рахуючи від вершини S, площина MNK ділить ребро SA?

3.41.* Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. На ребрах SA і SC позначили відповідно точки K і N так, що $SK : KA = 1 : 3$, $SN : NC = 1 : 2$. На продовженні ребра BC за точку C позначили точку M так, що $BC = CM$.
1) Побудуйте переріз піраміди площиною MNK.
2) У якому відношенні, рахуючи від вершини S, площина MNK ділить ребро SD?

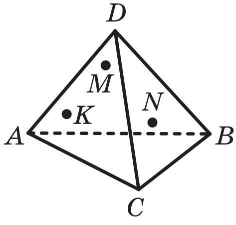


Рис. 3.54

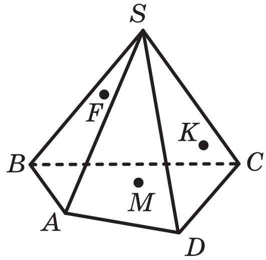


Рис. 3.55

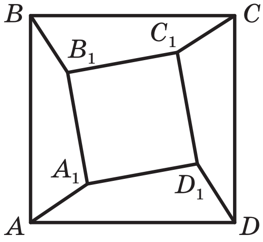


Рис. 3.56

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.42. Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

3.43. Через точку перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення площі трикутника EBF до площі трикутника ABC.

ПРО АКСІОМИ

Вам не раз доводилося чути такі твердження: математика — строга наука, математика любить точність у міркуваннях, математика підпорядковується логіці тощо. Із завданнями на кшталт «доведіть», «обґрунтуйте», «роз'ясніть» ви стикаєтеся на кожному уроці математики. Узагалі, математика базується виключно на доказових міркуваннях — це те, що відрізняє її від більшості інших наук.

Ви довели багато теорем планіметрії, чимала «доказова робота» чекає на вас і в стереометрії. Вивчення геометричних фігур за принципом «нове зі старого» спонукало нас до необхідності введення основних понять і аксіом. Проте, незважаючи на все сказане, шкільний курс геометрії не є строгим. Нехай цей факт вас не засмучує. Навпаки, якщо ви зрозумієте причини відхилення від строгості, то це допоможе краще зрозуміти, як математики діляться своїми знаннями, роблячи їх більш образними та доступними.

Річ у тім, що в шкільному курсі геометрії під час доведення цілої низки теорем ми не лише користуємося чисто логічними міркуваннями, але й спираємося на очевидну наочність. Наприклад, навряд чи хтось із вас має сумніви в тому, що будь-який промінь, початок якого лежить усередині кола, перетинає це коло (рис. 3.57). Наведене істинне твердження в нашому курсі не є аксіомою, а отже, потребує доведення. Однак таке доведення ми не зможемо провести. Причина полягає в тому, що для доведення деяких фактів нам не вистачає аксіом, і цей недолік ми вимушені

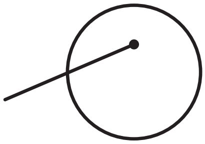


Рис. 3.57

компенсувати наочністю. Такий підхід обумовлений лише навчальними цілями. Річ у тім, що наочні пояснення та ілюстрації часто передають сутність сказаного значно швидше й роблять матеріал доступнішим.

Створити систему аксіом, яка дає змогу відмовитися від наочності та проводити доведення, базуючись лише на логічних міркуваннях, — задача непроста. Реалізовуючи ідеї великого давньогрецького філософа Аристотеля (384–322 до н. е.), Евклід (III ст. до н. е.) у своїй праці «Начала» першим спробував застосувати аксіоматичний метод для побудови геометрії. Завершив цю роботу в 1899 р. видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Понад 2000 років список аксіом, створений Евклідом, доповнювався та уточнювався. Отриману систему аксіом називають аксіоматикою евклідової геометрії. Саме евклідову геометрію вивчають у школі.

Можна побудувати різні аксіоматики евклідової геометрії. Наприклад, у нашому курсі твердження «Через будь-які три точки простору, що не належать одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна» є аксіомою, а твердження «Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна» — теоремою. Проте можна друге твердження прийняти за аксіому, тоді перше стане теоремою. Цю теорему ви можете легко довести, спираючись на «нову» та «старі» аксіоми. Переконайтеся в цьому самостійно.

Нові аксіоматики евклідової геометрії з'являються не лише в результаті «перестановки» аксіоми та наслідку з неї. Так, можна змінити список основних понять. Наприклад, замість прямої вважати поняттям, якому не дають означення, відрізок. Оскільки аксіоми розкривають сутність основних понять (описують їхні властивості), то, вибравши новий список основних понять, ми неминуче прийдемо до нової системи аксіом.

Наголосимо, що, користуючись різними системами аксіом евклідової геометрії, можна довести одні й ті самі властивості геометричних фігур. Системи аксіом фактично є різними наборами інструментів. Учені, які вивчають математику, добираючи доречний комплект аксіом, зводять будівлю геометричної науки.

Евклідова геометрія створювалась як наука, що описує навколишній світ. Проте систему аксіом можна змінити так, що вона вже не відображатиме звичні для нас властивості реальних предметів. Для цього можна одну з аксіом замінити на твердження, що її спростовує. Наприклад, аксіому «Через точку, яка не належить даній прямій, проходить не більше ніж одна пряма, паралельна даній» замінити такою аксіомою: «Через точку, яка не належить

М. І. Лобачевський
(1792–1856)

даній прямій, проходить більше ніж одна пряма, паралельна даній». Так зробив видатний російський математик Микола Іванович Лобачевський, тим самим побудувавши зовсім нову геометрію, відмінну від евклідової. Якщо ви виберете професію математика, то зможете ознайомитися з геометрією Лобачевського та з іншими неевклідовими геометріями.

Під час розгляду списку аксіом може виникнути запитання: «Чи не закралася до цього списку теорема, тобто твердження, яке можна довести за допомогою інших аксіом?» Таке можливе. Разом з тим за допомогою логічних виведень з істинного твердження можна отримати тільки істинне твердження. Отже, «потрапляння» теореми до списку аксіом не може призвести до суперечливих висновків.

Наприклад, у пункті 1 аксіому **А4** **«якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині»** можна вивести з інших аксіом. Покажемо це.

Нехай $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$ (рис. 3.58). Доведемо, що $AB \subset \alpha$.

З аксіоми **А1** випливає, що існує точка C, яка не належить площині α. Згідно з аксіомою **А3** існує площина β, яка проходить через точки A, B і C. Площини α і β мають спільну точку A. Тоді за аксіомою **А5** ці площини перетинаються по прямій, що проходить через точку A. Прямій перетину площин α і β належать усі їхні спільні точки. Отже, точка B належить цій прямій, Через точки A і B проходить єдина пряма, тому пряма AB збігається з прямою перетину площин α і β. Отже, $AB \subset \alpha$.

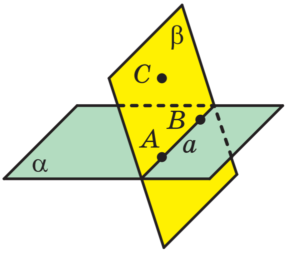


Рис. 3.58

Таким чином, у нашому курсі стереометрії можна було б залишити аксіоми **А1**, **А2**, **А3**, **А5** і **А6**. Проте, на наш погляд, це було б менш зручним і деякою мірою утруднило б викладення стереометрії.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Основні аксіоми стереометрії

А1. Для будь-якої площини простору існує точка, яка їй не належить.

А2. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

А3. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

А4. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

А5. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

А6. Відстань між будь-якими двома точками простору є однаковою для будь-якої площини, що проходить через ці точки.

Площина однозначно визначається:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не належить цій прямій;
3) двома прямими, що перетинаються.

Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна.

Переріз многогранника

Якщо всі спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають перерізом многогранника площиною, а саму площину — січною площиною.

§2 ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ У ПРОСТОРІ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся про взаємне розміщення двох прямих, прямої та площини, двох площин у просторі. Ознайомитеся з правилами, за якими зображають просторові фігури на площині. Отримаєте уявлення про перетворення фігур у просторі.

4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Із курсу планіметрії ви знаєте, що дві прямі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку. Таке саме означення прямих, що перетинаються, дають і в стереометрії (див. п. 2).

Вам відомо також, що дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються. Чи можна це означення перенести в стереометрію?

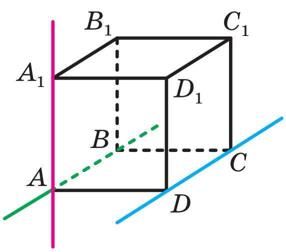


Рис. 4.1

Звернемося до рисунка 4.1, на якому зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Жодна з прямих AB і AA_1 не має з прямою DC спільних точок. При цьому прямі AB і DC лежать в одній площині — у площині ABC, а прямі AA_1 і DC не лежать в одній площині, тобто не існує площини, яка проходила б через ці прямі.

Наведений приклад показує, що в стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків уведемо відповідне означення.

Означення. **Дві прямі в просторі називають *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.**

Якщо прямі a і b паралельні, то записують: $a \parallel b$.

Означення. **Дві прямі в просторі називають *мимобіжними*, якщо вони не лежать в одній площині.**

Наприклад, на рисунку 4.1 прямі AB і DC — паралельні, а прямі AA_1 і DC — мимобіжні.

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди зрубу (рис. 4.2).

Міжнародний центр культури і мистецтв, м. Київ

Корабельний ліс

Зруб

Рис. 4.2

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дроти ліній електропередачі, різні елементи будівельних конструкцій (рис. 4.3).

Рис. 4.3

Отже, існують три можливих випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі:

1) прямі перетинаються;

2) прямі паралельні;

3) прямі мимобіжні.

Сказане ілюструє рисунок 4.4.

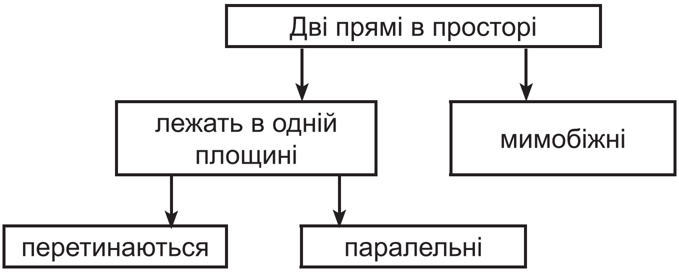


Рис. 4.4

Два відрізки називають **паралельними (мимобіжними)**, якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

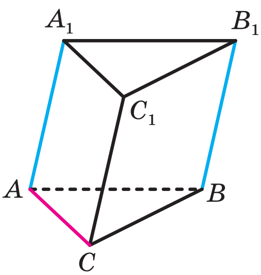


Рис. 4.5

Наприклад, ребра AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4.5) є паралельними, а ребра AC і BB_1 — мимобіжними.

Розглянемо деякі властивості паралельних прямих.

Теорема 4.1. ***Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b. Доведемо, що існує єдина площина α така, що $a \subset \alpha$ і $b \subset \alpha$.

Існування площини α, яка проходить через прямі a і b, випливає з означення паралельних прямих.

Якщо припустити, що існує ще одна площина, яка проходить через прямі a і b, то через пряму a і деяку точку прямої b проходитимуть дві різні площини, що суперечить теоремі 2.1. ◄

У п. 2 було вказано три способи задання площини. Теорему 4.1 можна розглядати як ще один спосіб задання площини — за допомогою двох паралельних прямих.

Нехай точка A не належить прямій a. Скільки існує прямих, які проходять через точку A та паралельні прямій a? У планіметрії відповідь на це запитання міститься в аксіомі паралельності прямих — існує єдина пряма, яка проходить через точку A та паралельна прямій a. У стереометрії це твердження також можна було б узяти за аксіому. Проте в нашому курсі вже накопичилося чимало змістовних фактів, які дають змогу вивести його як наслідок з інших істинних тверджень.

Теорема 4.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A такі, що $A \notin a$. Доведемо, що існує єдина пряма b така, що $b \parallel a$ і $A \in b$.

За теоремою 2.1 існує єдина площина α така, що $A \in \alpha$ і $a \subset \alpha$ (рис. 4.6).

За аксіомою **А2** у площині α виконується аксіома паралельності прямих. Тоді в площині α через точку A можна провести пряму, паралельну прямій a. На рисунку 4.6 це пряма b.

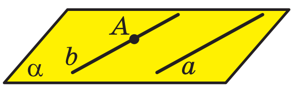


Рис. 4.6

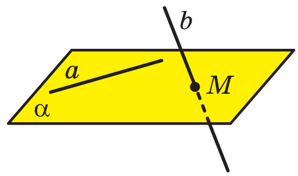


Рис. 4.7

Аксіома паралельності прямих гарантує, що в площині α така пряма b єдина. Проте сказане ще не означає, що в просторі немає інших прямих, які проходять через точку A та паралельні прямій a.

Нехай існує пряма b_1, яка не належить площині α, така, що $A \in b_1$ і $b_1 \parallel a$. Паралельні прямі b_1 і a задають деяку площину β. Площини α і β проходять через пряму a і точку A. Отже, за теоремою 2.1 ці площини збігаються. Звідси отримуємо, що $b_1 \subset \alpha$. Це суперечить зробленому припущенню.

Отже, пряма b — єдина пряма така, що $b \parallel a$ і $A \in b$. ◄

Установити паралельність двох прямих, які лежать в одній площині, можна за допомогою відомих вам з курсу планіметрії ознак паралельності двох прямих. А як установити, чи є дві прямі мимобіжними? Відповісти на це запитання дає змогу така теорема.

Теорема 4.3 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі мимобіжні.***

Доведення. Нехай дано площину α та прямі a і b такі, що $a \subset \alpha$ і $b \cap \alpha = M$, причому $M \notin a$ (рис. 4.7). Доведемо, що прямі a і b мимобіжні.

Припустимо, що прямі a і b не є мимобіжними. Тоді вони належать деякій площині β. Площини α і β проходять через пряму a

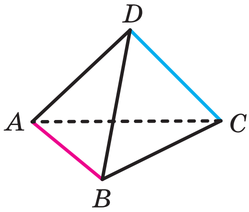


Рис. 4.8

і точку M, яка не належить прямій a. Тоді за теоремою 2.1 ці площини збігаються. Таким чином, $b \subset \alpha$, що суперечить умові $b \cap \alpha = M$. Отже, прямі a і b є мимобіжними. ◄

На рисунку 4.8 ребра AB і DC тетраедра $DABC$ є мимобіжними. Справді, пряма DC перетинає площину ABC у точці C, яка не належить прямій AB. Отже, за ознакою мимобіжних прямих прямі AB і DC є мимобіжними.

Задача 1. Доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й друга пряма також перетинає цю площину.

Розв'язання. Нехай дано прямі a і b та площину α такі, що $a \parallel b$, $a \cap \alpha = M$ (рис. 4.9). Доведемо, що пряма b перетинає площину α.

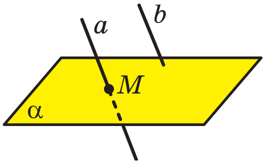


Рис. 4.9

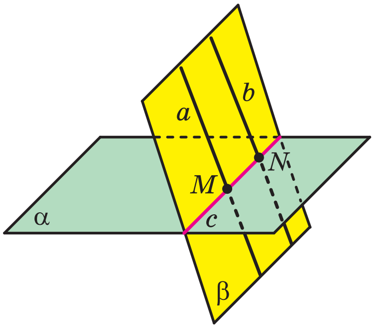


Рис. 4.10

За теоремою 4.1 через прямі a і b проходить єдина площина β. Оскільки $M \in \alpha$ і $M \in \beta$, то площини α і β перетинаються по прямій, яка проходить через точку M. Позначимо цю пряму c (рис. 4.10).

Із планіметрії відомо, що коли одна з двох паралельних прямих перетинає дану пряму, то й друга пряма перетинає дану пряму. Звідси випливає, що $b \cap c \neq \varnothing$.

Нехай $b \cap c = N$. Отже, пряма b і площина α мають спільну точку N. Якби пряма b належала площині α, то за теоремою 4.3 прямі a і b були б мимобіжними. Але $a \parallel b$. Таким чином, пряма b не належить площині α, а перетинає її в точці N. ◄

Задача 2. Доведіть, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині (рис. 4.11).

Розв'язання. Нехай a — одна з паралельних прямих, які перетинають дану пряму m. За теоремою 2.2 через прямі a і m, що перетинаються, проходить єдина площина α (рис. 4.12). Доведемо, що будь-яка пряма, що паралельна прямій a та перетинає пряму m, лежить у площині α.

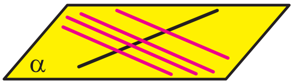


Рис. 4.11

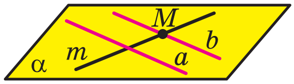


Рис. 4.12

Розглянемо пряму b, яка паралельна прямій a та перетинає пряму m у деякій точці M (рис. 4.12). Припустимо, що пряма b не належить площині α. Оскільки точка M не належить прямій a, то за ознакою мимобіжних прямих прямі b і a є мимобіжними, що суперечить умові $b \parallel a$. Отже, пряма b належить площині α. ◄

1. Які дві прямі в просторі називають паралельними?
2. Які дві прямі в просторі називають мимобіжними?
3. Які існують випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі?
4. Які два відрізки називають паралельними? мимобіжними?
5. Сформулюйте теорему про площину, яку задають дві паралельні прямі.
6. Сформулюйте теорему про пряму, яка проходить через дану точку паралельно даній прямій.
7. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.

ВПРАВИ

4.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.13). Назвіть його ребра:
1) паралельні ребру CD;
2) мимобіжні з ребром CD.

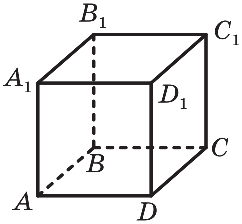


Рис. 4.13

4.2.° Укажіть моделі мимобіжних прямих, використовуючи предмети класної кімнати.

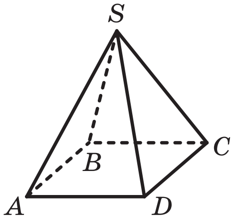


Рис. 4.14

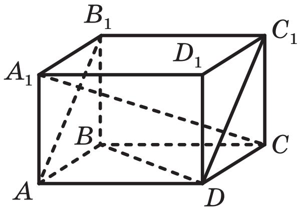


Рис. 4.15

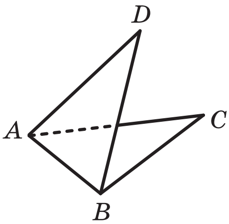


Рис. 4.16

4.3.° Дано піраміду $SABCD$ (рис. 4.14). Назвіть ребра піраміди, мимобіжні з ребром SA.

4.4.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.15). Укажіть взаємне розміщення прямих:

1) BC і A_1C;
2) AB і C_1D_1;
3) BD і CC_1;
4) AB_1 і DC_1;
5) DC_1 і BB_1;
6) AA_1 і CC_1.

4.5.° Чи є правильним твердження:

1) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку;
2) дві прямі, які не є мимобіжними, лежать в одній площині;
3) дві прямі, які лежать в одній площині, перетинаються;
4) дві прямі є мимобіжними, якщо вони не перетинаються та не паралельні?

4.6.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.13). Доведіть, що прямі AA_1 і BC мимобіжні.

4.7.° Трикутники ABC і ADB лежать у різних площинах (рис. 4.16). Яким є взаємне розміщення прямих AD і BC? Відповідь обґрунтуйте.

4.8.° Через точку, що не лежить на прямій a, проведено дві прямі, які не мають спільних точок з прямою a. Доведіть, що хоча б одна із цих прямих і пряма a є мимобіжними.

4.9.° Прямі a і b мимобіжні. Точки A і B належать прямій a, точки C і D — прямій b. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

4.10.° Прямі a і b паралельні. Точки A і B належать прямій a, точки C і D — прямій b. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

4.11.• Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c, якщо:

1) прямі a і b перетинаються, а прямі a і c паралельні;
2) прямі a і b паралельні, а прямі a і c мимобіжні?

4.12.• Скільки площин можуть задавати три попарно паралельні прямі? Зробіть рисунок.

4.13.° Скільки площин задають чотири попарно паралельні прямі, жодні три з яких не лежать в одній площині? Зробіть рисунок.

4.14.° Кінець A відрізка AB належить площині α. Через точку B і точку C, що належить відрізку AB, проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно.

1) Доведіть, що точки A, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.
2) Знайдіть відрізок BB_1, якщо точка C — середина відрізка AB і $CC_1 = 5$ см.
3) Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AC : BC = 3 : 4$ і $BB_1 = 28$ см.

4.15.° Кінець C відрізка CD належить площині β. На відрізку CD позначили точку E так, що $CE = 6$ см, $DE = 9$ см. Через точки D і E провели паралельні прямі, які перетинають площину β у точках D_1 і E_1 відповідно. Знайдіть відрізок DD_1, якщо $EE_1 = 12$ см.

4.16.° На відрізку AB, який не перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно.

1) Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.
2) Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $B_1C_1 = 10$ см.

4.17.° Точка C — середина відрізка AB, який не перетинає площину β. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину β у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см.

4.18.° Прямі a, b і c перетинають площину α в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій (рис. 4.17). Пряма b перетинає пряму a в точці D, а пряма c — у точці E. Доведіть, що прямі b і c мимобіжні.

4.19.° Відомо, що прямі a і b мимобіжні та прямі b і c мимобіжні. Чи можна стверджувати, що прямі a і c є мимобіжними?

4.20.° Для прямих на площині є правильним твердження: «Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму». Чи є правильним це твердження для прямих у просторі?

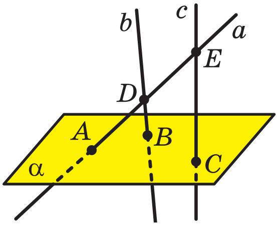


Рис. 4.17

4.21.• Точка M не належить жодній із мимобіжних прямих a і b. Чи можна через точку M провести дві прямі, кожна з яких перетинатиме і пряму a, і пряму b?

4.22.• Точка M не належить жодній із паралельних прямих a і b. Відомо, що через точку M можна провести пряму, яка перетинатиме кожну з прямих a і b. Доведіть, що прямі a і b та точка M лежать в одній площині.

4.23.• Через кінці відрізка AB, що перетинає площину α, і його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно (рис. 4.18). Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 8$ см.

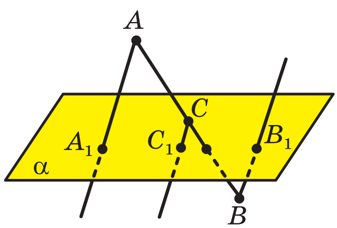


Рис. 4.18

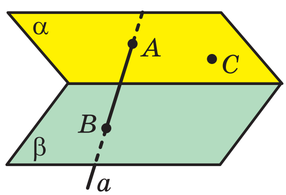


Рис. 4.19

4.24.• На відрізку AB, який перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC : BC = 5 : 3$. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 10$ см, $CC_1 = 4$ см і точки A та C лежать по різні боки від площини α.

4.25.• Трикутник ABC не має спільних точок із площиною α. Відрізок BM — медіана трикутника ABC, точка O — середина відрізка BM. Через точки A, B, C, M і O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 і O_1 відповідно. Знайдіть відрізок BB_1, якщо $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см.

4.26.• Ребро AB тетраедра $DABC$ дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між точками перетину медіан граней ADC і BDC.

4.27.• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 12 см. Знайдіть відстань між точками перетину медіан граней AMD і DMC.

4.28.• Пряма a перетинає площини α і β у точках A і B відповідно (рис. 4.19). Пряма b, паралельна прямій a, перетинає площину α в точці C. Побудуйте точку перетину прямої b з площиною β.

4.29.• Пряма a, яка належить площині α, паралельна прямій m — лінії перетину площин α і β (рис. 4.20). Точки A і B належать площині β. Чи існують на прямій a такі точки C і D, що $AC \parallel BD$?

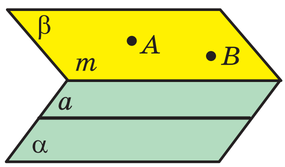


Рис. 4.20

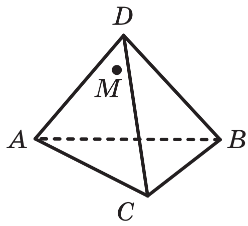


Рис. 4.21

4.30.• На грані ADC тетраедра $DABC$ позначили точку M (рис. 4.21). Побудуйте точку, у якій пряма, що проходить через точку M паралельно прямій BD, перетинає площину ABC.

4.31.• На грані ADD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K (рис. 4.22). Побудуйте точку, у якій пряма, що проходить через точку K паралельно прямій DB, перетинає площину ABB_1.

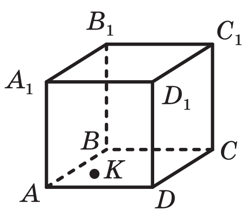


Рис. 4.22

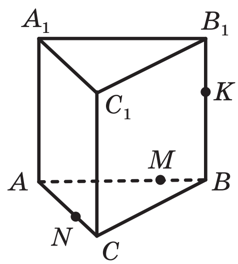


Рис. 4.23

4.32.•• На ребрах AD, BD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M, N і K. Побудуйте пряму, яка проходить через точку K і перетинає прямі AN і CM.

4.33.•• На ребрах AB, AC і BB_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили відповідно точки M, N і K (рис. 4.23). Побудуйте пряму, яка проходить через точку N і перетинає прямі CK і MC_1.

4.34.•• Вершина A паралелограма $ABCD$ належить площині α. Через вершини B, C і D проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $DD_1 = 9$ см, $BB_1 = 26$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.35. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AM і CK. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника MBK, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см і $\angle ABC = 30°$.

4.36. Точка E — середина медіани BM трикутника ABC. Пряма AE перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відношення, у якому точка K ділить відрізок BC, рахуючи від вершини B.

5. Паралельність прямої та площини

Вам уже відомі два можливих випадки взаємного розміщення прямої та площини:

1) пряма належить площині, тобто всі точки прямої належать площині;
2) пряма перетинає площину, тобто пряма має з площиною тільки одну спільну точку.

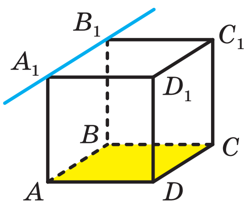


Рис. 5.1

Зрозуміло, що можливий і третій випадок, коли пряма та площина не мають спільних точок. Наприклад, пряма, яка містить ребро A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, не має спільних точок із площиною ABC (рис. 5.1).

Означення. Пряму та площину називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a та площина α паралельні, то записують: $a \parallel \alpha$. Також прийнято говорити, що пряма a паралельна площині α, а площина α паралельна прямій a.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя, наприклад бруси, паралельні площині підлоги (рис. 5.2). Інший приклад — водостічна труба: вона паралельна площині стіни (рис. 5.3).

З'ясовувати, чи є дані пряма та площина паралельними, за допомогою означення складно. Набагато ефективніше користуватися такою теоремою.

Теорема 5.1 (ознака паралельності прямої та площини). ***Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.***

Рис. 5.2

Рис. 5.3

Доведення. Нехай пряма a, яка не належить площині α, і пряма b, яка належить площині α, є такими, що $a \parallel b$. Доведемо, що $a \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма a перетинає площину α в деякій точці M (рис. 5.4). Якщо $M \in b$, то прямі a і b перетинатимуться, що суперечить умові $a \parallel b$. Якщо $M \notin b$, то за ознакою мимобіжних прямих прямі a і b будуть мимобіжними, що також суперечить умові $a \parallel b$. Отже, пряма a не може перетинати площину α. Таким чином, $a \parallel \alpha$. ◄

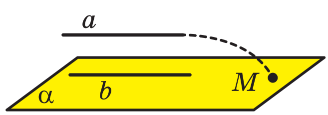


Рис. 5.4

На рисунку 5.1 прямі A_1B_1 і AB містять протилежні сторони квадрата ABB_1A_1. Ці прямі паралельні. Оскільки $AB \subset ABC$, то за ознакою паралельності прямої та площини $A_1B_1 \parallel ABC$.

Відрізок називають **паралельним площині**, якщо він належить прямій, паралельній цій площині. Наприклад, ребро AB куба паралельне площині CDD_1 (рис. 5.1).

Ви вмієте встановлювати паралельність двох прямих за допомогою теорем-ознак, відомих із планіметрії. Розглянемо теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 5.2. ***Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.***

Доведення. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = b$ (рис. 5.5). Доведемо, що $a \parallel b$.

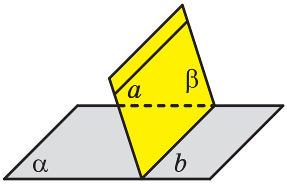


Рис. 5.5

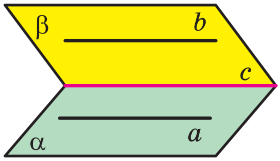


Рис. 5.6

Прямі a і b лежать в одній площині. Отже, вони або перетинаються, або паралельні. Якщо пряма a перетинає пряму b, то вона також перетинатиме площину α, що суперечить умові $a \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються, тобто $a \parallel b$. ◄

Наслідок. ***Якщо пряма паралельна площині, то в цій площині існує пряма, паралельна даній прямій.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 5.3. ***Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то ця пряма паралельна кожній із двох даних прямих.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b та площини α і β такі, що $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 5.6). Доведемо, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

Оскільки $a \parallel b$ і $b \subset \beta$, то за ознакою паралельності прямої та площини отримуємо, що $a \parallel \beta$. Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину β по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$. ◄

Теорема 5.4. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

Доведення. Нехай дано три прямі a, b і c такі, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Випадок, коли прямі a, b і c лежать в одній площині, розглянуто в планіметрії. Тепер розглянемо випадок, коли ці прямі не лежать в одній площині.

Виберемо на прямій a довільну точку M. Через пряму b і точку M проведемо площину α, а через пряму c і точку M — площину β (рис. 5.7). Нехай $\alpha \cap \beta = a_1$. Оскільки $b \parallel c$, то за теоремою 5.3 отримуємо, що $b \parallel a_1$ і $c \parallel a_1$. Тоді через точку M проходять дві прямі a і a_1, паралельні прямій c. Отже, прямі a і a_1 збігаються. Отримали, що $a \parallel b$. ◄

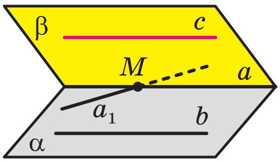


Рис. 5.7

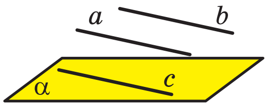


Рис. 5.8

Задача 1. Доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна даній площині, а друга пряма не належить цій площині, то й друга пряма паралельна даній площині.

Розв'язання. Нехай дано прямі a і b та площину α такі, що $a \parallel b$ і $a \parallel \alpha$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Згідно з наслідком із теореми 5.2 в площині α знайдеться така пряма c, що $a \parallel c$ (рис. 5.8). Маємо: $b \parallel a$ і $a \parallel c$. Тоді за теоремою 5.4 отримуємо, що $b \parallel c$. Отже, за ознакою паралельності прямої та площини доходимо висновку, що $b \parallel \alpha$. ◄

Задача 2. Доведіть, що коли пряма паралельна кожній із двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їхнього перетину.

Розв'язання. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 5.9). Доведемо, що $a \parallel b$.

За наслідком із теореми 5.2 у площинах α і β знайдуться відповідно такі прямі m і n, що $m \parallel a$ і $n \parallel a$. Якщо хоча б одна з прямих m і n збігається з прямою b, то твердження задачі доведено. Якщо ж кожна з прямих m і n відмінна від прямої b, то за теоремою 5.4 отримуємо, що $m \parallel n$.

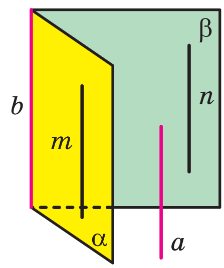


Рис. 5.9

Скориставшись теоремою 5.3, доходимо висновку, що $b \parallel n$. Але $n \parallel a$, отже, $a \parallel b$. ◄

Задача 3. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через ребро AC основи та точку M, що належить ребру A_1B_1 другої основи.

Розв'язання. Січна площина та площина $A_1B_1C_1$ мають спільну точку M, отже, вони перетинаються по прямій, яка проходить через точку M (рис. 5.10).

Оскільки чотирикутник AA_1C_1C — паралелограм, то пряма AC паралельна прямій A_1C_1. Отже, $AC \parallel A_1B_1C_1$. Тоді за теоремою 5.2 січна площина перетинає площину $A_1B_1C_1$ по прямій, паралельній прямій AC.

У площині $A_1B_1C_1$ через точку M проведемо пряму, паралельну прямій A_1C_1 (рис. 5.10). Нехай ця пряма перетинає ребро B_1C_1 у точці N. За теоремою 5.4 отримуємо, що $MN \parallel AC$. Тоді чотирикутник $AMNC$ — шуканий переріз. ◄

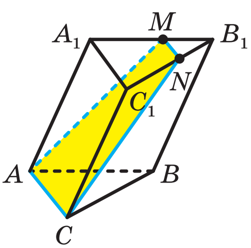


Рис. 5.10

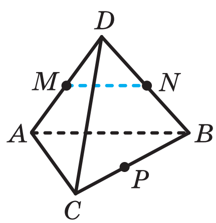


Рис. 5.11

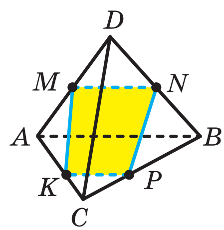


Рис. 5.12

Задача 4. Побудуйте переріз тетраедра $DABC$ площиною, яка проходить через середини M і N відповідно ребер AD і BD та точку P, що належить ребру BC.

Розв'язання. Сполучимо точки M і N (рис. 5.11). Оскільки відрізок MN — середня лінія трикутника ADB, то $MN \parallel AB$. Отже, $MN \parallel ABC$.

За теоремою 5.2 січна площина перетинає площину ABC по прямій, паралельній прямій MN, причому ця пряма проходить через точку P. Проведемо через точку P пряму, паралельну прямій MN. Нехай K — точка перетину проведеної прямої зі стороною AC (рис. 5.12). Чотирикутник $KMNP$ — шуканий переріз. ◄

?

1. У якому разі пряму та площину називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності прямої та площини.
3. Який відрізок називають паралельним площині?
4. Сформулюйте теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

ВПРАВИ

5.1.° Укажіть серед предметів, що нас оточують, моделі площини та прямої, яка їй паралельна.

5.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.13). Площинам яких граней куба паралельне ребро: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

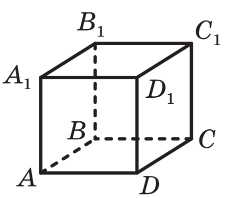


Рис. 5.13

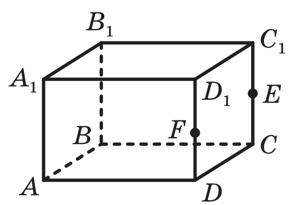


Рис. 5.14

5.3.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.14), точки E і F — середини ребер CC_1 і DD_1 відповідно. Запишіть грані паралелепіпеда, яким паралельна пряма: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

5.4.° Пряма a паралельна площині α. Чи є правильним твердження, що пряма a паралельна будь-якій прямій, що лежить у площині α?

5.5.° Дано прямі a і b та площину α. Чи є правильним твердження:
1) якщо $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$;
2) якщо $a \parallel b$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel \alpha$;
3) якщо $a \parallel b$ і $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$?

5.6.° Пряма a та площина α паралельні прямій b. Яким може бути взаємне розміщення прямої a та площини α?

5.7.° Прямі a і b перетинаються, а площина α паралельна прямій a. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

5.8.° Вершини E і F правильного шестикутника $ABCDEF$ лежать у площині α, відмінній від площини шестикутника (рис. 5.15). Яким є взаємне розміщення площини α і прямої: 1) BC; 2) AB; 3) BD; 4) AD?

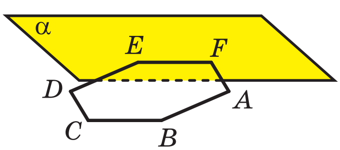


Рис. 5.15

5.9.° Точки M і K — середини відповідно сторін AB і BC трикутника ABC. Точка D не належить площині ABC. Доведіть, що $MK \parallel ADC$.

5.10.° Точки E і F — середини відповідно бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Пряма EF лежить у площині α, відмінній від площини трапеції. Доведіть, що прямі AD і BC паралельні площині α.

5.11.° Відрізки BC і AD — основи трапеції $ABCD$. Трикутник BMC і трапеція $ABCD$ не лежать в одній площині (рис. 5.16). Точка E — середина відрізка BM, точка F — середина відрізка CM. Доведіть, що $EF \parallel AD$.

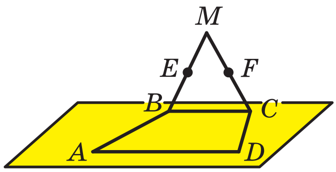


Рис. 5.16

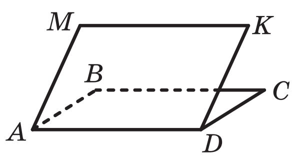


Рис. 5.17

5.12.° Паралелограми $ABCD$ і $AMKD$ не лежать в одній площині (рис. 5.17). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

5.13.• Площина α, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC у точках A_1 і C_1 відповідно (рис. 5.18). Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $AC = 18$ см і $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

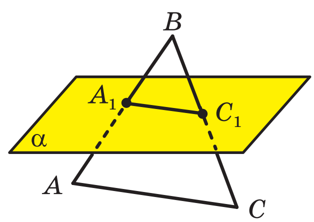


Рис. 5.18

5.14.• Площина α, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторони AC і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення $AE : EC$, якщо $CF : CB = 3 : 11$.

5.15.• Вершини A і C трикутника ABC належать площині α, а вершина B не належить цій площині. На сторонах AB і BC позначено відповідно точки E і F так, що $BA : BE = BC : BF$. Доведіть, що пряма EF паралельна площині α.

5.16.• Точка M — середина сторони AB трикутника ABC. Площина α проходить через точку M паралельно прямій AC і перетинає сторону BC у точці K. Доведіть, що точка K — середина сторони BC. Знайдіть площу чотирикутника $AMKC$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 28 см^2.

5.17.• На ребрі CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M (рис. 5.19). Побудуйте лінію перетину площин: 1) ADM і BB_1C_1; 2) AA_1M і DCC_1.

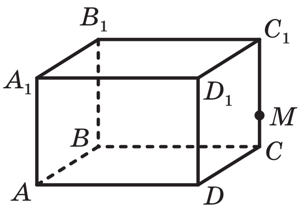


Рис. 5.19

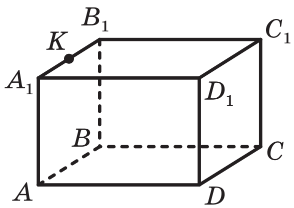


Рис. 5.20

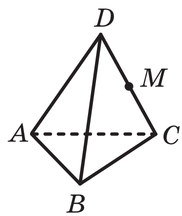


Рис. 5.21

5.18.• На ребрі A_1B_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K (рис. 5.20). Побудуйте лінію перетину площин: 1) CC_1K і ABB_1; 2) CDK і ABB_1.

5.19.• Точка M — середина ребра DC тетраедра $DABC$ (рис. 5.21). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і паралельна прямим AD і BD. Обчисліть площу перерізу, якщо кожне ребро тетраедра дорівнює a.

5.20.• Точка E — середина ребра AD тетраедра $DABC$ (рис. 5.22). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B і E та паралельна прямій AC. Обчисліть периметр перерізу, якщо кожне ребро тетраедра дорівнює 4 см.

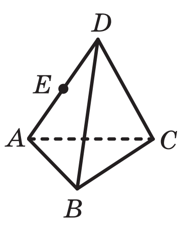


Рис. 5.22

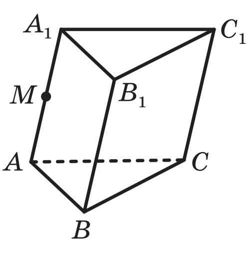


Рис. 5.23

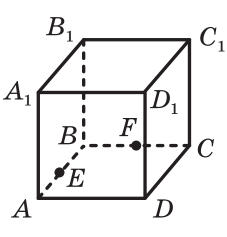


Рис. 5.24

5.21.• Точка M належить ребру AA_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.23). Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точки M і C_1 та паралельна прямій AB.

5.22.• Точки E і F — середини відповідно ребер AB і BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.24). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки E і F та паралельна прямій DD_1. Обчисліть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

5.23.° Дано тетраедр $DABC$. Площина α проходить через пряму CD і паралельна прямій AB. Побудуйте лінію перетину площини α і площини ABC.

5.24.° Точка M не належить площині паралелограма $ABCD$. Побудуйте лінію перетину площин AMB і CMD.

5.25.° Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, BC, AD і CD тетраедра $DABC$. Доведіть, що відрізки MF і KE перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

5.26.° Пряма a належить площині α, пряма b — площині β, пряма c — лінія перетину площин α і β. Доведіть, що коли пряма c не перетинає жодну з прямих a і b, то $a \parallel b$.

5.27.° Пряма a паралельна площині α. Через точку M, яка лежить у площині α, проведено пряму b, паралельну прямій a. Доведіть, що пряма b лежить у площині α.

5.28.° Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих проходить площина, паралельна другій прямій, і до того ж тільки одна.

5.29.° Доведіть, що коли дві дані площини, що перетинаються, перетинають третю площину по паралельних прямих, то лінія перетину даних площин паралельна цій третій площині.

5.30.° Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, CD і AA_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 10$ см, $AD = 17$ см, $AA_1 = 24$ см.

5.31.° На ребрі BC тетраедра $DABC$ позначили точку E так, що $BE : EC = 2 : 1$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку E паралельно прямим AB і CD. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 18$ см, $CD = 12$ см.

5.32.° На ребрах AD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K (рис. 5.25). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму MK паралельно прямій CD.

5.33.° На ребрах AD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K (рис. 5.25). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму MK паралельно прямій AB.

5.34.°° На ребрах AB і C_1D_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте лінію перетину площин AA_1K і DD_1M. Яким є взаємне розміщення побудованої прямої та прямої AA_1?

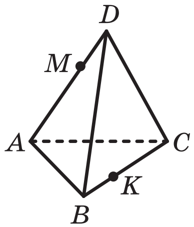


Рис. 5.25

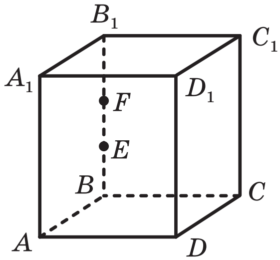


Рис. 5.26

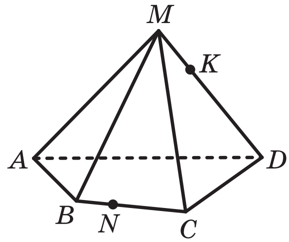


Рис. 5.27

5.35.•• На ребрі BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точки E і F (рис. 5.26). Побудуйте лінію перетину площин AFD і A_1ED_1. Яким є взаємне розміщення побудованої прямої та прямої BC?

5.36.•• Точки E і F — середини відповідно ребер AD і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через пряму EF паралельно прямій B_1D.

5.37.•• Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки D і M паралельно прямій AC_1.

5.38.•• Точки M, N і K — середини відповідно ребер AB, BC і CA призми $ABCA_1B_1C_1$. Доведіть, що прямі C_1M, A_1N і B_1K перетинаються в одній точці.

5.39.•• Точки E, F і K — середини відповідно ребер AD, A_1B_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною EFK.

5.40.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точка O_1 — центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$, точка E — середина ребра AD, точка F — середина ребра CD, точка M — середина відрізка OO_1. Побудуйте переріз куба площиною EMF.

5.41.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 5.27). На ребрі BC позначили точку N, на ребрі MD — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки N і K паралельно прямій MC.

5.42.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 5.27). На ребрі BC позначили точку N, на ребрі MD — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки N і K паралельно прямій CD.

5.43.•• Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. Побудуйте переріз цієї піраміди площиною, що проходить через середину ребра AB і паралельна прямим AC і SD. У якому відношенні січна площина ділить ребро SB, рахуючи від точки S?

5.44.•• Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середину ребра AB і паралельна прямим A_1C_1 і BD_1. У якому відношенні січна площина ділить відрізок DB_1, рахуючи від точки D?

5.45.* Точки M, N і K належать відповідно граням AA_1C_1C, AA_1B_1B і BB_1C_1C призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.28). Побудуйте переріз призми площиною MNK.

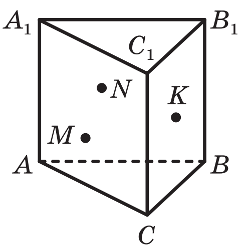


Рис. 5.28

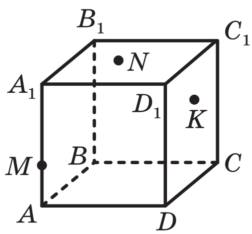


Рис. 5.29

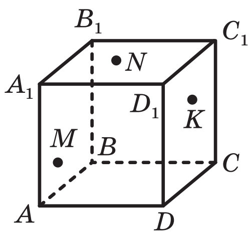


Рис. 5.30

5.46.* На ребрі AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M (рис. 5.29). Точки N і K належать граням BB_1C_1C і DD_1C_1C відповідно. Побудуйте переріз куба площиною MNK.

5.47.* Точки M, N і K належать відповідно граням AA_1B_1B, BB_1C_1C і CC_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.30). Побудуйте переріз куба площиною MNK.

5.48.* Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$ і $\frac{AD}{BC}=3$. Точки M і N — середини ребер SA і SB відповідно. У якому відношенні площина MND ділить ребро SC, рахуючи від точки S?

5.49.* Основою піраміди $SABCDE$ є п'ятикутник $ABCDE$. На ребрах SE і SD позначили відповідно точки M і N (рис. 5.31). Відомо, що $\frac{SM}{SE}=\frac{SN}{SD}$. Побудуйте переріз піраміди площиною BMN.

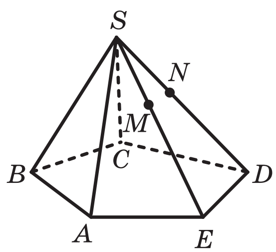


Рис. 5.31

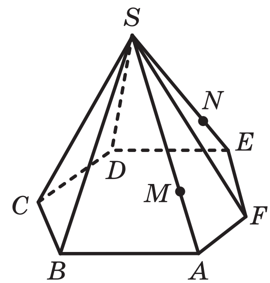


Рис. 5.32

5.50.* Основою піраміди $SABCDEF$ є шестикутник $ABCDEF$. На ребрах SA і SE позначили відповідно точки M і N (рис. 5.32). Відомо, що $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SE}$. Побудуйте переріз піраміди площиною CMN.

5.51.* Точки M, N і K — середини відповідно ребер BD, CD і AB тетраедра $DABC$. На прямих BN і CK позначено відповідно точки F і E так, що $FE \parallel AM$. Знайдіть відношення $\frac{FE}{AM}$.

5.52.* У тетраедрі $DABC$ проведено медіани AM і BN відповідно граней ABC і ADB. На прямих AM і BN позначили точки P і Q відповідно так, що $PQ \parallel CD$. Знайдіть відношення $\frac{PQ}{CD}$.

5.53.* Точки M і N — середини відповідно ребер AA_1 і BB_1 призми $ABCA_1B_1C_1$. На відрізках BM і AC_1 відповідно позначили точки P і K так, що $PK \parallel CN$. Знайдіть відношення $\frac{PK}{CN}$.

5.54.* Точка M — середина ребра CC_1 призми $ABCA_1B_1C_1$. На відрізках BM і CA_1 відповідно позначили точки E і F так, що $EF \parallel AB_1$. Знайдіть відношення $\frac{EF}{AB_1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.55. У прямокутному трикутнику ABC катет BC дорівнює 7 см, а радіус описаного кола — 9 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з гострого кута B.

5.56. Бічні сторони прямокутної трапеції відносяться як 3 : 5, а різниця основ дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює 13 см.

6. Паралельність площин

Розглянемо варіанти можливого взаємного розміщення двох площин.

Ви знаєте, що дві площини можуть мати спільні точки, тобто перетинатися. Зрозуміло, що дві площини можуть і не мати спільних точок. Наприклад, площини ABC і $A_1B_1C_1$, які містять основи призми, не мають спільних точок (рис. 6.1).

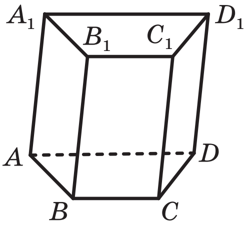


Рис. 6.1

Означення. **Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.**

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Також прийнято говорити, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

Наочне уявлення про паралельні площини дають стеля та підлога кімнати; поверхня води, налитої в акваріум, і його дно (рис. 6.2).

Рис. 6.2

З означення паралельних площин випливає, що *будь-яка пряма, що лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині*. Доведіть це твердження самостійно.

У тих випадках, коли треба з'ясувати, чи є дві площини паралельними, зручно користуватися такою теоремою.

Теорема 6.1 (ознака паралельності двох площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b, які перетинаються та належать площині α, і прямі a_1 і b_1, які належать площині α_1, такі, що $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведемо, що $\alpha \parallel \alpha_1$.

Припустимо, що площини α і α_1 перетинаються. Нехай $\alpha \cap \alpha_1 = c$ (рис. 6.3).

Оскільки $a \parallel a_1$ і $a_1 \subset \alpha_1$, то за ознакою паралельності прямої та площини $a \parallel \alpha_1$.

Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину α_1 по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$.

Таким чином, отримали, що в площині α кожна з двох прямих a і b, які перетинаються, паралельна прямій c. А це суперечить аксіомі паралельності прямих.

Отже, припущення про те, що площини α і α_1 перетинаються, є хибним, тому $\alpha \parallel \alpha_1$. ◀

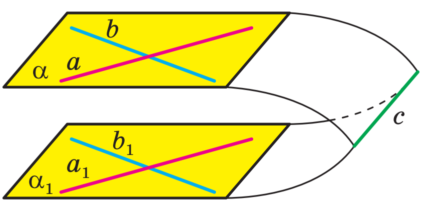


Рис. 6.3

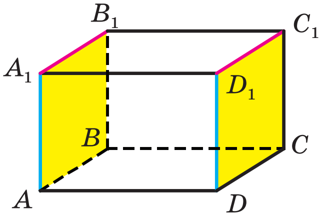


Рис. 6.4

На рисунку 6.4 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тоді за ознакою паралельності двох площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Наслідок. ***Якщо кожна з двох прямих однієї площини, які перетинаються, паралельна другій площині, то ці площини паралельні.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Будемо говорити, що **два многокутники паралельні**, якщо вони лежать у паралельних площинах. Наприклад, грані AA_1B_1B і DD_1C_1C прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні (рис. 6.4).

Розглянемо деякі властивості паралельних площин.

Теорема 6.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано площину α і точку A, яка їй не належить (рис. 6.5). Доведемо, що через точку A проходить площина, паралельна площині α.

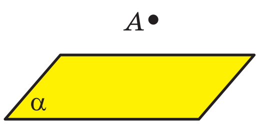


Рис. 6.5

У площині α проведемо дві прямі a і b, що перетинаються. Через точку A проведемо прямі a_1 і b_1 такі, що $a_1 \parallel a$ і $b_1 \parallel b$ (рис. 6.6). Прямі a_1 і b_1, що перетинаються, визначають деяку площину β. За ознакою паралельності двох площин $\alpha \parallel \beta$.

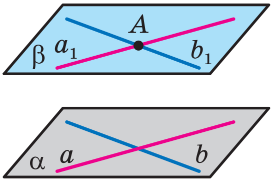


Рис. 6.6

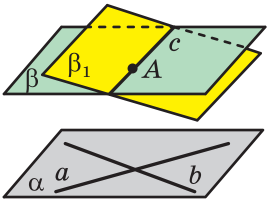


Рис. 6.7

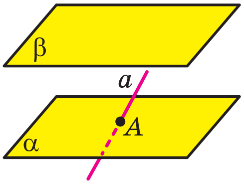


Рис. 6.8

Тепер доведемо, що площина β є єдиною.

Припустимо, що існує ще одна площина β_1 така, що $A \in \beta_1$ і $\alpha \parallel \beta_1$. Площини β і β_1 мають спільну точку A, отже, вони перетинаються. Нехай $\beta \cap \beta_1 = c$ (рис. 6.7).

Оскільки $\alpha \parallel \beta$ і $a \subset \alpha$, то $a \parallel \beta$. Аналогічно можна довести, що $a \parallel \beta_1$. Отже, за ключовою задачею 2 п. 5 пряма a паралельна прямій перетину площин β і β_1, тобто $a \parallel c$.

Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$.

Таким чином, пряма c паралельна кожній із прямих a і b, що перетинаються. Отримана суперечність дає змогу зробити висновок, що площина β є єдиною. ◄

Наслідок 1. ***Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу площину.***

Доведення. Розглянемо пряму a та площини α і β такі, що $\alpha \parallel \beta$ і $a \cap \alpha = A$ (рис. 6.8). Доведемо, що пряма a перетинає площину β.

Припустимо, що пряма a не перетинає площину β. Тоді $a \parallel \beta$. У площині α через точку A проведемо пряму b. Тоді $b \parallel \beta$. Через прямі a і b, які перетинаються, проведемо площину γ. За наслідком з теореми 6.1 отримуємо, що $\gamma \parallel \beta$. Доходимо висновку, що через точку A проходять дві площини α і γ, паралельні площині β, а це суперечить теоремі 6.2. ◄

Наслідок 2. ***Усі прямі, які проходять через дану точку поза даною площиною та паралельні їй, лежать в одній площині.***

Доведення. Через точку A, яка не належить площині α, проведемо дві прямі a і b, паралельні площині α. Проведемо через прямі a і b, що перетинаються, площину β (рис. 6.9). Доведемо, що довільна пряма x, яка проходить через точку A паралельно площині α, лежить у площині β.

Припустимо, що пряма x не належить площині β, а перетинає її. За теоремою 6.1 $\alpha \parallel \beta$. Тоді за наслідком 1 із теореми 6.2 пряма x перетинає площину α. Отримали суперечність. ◄

Теорема 6.3. ***Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні.***

Доведення. Нехай дано площини α, β і γ такі, що $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$ (рис. 6.10). Доведемо, що $a \parallel b$.

Прямі a і b лежать в одній площині (площині γ). Отже, вони або перетинаються, або паралельні.

Якщо прямі a і b перетинаються, тобто мають спільну точку, то спільну точку мають також площини α і β, що суперечить умові $\alpha \parallel \beta$.

Таким чином, прямі a і b паралельні. ◄

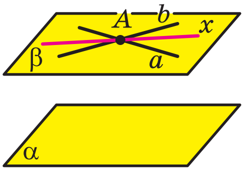


Рис. 6.9

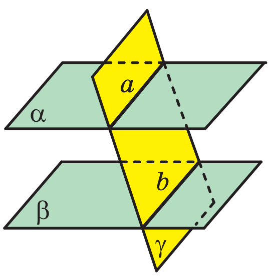


Рис. 6.10

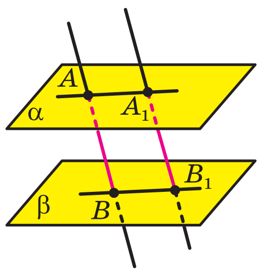


Рис. 6.11

Задача 1. Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.

Розв'язання. Нехай дано паралельні площини α і β та паралельні прямі AB і A_1B_1 такі, що $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (рис. 6.11). Доведемо, що $AB = A_1B_1$.

Паралельні прямі AB і A_1B_1 задають деяку площину γ, причому $\alpha \cap \gamma = AA_1$ і $\beta \cap \gamma = BB_1$.

За теоремою 6.3 отримуємо, що $AA_1 \parallel BB_1$. Отже, чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Звідси $AB = A_1B_1$. ◄

Задача 2. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $EABCD$ площиною, яка проходить через точку M бічного ребра EC паралельно площині ABE.

Розв'язання. Січну площину та площину ABE перетинає площина BEC (рис. 6.12). За теоремою 6.3 площина BEC перетинає вказані площини по паралельних прямих. Тоді в площині BEC проведемо через точку M пряму, паралельну прямій BE. Отримуємо точку N — точку перетину проведеної прямої та прямої BC. Таким чином, січна площина перетинає грань BEC по відрізку MN.

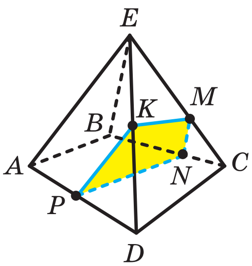


Рис. 6.12

Аналогічно можна встановити, що січна площина перетинає грань $ABCD$ по відрізку PN (де $PN \parallel AB$, точка P належить ребру AD), а грань AED — по відрізку PK (де $PK \parallel AE$, точка K належить ребру DE). Точки K і M належать грані DEC і січній площині. Сполучимо точки K і M відрізком. Те, що чотирикутник $MNPK$ — шуканий переріз, випливає з побудови.

Зауважимо, що обґрунтувати паралельність площин ABE і PNM можна, спираючись і на ознаку паралельності двох площин. Справді, $AB \parallel PN$ і $BE \parallel NM$, тому площини ABE і PNM паралельні. ◄

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності двох площин.
3. У якому разі говорять, що два многокутники паралельні?
4. Сформулюйте властивості паралельних площин.

ВПРАВИ

6.1.° Чи є правильним твердження:

1) якщо дві площини паралельні, то будь-яка пряма однієї площини паралельна будь-якій прямій другої площини;
2) якщо пряма, яка лежить в одній площині, паралельна прямій, що лежить у другій площині, то дані площини паралельні;
3) якщо дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні відповідно двом прямим, які лежать у другій площині, то дані площини паралельні?

6.2.° Паралелограми $ABCD$ і $AEFD$ не лежать в одній площині (рис. 6.13). Доведіть, що площини ABE і DCF паралельні.

6.3.° Точки M, N і K — середини ребер AB, AC і AD тетраедра $DABC$. Доведіть, що площини MNK і BCD паралельні.

6.4.° На ребрах DA, DB і DC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E, F і K так, що $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$. Доведіть, що площини EFK і ABC паралельні.

6.5.° Дві діагоналі правильного шестикутника паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що площина даного шестикутника паралельна площині α?

6.6.° Чи можна стверджувати, що площина α паралельна площині трапеції, якщо площина α паралельна:
1) основам трапеції;
2) бічним сторонам трапеції?

6.7.° Чи є правильним твердження:
1) якщо прямі перетину двох площин третьою площиною паралельні, то дані площини паралельні;
2) якщо відрізки, які лежать на паралельних прямих і містяться між двома площинами, рівні, то дані площини паралельні?

6.8.° Площини α і β паралельні. У площині α вибрано точки C і D, а в площині β — точки C_1 і D_1 такі, що прямі CC_1 і DD_1 паралельні. Знайдіть відрізки DD_1 і C_1D_1, якщо $CD = 12$ см, $CC_1 = 4$ см.

6.9.° Трикутник ABC лежить у площині α. Через його вершини проведено паралельні прямі, які перетинають площину β, паралельну площині α, у точках A_1, B_1 і C_1. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні.

6.10.° Дано паралельні площини α і β. Відрізок AB і точка C лежать у площині α, точка D — у площині β (рис. 6.14). Побудуйте лінію перетину: 1) площини β і площини ABD; 2) площини β і площини BCD.

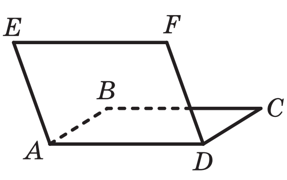


Рис. 6.13

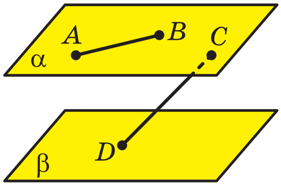


Рис. 6.14

6.11.° Дано паралельні площини α і β. Точки M і N лежать у площині α, точки K і P — у площині β (рис. 6.15). Побудуйте лінію перетину:

1) площини α і площини MKP;
2) площини β і площини MNK.

6.12.• Паралельні площини α і β перетинають сторону BA кута ABC у точках A_1 і A_2 відповідно, а сторону BC — у точках C_1 і C_2 відповідно. Знайдіть:

1) відрізок A_1C_1, якщо $A_2C_2 = 36$ см, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
2) відрізок C_1C_2, якщо $A_1C_1 = 14$ см, $A_2C_2 = 21$ см, $BC_1 = 12$ см.

6.13.• Площини α і β паралельні. Точки A і B лежать у площині α, точки C і D — у площині β. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O.

1) Доведіть, що $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$.
2) Знайдіть відрізок AB, якщо $CD = 32$ см, $AC : AO = 7 : 3$.

6.14.• Відрізки AB, CD і EF, що не лежать в одній площині, перетинаються в точці O, яка є серединою кожного із цих відрізків. Доведіть, що площини ACE і BDF паралельні.

6.15.• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що площини ACB_1 і A_1C_1D паралельні.

6.16.• На ребрі AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M так, що $AM : MB = 1 : 2$ (рис. 6.16). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку M і паралельна площині ACC_1. Знайдіть периметр отриманого перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

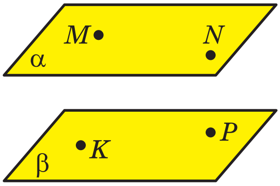


Рис. 6.15

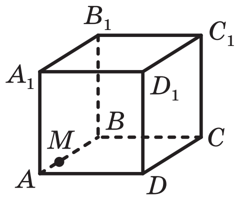


Рис. 6.16

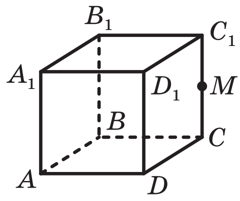


Рис. 6.17

6.17.• Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.17). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку M і паралельна площині A_1BC. Знайдіть периметр отриманого перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

6.18.• На ребрах AA_1 і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і K, а на продовженні ребра BB_1 за точку B_1 — точку N (рис. 6.18). Побудуйте переріз куба площиною MNK.

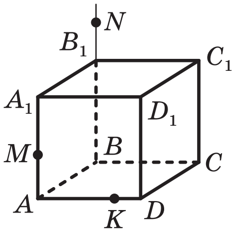


Рис. 6.18

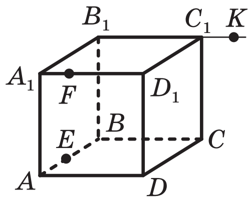


Рис. 6.19

6.19.• На ребрах AB і A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки E і F, а на продовженні ребра B_1C_1 за точку C_1 — точку K (рис. 6.19). Побудуйте переріз куба площиною EFK.

6.20.• Точка M належить ребру A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин BDD_1 і CC_1M.

6.21.• Точка E належить ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин ACC_1 і BED.

6.22.• Точка K належить грані BCD тетраедра $DABC$ (рис. 6.20). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку K паралельно площині ABD.

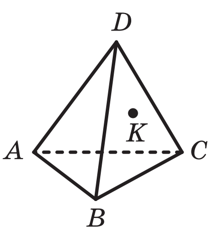


Рис. 6.20

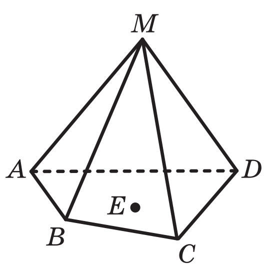


Рис. 6.21

6.23.• Точка E належить основі $ABCD$ піраміди $MABCD$ (рис. 6.21). Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку E паралельно площині CMD.

6.24.• Площина α паралельна площині β, площина β паралельна площині γ. Доведіть, що площини α і γ паралельні.

6.25.• Доведіть, що через дві мимобіжні прямі проходить єдина пара паралельних площин.

6.26.• Доведіть, що коли площини α і β паралельні, то будь-яка пряма, що проходить через точку площини α і паралельна площині β, лежить у площині α.

6.27.•• Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через вершину B_1 паралельно площині A_1C_1D. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

6.28.•• Точка M — середина ребра A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку M паралельно площині A_1BC_1. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

6.29.•• Пряма a та основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежать у площині α (рис. 6.22). На ребрі AD позначили точку E, на ребрі CC_1 — точку F. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка паралельна прямій a та проходить через точки E і F.

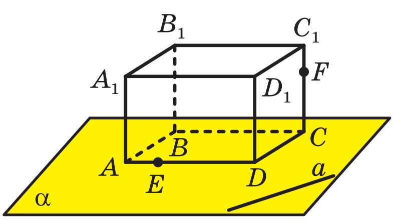


Рис. 6.22

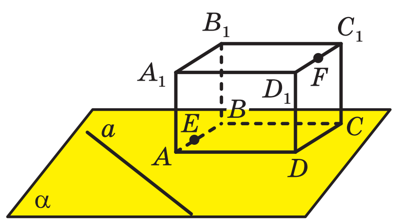


Рис. 6.23

6.30.•• Пряма a та основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежать у площині α (рис. 6.23). На ребрі AB позначили точку E, на ребрі C_1D_1 — точку F. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка паралельна прямій a та проходить через точки E і F.

6.31.•• Точка D лежить на ребрі AB призми $ABCA_1B_1C_1$, точка E належить грані AA_1B_1B (рис. 6.24). Побудуйте лінію перетину площини ACC_1 і площини, яка проходить через точку E паралельно площині DCC_1.

6.32.•• Точка E лежить на ребрі BC призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка F належить грані BB_1C_1C (рис. 6.25). Побудуйте лінію перетину площини ABB_1 і площини, яка проходить через точку F паралельно площині EDD_1.

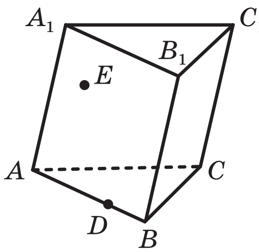


Рис. 6.24

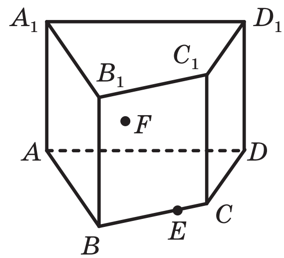


Рис. 6.25

6.33.•• На ребрах AD, CD і B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки E, F і K (рис. 6.26). Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку K паралельно площині EFB_1.

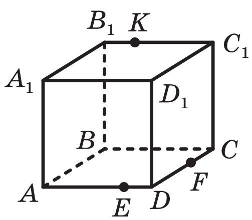


Рис. 6.26

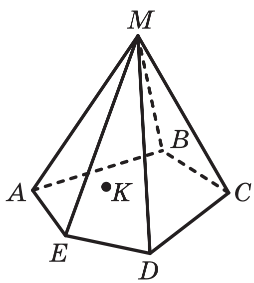


Рис. 6.27

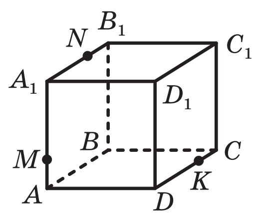


Рис. 6.28

6.34.•• Точка K належить грані DME піраміди $MABCDE$ (рис. 6.27). Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку K паралельно площині CMD.

6.35.•• На ребрах AA_1, A_1B_1 і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M, N і K (рис. 6.28). Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку K паралельно площині MNC.

6.36.•• Точки M і N — середини відповідно ребер BC і AD тетраедра $ABCD$. Паралельні площини α і β містять відповідно прямі AM і BN. Побудуйте перерізи тетраедра площинами α і β.

6.37.•• Точка M — середина ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Паралельні площини α і β містять відповідно прямі A_1M і D_1C. Побудуйте перерізи куба площинами α і β.

6.38.•• Точки A, B, C, D, E і F є такими, що $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ і $AB \neq DE$. Доведіть, що всі ці точки лежать в одній площині.

6.39.•• Точки A, B, C, D, E і F є такими, що $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Відомо, що не всі зазначені точки належать одній площині. Доведіть, що $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$.

6.40.•• Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через пряму DB_1 і паралельна прямій AD_1.

6.41.•• Точка M — середина ребра C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через пряму AC_1 і паралельна прямій CM.

6.42.* На ребрі AD і діагоналі CA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і N так, що пряма MN паралельна площині BC_1D. Знайдіть відношення $CN : NA_1$, якщо відомо, що $AM : MD = 1 : 4$.

6.43.* Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Точка M — середина ребра AB. На діагоналі AC_1 позначили точку N так, що пряма MN паралельна площині BA_1D. Знайдіть відношення $AN : NC_1$, якщо відомо, що $AD : BC = 2 : 1$.

6.44.* На ребрах BC і A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і N так, що $BM = MC$, $A_1N : ND_1 = 1 : 3$.

1) Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку N і паралельна площині AB_1M.
2) У якому відношенні січна площина ділить ребро B_1C_1, рахуючи від точки B_1?

6.45.* На ребрах BC і A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і N так, що $A_1M : MD_1 = 1 : 5$, $BN : NC = 1 : 2$. Площина α, яка проходить через точку N і паралельна площині AB_1M, перетинає пряму DC у точці K.

1) Побудуйте переріз куба площиною α.
2) Знайдіть відношення $KD : KC$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.46. Сума діагоналей ромба дорівнює 14 см, а його площа — 24 см^2. Знайдіть сторону ромба.

6.47. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана AM перетинає висоту CD у точці K. Знайдіть відношення $CK : KD$, якщо $\angle BAC = 60°$.

7. Перетворення фігур у просторі. Паралельне проектування

У планіметрії ми розглядали перетворення фігур на площині. Аналогічно дають означення перетворенню фігур у просторі.

Нехай у просторі задано деяку фігуру F. Кожній точці фігури F поставимо у відповідність (зіставимо) за певним правилом єдину точку простору. Усі зіставлені точки утворюють деяку фігуру F_1 (рис. 7.1). Говорять, що **фігуру F_1 отримано в результаті перетворення фігури F**. При цьому фігуру F_1 називають **образом фігури F**, а фігуру F — **прообразом фігури F_1**.

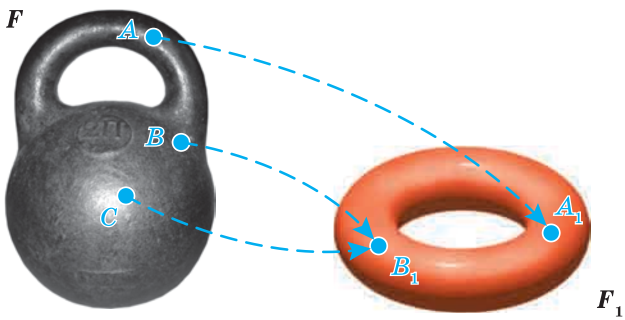


Рис. 7.1

Розглянемо приклади перетворення фігур.

Усі точки тетраедра $DABC$ зсунули в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань. У результаті такого перетворення тетраедра $DABC$ отримали тетраедр $D_1A_1B_1C_1$ (рис. 7.2). Ми навели приклад перетворення фігури в просторі, яке називають **паралельним перенесенням** у просторі (з паралельним перенесенням на площині ви вже ознайомилися в 9 класі). Докладніше з паралельним перенесенням ви ознайомитесь під час вивчення теми «Вектори в просторі».

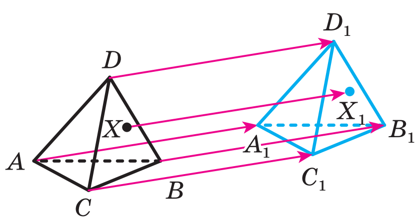


Рис. 7.2

Кожній точці X тетраедра $DABC$ поставили у відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1. У результаті такого перетворення тетраедра $DABC$ отримали тетраедр $D_1A_1B_1C_1$ (рис. 7.3). Ми навели приклад перетворення фігури в просторі, яке називають **симетрією відносно точки** або **центральною симетрією.**

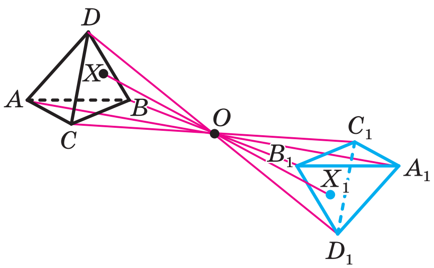


Рис. 7.3

Означення. Перетворення фігури *F*, яке зберігає відстань між її точками, називають рухом (переміщенням) фігури *F*.

Ви знаєте, що в планіметрії паралельне перенесення та центральна симетрія є рухами. Цю саму властивість зазначені перетворення мають і в стереометрії.

Доведемо, наприклад, що центральна симетрія є рухом. Нехай A і B — довільні точки фігури F. Точки A_1 і B_1 — відповідно їхні образи при центральній симетрії відносно точки O (рис. 7.4).

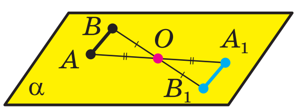


Рис. 7.4

Прямі AA_1 і BB_1, що перетинаються, визначають деяку площину α. У цій площині трикутники ABO і A_1B_1O є рівними за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = A_1B_1$.

Означення. Фігуру називають симетричною відносно точки *O*, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно точки *O*, також належить цій фігурі.

Точку O називають **центром симетрії фігури**. Також говорять, що **фігура має центр симетрії.**

Наведемо приклади просторових фігур, які мають центр симетрії.

Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка перетину відрізків DB_1 і BD_1 є його центром симетрії (рис. 7.5). Цей факт буде доведено в п. 20. Центр кулі є її центром симетрії (рис. 7.6).

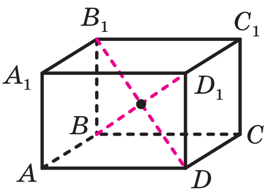


Рис. 7.5

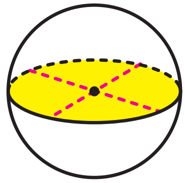


Рис. 7.6

Приклади прояву центральної симетрії в природі показано на рисунку 7.7. Деталі, які мають центр симетрії, часто використовують у техніці (рис. 7.8).

Рис. 7.7

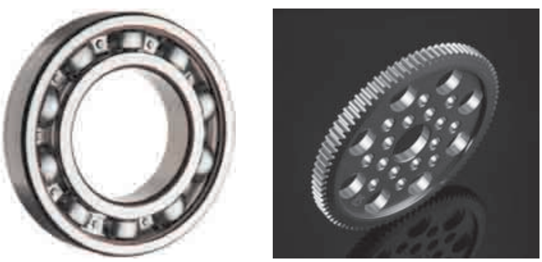


Рис. 7.8

Означення. Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої фігури.

Наприклад, на кожному з рисунків 7.2 і 7.3 зображено рівні тетраедри.

Можна показати, що коли в просторі дві сторони та кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то існує рух, при якому один із трикутників є образом другого. Отже, такі трикутники рівні.

Це означає, що в стереометрії можна застосовувати першу ознаку рівності трикутників.

Аналогічні твердження також є справедливими для другої та третьої ознак рівності трикутників.

Означення. Перетворення фігури *F*, при якому відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів, називають перетворенням подібності фігури *F*.

Якщо при перетворенні подібності образом фігури F є фігура F_1, то фігури F і F_1 називають **подібними**.

Серед відомих вам просторових фігур подібними є два куби, дві кулі, два тетраедри, усі грані яких — рівносторонні трикутники (рис. 7.9).

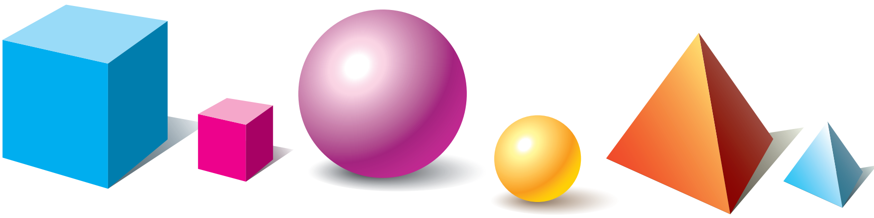


Рис. 7.9

Із курсу планіметрії вам відомі три ознаки подібності трикутників. Можна показати, що ці ознаки застосовні й тоді, коли трикутники лежать у різних площинах.

Чимало явищ і процесів, з якими ми стикаємося в повсякденному житті, слугують прикладами перетворень, при яких образом просторової фігури є плоска фігура. Одне з таких явищ можна спостерігати в сонячну погоду, коли предмет відкидає тінь на плоску поверхню (рис. 7.10). Наведений приклад ілюструє перетворення фігури, яке називають **паралельним проектуванням**. За допомогою цього перетворення на площині створюють зображення просторових фігур.

Рис. 7.10

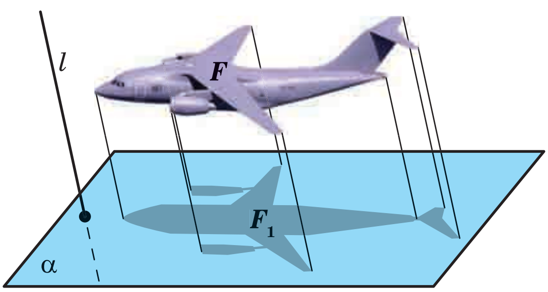


Рис. 7.11

Багато рисунків вашого підручника, на яких зображено просторові фігури, можна розглядати як тіні, що відкидають на площину сторінки предмети, освітлені паралельними променями.

Ознайомимося докладніше з паралельним проектуванням.

Нехай дано площину α, пряму l, що перетинає цю площину, і фігуру F (рис. 7.11). Через кожну точку фігури F проведемо пряму, паралельну прямій l (якщо точка фігури F належить прямій l, то як проведену пряму розглядатимемо саму пряму l). Точки перетину всіх проведених прямих із площиною α утворюють деяку фігуру F_1. Описане перетворення фігури F називають **паралельним проектуванням**. Фігуру F_1 називають **паралельною проекцією фігури F на площину α в напрямі прямої l**. Фігуру F_1 також називають **зображенням фігури F на площині α в напрямі прямої l**.

За допомогою паралельного проектування, вибираючи вигідні положення площини α та прямої l, можна отримати наочне зображення даної фігури F. Це пов'язано з тим, що паралельне проектування має низку чудових властивостей (див. теореми 7.1–7.3). Завдяки цим властивостям зображення фігури схоже на саму фігуру.

Нехай дано площину α і пряму l, що перетинає цю площину.

Якщо пряма паралельна прямій l, то її проекцією на площину α є точка (рис. 7.12). Проекцією прямої l також є точка.

Якщо відрізок паралельний прямій l або лежить на прямій l, то його проекцією на площину α є точка (рис. 7.12).

У наведених нижче теоремах розглядатимемо прямі та відрізки, які не паралельні прямій l і не лежать на ній.

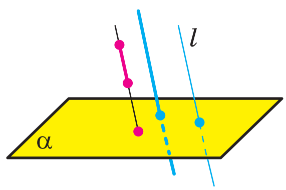


Рис. 7.12

Теорема 7.1. ***Паралельною проекцією прямої є пряма; паралельною проекцією відрізка є відрізок*** (рис. 7.13).

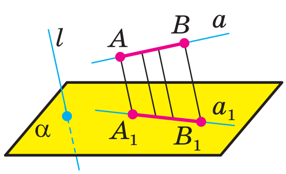


Рис. 7.13

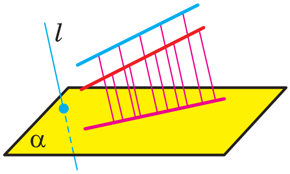


Рис. 7.14

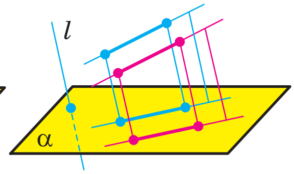


Рис. 7.15

Теорема 7.2. ***Паралельною проекцією двох паралельних прямих є або пряма*** (рис. 7.14), ***або дві паралельні прямі*** (рис. 7.15). ***Паралельні проекції двох паралельних відрізків лежать на одній прямій або на паралельних прямих*** (рис. 7.15).

Теорема 7.3. ***Відношення паралельних проекцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню самих відрізків*** (рис. 7.16).

Обмежимося доведенням теореми 7.3.

Доведення. Нехай пряма l, якою задано напрям проектування, не паралельна відрізкам AB і CD, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, і не містить ці відрізки. Доведемо, що відношення паралельних проекцій відрізків AB і CD дорівнює відношенню самих відрізків.

Нехай відрізки AB і CD лежать на паралельних прямих (випадок, коли ці відрізки лежать на одній прямій, розгляньте самостійно). Проведемо через прямі AB і CD площину γ. У випадку, коли пряма l лежить у площині γ або паралельна їй, відрізки AB і CD, а також їхні паралельні проекції лежатимуть в одній площині γ (рис. 7.16). Тому твердження теореми випливає з теореми про пропорційні відрізки, доведеної в курсі планіметрії.

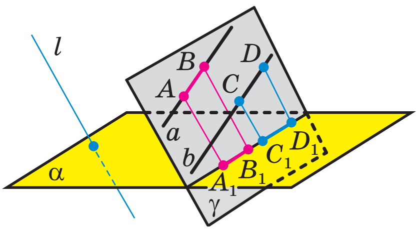


Рис. 7.16

Розглянемо тепер випадок, коли пряма l перетинає площину γ. Нехай відрізки A_1B_1 і C_1D_1 є паралельними проекціями відрізків AB і CD (рис. 7.17), відрізки AD і BC перетинаються в точці O і точка O_1 — паралельна проекція точки O (рис. 7.18). Із теореми 7.2 випливає, що прямі A_1B_1 і C_1D_1 паралельні, а отже, трикутники $A_1B_1O_1$ і $D_1C_1O_1$ подібні. Звідси $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_1O_1}{O_1D_1}$.

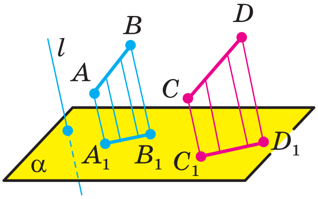


Рис. 7.17

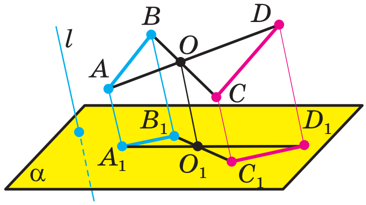


Рис. 7.18

Аналогічно можна довести, що

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}.$$

Водночас, оскільки відрізок AA_1 паралельний відрізку DD_1, то за теоремою про пропорційні відрізки $\frac{A_1O_1}{O_1D_1} = \frac{AO}{OD}$. Отже, $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$, що й завершує доведення теореми. ◀

Задача 1. Паралельні прямі a_1 і b_1 є паралельними проекціями на площину α прямих a і b. Чи можна стверджувати, що $a \parallel b$?

Розв'язання. Ні. Розглянемо, наприклад, куб (рис. 7.19). Прямі AB_1 і CD_1 мимобіжні, а їхніми паралельними проекціями на площину ABC у напрямі прямої A_1A є паралельні прямі AB і DC. ◀

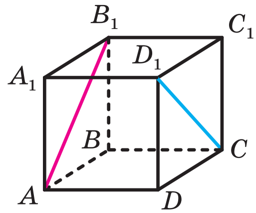


Рис. 7.19

Задача 2. Кожна з двох четвірок точок A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 є паралельною проекцією точок A, B, C, D на площину α в напрямі непаралельних прямих l_1 і l_2 відповідно (рис. 7.20). Відомо, що чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$ — паралелограми. Чи можна стверджувати, що точки A, B, C і D є вершинами паралелограма?

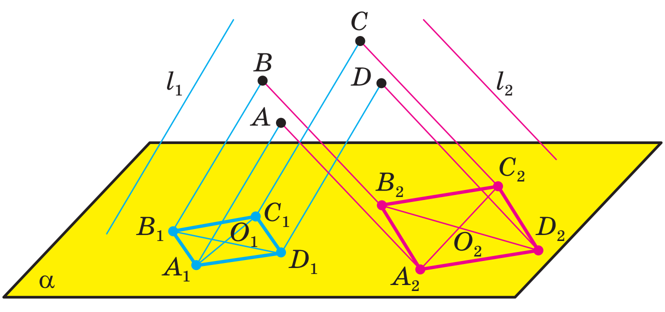


Рис. 7.20

Розв'язання. Із теореми 7.3 випливає, що O_1 — точка перетину діагоналей паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ — є паралельною проекцією середин відрізків AC і BD на площину α в напрямі прямої l_1. Аналогічно O_2 — точка перетину діагоналей паралелограма $A_2B_2C_2D_2$ — є паралельною проекцією середин відрізків AC і BD на площину α в напрямі прямої l_2. Це означає, що через дві точки — середини відрізків AC і BD — можна провести як пряму, паралельну прямій l_1, так і пряму, паралельну прямій l_2. Прямі l_1 і l_2 непаралельні, тому ці проведені прямі мають бути різними. Це можливе лише в тому разі, коли середини відрізків AC і BD збігаються. Отже, точки A, B, C і D є вершинами паралелограма. ◄

Задача 3. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$, у якій основа AD удвічі більша за основу BC. Точка M — середина ребра SD. Площина ABM перетинає ребро SC у точці N. Знайдіть відношення $SN : NC$.

Розв'язання. Нехай K — середина основи AD трапеції $ABCD$ (рис. 7.21). Оскільки $AD = 2BC$, то $AK = BC$, а отже, чотирикутник $ABCK$ — паралелограм.

Розглянемо паралельну проекцію піраміди $SABCD$ на площину ASD у напрямі прямої AB. Цією проекцією є трикутник ASD, причому проекцією ребра SC є медіана SK, а проекцією перерізу піраміди площиною ABM — медіана AM трикутника ASD (рис. 7.22). Звідси випливає, що проекцією точки N є точка перетину медіан трикутника ASD. На рисунку 7.22 цю точку позначено буквою P.

Оскільки з теореми 7.3 випливає, що $SN : NC = SP : PK$, то $SN : NC = 2 : 1$.

Відповідь: 2 : 1. ◄

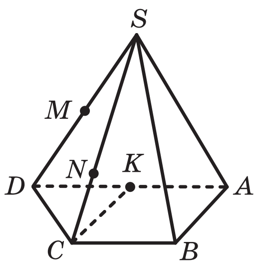


Рис. 7.21

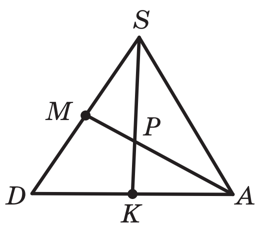


Рис. 7.22

1. Опишіть, у якому разі говорять, що фігуру F_1 отримано в результаті перетворення фігури F.
2. Опишіть перетворення фігури, яке називають паралельним перенесенням.
3. Опишіть перетворення фігури, яке називають центральною симетрією.
4. Яке перетворення фігури називають рухом?

5. Які фігури називають рівними?

6. Опишіть перетворення фігури, яке називають паралельним проектуванням.

7. Сформулюйте властивості паралельного проектування.

ВПРАВИ

7.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.23). При деякому паралельному перенесенні образом точки A є точка A_1. Яка фігура при даному паралельному перенесенні є образом:

1) точки D; 3) відрізка BC;
2) відрізка AB; 4) відрізка AC?

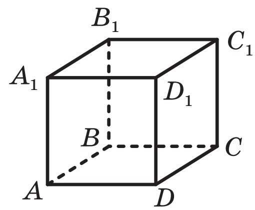


Рис. 7.23

7.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.23). При деякому паралельному перенесенні образом відрізка BB_1 є відрізок CC_1. Образом якої фігури при даному паралельному перенесенні є: 1) точка D; 2) відрізок D_1C; 3) грань CC_1D_1D?

7.3.° Фігура складається з трьох точок. З якої кількості точок може складатися паралельна проекція цієї фігури?

7.4.° Чи може паралельною проекцією двох прямих, що перетинаються, бути:

1) дві прямі, що перетинаються; 3) пряма;
2) дві паралельні прямі; 4) пряма та точка поза нею?

7.5.° Яка геометрична фігура не може бути паралельною проекцією двох мимобіжних прямих:

1) дві паралельні прямі; 3) пряма;
2) дві прямі, що перетинаються; 4) пряма та точка поза нею?

7.6.° 1) Чи можуть рівні відрізки бути паралельними проекціями нерівних відрізків?

2) Чи можуть нерівні відрізки бути паралельними проекціями рівних відрізків?

3) Чи може паралельна проекція відрізка бути більшою за даний відрізок?

4) Чи може паралельна проекція прямої бути паралельною даній прямій?

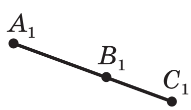


Рис. 7.24

7.7.° Чи може фігура, зображена на рисунку 7.24, бути паралельною проекцією трикутника ABC?

7.8.° Чи може паралельною проекцією трапеції бути чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$, кути якого A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно дорівнюють:
1) 10°, 40°, 140°, 170°;
2) 50°, 130°, 50°, 130°?

7.9.° Чи може паралельною проекцією паралелограма бути чотирикутник зі сторонами:
1) 6 см, 8 см, 6 см, 9 см;
2) 12 см, 12 см, 12 см, 12 см?

7.10.° Точки A_1, B_1 і C_1 є паралельними проекціями відповідно точок A, B і C, які лежать на одній прямій (точка B лежить між точками A і C). Знайдіть відрізок B_1C_1, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см.

7.11.• На рисунку 7.25 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на ребрі CD якого позначили точку M. Побудуйте образ даного куба при симетрії відносно:
1) вершини B_1; 2) точки M.

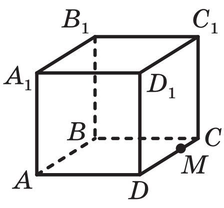


Рис. 7.25

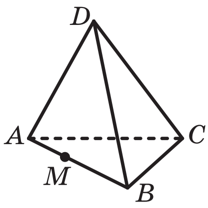


Рис. 7.26

7.12.• На рисунку 7.26 зображено тетраедр $DABC$, на ребрі AB якого позначили точку M. Побудуйте образ даного тетраедра при симетрії відносно:
1) вершини A; 2) точки M.

7.13.• На рисунку 7.27 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте образ даного куба при паралельному перенесенні, у результаті якого:
1) образом точки A є точка D;
2) образом точки B є точка C_1.

7.14.• На рисунку 7.28 зображено тетраедр $DABC$, точка M — середина ребра BC. Побудуйте образ даного тетраедра при паралельному перенесенні, у результаті якого:
1) образом точки D є точка B;
2) образом точки A є точка M.

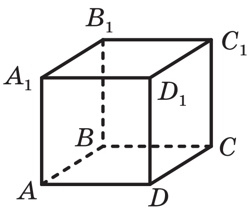


Рис. 7.27

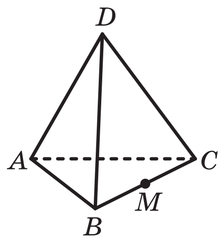


Рис. 7.28

7.15.• Доведіть, що коли відрізок паралельний площині проектування, то його паралельною проекцією є відрізок, рівний даному.

7.16.• Доведіть, що коли фігура належить площині, паралельній площині проектування, то її паралельною проекцією є фігура, рівна даній.

7.17.•• Площина α паралельна кожній із мимобіжних прямих a і b та перетинає площину β. Яка фігура є паралельною проекцією прямих a і b на площину β у напрямі прямої, паралельної площині α?

7.18.•• Площини α і β перетинаються. Паралельною проекцією прямих a і b як на площину α, так і на площину β є паралельні прямі. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

7.19.•• Відомо, що будь-якою паралельною проекцією мимобіжних прямих a і b на дану площину α є прямі, що перетинаються. Визначте взаємне розміщення прямих a і b та площини α.

7.20.•• Кожна з двох четвірок точок A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 є паралельною проекцією точок A, B, C і D на площину α в напрямі непаралельних прямих l_1 і l_2 відповідно. Відомо, що чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$ — трапеції. Чи можна стверджувати, що точки A, B, C і D є вершинами трапеції?

7.21.* Точки M і N — середини відповідно ребер AC і BD тетраедра $DABC$. На ребрі BC позначено точку K. Площина MNK перетинає ребро AD у точці P. Доведіть, що $BK : KC = DP : PA$.

7.22.* Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є трапеція $ABCD$, у якій основа BC у три рази менша від основи AD. Точка M — середина ребра CC_1. Площина ABM перетинає пряму DD_1 у точці N. Знайдіть відношення $ND_1 : ND$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.23. У трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють відповідно 10 см і 35 см. Сума кутів A і D дорівнює 90°, а висота трапеції — 12 см. Знайдіть бічні сторони трапеції.

7.24. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AK і CP. Знайдіть площу трикутника BPK, якщо площа трикутника ABC дорівнює 16 см², а кут ABC становить 30°.

8. Зображення плоских і просторових фігур

Розглянемо зображення деяких многокутників на площині α в напрямі прямої l.

Якщо пряма l паралельна площині многокутника або належить цій площині, то зображенням многокутника є відрізок.

Тепер розглянемо випадок, коли пряма l перетинає площину многокутника.

Із властивостей паралельного проектування випливає, що паралельною проекцією трикутника є трикутник (рис. 8.1).

При паралельному проектуванні величини кутів і відношення відрізків у загальному випадку не зберігаються. Через це, наприклад, зображенням рівнобедреного та рівностороннього трикутників може бути різносторонній трикутник, а зображенням прямокутного трикутника — як тупокутний трикутник, так і гострокутний.

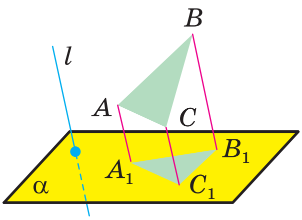


Рис. 8.1

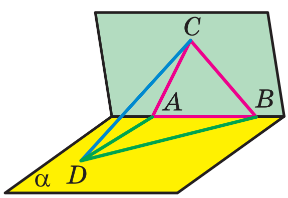


Рис. 8.2

Покажемо, що для довільного трикутника знайдеться рівносторонній трикутник, паралельною проекцією якого є даний трикутник.

Розглянемо довільний трикутник ABD у площині α. Виберемо будь-яку з трьох сторін трикутника, наприклад AB. Побудуємо рівносторонній трикутник ABC так, щоб точка C не належала площині α (рис. 8.2). За напрям паралельного проектування виберемо пряму CD. Тоді трикутник ABD є паралельною проекцією трикутника ABC на площину α в напрямі прямої CD.

Якщо за площину проектування вибрати площину ABC, то ми встановимо й такий факт: рівносторонній трикутник може слугувати паралельною проекцією трикутника будь-якого виду.

Зазначимо, що згідно з теоремою 7.3 медіани даного трикутника зображаються медіанами трикутника, який є зображенням даного. Проте аналогічна властивість для бісектрис і висот трикутника в загальному випадку не виконується.

Оскільки при паралельному проектуванні зберігається паралельність відрізків, то зображенням паралелограма (зокрема, прямокутника, ромба, квадрата) є паралелограм (рис. 8.3).

Також із властивостей паралельного проектування випливає, що зображенням трапеції є трапеція. Проте вид трапеції (рівнобічна, прямокутна) може не зберігатися.

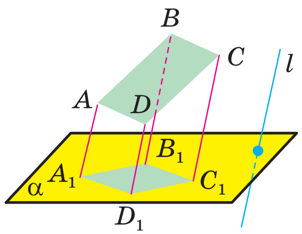


Рис. 8.3

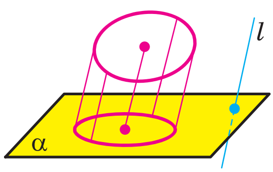


Рис. 8.4

Паралельною проекцією кола є фігура, яку називають **еліпсом** (рис. 8.4). Зображення центра кола називають **центром еліпса**.

Задача 1. Трапеція $A_1B_1C_1D_1$ є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Побудуйте зображення висоти трапеції $ABCD$, проведеної з вершини B.

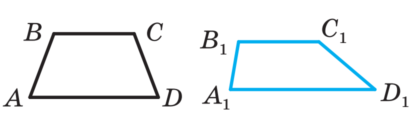


Рис. 8.5

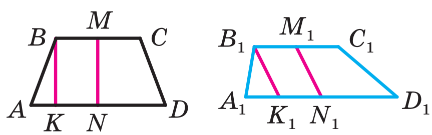


Рис. 8.6

Розв'язання. На рисунку 8.5 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$ та її паралельну проекцію — трапецію $A_1B_1C_1D_1$.

Нехай точки M і N — середини основ трапеції $ABCD$, відрізок BK — висота трапеції (рис. 8.6). Із властивостей рівнобічної трапеції випливає, що $MN \parallel BK$. Із теореми 7.3 випливає, що паралельною проекцією середини відрізка є середина його паралельної проекції. Тоді зображенням відрізка MN є відрізок M_1N_1, де точки M_1 і N_1 — середини відповідно основ B_1C_1 і A_1D_1 трапеції $A_1B_1C_1D_1$.

Оскільки $MN \parallel BK$, то паралельною проекцією висоти BK є відрізок B_1K_1, паралельний відрізку M_1N_1 (рис. 8.6). ◄

Задача 2. У правильному п'ятикутнику всі діагоналі точками перетину діляться в одному й тому самому відношенні $1:\lambda:1$ (рис. 8.7)[1]. Чи існує п'ятикутник, відмінний від правильного, усі діагоналі якого точками перетину також діляться у відношенні $1:\lambda:1$?

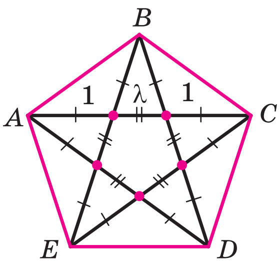


Рис. 8.7

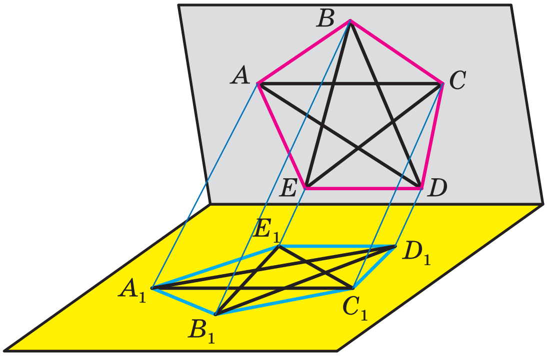


Рис. 8.8

Розв'язання. Такий п'ятикутник існує. Розглянемо паралельне проектування, при якому правильний п'ятикутник $ABCDE$ (рис. 8.7) спроектувався в п'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$, відмінний від правильного (рис. 8.8). При паралельному проектуванні зберігаються відношення відрізків, які лежать на одній прямій. Отже, відношення, у яких точками перетину діляться діагоналі правильного п'ятикутника та його паралельної проекції, рівні. ◄

Задача 3. Кожну сторону трикутника поділили на три рівні частини. Точки поділу сполучили з вершинами трикутника так, як показано на рисунку 8.9. Доведіть, що діагоналі KN, LO і MP утвореного шестикутника $KLMNOP$ перетинаються в одній точці.

[1] Можна довести, що $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

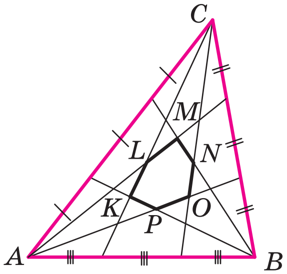


Рис. 8.9

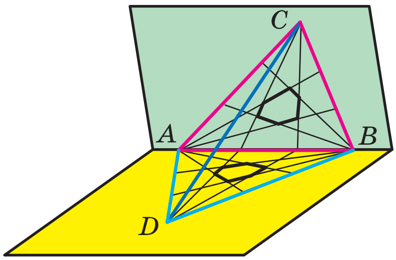


Рис. 8.10

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо паралельне проектування, при якому зображенням даного трикутника *ABC* є правильний трикутник *ABD* (рис. 8.10).

Оскільки при паралельному проектуванні зберігаються відношення відрізків, що лежать на одній прямій, то твердження, сформульоване в умові задачі для шестикутника *KLMNOP*, достатньо довести для його проекції — шестикутника, утвореного з правильного трикутника *ABD* (рис. 8.10). Прямі, які містять висоти правильного трикутника *ABD* (рис. 8.11), є його осями симетрії. З огляду на зазначені симетрії діагоналі шестикутника, які розглядаються, належать висотам трикутника *ABD*, а отже, перетинаються в одній точці. ◄

Розглянемо приклади зображень просторових фігур.

Поверхня n-кутної призми складається з двох рівних n-кутників і n паралелограмів. Отже, будуючи зображення призми, можна спочатку побудувати многокутник, який є зображенням її основи. Потім через кожну вершину многокутника провести пряму, паралельну деякій заздалегідь вибраній прямій, і відкласти на цих прямих рівні відрізки (рис. 8.12). Кінці цих відрізків є зображеннями вершин другої основи призми. Залишилося сполучити ці точки (рис. 8.13).

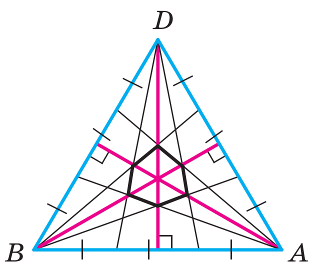


Рис. 8.11

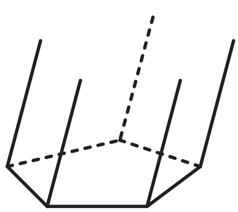


Рис. 8.12

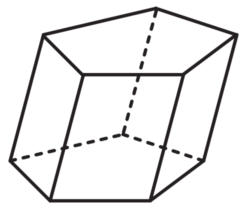


Рис. 8.13

Зображаючи окремі види призми, прямокутний паралелепіпед або куб, виходять із того, що зображеннями всіх граней цих фігур є паралелограми. Однак для того, щоб досягти більшої наочності, найчастіше площину зображення вибирають так, щоб вона була паралельною одній із граней. Тоді за ключовою задачею 7.16 дві грані, площини яких паралельні площині зображення (їх зазвичай називають передня й задня грані), зображають у вигляді двох рівних прямокутників або квадратів (рис. 8.14, 8.15).

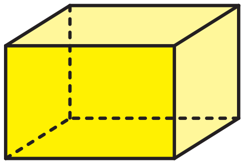


Рис. 8.14

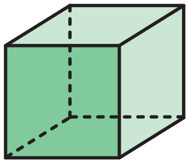
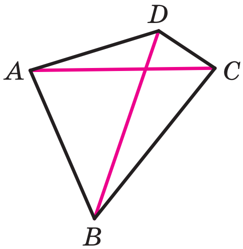
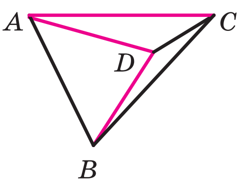


Рис. 8.15

Розглянемо чотирикутник $ABCD$ (він може бути як опуклим, так і неопуклим) і проведемо його діагоналі AC і BD (рис. 8.16).



а

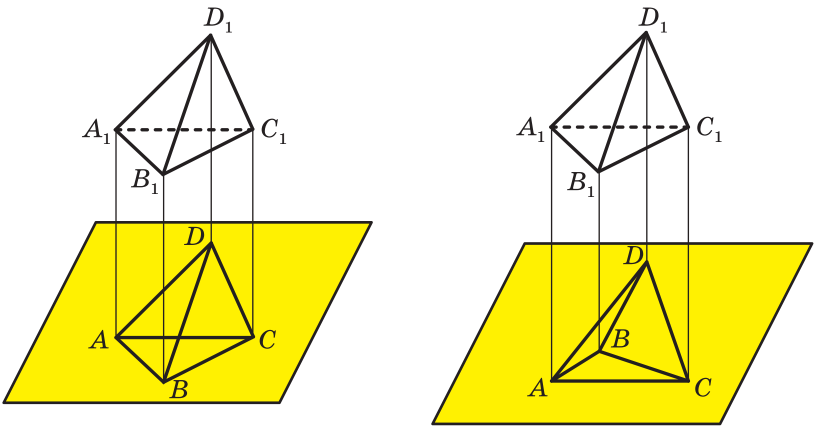


б

Рис. 8.16

Німецькі математики Карл Польке і Герман Шварц довели, що ***зображенням будь-якого тетраедра може слугувати з точністю до подібності будь-який чотирикутник разом з його діагоналями*** (рис. 8.17). Це твердження називають теоремою Польке—Шварца.

У п. 3 ми розглядали теорему Дезарга. Теорема Польке—Шварца дає відповідь, чому чотирикутник $ABSC$ можна розглядати як зображення деякого тетраедра. Якщо тепер трикутник $A_1B_1C_1$ розглядати як зображення перерізу цього тетраедра, то розв'язання задачі 6 п. 3 можна фактично вважати доведенням теореми Дезарга.



а *б*

Рис. 8.17

Ставлення до креслення як до зображення деякої просторової конфігурації може слугувати ключем до розв'язування цілої низки планіметричних задач. Такий прийом називають «виходом у простір».

Задача 4. Чи можна на площині розмістити вісім точок і пофарбувати чотири з них у червоний колір, а інші чотири — у синій так, щоб для будь-яких трьох точок одного кольору знайшлася точка другого кольору й ці чотири точки були вершинами паралелограма?

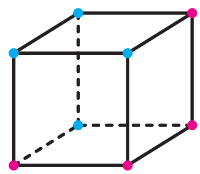


Рис. 8.18

Розв'язання. Розглянемо паралельну проекцію куба на площину (рис. 8.18). Пофарбуємо отримані проекції вершин куба так, як показано на рисунку. Зрозуміло, що пофарбовані точки задовольняють умову задачі. ◄

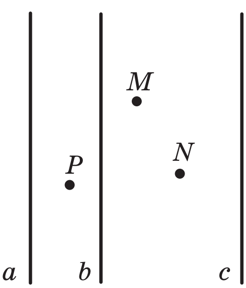


Рис. 8.19

Задача 5. На площині дано три попарно паралельні прямі a, b і c та точки M, N і P (рис. 8.19). Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних прямих, а дані точки лежали на його сторонах (по одній точці на кожній стороні).

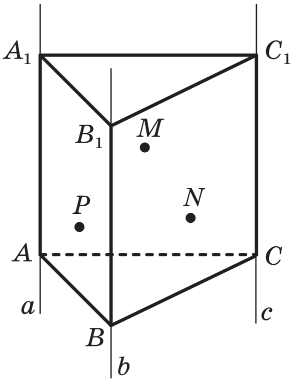


Рис. 8.20

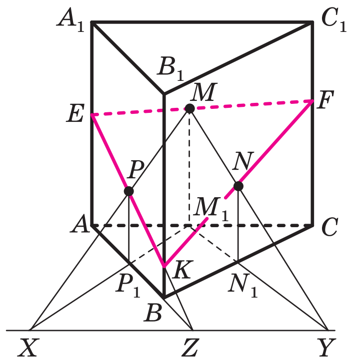


Рис. 8.21

Розв'язання. Розглянемо дані прямі як зображення прямих, що містять бічні ребра трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 8.20). Нехай точки M, N і P належать відповідно граням AA_1C_1C, BB_1C_1C і AA_1B_1B. Задача звелася до побудови перерізу призми площиною MNP.

Побудуємо паралельні проекції точок M, N і P на площину ABC у напрямі прямої AA_1. Це будуть відповідно точки M_1, N_1 і P_1 (рис. 8.21). Нехай $MP \cap M_1P_1 = X$, $MN \cap M_1N_1 = Y$.

Тоді $XY = MNP \cap ABC$. Нехай $AB \cap XY = Z$.

Тоді $MNP \cap ABB_1 = PZ$.

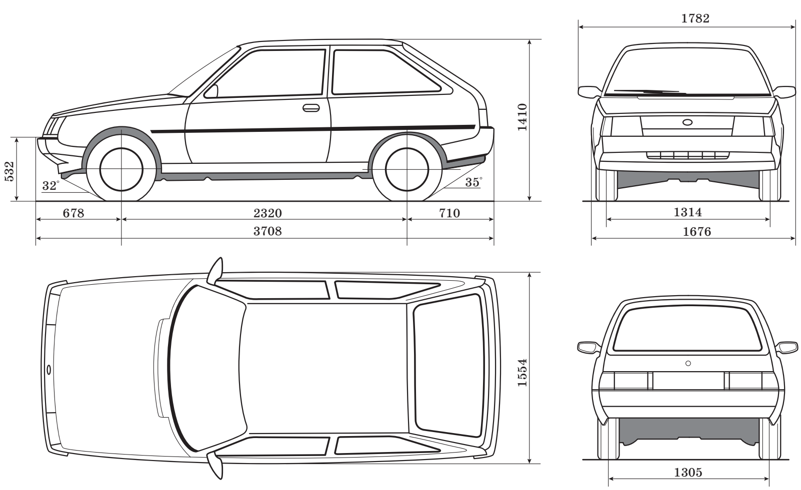


Рис. 8.22

Нехай пряма PZ перетинає ребра AA_1 і BB_1 призми відповідно в точках E і K. Тоді січна площина перетинає грань AA_1B_1B по відрізку KE. Проведемо прямі EM і KN та встановимо, що січна площина перетинає грані AA_1C_1C і BB_1C_1C відповідно по відрізках EF і BF. Таким чином, EFK — шуканий переріз, а отже, і шуканий трикутник. ◄

Зображення об'єктів за допомогою паралельного проектування широко використовують у найрізноманітніших галузях промисловості, наприклад в автомобілебудуванні (рис. 8.22).

1. Яка фігура є зображенням трикутника? паралелограма? трапеції?
2. Опишіть, як побудувати зображення призми; прямокутного паралелепіпеда.
3. Яка фігура є зображенням тетраедра?

ВПРАВИ

8.1.° Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є зображенням прямокутника $ABCD$ (рис. 8.23). Побудуйте зображення перпендикуляра, опущеного з точки перетину діагоналей прямокутника на сторону BC.

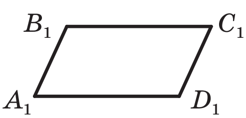


Рис. 8.23

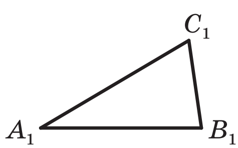


Рис. 8.24

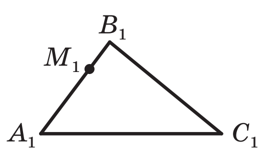


Рис. 8.25

8.2.° Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB (рис. 8.24). Побудуйте зображення перпендикуляра, опущеного із середини гіпотенузи на катет AC.

8.3.° Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$), точка M_1 — зображенням деякої точки M відрізка AB (рис. 8.25). Побудуйте зображення перпендикуляра, опущеного з точки M на основу AC.

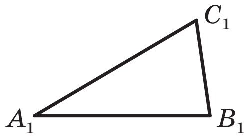


Рис. 8.26

Рис. 8.27

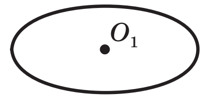


Рис. 8.28

8.4.° Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням правильного трикутника ABC (рис. 8.26). Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC.

8.5.° Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є зображенням квадрата $ABCD$ (рис. 8.27). Побудуйте зображення осей симетрії даного квадрата.

8.6.° Еліпс із центром O_1 є зображенням кола із центром O (рис. 8.28). Побудуйте зображення якого-небудь прямокутного трикутника, вписаного в дане коло.

8.7.° Еліпс із центром O_1 є зображенням кола із центром O (рис. 8.28). Побудуйте зображення якого-небудь прямокутника, вписаного в дане коло.

8.8.° Еліпс із центром O_1 і відрізок A_1B_1 є зображеннями кола із центром O та його хорди AB (рис. 8.29). Побудуйте зображення діаметра даного кола, перпендикулярного до хорди AB.

8.9.• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення трикутника ABC. Побудуйте зображення бісектриси трикутника ABC, проведеної з вершини B, якщо $AB : BC = 1 : 2$.

8.10.• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC, якщо $AB : AC = 5 : 4$.

8.11.• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо висота AM цього трикутника ділить сторону BC на відрізки BM і MC так, що $BM = 5MC$.

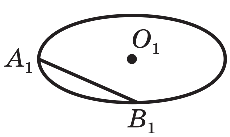


Рис. 8.29

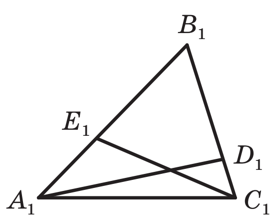


Рис. 8.30

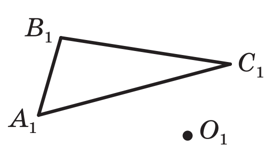


Рис. 8.31

8.12.• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення трикутника ABC (рис. 8.30), відрізки A_1D_1 і C_1E_1 — зображення відповідно висот AD і CE трикутника ABC. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC.

8.13.• Трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 8.31) — зображення трикутника ABC, точка O_1 — зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC. Побудуйте зображення висот трикутника ABC.

8.14.• Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ — зображення ромба $ABCD$. Побудуйте зображення перпендикуляра, опущеного з точки перетину діагоналей ромба на сторону AD, якщо $\angle A = 60°$.

8.15.• Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ — зображення ромба $ABCD$, у якому $\angle A = 60°$. Побудуйте зображення висоти ромба, опущеної з вершини A на сторону BC.

8.16.• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення прямокутного рівнобедреного трикутника ABC з гіпотенузою AB. Побудуйте зображення квадрата $DEFM$, якщо $D \in AB$, $M \in AB$, $E \in AC$, $F \in BC$.

8.17.• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення прямокутного рівнобедреного трикутника ABC з гіпотенузою AB. Побудуйте зображення квадрата, стороною якого є відрізок AB, якщо цей квадрат лежить у площині ABC та розміщений поза трикутником ABC.

8.18.• Еліпс із центром O_1 є зображенням кола із центром O (рис. 8.32), відрізок A_1B_1 — зображенням діаметра AB даного кола. Побудуйте зображення діаметра, перпендикулярного до діаметра AB.

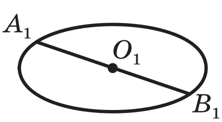


Рис. 8.32

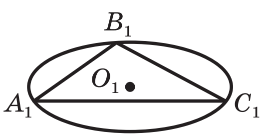


Рис. 8.33

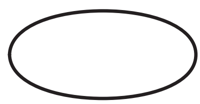


Рис. 8.34

8.19.• Еліпс із центром O_1 і трикутник $A_1B_1C_1$ є зображеннями кола із центром O і вписаного в нього трикутника ABC (рис. 8.33). Побудуйте зображення висоти трикутника ABC, проведеної з вершини A.

8.20.• Еліпс, зображення центра якого не показано, є зображенням кола із центром O (рис. 8.34). Побудуйте зображення точки O.

8.21.• Еліпс із центром O_1 є зображенням кола із центром O, точка A_1 — зображенням точки A кола (рис. 8.35). Побудуйте зображення дотичної до даного кола, яка проходить через точку A.

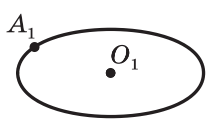


Рис. 8.35

8.22.• Точки A_1, B_1 і C_1 є зображеннями відповідно вершин A, B і C правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 8.36). Побудуйте зображення даного шестикутника.

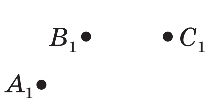


Рис. 8.36

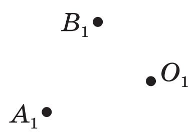


Рис. 8.37

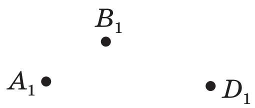


Рис. 8.38

8.23.• Точки A_1, B_1 і O_1 є зображеннями відповідно вершин A, B і центра O правильного трикутника ABC (рис. 8.37). Побудуйте зображення даного трикутника.

8.24.• Точки A_1, B_1 і D_1 (рис. 8.38) є зображеннями відповідно вершин A, B і D правильного шестикутника $ABCDEF$. Побудуйте зображення цього шестикутника.

8.25.•• Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням прямокутного трикутника ABC, відрізок A_1B_1 — зображенням його гіпотенузи AB. Побудуйте зображення бісектриси трикутника ABC, проведеної з вершини B, якщо $\angle A = 30°$.

8.26.•• Еліпс із центром O_1 є зображенням кола із центром O. Побудуйте зображення правильного трикутника:

1) вписаного в дане коло;
2) описаного навколо даного кола.

8.27.•• Еліпс із центром O_1 є зображенням кола із центром O. Побудуйте зображення квадрата:

1) вписаного в дане коло;
2) описаного навколо даного кола.

8.28.•• Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.39) є зображенням квадрата $ABCD$, точка M_1 — зображенням точки M, яка належить стороні AB. Побудуйте зображення точки N, яка належить стороні BC, такої, що $AN \perp DM$.

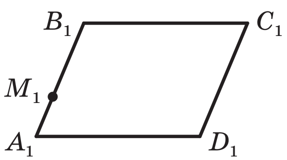


Рис. 8.39

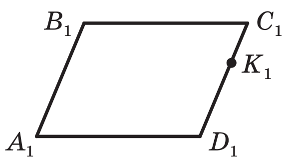


Рис. 8.40

8.29.•• Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.40) є зображенням квадрата $ABCD$, точка K_1 — зображенням точки K, яка належить стороні CD. Побудуйте зображення точки F, яка належить стороні AD, такої, що $BF = AK$.

8.30.•• Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.41) є зображенням рівнобічної трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, у яку можна вписати коло. Побудуйте зображення точок дотику сторін трапеції до вписаного кола.

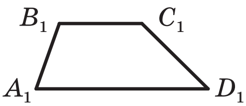


Рис. 8.41

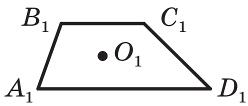


Рис. 8.42

8.31.•• Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.42) є зображенням прямокутної трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD,\ AB \perp AD)$, точка O_1 — зображенням центра кола, вписаного в цю трапецію. Побудуйте зображення точок дотику сторін трапеції до вписаного кола.

8.32.•• Побудуйте зображення призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо на рисунку 8.43 точки M, N, K і F є зображеннями середин відрізків BB_1, CC_1, AC і A_1B_1 відповідно.

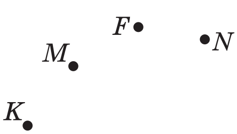


Рис. 8.43

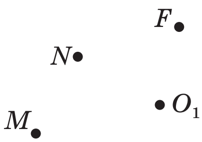


Рис. 8.44

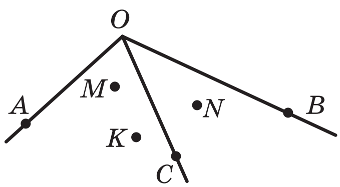


Рис. 8.45

8.33.•• Побудуйте зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо на рисунку 8.44 точки M і N є зображеннями точок A і B відповідно, а точки O_1 і F — зображеннями середин відрізків BD і AC_1 відповідно.

8.34.* Чи існує п'ятикутник, відмінний від правильного, кожна діагональ якого паралельна деякій стороні?

8.35.* Дано три промені OA, OB і OC та три точки M, N і K (рис. 8.45). Побудуйте трикутник так, щоб його вершини лежали на даних променях, а сторони містили точки M, N і K по одній на кожній стороні.

8.36.* Вершини M, N, K і F трапеції $MNKF$ ($MF \parallel NK$) належать відповідно сторонам AD, AB, BC і CD чотирикутника $ABCD$, причому $MF \parallel AC$. Доведіть, що прямі MN, FK і BD перетинаються в одній точці.

8.37.* У трикутник ABC вписано паралелограм $ADKF$ так, що точки D, K і F належать сторонам AB, BC і CA відповідно. Медіана AM трикутника ABC перетинає відрізок DK у точці N. Доведіть, що $DN = FC$.

8.38.* Дано трикутник ABC. На стороні AB позначили точки M і N, на стороні BC — точки K і P, а на стороні CA — точки F і E (рис. 8.46). Відрізки MP, NF і KE перетинаються в одній точці та паралельні сторонам AC, BC і CA відповідно. Доведіть, що $\frac{MN}{AB}+\frac{KP}{BC}+\frac{FE}{CA}=1$.

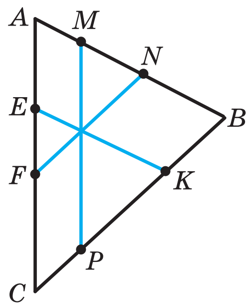


Рис. 8.46

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.39. У прямокутному трикутнику ABC катети BC і AC дорівнюють відповідно 25 см і 60 см. Знайдіть бісектрису AK трикутника ABC.

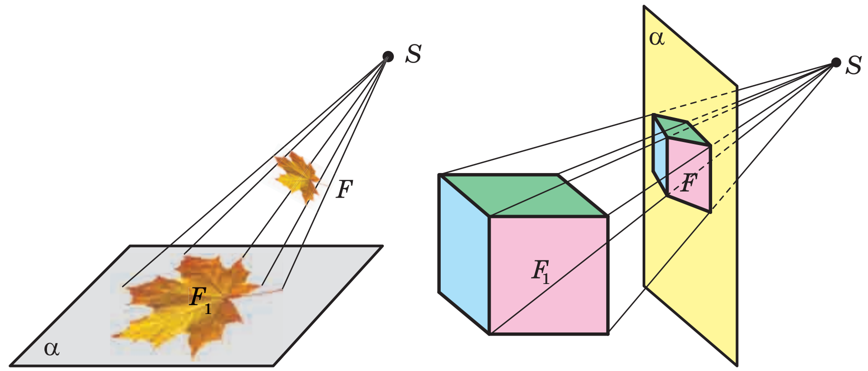
8.40. Основи BC і AD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 2 см і 14 см. На сторонах AB і CD позначили точки M і K так, що відрізок MK паралельний основам трапеції та ділить трапецію на дві рівновеликі частини. Знайдіть відрізок MK.

ЦЕНТРАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Ви вже знаєте, що за допомогою паралельного проектування можна зображати просторові фігури на площині. Цій самій меті може слугувати й інший вид проектування, який прийшов до математики з живопису. Його називають **центральним проектуванням**.

Нехай дано площину α, точку S, яка їй не належить, і фігуру F, усі точки якої не належать площині, що проходить через точку S

паралельно площині α (рис. 8.47). Через кожну точку фігури F проведемо пряму, яка проходить через точку S. Нехай усі проведені прямі перетинають площину α. Точки перетину утворюють деяку фігуру F_1. Описане перетворення фігури F називають **центральним проектуванням.** Фігуру F_1 називають **центральною проекцією фігури F на площину проектування** α **із центром проектування в точці** S.



а *б*

Рис. 8.47

Зауважимо, що ми не дали означення центральної проекції для точок, які лежать у площині, що проходить через центр проектування паралельно площині проекції (рис. 8.48). Заповнити цю прогалину ви зможете у вищому навчальному закладі, вивчаючи проективну геометрію.

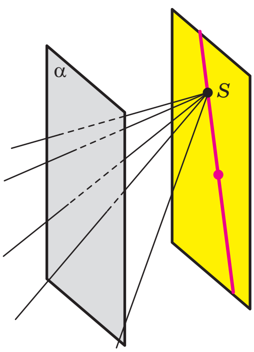


Рис. 8.48

Ті властивості фігури, які зберігаються під час її перетворення, називають **інваріантними.** Наприклад, теореми 7.1–7.3 виражають інваріантні властивості паралельного проектування. Є інваріантні властивості й у центрального проектування. Наприклад, якщо фігура F — центральна проекція деякого відрізка AB, то можна довести, що фігура F також є відрізком.

Зауважимо, що при центральному проектуванні паралельність прямих не є інваріантом (див. рис. 8.47, *б*). Вивченням інваріантів центрального проектування займається розділ математики, про який ми згадували вище, — проективна геометрія.

Ви вже розв'язували задачі, у яких паралельне проектування допомагало будувати перерізи призми (див., наприклад, №№ 5.45–5.47). Нагадаємо, що за площину проектування ми вибирали площину однієї з основ призми, а за напрям — пряму, паралельну ребру призми. Будуючи перерізи пірамід, природно скористатися центральним проектуванням, вибираючи за площину проектування площину основи піраміди, а за центр проектування — вершину піраміди.

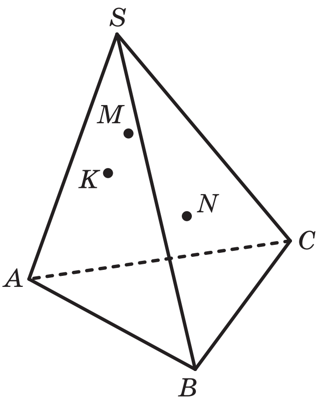


Рис. 8.49

З а д а ч а 1. На гранях ASC, BSC і BSA тетраедра $SABC$ позначено відповідно точки M, N і K (рис. 8.49). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK, якщо відрізок MN не паралельний площині ABC.

Р о з в' я з а н н я. Нехай точки K_1, M_1 і N_1 — центральні проекції відповідно точок K, M і N на площину ABC із центром проектування в точці S. Позначимо точки X і Y так, що $X = KN \cap K_1N_1$ і $Y = MN \cap M_1N_1$ (рис. 8.50). Зрозуміло, що точки X і Y є спільними для січної площини та площини ABC. Отже, січна площина перетинає площину ABC по прямій XY. Подальші кроки розв'язування вам уже відомі. На рисунку 8.51 показано завершення побудови перерізу. ◀

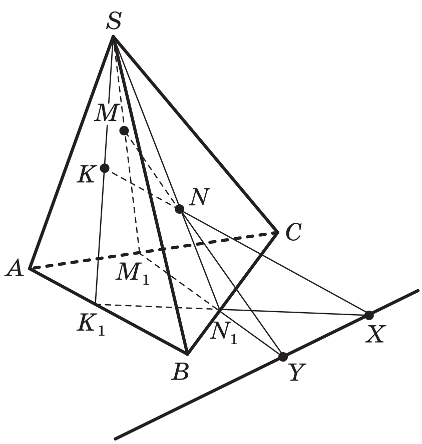


Рис. 8.50

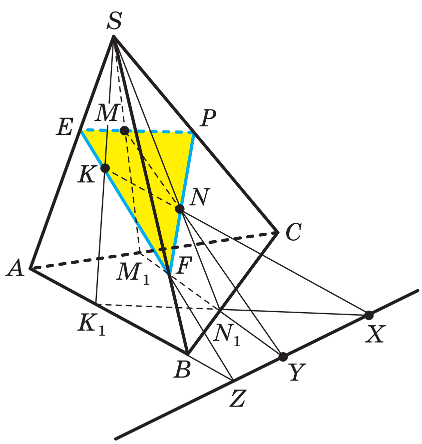


Рис. 8.51

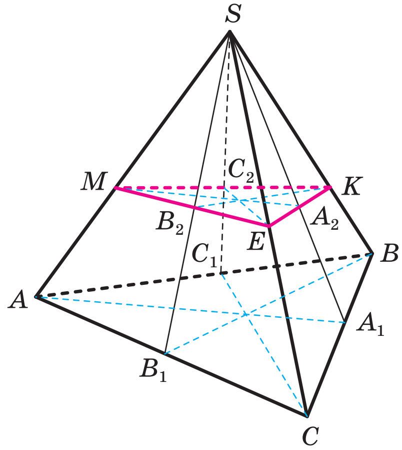


Рис. 8.52

Задача 2. У тетраедрі $SABC$ проведено бісектриси SA_1, SB_1 і SC_1 відповідно трикутників SBC, SCA і SAB. Доведіть, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Позначимо на ребрах SA, SB і SC відповідно точки M, K і E так, що $SM = SK = SE$ (рис. 8.52). Тоді прямі SA_1, SB_1 і SC_1 перетинають відрізки KE, EM і MK у їхніх серединах — точках A_2, B_2 і C_2. Оскільки медіани MA_2, KB_2 і EC_2 перетинаються в одній точці, то їхні образи при центральному проектуванні із центром S на площину ABC — відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — перетинаються в одній точці. ◄

Задача 3. Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. Площина α перетинає ребра SA, SB, SC і SD відповідно в точках A_1, B_1, C_1 і D_1 так, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралелограмом (рис. 8.53). Доведіть, що площина α паралельна площині основи піраміди.

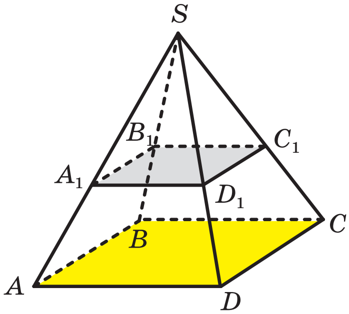


Рис. 8.53

Розв'язання. Розглянемо центральну проекцію паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ на площину основи піраміди із центром проектування в точці S. При такому перетворенні образом цього паралелограма є паралелограм $ABCD$.

Доведемо, що кожна зі сторін паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ паралельна площині проекції.

Припустимо, що це не так. Нехай, наприклад, відрізок A_1B_1 не паралельний площині ABC. У цьому разі пряма A_1B_1 та її проекція — пряма AB — перетинаються. Оскільки $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ і $AB \parallel CD$, то кожна з прямих A_1B_1 і AB, що перетинаються, паралельна площині SCD. Тоді, скориставшись теоремою **6.1**, легко показати, що площини SAB і SCD паралельні. Проте ці площини мають спільну точку S. Отримали суперечність.

Аналогічно можна довести, що відрізок B_1C_1 паралельний площині проекції.

Таким чином, кожна з двох прямих A_1B_1 і B_1C_1, що перетинаються, паралельна площині проекції. Це означає, що площина α паралельна площині основи піраміди. ◄

Під час розв'язування цієї задачі ми фактично довели таку властивість центрального проектування: якщо при центральному проектуванні образами двох паралельних прямих є дві паралельні прямі, то дані прямі паралельні площині проекції.

Може виникнути запитання: навіщо використовувати центральну проекцію, де рівні відрізки можна зображати нерівними, а паралельні — непаралельними? Річ у тім, що реальне й видиме — не одне й те саме. Наприклад, нам здається, що рейки залізниці сходяться на горизонті; ліхтарні стовпи однакової висоти зі збільшенням відстані від спостерігача можуть здаватися нижчими тощо. Такі «викривлення» пов'язані з тим, що ми бачимо навколишній світ у центральній проекції: наше око збирає в одній точці промені, відбиті від реальних об'єктів.

Центральну проекцію ще називають **перспективою** (від латин. *perspicio* — ясно бачу). Цей термін частіше вживають художники. Саме майстри образотворчого мистецтва стояли у джерел вивчення та застосування властивостей центрального проектування. Вони розглядали перспективу як центральну проекцію реального простору на площину картини, а око художника — як центр проекції.

Величезний внесок у розвиток теорії перспективи зробили майстри епохи Відродження: Філіппо Брунеллескі (1377–1446), П’єро делла Франческа (близько 1420–1492), Леонардо да Вінчі (1452–1519), Альбрехт Дюрер (1471–1528), Гвідо Убальді (1545–1607) та ін.

Знати закони перспективи необхідно всім, хто малює, бо без цих знань правильно зобразити навколишнє середовище неможливо.

Застосування законів перспективи ви можете спостерігати в багатьох картинах відомих художників.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Взаємне розміщення прямих у просторі

Дві прямі в просторі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку.
Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.
Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.

Властивості паралельних прямих

Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.
Через точку в просторі, яка не належить даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж тільки одна.

Ознака мимобіжних прямих

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі мимобіжні.

Паралельність у просторі

Пряму та площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.
Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Ознака паралельності прямої та площини

Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.

Достатні умови паралельності двох прямих у просторі

Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.
Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то ця пряма паралельна кожній із двох даних прямих.
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Ознака паралельності двох площин

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Властивості паралельних площин

Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна.

Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні.

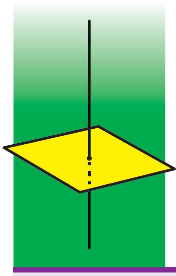
Відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.

Паралельне проектування

Паралельною проекцією прямої є пряма; паралельною проекцією відрізка є відрізок.

Паралельною проекцією двох паралельних прямих є або пряма, або дві паралельні прямі. Паралельні проекції двох паралельних відрізків лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Відношення паралельних проекцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню самих відрізків.



§ 3 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ У ПРОСТОРІ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттями кута між прямими в просторі, кута між прямою та площиною, кута між двома площинами, ортогональної проекції.

Вивчите властивість ортогональної проекції многокутника.

9. Кут між прямими в просторі

Оскільки дві будь-які прямі простору, що перетинаються, лежать в одній площині, то кут між ними означимо так само, як і в планіметрії.

При перетині двох прямих утворюються чотири кути (рис. 9.1). Тут можливі два випадки:

1) усі чотири кути прямі;

2) із чотирьох кутів два є рівними гострими та два — рівними тупими кутами.

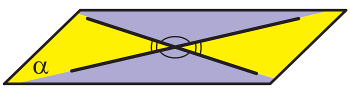


Рис. 9.1

В обох випадках із чотирьох кутів знайдеться такий, величина якого не більша за $90°$.

Означення. Кутом між двома прямими, що перетинаються, називають величину того з кутів, утворених при їхньому перетині, який не більший за $90°$.

Якщо φ — кут між двома прямими, що перетинаються, то $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Вважають, що кут між двома паралельними прямими дорівнює $0°$. Отже, якщо φ — кут між двома прямими, які лежать в одній площині, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Введемо поняття кута між мимобіжними прямими.

Означення. Кутом між двома мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються та відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Нехай прямі a і b мимобіжні. Через точку M простору проведемо прямі a_1 і b_1 так, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 9.2). За означенням кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1, що перетинаються.

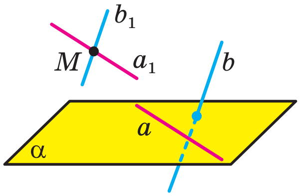


Рис. 9.2

Виникає природне запитання: чи залежить кут між даними мимобіжними прямими a і b від вибору точки M? Дати відповідь на це запитання допомагає така теорема.

Теорема 9.1. ***Кут між двома прямими, що перетинаються, дорівнює куту між двома іншими прямими, що перетинаються та відповідно паралельні даним.***

Доведення. Нехай прямі a і b перетинаються в точці M, а прямі a_1 і b_1 — у точці M_1, причому $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Доведемо, що кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1.

Нехай через прямі a і b проходить площина α, а через прямі a_1 і b_1 — площина α_1.

Якщо площини α і α_1 збігаються, то всі дані прямі лежать в одній площині (рис. 9.3). Тоді твердження теореми можна довести, використовуючи властивості паралельних прямих на площині. Зробіть це самостійно.

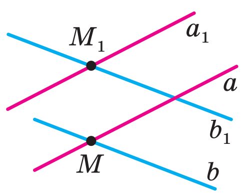


Рис. 9.3

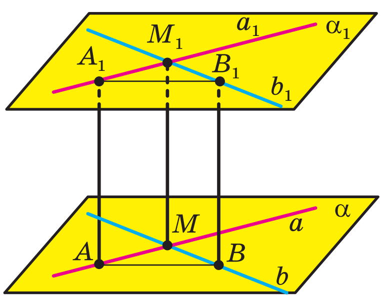


Рис. 9.4

Нехай площини α і α_1 різні (рис. 9.4). У площині паралельних прямих a і a_1 проведемо пряму AA_1 паралельно прямій MM_1 ($A \in a$, $A_1 \in a_1$). У площині паралельних прямих b і b_1 проведемо пряму BB_1 паралельно прямій MM_1 ($B \in b$, $B_1 \in b_1$).

Чотирикутники AA_1M_1M і BB_1M_1M — паралелограми, оскільки в них протилежні сторони паралельні.

Кожний із відрізків AA_1 і BB_1 дорівнює відрізку MM_1 і паралельний йому. Отже, чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм.

Оскільки в паралелограмі протилежні сторони рівні, то $AM = A_1M_1$, $BM = B_1M_1$, $AB = A_1B_1$. Отже, трикутники AMB і $A_1M_1B_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$.

Це означає, що кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1. ◄

Скориставшись теоремою 9.1, можна показати (зробіть це самостійно), що *кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a і b_1, що перетинаються, де $b_1 \parallel b$.*

Наприклад, на рисунку 9.5 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Кут між мимобіжними прямими AA_1 і BC дорівнює куту між прямими BB_1 і BC, що перетинаються.

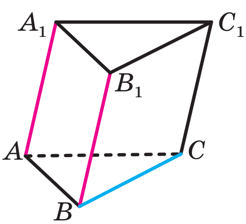


Рис. 9.5

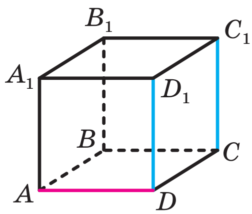


Рис. 9.6

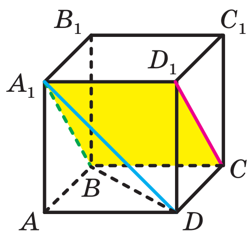


Рис. 9.7

Означення. Дві прямі в просторі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Зауважимо, що перпендикулярні прямі можуть як перетинатися, так і бути мимобіжними.

Якщо прямі a і b перпендикулярні, то записують: $a \perp b$.

Два відрізки в просторі називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Наприклад, ребра AD і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярні (рис. 9.6). Справді, оскільки $DD_1 \parallel CC_1$, то кут між прямими AD і CC_1 дорівнює куту між прямими AD і DD_1. Але $\angle ADD_1 = 90°$, тому $AD \perp CC_1$.

Задача. На рисунку 9.7 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими A_1D і D_1C.

Розв'язання. Сполучимо точки A_1 і B. Оскільки $A_1D_1 \parallel BC$, то точки A_1, D_1, C і B лежать в одній площині. Ця площина перетинає паралельні площини AA_1B і DD_1C по паралельних прямих A_1B і D_1C. Отже, кут між прямими A_1D і D_1C дорівнює куту DA_1B.

Сполучимо точки B і D. Відрізки A_1D, A_1B і BD є рівними як діагоналі рівних квадратів. Отже, трикутник A_1BD рівносторонній. Тоді $\angle DA_1B = 60°$.

Відповідь: 60°. ◄

?

1. Що називають кутом між двома прямими, що перетинаються?
2. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
3. Які дві прямі в просторі називають перпендикулярними?
4. Які два відрізки в просторі називають перпендикулярними?

ВПРАВИ

9.1.° Скільки в просторі можна провести прямих, перпендикулярних до даної прямої, через точку: 1) яка належить даній прямій; 2) яка не належить даній прямій?

9.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.8). Знайдіть кут між прямими: 1) CD і BC; 2) AA_1 і C_1D_1; 3) AA_1 і D_1C; 4) AC і B_1D_1; 5) A_1C_1 і AC.

9.3.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.8). Знайдіть кут між прямими: 1) AB і BB_1; 2) AB і B_1D_1; 3) A_1D і B_1C; 4) B_1D_1 і C_1C.

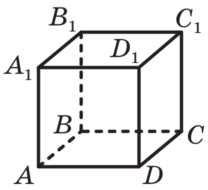


Рис. 9.8

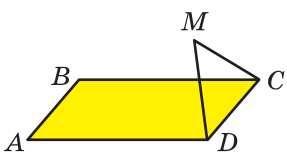


Рис. 9.9

9.4.° Точка M, яка не належить площині прямокутника $ABCD$, є такою, що трикутник CMD рівносторонній (рис. 9.9). Знайдіть кут між прямими AB і MC.

9.5.° Точка M не належить площині квадрата $ABCD$, $\angle MBA = 40°$, $\angle MBC = 90°$. Знайдіть кут між прямими: 1) MB і AD; 2) MB і CD.

9.6.° Трапеція $ABCD$ з основами AD і BC та трикутник MEF не лежать в одній площині, точка E — середина відрізка AB, точка F — середина відрізка CD, $ME = FE$, $\angle MEF = 110°$. Знайдіть кут між прямими: 1) AD і EF; 2) AD і ME; 3) BC і MF.

9.7.° Паралелограм $ABCD$ і трикутник AED не лежать в одній площині (рис. 9.10). Знайдіть кут між прямими BC і AE, якщо $\angle AED = 70°$, $\angle ADE = 30°$.

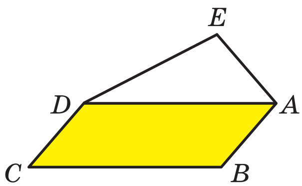


Рис. 9.10

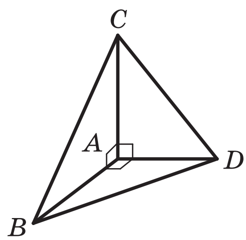


Рис. 9.11

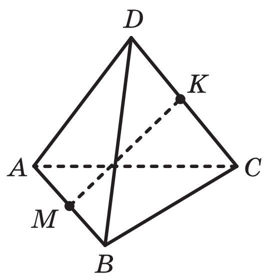


Рис. 9.12

9.8.° Відомо, що $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 9.11). Знайдіть відрізок CD, якщо $BC = 17$ см, $AB = 15$ см, $BD = 3\sqrt{29}$ см.

9.9.° Відомо, що $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 9.11). Знайдіть відрізок BC, якщо $CD = 2\sqrt{43}$ см, $BD = 12$ см, $\angle ABD = 60°$.

9.10.• Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точки M і K — середини ребер AB і CD відповідно (рис. 9.12).
1) Доведіть, що $MK \perp AB$ і $MK \perp CD$.
2) Знайдіть відрізок MK.

9.11.• Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, BC, AD і BD тетраедра $DABC$ (рис. 9.13). Знайдіть кут між прямими EF і MK, якщо $\angle BAC = \alpha$.

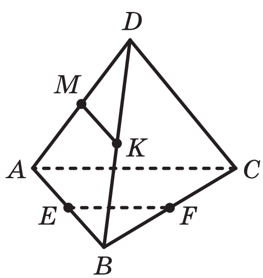


Рис. 9.13

9.12.• Діагоналі грані $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. Знайдіть кут між прямими OB_1 і A_1C_1.

9.13.• Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат, сторона якого дорівнює a. Знайдіть кут між прямими AD_1 і B_1C, якщо бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $a\sqrt{3}$.

9.14.•• Точки E і F — середини відповідно ребер AA_1 і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте пряму, яка проходить через точку D_1, перпендикулярна до прямої EF і перетинає відрізок EF.

9.15.•• Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, AD, CD і BC тетраедра $DABC$. Відомо, що $EM = FK$. Знайдіть кут між прямими AC і BD.

9.16.•• Точки M і N — відповідно середини ребер AC і BD тетраедра $DABC$. Знайдіть кут між прямими MN і BC, якщо відомо, що $BC = AD$, а кут між прямими BC і AD дорівнює 30°.

9.17.•• Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, AD, CD і BC тетраедра $DABC$, $AC = 12$ см, $BD = 16$ см, $FK = 2\sqrt{13}$ см. Знайдіть кут між прямими AC і BD.

9.18.•• Точка K — середина ребра DC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть косинус кута між прямими B_1C і C_1K.

9.19.•• Усі ребра тетраедра $DABC$ рівні. Точки M і N — середини ребер AB і CD відповідно. Знайдіть кут між прямими MN і BC.

9.20.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що прямі B_1D і AD_1 перпендикулярні.

9.21.* Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть кут між прямими AC_1 і CB_1, якщо відомо, що $AC_1 = CB_1 = AB$.

9.22.* Точки M, N і K — середини відповідно ребер CB, B_1A_1 і AC призми $ABCA_1B_1C_1$. Знайдіть кут між прямими CB_1 і BA_1, якщо відомо, що $MN = BK$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.23. Діагоналі AC і BD паралелограма $ABCD$ дорівнюють відповідно 24 см і 10 см, $AD = 13$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

9.24. На стороні AC трикутника ABC позначили точку M так, що $AM : MC = 3 : 2$. На відрізку BM позначили точку K так, що $BK : KM = 4 : 1$. Пряма AK перетинає сторону BC у точці P. Знайдіть площу трикутника ABP, якщо площа трикутника ABC дорівнює 34 см².

10. Перпендикулярність прямої та площини

У повсякденному житті ми говоримо: флагшток перпендикулярний до поверхні землі (рис. 10.1), щогли вітрильника перпендикулярні до поверхні палуби (рис. 10.2), шуруп укручують у дошку перпендикулярно до її поверхні (рис. 10.3) тощо.

Рис. 10.1

Рис. 10.2

Рис. 10.3

Ці приклади дають уявлення про пряму, перпендикулярну до площини.

Означення. **Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині** (рис. 10.4).

Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то записують: $a \perp \alpha$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до прямої a або пряма a та площина α перпендикулярні.

З означення випливає, що коли пряма a перпендикулярна до площини α, то вона перетинає цю площину. Справді, якби виконувалась одна з двох умов $a \parallel \alpha$ або $a \subset \alpha$, то в площині α знайшлася б така пряма b, що $a \parallel b$. А це суперечило б означенню.

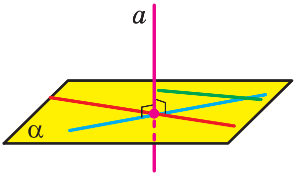


Рис. 10.4

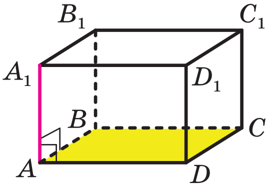


Рис. 10.5

Відрізок називають **перпендикулярним до площини**, якщо він належить прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Наприклад, інтуїтивно зрозуміло, що ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 10.5). Довести цей факт нескладно, скориставшись такою теоремою.

Теорема 10.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). ***Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.***

Доведення. Нехай пряма c перпендикулярна до прямих a і b, які лежать у площині α та перетинаються в точці O (рис. 10.6). Доведемо, що $c \perp \alpha$.

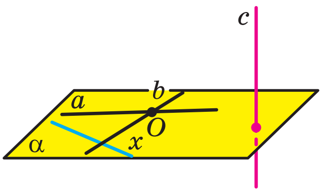


Рис. 10.6

Розглянемо довільну пряму x площини α, відмінну від прямих a і b. Якщо ми доведемо, що $c \perp x$, то тим самим доведемо, що пряма c перпендикулярна до будь-якої прямої площини α, тобто $c \perp \alpha$.

Якщо пряма x паралельна прямій a або прямій b, то з означення кута між двома прямими випливає, що $c \perp x$.

Розглянемо випадок, коли пряма x не паралельна жодній із прямих a і b.

Через точку O проведемо прямі c_1 і x_1 так, що $c_1 \parallel c$ і $x_1 \parallel x$ (рис. 10.7). Якщо пряма c або пряма x проходить через точку O, то за пряму c_1 або x_1 відповідно візьмемо саму пряму c або x.

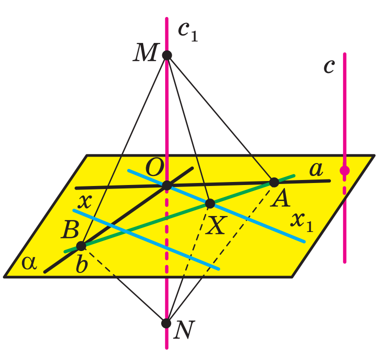


Рис. 10.7

Для доведення перпендикулярності прямих c і x достатньо показати, що $c_1 \perp x_1$.

У площині α проведемо пряму, яка не проходить через точку O та перетинає прямі b, x_1 і a в точках B, X і A відповідно. На прямій c_1 позначимо точки M і N так, щоб точка O була серединою відрізка MN.

Оскільки $c \perp b$ і $c \parallel c_1$, то $c_1 \perp b$. Тоді $\angle MOB = \angle NOB = 90°$. У трикутнику MBN відрізок BO є висотою та медіаною, отже, цей трикутник рівнобедрений, тобто $BM = BN$. Аналогічно можна довести, що $AM = AN$.

У трикутниках BMA і BNA сторона AB спільна, $BM = BN$, $AM = AN$. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle MBX = \angle NBX$.

У трикутниках MBX і NBX сторона BX спільна, $\angle MBX = \angle NBX$, $BM = BN$. Отже, ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $XM = XN$.

У рівнобедреному трикутнику MXN відрізок XO є медіаною, а отже, і висотою, тобто $MN \perp XO$. Звідси $c_1 \perp x_1$. ◄

Рис. 10.8

На рисунку 10.5 пряма AA_1 перпендикулярна до двох прямих AB і AD площини ABC, що перетинаються. Тоді за ознакою перпендикулярності прямої та площини $AA_1 \perp ABC$, а отже, і ребро AA_1 також перпендикулярне до площини ABC.

Теорему 10.1 часто використовують на практиці. Наприклад, підставка для новорічної ялинки має форму хрестовини. Якщо ялинку встановити так, щоб її стовбур був перпендикулярним до напрямів хрестовини, то ялинка стоятиме перпендикулярно до площини підлоги (рис. 10.8).

Задача 1. Доведіть, що в тетраедрі, усі ребра якого рівні, мимобіжні ребра є перпендикулярними.

Розв'язання. На рисунку 10.9 зображено тетраедр $DABC$, усі ребра якого рівні. Доведемо, що $AB \perp DC$ (аналогічно можна довести перпендикулярність інших пар мимобіжних ребер).

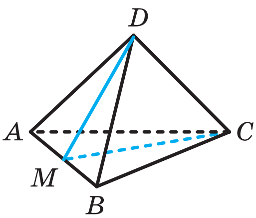


Рис. 10.9

Нехай точка M — середина ребра AB. Тоді в рівносторонніх трикутниках ADB і ABC медіани DM і CM є висотами, тобто $AB \perp DM$

і $AB \perp CM$. Отже, за ознакою перпендикулярності прямої та площини отримуємо, що $AB \perp DMC$. Звідси $AB \perp DC$. ◄

Наведемо теорему, яку можна розглядати як ще одну ознаку перпендикулярності прямої та площини.

Теорема 10.2. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини.***

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні, причому $a \perp \alpha$ (рис. 10.10). Доведемо, що $b \perp \alpha$.

Розглянемо довільну пряму x площини α. Оскільки $a \perp \alpha$, то $a \perp x$, тобто кут між прямими a і x дорівнює $90°$. Оскільки $b \parallel a$, то кут між прямими b і x також дорівнює $90°$. Отже, пряма b перпендикулярна до довільної прямої площини α, тобто $b \perp \alpha$. ◄

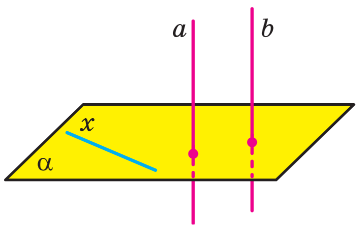


Рис. 10.10

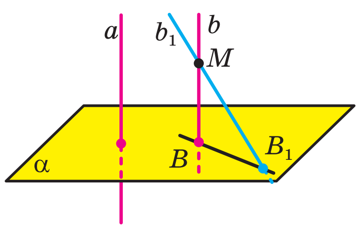


Рис. 10.11

Сформулюємо теорему, що є ознакою паралельності двох прямих.

Теорема 10.3. ***Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні.***

Доведення. Нехай $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$ (рис. 10.11). Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Тоді через точку M прямої b таку, що $M \notin \alpha$, проведемо пряму b_1 паралельно прямій a. За теоремою 10.2 отримуємо, що $b_1 \perp \alpha$. Дві прямі b і b_1, які проходять через точку M, перетинають площину α у двох точках B і B_1 відповідно (рис. 10.11). Оскільки $b \perp \alpha$, $b_1 \perp \alpha$ і $BB_1 \subset \alpha$, то $b \perp BB_1$ і $b_1 \perp BB_1$. Отримали, що в площині MBB_1 через точку M проходять дві прямі, перпендикулярні до прямої BB_1. Ми дійшли суперечності, отже, $a \parallel b$. ◄

Доводячи теорему 10.3, ми встановили такий факт: через точку M, яка не належить площині α, проходить не більше ніж одна пряма, перпендикулярна до площини α. Насправді має місце така теорема.

Теорема 10.4. ***Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.***

Наведемо теорему, яку можна розглядати як ще одну ознаку паралельності двох площин.

Теорема 10.5. ***Дві площини, перпендикулярні до однієї прямої, паралельні.***

Доведення. Нехай площини α і α_1 перпендикулярні до прямої a. Доведемо, що $\alpha \parallel \alpha_1$.

Припустимо, що площини α і α_1 не є паралельними. Нехай $\alpha \cap \alpha_1 = c$ (рис. 10.12). Виберемо на прямій c довільну точку A. Через пряму a і точку A проведемо площину β (якщо $A \in a$, то проведемо через пряму a довільну площину β).

Нехай $\alpha \cap \beta = b$ і $\alpha_1 \cap \beta = b_1$. Тоді за означенням прямої, перпендикулярної до площини, отримуємо, що $a \perp b$ і $a \perp b_1$. Бачимо, що в площині β через точку A проходять дві прямі, перпендикулярні до прямої a. Отримали суперечність. Отже, $\alpha \parallel \alpha_1$. ◄

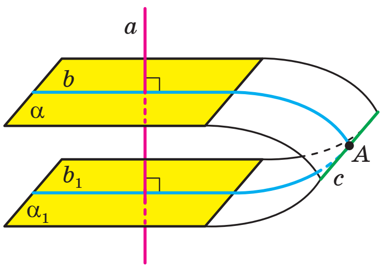


Рис. 10.12

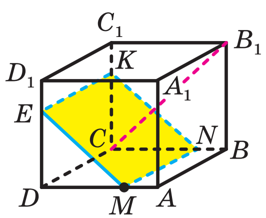


Рис. 10.13

Задача 2. Точка M ділить ребро AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини A (рис. 10.13). Проведіть переріз куба площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої CB_1.

Розв'язання. Через точку M проведемо відрізок MN паралельно ребру DC (точка N належить ребру BC). Далі через точку N проведемо відрізок NK паралельно відрізку BC_1 (точка K належить ребру CC_1). Потім через точку M проведемо відрізок ME паралельно відрізку NK (точка E належить ребру DD_1). Сполучимо точки E і K. Доведемо, що чотирикутник $MNKE$ — шуканий переріз.

Маємо: $DC \perp BC$ і $DC \perp CC_1$. Отже, $DC \perp BCC_1$. Оскільки $MN \parallel DC$, то за теоремою 10.2 отримуємо, що $MN \perp BCC_1$. Оскільки $CB_1 \subset BCC_1$, то $MN \perp CB_1$. За побудовою $NK \parallel BC_1$, а $BC_1 \perp CB_1$, тому $NK \perp CB_1$. Таким чином, пряма CB_1 перпендикулярна до двох прямих площини MNK, що перетинаються, отже, $CB_1 \perp MNK$. ◄

Означення. **Точки M і M_1 називають симетричними відносно площини α, якщо відрізок MM_1 перпендикулярний до цієї площини та ділиться цією площиною навпіл** (рис. 10.14). **Кожну точку площини α вважають симетричною самій собі.**

Нехай дано фігуру F і площину α. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, симетричну їй відносно площини α. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 10.15).

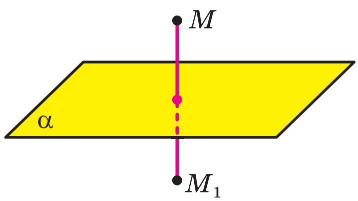


Рис. 10.14

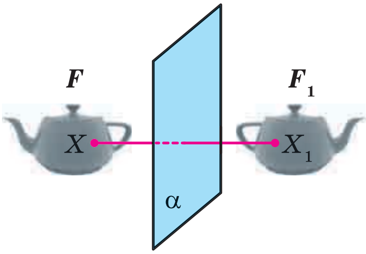


Рис. 10.15

Таке перетворення фігури F називають **симетрією відносно площини** α. Говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно площини** α. Симетрію відносно площини називають також **дзеркальною симетрією**.

Доведемо, що симетрія відносно площини є рухом.

Нехай A і B — довільні точки фігури F. Точки A_1 і B_1 — відповідно їхні образи при симетрії відносно площини α. Розглянемо випадок, коли пряма AB не перпендикулярна до площини α (рис. 10.16). Випадок, коли $AB \perp \alpha$, розгляньте самостійно. Маємо: $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Тоді за теоремою 10.3 отримуємо, що $AA_1 \parallel BB_1$. Паралельні прямі AA_1 і BB_1 лежать у деякій площині β. Нехай $\alpha \cap \beta = a$. Тоді за означенням прямої, перпендикулярної до площини, отримуємо, що $AA_1 \perp a$, $BB_1 \perp a$. Отже, точки A і A_1, а також точки B і B_1 симетричні відносно прямої a. Тоді за відомою з планіметрії властивістю осьової симетрії (осьова симетрія є рухом) доходимо висновку, що $AB = A_1B_1$.

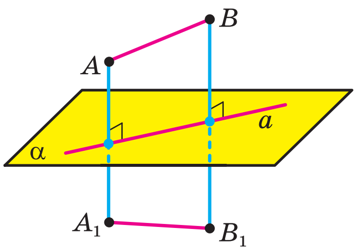


Рис. 10.16

Рис. 10.17

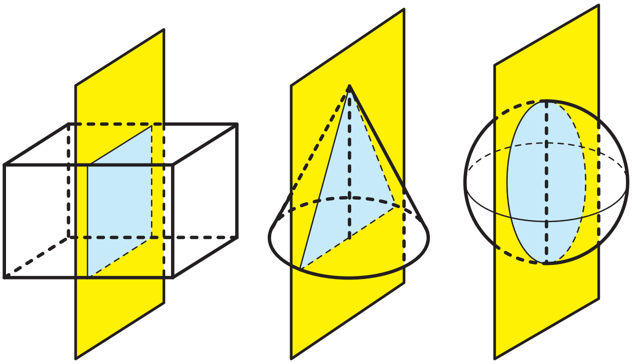


Рис. 10.18

Доведена властивість дає змогу стверджувати, що фігури, симетричні відносно площини, є рівними.

Означення. **Фігуру називають *симетричною відносно площини* α, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно площини α, також належить цій фігурі.**

Площину α називають **площиною симетрії фігури**. Також говорять, що **фігура має площину симетрії** (рис. 10.17).

Наприклад, площину симетрії мають прямокутний паралелепіпед, конус, куля (рис. 10.18).

Із симетрією відносно площини ми часто стикаємося в природі (рис. 10.19), архітектурі та техніці (рис. 10.20).

Рис. 10.19

Рис. 10.20

1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Який відрізок називають перпендикулярним до площини?
3. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої та площини.
4. Сформулюйте теорему про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини.
5. Сформулюйте теореми про дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини.
6. Які точки називають симетричними відносно площини?
7. Опишіть перетворення фігури, яке називають симетрією відносно площини.
8. Яку фігуру називають симетричною відносно площини?

ВПРАВИ

10.1.° Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

10.2.° Пряма m перпендикулярна до прямих a і b площини α. Чи випливає із цього, що пряма m перпендикулярна до площини α?

10.3.° Чи є правильним твердження, що коли пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини?

10.4.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.21). Назвіть грані куба, до яких перпендикулярна пряма: 1) AA_1; 2) AD.

10.5.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.21). Укажіть прямі, які перпендикулярні до площини грані: 1) AA_1B_1B; 2) $A_1B_1C_1D_1$.

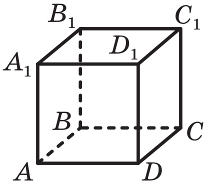


Рис. 10.21

10.6.° Чи є правильним твердження, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна:

1) до сторони та медіани трикутника, який лежить у цій площині;
2) до сторони та середньої лінії трикутника, який лежить у цій площині;
3) до двох сторін трапеції, яка лежить у цій площині;
4) до двох діаметрів кола, яке лежить у цій площині;
5) до двох діагоналей правильного шестикутника, який лежить у цій площині?

10.7.° Прямі a, b і c лежать у площині α. Пряма m перпендикулярна до прямих a і b, але не перпендикулярна до прямої c. Яким є взаємне розміщення прямих a і b?

10.8.° Через центр O правильного трикутника ABC проведено пряму DO, перпендикулярну до площини ABC (рис. 10.22). Знайдіть відрізок DO, якщо $AB = 6$ см, $DA = 4$ см.

10.9.° Через центр O квадрата $ABCD$ проведено пряму MO, перпендикулярну до площини квадрата (рис. 10.23). Знайдіть відстань від точки M до вершини D, якщо $AD = 4\sqrt{2}$ см, $MO = 2$ см.

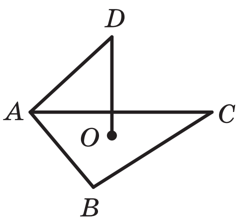


Рис. 10.22

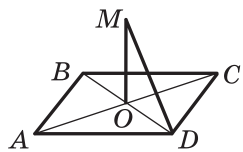


Рис. 10.23

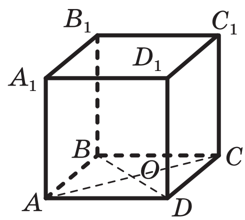


Рис. 10.24

10.10.° Точка O — центр грані $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a (рис. 10.24). Знайдіть:

1) відстань від точки O до вершини B_1 куба;

2) тангенс кута між прямими B_1O і DD_1.

10.11.° Діагональ B_1D прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 17 см, а діагональ AB_1 бічної грані AA_1B_1B дорівнює 15 см (рис. 10.25). Знайдіть ребро AD паралелепіпеда.

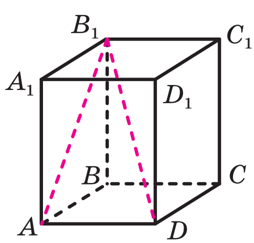


Рис. 10.25

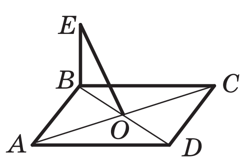


Рис. 10.26

10.12.° Через вершину B ромба $ABCD$ проведено пряму BE, перпендикулярну до площини ромба (рис. 10.26). Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини BEO.

10.13.° Через вершину A прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведено пряму AF, перпендикулярну до площини ABC (рис. 10.27). Доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини AFC.

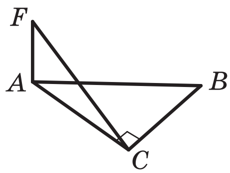


Рис. 10.27

10.14.° На ребрі AB прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої AB.

10.15.° Точка K — середина ребра DA тетраедра $DABC$, усі ребра якого рівні. Доведіть, що пряма AD перпендикулярна до площини BKC.

10.16.° Через вершини A і D паралелограма $ABCD$ проведено прямі AM і DK, перпендикулярні до площини паралелограма (рис. 10.28). Доведіть, що площини MAB і KDC паралельні.

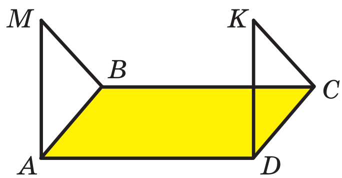


Рис. 10.28

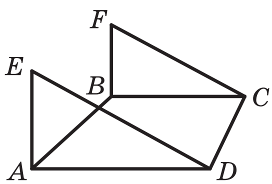


Рис. 10.29

10.17.° Через вершини A і B трапеції $ABCD$ з основами AD і BC проведено прямі AE і BF, перпендикулярні до площини трапеції (рис. 10.29). Яким є взаємне розміщення площин EAD і FBC?

10.18.° Образом якої прямої при симетрії відносно даної площини є сама ця пряма?

10.19.° Скільки площин симетрії має: 1) відрізок; 2) пряма; 3) площина; 4) коло; 5) кут; 6) квадрат? Опишіть, як вони розміщені.

10.20.• Площина α, перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC, перетинає катет AC у точці E, а гіпотенузу AB — у точці F. Знайдіть відрізок EF, якщо $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ см.

10.21.• У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$. Доведіть, що $AD \perp BC$.

10.22.• У тетраедрі $DABC$ відомо, що $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть, що $BD \perp AC$.

10.23.• Відрізок BD є спільною медіаною рівнобедрених трикутників ABC і EFB, які лежать у різних площинах ($BA = BC$ і $BE = BF$). Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AEC.

10.24.• Паралельні прямі a, b і c не лежать в одній площині (рис. 10.30). На прямій a позначили точку D і провели через неї дві прямі, одна з яких перпендикулярна до прямої b і перетинає її в точці F, а друга — перпендикулярна до прямої c і перетинає її в точці E. Доведіть, що $EF \perp b$ і $EF \perp c$.

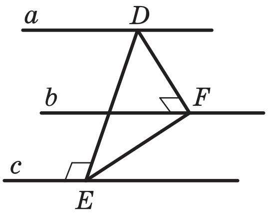


Рис. 10.30

10.25.• Дано точку, яка розміщена поза площиною правильного трикутника й рівновіддалена від його вершин. Доведіть, що пряма, яка проходить через дану точку та центр даного трикутника, перпендикулярна до площини трикутника.

10.26.• Відрізок AB не перетинає площину α. Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відрізок CD, якщо $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.

10.27.• Відрізок AB не перетинає площину α. Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках A_1 і B_1 відповідно. Знайдіть відрізок AB, якщо $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB_1 = 10$ см.

10.28.• Через кінці A і B та точку C відрізка AB, що не перетинає площину α, проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 25$ см, $AC : BC = 1 : 4$.

10.29.• Через кінці M і N та точку K відрізка MN, який не перетинає площину α, проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках M_1, N_1 і K_1 відповідно. Знайдіть відрізок NN_1, якщо $MM_1 = 14$ см, $KK_1 = 10$ см, $MK : KN = 3 : 5$.

10.30.• Паралелограм $ABCD$ не має спільних точок із площиною α. Через вершини A, B, C і D проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 11$ см, $BB_1 = 18$ см, $DD_1 = 16$ см.

10.31.• При симетрії відносно площини образом прямої a є пряма a_1. Доведіть, що прямі a і a_1 лежать в одній площині.

10.32.$^{\bullet}$ Ребро куба $ABCD$ дорівнює a см. Точка M — середина ребра DC. Побудуйте переріз куба, який проходить через точку M перпендикулярно до прямої BD. Знайдіть площу цього перерізу.

10.33.$^{\bullet}$ Ребро куба $ABCD$ дорівнює a см. Точка O — центр грані CC_1D_1D. Побудуйте переріз куба, який проходить через точку O перпендикулярно до прямої AC. Знайдіть площу цього перерізу.

10.34.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої площини.

10.35.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що прямі, які проходять через дану точку прямої та перпендикулярні до цієї прямої, лежать в одній площині, яка проходить через дану точку та перпендикулярна до цієї прямої.

10.36.$^{\bullet\bullet}$ Чи існують у просторі чотири попарно перпендикулярні прямі?

10.37.$^{\bullet\bullet}$ Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a. На ребрі AD позначено точку M таку, що $AM : MD = 3 : 1$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до ребра AD. Знайдіть площу цього перерізу.

10.38.$^{\bullet\bullet}$ Ребра тетраедра $DABC$ рівні, точка O — центр трикутника ABC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку O перпендикулярно до прямої AD.

10.39.$^{\bullet\bullet}$ Точка M — середина ребра BC тетраедра $DABC$. Відомо, що $AD = AB = CB = CD = 10$ см, $AC = 8$ см, $BD = 12$ см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої BD. Знайдіть площу цього перерізу.

10.40.$^{\bullet\bullet}$ На ребрі AB тетраедра $DABC$ позначили точку K так, що $AK = 2BK$. Відомо, що $AB = AC = 13$ см, $BC = CD = DB = 15$ см, $AD = 14$ см. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку K і перпендикулярна до прямої AD. Знайдіть площу цього перерізу.

10.41.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину B прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведено пряму BD, перпендикулярну до площини ABC. На відрізках DC і DA позначено точки E і F такі, що $EF \parallel AC$. Доведіть, що $BE \perp EF$.

10.42.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину B квадрата $ABCD$ проведено пряму BM, перпендикулярну до площини квадрата. Доведіть, що лінія перетину площин ABM і CDM перпендикулярна до площини BCM.

10.43.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину A трикутника ABC проведено пряму AD, перпендикулярну до площини ABC. Медіани трикутника ABC перетинаються в точці E, а медіани трикутника DBC — у точці F. Доведіть, що пряма EF перпендикулярна до площини ABC.

10.44.•• У тетраедрі $DABC$ ребро BD перпендикулярне до площини ADC, $\angle DAC = 90°$, $AD = AC = 10\sqrt{2}$ см, $BD = 12$ см. Точка M — середина ребра AC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до ребра CD. Знайдіть площу цього перерізу.

10.45.•• У тетраедрі $DABC$ ребро BD перпендикулярне до площини ABC. Відомо, що $AB = BC = CA = BD$. Точка M — середина ребра BC. Площина, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої AD, перетинає ребро AD у точці K. Знайдіть відношення $AK : KD$.

10.46.•• Точка M — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої B_1D. Знайдіть площу цього перерізу.

10.47.•• Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$), катет AC якого дорівнює a. Грані AA_1C_1C і CC_1B_1B є квадратами. Точка M — середина ребра BC. Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої A_1B. Знайдіть площу цього перерізу.

10.48.•• Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть косинус кута між прямими AB_1 і A_1E.

10.49.* Основою піраміди $SABC$ є рівносторонній трикутник ABC, сторона якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Ребро SC перпендикулярне до площини основи та дорівнює 2 см. Точки M і K — середини ребер BC і AB відповідно. Знайдіть кут між прямими SM і CK.

10.50.* Ребро DC тетраедра $DABC$ дорівнює 2 см і перпендикулярне до площини ABC. Грань ABC є рівнобедреним прямокутним трикутником, катети AC і BC якого дорівнюють 4 см. Точки M і N — середини ребер AC і AB відповідно. Знайдіть кут між прямими DM і CN.

10.51.* Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$), у якій $AD = 10$ см, $BC = 5$ см, $AB = 3$ см, $CD = 4$ см. Ребро SD піраміди перпендикулярне до площини основи та дорівнює 8 см. Точка M — середина ребра AS. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої CD. Знайдіть площу цього перерізу.

10.52.* Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$), у якій $AB = BC = CD = 1$ см, $AD = 2$ см. Ребро SD піраміди перпендикулярне до площини основи та дорівнює 4 см. Точка M — середина ребра AS. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої AC. Знайдіть площу цього перерізу.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.53. Коло із центром на гіпотенузі прямокутного трикутника дотикається до більшого катета та проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 3 см і 4 см.

10.54. Бісектриса тупого кута ABC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинає основу AD у точці E. Відомо, що $BE \perp AC$, а чотирикутник $BCDE$ — паралелограм. Знайдіть: 1) основу BC трапеції, якщо її периметр дорівнює 40 см; 2) кути трапеції.

11. Перпендикуляр і похила

Нехай фігура F_1 — паралельна проекція фігури F на площину α в напрямі прямої l. Якщо $l \perp \alpha$, то фігуру F_1 називають **ортогональною проекцією** фігури F на площину α.

Наприклад, основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ортогональною проекцією основи $A_1B_1C_1D_1$ на площину ABC у напрямі прямої AA_1 (рис. 11.1).

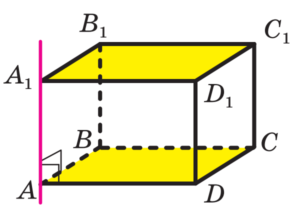


Рис. 11.1

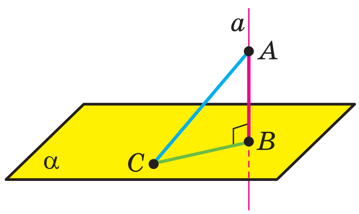


Рис. 11.2

Надалі, говорячи про проекцію фігури, якщо не обумовлено інше, матимемо на увазі ортогональну проекцію.

Нехай дано площину α і точку A, яка їй не належить. Через точку A проведемо пряму a, перпендикулярну до площини α. Нехай $a \cap \alpha = B$ (рис. 11.2). Відрізок AB називають **перпендикуляром**, опущеним із точки A на площину α, точку B — **основою перпендикуляра**. Основа B перпендикуляра AB — це проекція точки A на площину α.

Позначимо на площині α яку-небудь точку C, відмінну від точки B. Проведемо відрізок AC (рис. 11.2). Відрізок AC називають **похилою**, проведеною з точки A до площини α, точку C — **основою похилої**. Відрізок BC є **проекцією похилої** AC.

Теорема 11.1. ***Якщо з однієї точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, то похила більша за перпендикуляр.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача 1. Доведіть, що коли точка, яка не належить площині многокутника, рівновіддалена від його вершин, то проекцією цієї точки на площину многокутника є центр його описаного кола.

Розв'язання. Проведемо доведення для трикутника. Для інших многокутників доведення буде аналогічним.

Нехай точка M не належить площині ABC, причому $MA = MB = MC$. Опустимо з точки M перпендикуляр MO на площину ABC (рис. 11.3). Доведемо, що точка O — центр описаного кола трикутника ABC.

Оскільки $MO \perp ABC$, то $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90°$. У прямокутних трикутниках MOA, MOB, MOC катет MO спільний, гіпотенузи рівні, отже, ці трикутники є рівними за гіпотенузою і катетом. З рівності цих трикутників випливає, що $OA = OB = OC$, тобто точка O — центр описаного кола трикутника ABC. ◄

Зауважимо, що коли потрібно визначити відстань між двома геометричними фігурами, то намагаються знайти відстань між їхніми найближчими точками. Якщо такі точки існують, то відстань між ними називають **відстанню між даними фігурами**.

Наприклад, якщо точка не належить площині, то **відстанню від точки до площини** називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки на площину. Якщо точка належить площині, то вважають, що **відстань від точки до площини** дорівнює нулю.

На рисунку 11.4 відстань від точки A до півплощини дорівнює довжині відрізка AB.

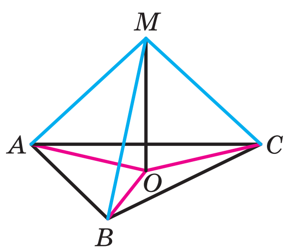


Рис. 11.3

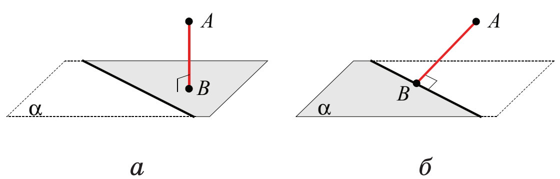


Рис. 11.4

Оскільки довільні точка і пряма лежать в одній площині, то відстань від точки до прямої, від точки до променя та від точки до відрізка в стереометрії визначають так само, як і в планіметрії.

Задача 2. Доведіть, що коли пряма паралельна площині, то всі точки прямої рівновіддалені від площини.

Розв'язання. Нехай A і B — дві довільні точки прямої a, паралельної площині α. Точки A_1 і B_1 — основи перпендикулярів, опущених відповідно з точок A і B на площину α (рис. 11.5). Доведемо, що $AA_1 = BB_1$.

За теоремою 10.3 $AA_1 \parallel BB_1$. Отже, точки A, A_1, B_1 і B лежать в одній площині. Площина ABB_1 проходить через пряму a, паралельну площині α, і перетинає площину α по прямій A_1B_1. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо: $AB \parallel A_1B_1$. Таким чином, у чотирикутнику AA_1B_1B кожні дві протилежні сторони паралельні. Отже, чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Звідси $AA_1 = BB_1$.

Оскільки точки A і B вибрано на прямій a довільно, то твердження задачі доведено. ◄

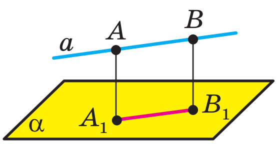


Рис. 11.5

Рис. 11.6

Доведена властивість дає змогу прийняти таке означення.

Означення. Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.

Задача 3. Доведіть, що коли дві площини паралельні, то всі точки однієї площини рівновіддалені від другої площини.

Розв'яжіть цю задачу самостійно.

Означення. Відстанню між двома паралельними площинами називають відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Результати, отримані в ключових задачах 2 і 3, часто використовують у практичній діяльності, наприклад у будівництві (рис. 11.6).

Нехай дано мимобіжні прямі a і b. Проведемо через ці прямі паралельні площини α і β (рис. 11.7). Можливість такої побудови випливає з ключової задачі 6.25. **Відстанню між мимобіжними прямими** a і b називають відстань між площинами α і β.

Зрозуміло, що відстань між мимобіжними прямими a і b також дорівнює відстані між прямою b та площиною α або між прямою a та площиною β.

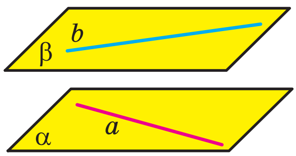


Рис. 11.7

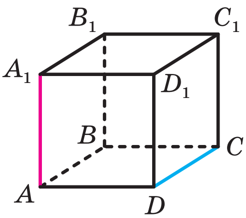


Рис. 11.8

Наприклад, у кубі (рис. 11.8) відстань між мимобіжними прямими AA_1 і CD дорівнює довжині ребра куба. Справді, ці прямі лежать у паралельних площинах AA_1B_1 і DD_1C_1, відстань між якими дорівнює довжині ребра куба.

Задача 4. Доведіть, що для будь-яких двох мимобіжних прямих існує відрізок, перпендикулярний до цих прямих, кінці якого належать цим прямим.

Розв'язання. Нехай прямі a і b мимобіжні та пряма b паралельна площині α, яка проходить через пряму a (рис. 11.7).

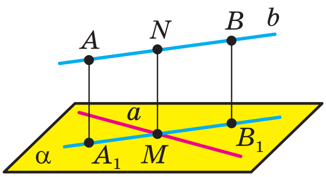


Рис. 11.9

Із точок A і B прямої b опустимо перпендикуляри AA_1 і BB_1 на площину α. Нехай пряма A_1B_1 перетинає пряму a в точці M (рис. 11.9). У площині ABB_1 із точки M опустимо перпендикуляр MN на пряму b.

Оскільки чотирикутник AA_1B_1B — прямокутник, то $MN \parallel B_1B$. За теоремою 10.2 отримуємо, що $MN \perp \alpha$, а отже, $MN \perp a$. ◄

Зауважимо, що побудований відрізок MN дорівнює відрізку B_1B. Таким чином, відстань між мимобіжними прямими a і b дорівнює довжині відрізка MN.

Означення. Спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих називають відрізок, який перпендикулярний до цих прямих і кінці якого належать цим прямим.

На рисунку 11.9 відрізок MN — спільний перпендикуляр мимобіжних прямих a і b.

Вище ми показали, що довжина спільного перпендикуляра мимобіжних прямих дорівнює відстані між цими прямими.

Так, у кубі (рис. 11.10) відстань між мимобіжними прямими BD і CC_1 дорівнює довжині відрізка CO. Справді, $CO \perp BD$, оскільки AC і BD — діагоналі квадрата $ABCD$; $CC_1 \perp CO$, оскільки $CC_1 \perp ABC$. Отже, відрізок CO — спільний перпендикуляр мимобіжних прямих BD і CC_1.

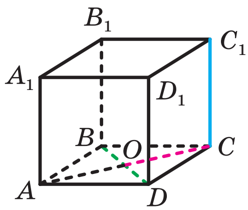


Рис. 11.10

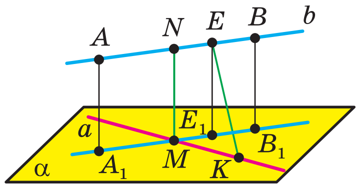


Рис. 11.11

Як уже зазначалося, під час пошуку відстані між фігурами з усіх відрізків, кінці яких належать даним фігурам, прагнуть найти відрізок найменшої довжини. Доведемо, що спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих має цю властивість.

Для мимобіжних прямих, зображених на рисунку 11.9, розглянемо довільний відрізок EK, відмінний від відрізка MN, такий, що $E \in b$ і $K \in a$ (рис. 11.11). Доведемо, що $MN < EK$.

Нехай точка E_1 — проекція точки E на площину α. Оскільки проекцією прямої b є пряма A_1B_1, то $E_1 \in A_1B_1$. Тоді відрізки EE_1 і EK є відповідно перпендикуляром і похилою, проведеними з точки E до площини α. Отже, $EE_1 < EK$. Проте $EE_1 = MN$. Звідси $MN < EK$.

Ми розглянули випадок, коли точка E не збігається з точкою N, а точка K — з точкою M. Випадки можливого збігу цих точок розгляньте самостійно.

Зазвичай шукати відстань між мимобіжними прямими шляхом побудови їхнього спільного перпендикуляра та знаходження його довжини не просто. Існує кілька ефективних методів розв'язування цієї задачі. Один із них ґрунтується на пошуку відстані між паралельними площинами, у яких лежать дані мимобіжні прямі. Ми проілюстрували цей прийом за допомогою рисунка 11.8. Продемонструємо ще один прийом пошуку відстані між мимобіжними прямими в такій задачі.

Задача 5. Нехай a і b — мимобіжні прямі, причому $a \perp \alpha$, точка O і пряма b_1 — відповідно проекції прямих a і b на площину α (рис. 11.12). Доведіть, що відстань між мимобіжними прямими a і b дорівнює відстані від точки O до прямої b_1.

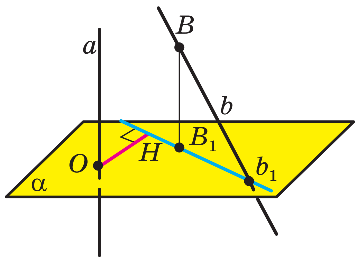


Рис. 11.12

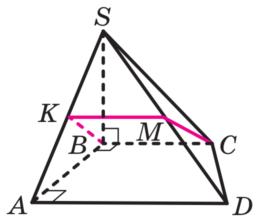


Рис. 11.13

Розв'язання. Нехай B — довільна точка прямої b і B_1 — її проекція на площину α. Прямі b і BB_1, що перетинаються, визначають деяку площину β, яка перетинає площину α по прямій b_1. Оскільки $a \perp \alpha$ і $BB_1 \perp \alpha$, то $a \parallel BB_1$. Отже, $a \parallel \beta$. Тоді відстань між мимобіжними прямими a і b дорівнює відстані між прямою a і площиною β.

Опустимо з точки O перпендикуляр OH на пряму b_1. Оскільки $BB_1 \perp \alpha$ і $OH \subset \alpha$, то $OH \perp BB_1$. За теоремою 10.1 отримуємо, що $OH \perp \beta$. Звідси довжина відрізка OH є відстанню від прямої a до площини β. Таким чином, відстань між мимобіжними прямими a і b дорівнює довжині відрізка OH. ◄

Задача 6. Прямокутна трапеція $ABCD$ $(\angle A = \angle B = 90°)$ є основою чотирикутної піраміди $SABCD$. Відомо, що $AB = SB$, $AS = a$, $\angle SBC = 90°$. Знайдіть відстань між прямими AD і CM, де M — середина ребра SD (рис. 11.13).

Розв'язання. Маємо: $CB \perp AB$, $CB \perp SB$, отже, $CB \perp ASB$. Оскільки $AD \parallel CB$, то $AD \perp ASB$.

Нехай точка K — середина ребра AS. Тоді відрізок MK — середня лінія трикутника ASD. Звідси $AD \parallel KM$. Оскільки $AD \perp ASB$, то $KM \perp ASB$.

Проекцією прямої AD на площину ASB є точка A, проекцією прямої CM — пряма BK. Оскільки відрізок BK — медіана рівнобедреного трикутника ABS, то $AK \perp BK$. Отже, за ключовою задачею 5 довжина відрізка AK є відстанню між мимобіжними прямими AD і CM. Маємо: $AK = \frac{1}{2} AS = \frac{a}{2}$. ◄

Покажемо, як за допомогою ключової задачі 5 можна знайти відстань між мимобіжними прямими, що містять діагоналі сусідніх граней куба.

Задача 7. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a провели прямі A_1C_1 і B_1C (рис. 11.14). Знайдіть відстань між цими прямими.

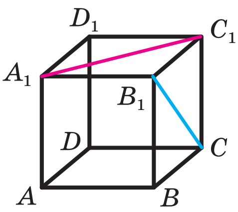


Рис. 11.14

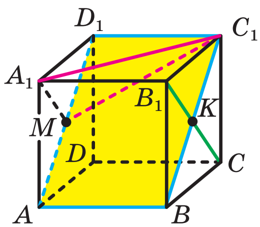


Рис. 11.15

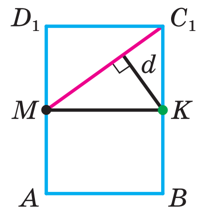


Рис. 11.16

Розв'язання. Спроектуємо куб на площину ABC_1D_1, перпендикулярну до відрізка B_1C (рис. 11.15). Тоді проекцією куба буде прямокутник ABC_1D_1, причому пряма B_1C спроектується в точку K — середину сторони BC_1 прямокутника, а пряма A_1C_1 — у пряму MC_1, де M — середина сторони AD_1 прямокутника (рис. 11.16). Маємо: $MD_1 = \frac{AD_1}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$. Звідси $MC_1 = \sqrt{MD_1^2 + D_1C_1^2} = \frac{\sqrt{6}a}{2}$. Таким чином, відстань між прямими A_1C_1 і B_1C дорівнює відстані d від точки K до прямої MC_1 (рис. 11.16). Маємо:

$$d = KC_1 \sin \angle KC_1M = KC_1 \cdot \frac{KM}{MC_1} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{a}{\frac{\sqrt{6}a}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{3}. \blacktriangleleft$$

1. У якому разі говорять, що фігура F_1 є ортогональною проекцією фігури F?
2. Опишіть, який відрізок називають:
   1) перпендикуляром, опущеним із точки на площину;
   2) похилою, проведеною з точки до площини.
3. Сформулюйте теорему про перпендикуляр і похилу, проведені до площини з однієї точки.
4. Що називають відстанню від точки до площини? відстанню від прямої до паралельної їй площини? відстанню між двома паралельними площинами? відстанню між двома мимобіжними прямими?
5. Що називають спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих?

ВПРАВИ

11.1.° На рисунку 11.17 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть проекцію відрізка C_1D на площину:

1) ABC; 2) BB_1C; 3) AA_1B_1.

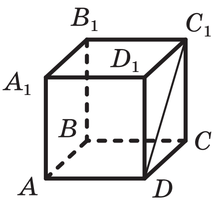


Рис. 11.17

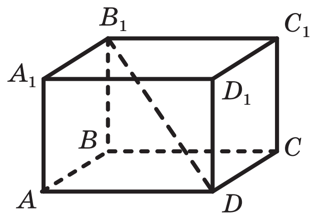


Рис. 11.18

11.2.° На рисунку 11.18 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть проекцію відрізка DB_1 на площину:

1) $A_1B_1C_1$; 2) CDD_1; 3) AA_1D_1.

11.3.° Із точки до площини проведено перпендикуляр завдовжки 12 см і похилу завдовжки 13 см. Знайдіть проекцію цієї похилої на дану площину.

11.4.° Із точки A до площини α проведено перпендикуляр і похилу завдовжки $\sqrt{7}$ см. Проекція даної похилої на площину α дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

11.5.° Із точки A проведено до площини α перпендикуляр AC та похилі AB і AD (рис. 11.19). Знайдіть проекцію похилої AD на площину α, якщо $\angle BAC = 45°$, $AB = 8$ см, $AD = 9$ см.

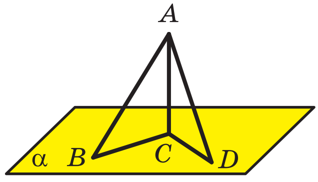


Рис. 11.19

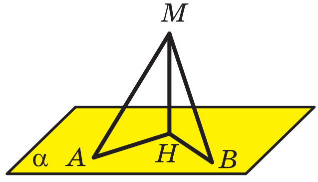


Рис. 11.20

11.6.° Із точки M проведено до площини α перпендикуляр MH та похилі MA і MB (рис. 11.20). Знайдіть похилу MA, якщо $BH = 6\sqrt{6}$ см, $MB = 18$ см, $\angle MAH = 60°$.

11.7.° Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, мають рівні проекції.

11.8.° Доведіть, що коли проекції двох похилих, проведених до площини з однієї точки, є рівними, то є рівними й похилі.

11.9.° Доведіть, що коли точка належить прямій, яка перпендикулярна до площини многокутника та проходить через центр кола, описаного навколо многокутника, то ця точка рівновіддалена від вершин многокутника.

11.10.° Відстань між паралельними площинами α і β дорівнює 4 см. Прямі m і n мимобіжні, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$. Чому дорівнює відстань між прямими m і n?

11.11.° Відстань між мимобіжними прямими, які належать відповідно паралельним площинам α і β, дорівнює 10 см. Чому дорівнює відстань між площинами α і β?

11.12.° Відстань між паралельними прямими, які належать відповідно паралельним площинам α і β, дорівнює 7 см. Чи є правильним твердження, що відстань між площинами α і β дорівнює 7 см?

11.13.° На рисунку 11.21 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між прямими AB і DD_1.

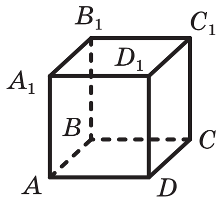


Рис. 11.21

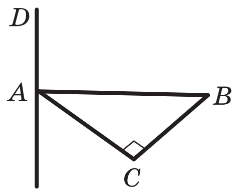


Рис. 11.22

11.14.° Через вершину A прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведено пряму AD, перпендикулярну до площини ABC (рис. 11.22). Знайдіть відстань між прямими AD і BC, якщо $AB = 10$ см, $\angle BAC = 45°$.

11.15.° Із точки M провели до площини α рівні похилі MA, MB, MC і MD. Чи можуть точки A, B, C і D бути вершинами:

1) прямокутника;
2) ромба;
3) прямокутної трапеції;
4) рівнобічної трапеції?

11.16.• Доведіть, що з двох похилих, проведених до площини з однієї точки, більшу проекцію має більша похила.

11.17.° Доведіть, що з двох похилих, проведених до площини з однієї точки, більшою є та, проекція якої більша.

11.18.° Із точки A до площини α проведено похилі AB і AC завдовжки 25 см і 17 см відповідно. Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо проекції даних похилих на цю площину відносяться як 5 : 2.

11.19.° Із точки D до площини α проведено похилі DA і DB, сума яких дорівнює 28 см. Знайдіть ці похилі, якщо їхні проекції на площину α дорівнюють відповідно 9 см і 5 см.

11.20.° Із точки M до площини α проведено похилі MN і MK, які утворюють зі своїми проекціями на дану площину кути по 60°. Знайдіть відстань між основами даних похилих, якщо кут між похилими становить 90°, а відстань від точки M до площини α дорівнює $\sqrt{3}$ см.

11.21.° Із точки A до площини α проведено похилі AB і AC, які утворюють зі своїми проекціями на дану площину кути по 30°. Знайдіть дані похилі та відстань від точки A до площини α, якщо кут між проекціями похилих становить 90°, а відстань між основами похилих дорівнює 6 см.

11.22.° Точка M розташована на відстані 6 см від кожної вершини правильного трикутника ABC, сторона якого дорівнює 9 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ABC.

11.23.° Катети прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) дорівнюють 6 см і 8 см. Точка D віддалена від кожної вершини даного трикутника на 13 см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC.

11.24.° Точка M рівновіддалена від вершин трикутника ABC і віддалена від площини ABC на відстань d. Знайдіть відстань від точки M до вершин даного трикутника, якщо $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

11.25.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 4\sqrt{5}$ см, $AC = 8$ см. Точка D розташована на відстані $5\sqrt{5}$ см від кожної вершини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC.

11.26.° Вершина A трикутника ABC лежить у площині α, а сторона BC паралельна площині α. Із точок B і C опущено на площину α перпендикуляри BB_1 і CC_1. Проекція відрізка AB на площину α дорівнює $\sqrt{14}$ см, а проекція відрізка AC — $3\sqrt{5}$ см. Знайдіть сторону BC, якщо $BB_1 = 2$ см, $\angle BAC = 45°$.

11.27.$^{\bullet}$ Через вершину B прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведено площину β, паралельну прямій AC. Знайдіть проекцію гіпотенузи AB на площину β, якщо $BC = 20$ см, $AC = 15$ см, а проекція катета BC на цю площину дорівнює 12 см.

11.28.$^{\bullet}$ Сторона AD ромба $ABCD$ лежить у площині α. Пряма BC віддалена від площини α на 3 см. Знайдіть проекції на площину α відрізків CD, AC і BD, якщо $AC = 8$ см, $BD = 6$ см.

11.29.$^{\bullet}$ Вершини A і B прямокутника $ABCD$ належать площині α, а вершини C і D не належать цій площині. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α, якщо $AB = 5$ см, $BC = 12$ см, а проекція діагоналі прямокутника на площину α дорівнює $2\sqrt{22}$ см.

11.30.$^{\bullet}$ Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між прямими B_1D_1 і AA_1.

11.31.$^{\bullet}$ Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Точки O і O_1 — центри відповідно граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ куба. Знайдіть відстань між прямими CD і OO_1.

11.32.$^{\bullet}$ Пряма m проходить через вершину A трикутника ABC і перпендикулярна до його площини. Відстань між прямими m і BC дорівнює 8 см. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BC = 10$ см.

11.33.$^{\bullet}$ Пряма a проходить через вершину B паралелограма $ABCD$ і перпендикулярна до його площини. Знайдіть відстань між прямими a і CD, якщо $AB = 6$ см, а площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 72 см^2.

11.34.$^{\bullet\bullet}$ Із точки M до площини α проведено перпендикуляр MH та похилі MA і MB так, що $\angle MAH = 30°$, $\angle MBH = 45°$, а кут між проекціями похилих дорівнює $90°$. Знайдіть косинус кута між даними похилими.

11.35.$^{\bullet\bullet}$ Із точки A до площини α проведено перпендикуляр AO та похилі AB і AC так, що $\angle ABO = \angle ACO = 45°$, а косинус кута між похилими дорівнює $\frac{1}{4}$. Знайдіть кут між проекціями даних похилих.

11.36.$^{\bullet\bullet}$ Основи трапеції дорівнюють 15 см і 20 см. Через більшу основу трапеції проведено площину α на відстані 14 см від її меншої основи. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до площини α.

11.37.•• Сторони AB і BC паралелограма $ABCD$ дорівнюють 20 см і $5\sqrt{3}$ см. Пряма AB належить площині α. Проекції відрізків AC і BD на площину α дорівнюють 18 см і 24 см відповідно. Знайдіть відстань від прямої CD до площини α.

11.38.•• Сторона AD паралелограма $ABCD$ належить площині α. Точки B_1 і C_1 є відповідно проекціями точок B і C на площину α. Відомо, що $BB_1 = 8$ см, $AB = 17$ см, $B_1D = 24$ см, $C_1A = 12$ см. Знайдіть відрізок AD.

11.39.•• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Точка M — середина ребра C_1D_1. Знайдіть відстань від точки D_1 до площини AMD.

11.40.•• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Точка K — середина ребра AA_1. Знайдіть відстань від точки B_1 до площини CBK.

11.41.•• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Знайдіть відстань між прямими B_1D і AC.

11.42.•• Довжина кожного ребра тетраедра $DABC$ дорівнює 1 см. Знайдіть відстань між прямими AB і CD.

11.43.•• Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка M є такою, що $OM = 1$ см. Через точку M проведено площину α, яка не має з паралелограмом спільних точок. Доведіть, що сума відстаней від вершин паралелограма до площини α не більша за 4 см.

11.44.* Площини α і β паралельні. Точки A і C належать площині α, а точки B і D — площині β. Відомо, що $AB \perp \alpha$, $BD = 20$ см, $AC = 13$ см, $CD = 35$ см, а відстань між прямими AB і CD дорівнює 12 см. Знайдіть відстань між площинами α і β.

11.45.* Площини α і β паралельні. Точки M і K належать площині α, а точки N і F — площині β. Відомо, що $MN \perp \beta$, $MN = 12$ см, $MK = 4$ см, $NF = 3$ см, $KF = 13$ см. Знайдіть відстань між прямими MN і KF.

11.46.* У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AD = AA_1 = 2$ см, $AB = 4$ см. Знайдіть відстань між прямими DA_1 і CD_1.

11.47.* Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Точка M — середина ребра CC_1. Знайдіть відстань між прямими DA_1 і MD_1.

11.48.* Ребро DB тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC. Точка M — середина ребра BC. Знайдіть відстань між прямими AC і DM, якщо $BD = 3$ см, $AC = 12$ см, $AB = BC = 10$ см.

11.49.* Ребро SA піраміди $SABC$ перпендикулярне до площини ABC. Точки K і M — середини ребер BC і AC відповідно. Знайдіть відстань між прямими SK і BM, якщо $SA = 5$ см, $AC = 16$ см, $AB = BC$.

11.50.* Основою піраміди $SABC$ є рівносторонній трикутник ABC, сторона якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Ребро SC перпендикулярне до площини основи та дорівнює 2 см. Точки M і K — середини ребер BC і AB відповідно. Знайдіть відстань між прямими SM і CK.

11.51.* Ребро DC тетраедра $DABC$ дорівнює 2 см і перпендикулярне до площини ABC. Грань ABC є рівнобедреним прямокутним трикутником, катети AC і BC якого дорівнюють 4 см. Точки M і N — середини ребер AC і AB відповідно. Знайдіть відстань між прямими DM і CN.

11.52.* Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Пряма SO перпендикулярна до площини ромба. Точка K — середина ребра SA. Точка X належить прямій DK. Знайдіть найменше значення площі трикутника AXC, якщо $SO = 42$ см, $AC = 58$ см, $BD = 40$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.53. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 18 см. У цю трапецію вписано коло й навколо цієї трапеції описано коло. Знайдіть радіуси кіл.

11.54. Бічна сторона рівнобедреного трикутника ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 12 : 25, рахуючи від вершини кута при основі трикутника. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо площа трикутника дорівнює 1680 см^2.

12. Теорема про три перпендикуляри

Теорема 12.1 (теорема про три перпендикуляри). ***Якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до проекції похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до самої похилої. І навпаки, якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину.***

Доведення. Доведемо першу частину теореми.

Нехай пряма a, яка належить площині α, перпендикулярна до проекції BC похилої AC (рис. 12.1). Доведемо, що $a \perp AC$.

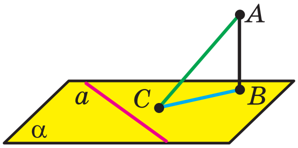


Рис. 12.1

Маємо: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, отже, $AB \perp a$. Отримали, що пряма a перпендикулярна до двох прямих AB і BC площини ABC, які перетинаються, отже, $a \perp ABC$. Оскільки $AC \subset ABC$, то $a \perp AC$.

Доведення другої частини теореми аналогічне доведенню першої частини. Проведіть його самостійно. ◄

Теорема про три перпендикуляри містить дві теореми: пряму й обернену. Формулювання взаємно обернених теорем можна об'єднати в одне за допомогою словосполучення «тоді й тільки тоді». Наприклад, теорему про три перпендикуляри можна сформулювати так:

пряма, яка належить площині, перпендикулярна до похилої до цієї площини тоді й тільки тоді, коли ця пряма перпендикулярна до проекції похилої.

Задача 1. Точка M не належить площині опуклого многокутника й рівновіддалена від усіх прямих, які містять його сторони. Проекцією точки M на площину многокутника є точка O, яка належить многокутнику. Доведіть, що точка O — центр вписаного кола многокутника.

Розв'язання. Проведемо доведення для трикутника. Для інших многокутників доведення буде аналогічним.

Опустимо з точки O перпендикуляри ON, OK і OE відповідно на прямі AB, BC і CA (рис. 12.2). Сполучимо точку M з точками E, K і N.

Відрізок ON є проекцією похилої MN на площину ABC. За побудовою $ON \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри отримуємо: $MN \perp AB$.

Аналогічно можна довести, що $MK \perp BC$ і $ME \perp CA$. Таким чином, довжини відрізків MN, MK і ME — відстані від точки M до прямих AB, BC і CA відповідно. За умовою $MN = MK = ME$.

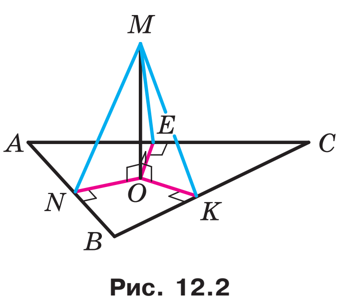


Рис. 12.2

У прямокутних трикутниках MON, MOK і MOE катет MO спільний, гіпотенузи рівні, отже, ці трикутники є рівними за катетом і гіпотенузою. З рівності цих трикутників випливає, що $ON = OK = OE$.

Довжини відрізків ON, OK і OE є відстанями від точки O до прямих, які містять сторони трикутника ABC. Ми показали, що ці відстані є рівними. Оскільки точка O належить трикутнику ABC, то точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. ◄

Задача 2. Через вершину O кута AOB проведено пряму OD так, що $\angle DOA = \angle DOB = \alpha$, де $0° < \alpha < 90°$ (рис. 12.3). Доведіть, що проекція прямої OD на площину AOB містить бісектрису кута AOB.

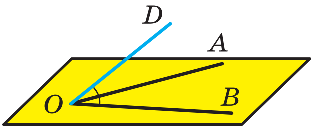


Рис. 12.3

Розв'язання. Якщо $OD \subset AOB$, то твердження задачі є очевидним.

Нехай пряма OD не належить площині AOB. Опустимо перпендикуляр DK на площину AOB (рис. 12.4). Тоді пряма OK є проекцією прямої OD на площину AOB. Опустимо перпендикуляри DN і DM відповідно на сторони OA і OB кута AOB. Сполучимо точку K з точками N і M.

Відрізок KM є проекцією похилої DM на площину AOB. За побудовою $DM \perp OB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри отримуємо, що $KM \perp OB$. Аналогічно можна довести, що $KN \perp OA$.

Прямокутні трикутники DON і DOM рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $DN = DM$. Тоді прямокутні трикутники DNK і DMK рівні за гіпотенузою та катетом, а отже, $KN = KM$. Отримуємо, що прямокутні трикутники ONK і OMK також є рівними за гіпотенузою та катетом. Звідси $\angle NOK = \angle MOK$. ◄

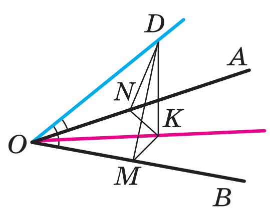


Рис. 12.4

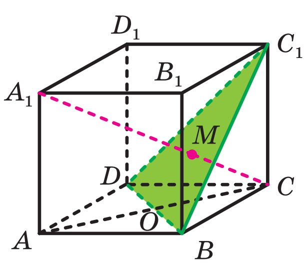


Рис. 12.5

Задача 3. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пряма A_1C перпендикулярна до площини DC_1B і ця площина ділить відрізок A_1C у відношенні $1 : 2$, рахуючи від точки C (рис. 12.5).

Розв'язання. Оскільки $A_1B_1 \perp BB_1C_1$, то відрізок B_1C є проекцією похилої A_1C на площину BB_1C_1. Відрізки B_1C і BC_1 перпендикулярні як діагоналі квадрата. Отже, за теоремою про три перпендикуляри $A_1C \perp BC_1$.

Аналогічно можна довести, що $A_1C \perp BD$. Отже, $A_1C \perp DC_1B$.

Розглянемо прямокутник AA_1C_1C (рис. 12.6). Нехай відрізки A_1C і C_1O перетинаються в точці M. Оскільки $C_1O \subset DC_1B$, то M — точка перетину відрізка A_1C із площиною DC_1B. Трикутники CMO і A_1MC_1 подібні. Тоді $\frac{CM}{MA_1} = \frac{CO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$. Отже, точка M ділить відрізок A_1C у відношенні $1 : 2$, рахуючи від точки C. ◄

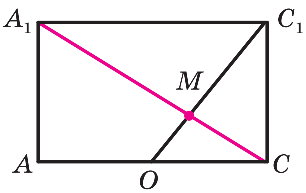


Рис. 12.6

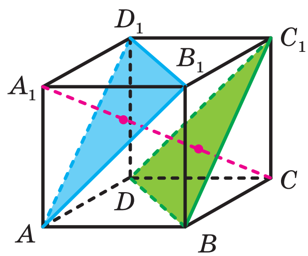


Рис. 12.7

У п. 11 ми навчилися знаходити відстань між мимобіжними прямими, які містять діагоналі сусідніх граней куба. Розглянемо ще один прийом розв'язування цієї задачі.

Задача 4. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром завдовжки a (рис. 12.7). Знайдіть відстань між прямими AB_1 і BC_1.

Розв'язання. Розглянемо площини AB_1D_1 і DC_1B, які містять розглядувані мимобіжні прямі AB_1 і BC_1.

За ключовою задачею 3 отримуємо, що $A_1C \perp DC_1B$. Аналогічно можна довести, що $A_1C \perp AD_1B_1$. З урахуванням теореми 10.5 доходимо висновку, що $AB_1D_1 \parallel DC_1B$. Отже, відстань між мимобіжними прямими AB_1 і BC_1 дорівнює відстані між площинами AB_1D_1 і DC_1B.

Ще раз звернувшись до ключової задачі 2, ми можемо стверджувати, що площини AB_1D_1 і DC_1B ділять відрізок A_1C на три рівні частини. Отже, шукана відстань дорівнює $\frac{1}{3}A_1C$.

Із трикутника ABC $(\angle ABC = 90°)$ отримуємо:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Із трикутника A_1AC $(\angle A_1AC = 90°)$ отримуємо:

$$A_1C = \sqrt{A_1A^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$

Тоді шукана відстань дорівнює $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. ◄

Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.

ВПРАВИ

12.1.° На рисунку 12.8 зображено квадрат $ABCD$, пряма NC перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі BD і NO перпендикулярні.

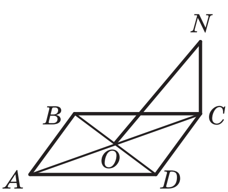


Рис. 12.8

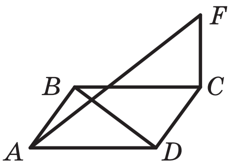


Рис. 12.9

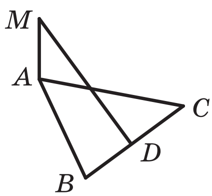


Рис. 12.10

12.2.° На рисунку 12.9 зображено ромб $ABCD$. Пряма FC перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі AF і BD перпендикулярні.

12.3.° На рисунку 12.10 зображено рівносторонній трикутник ABC, точка D — середина сторони BC. Пряма AM перпендикулярна до площини ABC. Доведіть, що $MD \perp BC$.

12.4.° Пряма AO перпендикулярна до площини кола із центром O (рис. 12.11). Пряма a належить площині кола й дотикається до даного кола в точці B. Доведіть, що $AB \perp a$.

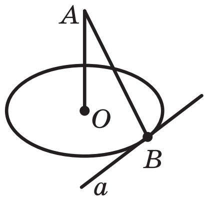


Рис. 12.11

12.5.° Відрізок BD — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC з основою AC (рис. 12.12). Побудуйте перпендикуляр, опущений із точки D на пряму AC.

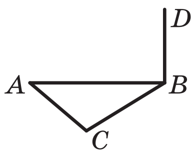


Рис. 12.12

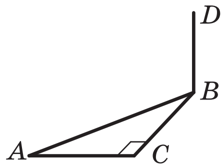


Рис. 12.13

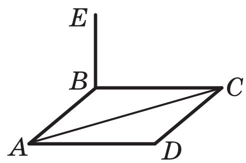


Рис. 12.14

12.6.° Відрізок BD — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC із прямим кутом при вершині C (рис. 12.13). Побудуйте перпендикуляр, опущений із точки D на пряму AC.

12.7.° Відрізок BE — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ (рис. 12.14). Побудуйте перпендикуляр, опущений із точки E на пряму AC.

12.8.° Пряма MA перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$, $MD \perp CD$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

12.9.° Пряма MB перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$, $MD \perp AC$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.

12.10.• Відрізок DA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = 10$ см, $AC = 17$ см, $BC = 21$ см. Знайдіть відстань від точки D до прямої BC, якщо відстань від точки D до площини ABC дорівнює 15 см.

12.11.• Відрізок AB — діаметр кола із центром O, відрізок BC — його хорда, $AB = 12$ см, $\angle ABC = 30°$. Відрізок AE — перпендикуляр до площини даного кола. Знайдіть відстань від точки E до площини кола, якщо відстань від точки E до прямої BC дорівнює 10 см.

12.12.• Відрізок MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямої CD, якщо $\angle BAD = 30°$, $AD = 10$ см, $MA = 5\sqrt{3}$ см.

12.13.• Відрізок DA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $\angle ABC = 120°$, $AB = 14$ см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC, якщо ця точка віддалена від прямої BC на $2\sqrt{43}$ см.

12.14.• Точка M рівновіддалена від усіх прямих, які містять сторони правильного трикутника ABC. Проекцією точки M на площину ABC є точка O, яка належить трикутнику. Знайдіть відстань від точки M до сторони AB, якщо відстань від цієї точки до площини ABC дорівнює $3\sqrt{2}$ см, $AB = 18$ см.

12.15.• Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 16 см. Точка M розташована на відстані 5,2 см від кожної прямої, що містить сторону ромба. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

12.16.• Точка M не належить площині трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) і розташована на відстані $2\sqrt{5}$ см від кожної з прямих, що містять його сторони. Проекцією точки M на площину ABC є точка O, яка належить даному трикутнику. Точка дотику гіпотенузи AB до кола, вписаного в трикутник ABC, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 10 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ABC.

12.17.• Точка M не належить площині многокутника, а її проекцією на площину многокутника є центр кола, вписаного в многокутник. Доведіть, що точка M рівновіддалена від сторін даного многокутника.

12.18.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 36 см. Через центр O кола, вписаного в цю трапецію, до її площини проведено перпендикуляр MO. Точка M розташована на відстані 16 см від площини трапеції. Знайдіть відстань від точки M до сторін трапеції.

12.19.• Точка O — центр кола, вписаного в трапецію $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ см, $\angle ADC = 45°$. Відрізок MO — перпендикуляр до площини трапеції. Точка M віддалена від площини трапеції на $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки M до сторін трапеції.

12.20.•• Паралельні прямі a, b і c не лежать в одній площині. Відстань між прямими a і b дорівнює 25 см, а між прямими b і c — 17 см. Відстань між прямою b і площиною, у якій лежать прямі a і c, дорівнює 15 см. Знайдіть відстань між прямими a і c.

12.21.•• Точка M віддалена від паралельних прямих a і b відповідно на 10 см і 17 см, а від площини, яка проходить через прямі a і b, — на 8 см. Знайдіть відстань між прямими a і b.

12.22.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими A_1C і B_1D_1.

12.23.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $CD_1 \perp AB_1C_1$.

12.24.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки E, F і M — середини ребер AB, AD і AA_1 відповідно. Доведіть, що $AC_1 \perp EFM$.

12.25.•• Ребро DA тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 12.15), $AC = AD$, $\angle ACB = 90°$, точка M — середина ребра BD. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої CD.

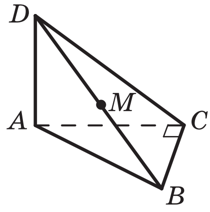


Рис. 12.15

12.26.•• Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a. Із точки D опущено перпендикуляр DO на площину ABC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму DO та перпендикулярна до прямої AB, і знайдіть площу побудованого перерізу.

12.27.•• Діагональ AC ромба $ABCD$ лежить у площині α, а точка B віддалена від площини α на $3\sqrt{7}$ см. Знайдіть проекцію діагоналі BD на площину α, якщо $BD = 24$ см.

12.28.•• Сторона AC трикутника ABC лежить у площині α, а точка B віддалена від площини α на 5 см. Проекції відрізків AB і BC на площину α дорівнюють відповідно 12 см і 15 см, $AC = 9$ см. Знайдіть площу трикутника ABC.

12.29.•• Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 6 см. Точка M віддалена від площини ABC на 1 см, а від вершини B — на 2 см. Відомо, що прямі MB і AC перпендикулярні. Знайдіть відстань від точки M до прямої AC.

12.30.•• У трикутнику ABC сторони AB і AC дорівнюють 13 см, сторона BC — 10 см. Точка K віддалена від площини ABC на 8 см, а від вершини A — на 10 см. Відомо, що прямі AK і BC перпендикулярні. Знайдіть відстань від точки K до прямої BC.

12.31.•• У трикутнику ABC сторони AB і BC дорівнюють 10 см, сторона AC — 12 см. Точка K віддалена від кожної з прямих AB, BC і CA на 13 см. Знайдіть відстань від точки K до площини ABC.

12.32.•• Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 6 см. Точка M віддалена від кожної з прямих AB, BC і CA на 14 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ABC.

12.33.* На ребрі AA_1 і діагоналі B_1D прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки K і M так, що відрізок KM — спільний перпендикуляр прямих AA_1 і B_1D. Знайдіть відношення $B_1M : MD$, якщо $AB : AD = 1 : 2$.

12.34.* Ребро DC тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC. Точка M — середина ребра AD. На відрізках DC і BM позначили відповідно точки E і P так, що відрізок EP — спільний перпендикуляр прямих DC і BM. Знайдіть відношення $MP : PB$, якщо $\angle ACB = 90°$ і $\angle BAC = 30°$.

12.35.* Ребра AB, AD і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відносяться як 3 : 4 : 5. Через вершину A проведено площину перпендикулярно до прямої B_1D. Пряма B_1D перетинає цю площину в точці M. Знайдіть відношення $B_1M : MD$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.36. Точка M належить гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC. Відстані від точки M до катетів AC і BC дорівнюють відповідно 8 см і 4 см. Площа трикутника ABC дорівнює 100 см^2. Знайдіть катети трикутника.

12.37. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять її гострі кути навпіл, а точкою перетину діляться у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 9 см.

13. Кут між прямою та площиною

Ви знаєте, що в стародавні часи мандрівники орієнтувалися за зорями. Вони вимірювали кут, що утворював із площиною горизонту промінь, який ішов від даної точки до небесного тіла.

Сьогодні людині у своїй діяльності також важливо вміти визначати кути, під якими нахилені до даної площини деякі об’єкти (рис. 13.1).

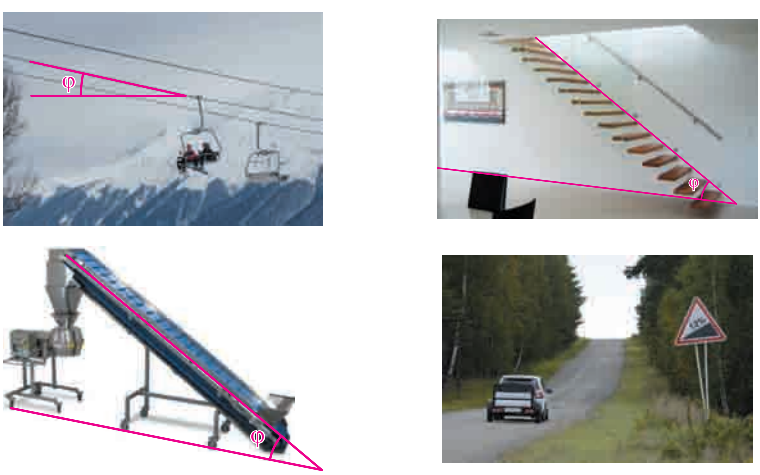


Рис. 13.1

Ці приклади показують, що доцільно ввести поняття кута між прямою та площиною.

Означення. **Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює 0°.**

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює 90°.

Якщо пряма перетинає площину й не перпендикулярна до неї, то кутом між такою прямою та площиною називають кут між прямою та її проекцією на площину (рис. 13.2).

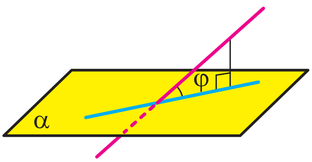


Рис. 13.2

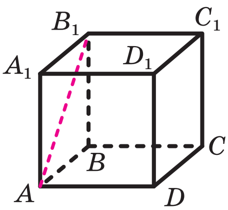


Рис. 13.3

З означення випливає, що коли φ — кут між прямою та площиною, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Також прийнято говорити, що пряма утворює кут φ з площиною.

Кутом між відрізком і площиною називають кут між прямою, яка містить цей відрізок, і площиною.

Наприклад, розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.3). Кут між діагоналлю AB_1 грані AA_1B_1B і площиною ABC дорівнює 45°. Справді, пряма AB — проекція прямої AB_1 на площину ABC. Тоді кут між прямою AB_1 і площиною ABC дорівнює куту B_1AB. Оскільки чотирикутник AA_1B_1B — квадрат, то $\angle B_1AB = 45°$.

Задача 1. Доведіть, що коли з однієї точки до площини проведено похилі, які утворюють рівні кути з площиною, то проекція даної точки на площину рівновіддалена від основ похилих.

Розв'язання. Нехай MA і MB — похилі, які утворюють із площиною α рівні кути, відрізки OA і OB — проекції цих похилих (рис. 13.4). Доведемо, що $OA = OB$.

Пряма OA є проекцією прямої MA на площину α. Оскільки кут MAO гострий, то він дорівнює куту між прямими OA і MA. Отже, величина кута MAO дорівнює куту між похилою MA та площиною α. Аналогічно можна довести, що величина кута MBO

дорівнює куту між похилою MB і площиною α. За умовою $\angle MAO = \angle MBO$.

Оскільки $MO \perp \alpha$, то $\angle MOA = \angle MOB = 90°$. Отримуємо, що прямокутні трикутники MOA і MOB є рівними за катетом і протилежним гострим кутом. Звідси $OA = OB$. ◄

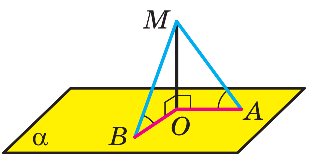


Рис. 13.4

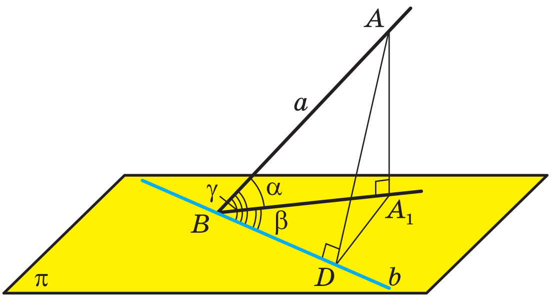


Рис. 13.5

Задача 2. Пряма a утворює з площиною π кут α, де $0° < \alpha < 90°$. Пряма b, яка належить площині π, утворює з прямою a кут γ, а з її проекцією на площину π — кут β. Доведіть, що $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Розв'язання. Нехай пряма a перетинає площину π у точці B. Виберемо на прямій a довільну точку A, відмінну від точки B. Нехай точка A_1 — її проекція на площину π. За умовою $\angle ABA_1 = \alpha$ (рис. 13.5).

Зважаючи на означення кута між двома прямими, достатньо розглянути випадок, коли пряма b проходить через точку B.

Якщо пряма b збігається з прямою A_1B, тобто $\beta = 0°$, то $\cos\beta = 1$ і $\alpha = \gamma$. Тоді рівність, яку ми доводимо, стає очевидною. Якщо $b \perp A_1B$, тобто $\beta = 90°$, то за теоремою про три перпендикуляри отримуємо, що $b \perp AB$, тобто $\gamma = 90°$. Тоді $\cos\gamma = \cos\beta = 0$ і рівність, яку потрібно довести, також стає очевидною.

Розглянемо випадок, коли $0° < \beta < 90°$. Із точки A опустимо перпендикуляр AD на пряму b (рис. 13.5). За умовою $\angle ABD = \gamma$ і $\angle A_1BD = \beta$. За теоремою про три перпендикуляри $A_1D \perp b$.

Із трикутника ABD маємо: $\cos\gamma = \dfrac{BD}{AB}$. Із трикутника ABA_1 маємо: $\cos\alpha = \dfrac{BA_1}{AB}$. Із трикутника DBA_1 маємо: $\cos\beta = \dfrac{BD}{BA_1}$. Звідси $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$. ◄

Оскільки в доведеній формулі $0° < \alpha < 90°$ і $0° \leqslant \beta \leqslant 90°$, то $0 < \cos\alpha < 1$. Тоді можна записати: $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta \leqslant \cos\alpha$. З нерівності $\cos\gamma \leqslant \cos\alpha$ з урахуванням властивостей косинуса кутів від 0° до 90° отримуємо, що $\alpha \leqslant \gamma$. Тим самим ми довели таку властивість:

якщо пряма не перпендикулярна до даної площини, то вона утворює з площиною кут, який не більший за будь-який кут між цією прямою та прямою, що лежить у даній площині.

Задача 3. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагоналі граней AD_1 і DC_1 утворюють відповідно кути α і β з площиною ABC (рис. 13.6). Знайдіть кут між прямими AD_1 і DC_1.

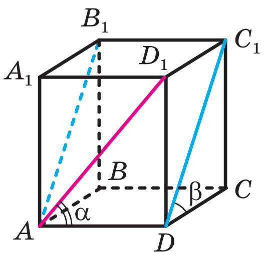


Рис. 13.6

Розв'язання. Пряма AD є проекцією прямої AD_1 на площину ABC. Тоді величина кута D_1AD — це кут між прямою AD_1 і площиною ABC. За умовою $\angle D_1AD = \alpha$. Аналогічно можна показати, що $\angle C_1DC = \beta$.

Оскільки $AB_1 \parallel DC_1$, то шуканий кут дорівнює куту B_1AD_1. Нехай $\angle B_1AD_1 = \gamma$. Зазначимо, що, знайшовши $\cos\gamma$, ми зможемо знайти й величину кута γ.

Пряма AA_1 є проекцією прямої AD_1 на площину AA_1B_1. Маємо: $\angle A_1AD_1 = 90° - \alpha$ і $\angle A_1AB_1 = 90° - \beta$. Скориставшись ключовою задачею 2, можна записати:

$$\cos\gamma = \cos(90° - \alpha)\cos(90° - \beta) = \sin\alpha\sin\beta. \blacktriangleleft$$

Що називають кутом між прямою та площиною?

ВПРАВИ

13.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грані $ABCD$ (рис. 13.7). Укажіть кут між:

1) прямою AB_1 і площиною $A_1B_1C_1$;
2) прямою AC_1 і площиною ABC;
3) прямою AC_1 і площиною CDD_1;
4) прямою OA_1 і площиною ABC;
5) прямою AC і площиною ADD_1.

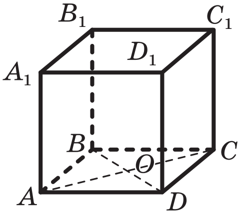


Рис. 13.7

13.2.° Із точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, яка утворює з даною площиною кут $50°$. Чому дорівнює кут між похилою та перпендикуляром?

13.3.° Із точки M до площини α проведено перпендикуляр MA та похилу MB, яка утворює з площиною α кут φ. Знайдіть:
1) проекцію похилої MB на площину α, якщо відстань від точки M до цієї площини дорівнює d;
2) похилу MB, якщо її проекція на площину α дорівнює a.

13.4.° Із точки A до площини α проведено похилу. Чому дорівнює кут між цією похилою та площиною α, якщо відстань від точки A до площини α:
1) дорівнює проекції похилої на площину α;
2) у два рази менша від самої похилої?

13.5.° Скільки похилих, які утворюють із площиною α кут $40°$, можна провести з точки A, що не належить цій площині?

13.6.° Кут між прямою та площиною дорівнює $35°$. Чи може дана пряма утворювати з деякою прямою даної площини кут:
1) $30°$; 2) $50°$?

13.7.° Пряма MA перпендикулярна до площини ABC (рис. 13.8), $AB = AM = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут, який утворює з площиною ABC пряма:
1) MB; 2) MC.

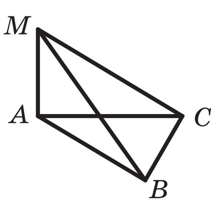


Рис. 13.8

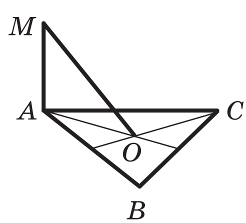


Рис. 13.9

13.8.° Точка O — центр правильного трикутника ABC (рис. 13.9), сторона якого дорівнює 6 см. Пряма MA перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть кут між прямою MO та площиною ABC, якщо $MA = 2$ см.

13.9.° Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, утворюють із цією площиною рівні кути.

13.10.° Доведіть, що коли кути, утворені з площиною похилими, проведеними до неї з однієї точки, рівні, то рівні й самі похилі.

13.11.° Із точки M до площини α провели перпендикуляр MB і похилі MA та MC. Знайдіть кут між прямою MC і площиною α, якщо $MA = 5\sqrt{2}$ см, $MC = 10$ см, а кут між прямою MA та площиною α дорівнює $45°$.

13.12.° Із точки A до площини α провели перпендикуляр AH та похилі AB і AC, які утворюють із площиною відповідно кути $45°$ і $60°$. Знайдіть відрізок AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см.

13.13.• Із точки D до площини α проведено похилі DA і DB, які утворюють з даною площиною кути $30°$. Кут між проекціями даних похилих на площину α дорівнює $120°$. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо $DA = 2$ см.

13.14.• Із точки B до площини α проведено похилі BA і BC, які утворюють з даною площиною кути по $45°$. Відстань між основами похилих дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки B до площини α, якщо кут між похилими становить $60°$.

13.15.• Точка A розташована на відстані $3\sqrt{3}$ см від площини α. Похилі AB і AC утворюють із площиною кути $60°$ і $45°$ відповідно, а кут між похилими дорівнює $90°$. Знайдіть відстань між основами похилих.

13.16.• Із точки M до площини α проведено похилі MA і MB. Похила MA утворює з площиною α кут $45°$, а похила MB — кут $30°$. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо $MA = 6$ см, а кут між похилими дорівнює $45°$.

13.17.• Точка M розташована на відстані 12 см від кожної вершини квадрата $ABCD$, кут між прямою MA та площиною квадрата дорівнює $60°$. Знайдіть відстань від точки M до сторони квадрата.

13.18.• Точка M рівновіддалена від сторін квадрата $ABCD$, сторона якого дорівнює $9\sqrt{6}$ см, і розташована на відстані 9 см від площини квадрата. Знайдіть кут між прямою MA та площиною квадрата.

13.19.• Дано точку D таку, що прямі DA, DB і DC утворюють з площиною правильного трикутника ABC кути по $45°$. Знайдіть відстань від точки D до вершин і до прямих, які містять сторони трикутника ABC, якщо його сторона дорівнює 6 см.

13.20.° Точка P рівновіддалена від прямих, які містять сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), і розташована на відстані $4\sqrt{2}$ см від його площини. Проекція точки P на площину трикутника ABC належить цьому трикутнику. Знайдіть кут між прямою PC і площиною ABC, якщо $AC = 12$ см, $BC = 16$ см.

13.21.° Відрізок PB — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки P до прямої AC, якщо $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$, $PA = 16$ см, а кут між прямою PA та площиною ABC дорівнює $30°$.

13.22.° Дано трикутник ABC такий, що $AC = BC$, $\angle ACB = 90°$, $AB = 10$ см. Відрізок MC — перпендикуляр до площини ABC. Відстань від точки M до прямої AB дорівнює $5\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут між прямою AM і площиною ABC.

13.23.° Відрізок DA — перпендикуляр до площини правильного трикутника ABC, $AD = AB$, точка E — середина сторони BC. Знайдіть кут між:
1) прямою AB і площиною ADE;
2) прямою AC і площиною ABD.

13.24.° Відрізок MB — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, причому $MB = AB$. Знайдіть кут між:
1) прямою AB і площиною BMD;
2) прямою AM і площиною BMD.

13.25.° Із точки A до площини α проведено дві рівні похилі, кут між якими дорівнює $60°$. Кут між проекціями даних похилих на площину α становить $90°$. Знайдіть кут між даними похилими та площиною α.

13.26.° Із точки B до площини β проведено дві рівні похилі, кут між якими є прямим. Кут між проекціями даних похилих на площину β дорівнює $120°$. Знайдіть косинус кута між даними похилими та площиною β.

13.27.° Із точки B до площини α проведено похилу BA, яка утворює із цією площиною кут $45°$. У площині α проведено пряму AC, яка утворює з проекцією відрізка AB на дану площину кут $30°$. Знайдіть косинус кута BAC.

13.28.° Сторона AC трикутника ABC лежить у площині α, а його сторона AB утворює із цією площиною кут $45°$. Знайдіть кут між стороною AC і проекцією сторони AB на площину α, якщо $\angle BAC = 60°$.

13.29.• Через вершину прямого кута проведено пряму, яка утворює з кожною його стороною кут 60°. Знайдіть кут, який утворює ця пряма з площиною прямого кута.

13.30.• Через вершину кута, який дорівнює 60°, проведено пряму, яка утворює з кожною його стороною кут 60°. Знайдіть косинус кута, який утворює ця пряма з площиною даного кута.

13.31.•• Точка M — середина ребра CD прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямою A_1M і площиною CDD_1, якщо $AD = 5$ см, $DC = 6$ см, $DD_1 = 4$ см.

13.32.•• Точка K — середина ребра AD прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямою C_1K і площиною DAA_1, якщо $AD = 2\sqrt{2}$ см, $DC = 3$ см, $DD_1 = 1$ см.

13.33.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямою C_1D і площиною ACC_1.

13.34.•• На ребрі BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K так, що $\angle BAK = 15°$. Знайдіть косинус кута між прямими AK і B_1D.

13.35.•• На продовженні ребра CB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за точку B позначили точку M так, що $\angle BAM = 15°$. Знайдіть косинус кута між прямими AM і D_1B.

13.36.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $B_1D = 2AD_1 = 4AA_1$. Знайдіть косинус кута між прямими AD_1 і B_1D.

13.37.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AB_1 = AD = 2AA_1$. Знайдіть косинус кута між прямими A_1B і C_1A.

13.38.•• Ребро BD тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC. Відрізки AK і BP — бісектриси трикутника ABC. Відомо, що $\angle ACB = 90°$, $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, $BD = 3\sqrt{5}$ см. Знайдіть кут між прямими AK і DP.

13.39.•• Ребро AD тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC. Відрізки AM і BK — висоти гострокутного трикутника ABC. Відомо, що $\angle ACB = 45°$, $AD = 4$ см, $AC = 4\sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між прямими BK і DM.

13.40.•• Перпендикулярні прямі a і b належать площині π. Пряма m утворює з площиною π кут γ, із прямими a і b — кути α і β відповідно. Доведіть, що $\cos^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$.

13.41.•• Ребро DC тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC. Відомо, що $\angle ADB = 90°$, $AC = CD = 1$ см, $BC = \sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки C до площини ADB.

13.42.•• У тетраедрі $DABC$ відомо, що $\angle DAC = 90°$, $\angle DBC = 90°$, $\angle ACB = 90°$, $AC = \sqrt{2}$ см, $CD = 2$ см, $BC = 1$ см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.43. Через точку A проведено прямі, які дотикаються до кола радіуса 4 см у точках B і C. Кут BAC дорівнює $60°$. Знайдіть площу трикутника ABC.

13.44. Медіани трикутника дорівнюють 6 см, 10 см і $4\sqrt{5}$ см. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.

14. Двогранний кут. Кут між площинами

На рисунку 14.1 зображено фігуру, яка складається з двох півплощин, що мають спільну межу. Ця фігура ділить простір на дві частини, виділені на рисунку 14.2 різними кольорами. Кожну із цих частин разом з півплощинами називають **двогранним кутом**. Півплощини називають **гранями двогранного кута**, а їхню спільну межу — **ребром двогранного кута**.

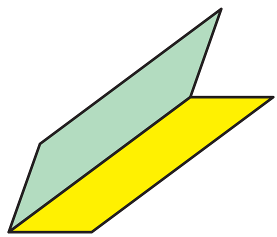


Рис. 14.1

Як бачимо, «жовтий» і «синій» двогранні кути, зображені на рисунку 14.2, істотно різняться. Ця відмінність виражається такою властивістю. На гранях двогранного кута виберемо довільні точки M і N (рис. 14.3). Відрізок MN належить «жовтому» двогранному куту, а «синьому» двогранному куту належать лише кінці відрізка.

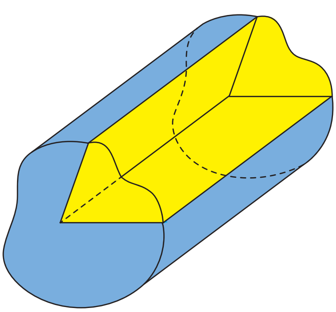


Рис. 14.2

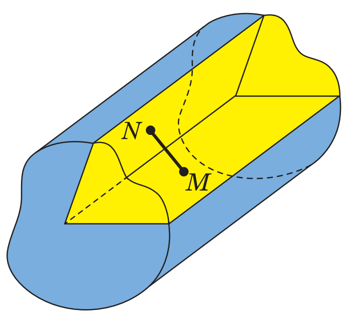


Рис. 14.3

Надалі, говорячи «двогранний кут», матимемо на увазі такий двогранний кут, який містить будь-який відрізок із кінцями на його гранях.

Наочне уявлення про двогранний кут дають напіввідкрита класна дошка, двоскатний дах, відкритий ноутбук (рис. 14.4).

Рис. 14.4

Двогранний кут вважають просторовим аналогом кута на площині.

Ви знаєте, як визначають величину кута на площині. Навчимося визначати величину двогранного кута.

Позначимо на ребрі MN двогранного кута довільну точку O. Через точку O в гранях двогранного кута проведемо промені OA і OB перпендикулярно до ребра MN (рис. 14.5). Кут AOB, утворений цими променями, називають **лінійним кутом двогранного кута**. Оскільки $MN \perp OA$ і $MN \perp OB$, то $MN \perp AOB$. Таким чином, *якщо через довільну точку ребра двогранного кута провести площину перпендикулярно до ребра, то ця площина перетне двогранний кут по його лінійному куту*.

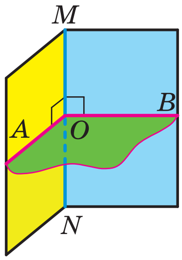


Рис. 14.5

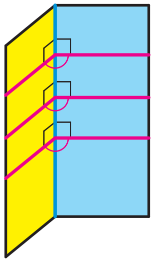


Рис. 14.6

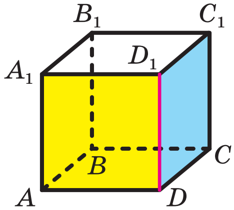


Рис. 14.7

Очевидно, що двогранний кут має безліч лінійних кутів (рис. 14.6). Сторони лінійних кутів, які лежать в одній грані, паралельні. Скориставшись теоремою 9.1, можна показати (зробіть це самостійно), що *будь-які два лінійних кути даного двогранного кута є рівними*.

Отже, величина лінійного кута не залежить від вибору його вершини на ребрі двогранного кута. Ця властивість дає змогу дати таке означення.

Означення. Величиною двогранного кута називають величину його лінійного кута.

Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим або розгорнутим, якщо його лінійний кут є відповідно гострим, прямим, тупим або розгорнутим.

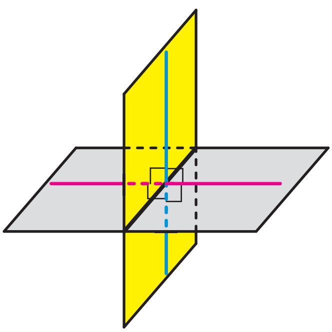
Наприклад, розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.7). Двогранний кут з ребром DD_1, грані якого належать площинам ADD_1 і CDD_1, є прямим. Справді, оскільки $AD \perp DD_1$ і $CD \perp DD_1$, то кут ADC — лінійний кут двогранного кута з ребром DD_1. Кут ADC прямий.

Отже, якщо φ — величина двогранного кута, то $0° < \varphi \leqslant 180°$.

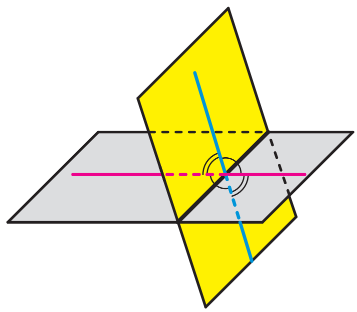
У результаті перетину двох площин утворюються чотири двогранних кути, відмінних від розгорнутого (рис. 14.8). Тут можливі два випадки:

1) усі чотири двогранних кути є прямими (рис. 14.8, *а*);

2) із чотирьох двогранних кутів два рівних кути є гострими та два рівних кути є тупими (рис. 14.8, *б*).



а



б

Рис. 14.8

В обох випадках із чотирьох двогранних кутів знайдеться такий, величина якого не більша за 90°.

Означення. Кутом між двома площинами, що перетинаються, називають величину того з утворених двогранних кутів, який не більший за 90°.

Таким чином, якщо φ — кут між двома площинами, що перетинаються, то $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Вважають, що кут між двома паралельними площинами дорівнює 0°. Отже, якщо φ — кут між двома площинами, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Кутом між многокутником і площиною, якій многокутник не належить, називають кут між площиною, що містить многокутник, і даною площиною.

Кутом між двома многокутниками, що лежать у різних площинах, називають кут між площинами, у яких лежать ці многокутники.

Задача 1. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD мають спільну основу AB, яка дорівнює 16 см. Точка D не належить площині ABC. Відомо, що $DB = 17$ см, $BC = 10$ см, $DC = 3\sqrt{39}$ см. Знайдіть двогранний кут з ребром AB, грані якого містять дані трикутники.

Розв'язання. Нехай точка M — середина відрізка AB (рис. 14.9). Сполучимо точку M з вершинами D і C. Оскільки трикутники ABC і ABD рівнобедрені зі спільною основою AB, то $DM \perp AB$ і $CM \perp AB$. Отже, кут CMD — лінійний кут шуканого двогранного кута.

Для сторони DM прямокутного трикутника DMB можна записати: $DM = \sqrt{DB^2 - MB^2}$. Оскільки $MB = 8$ см, $DB = 17$ см, то $DM = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$ (см).

Для сторони CM прямокутного трикутника CMB можна записати: $CM = \sqrt{BC^2 - MB^2}$. Звідси $CM = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Для сторони DC трикутника DMC запишемо теорему косинусів: $DC^2 = DM^2 + CM^2 - 2DM \cdot CM \cos \angle DMC$. Маємо:

$$351 = 225 + 36 - 180 \cos \angle DMC. \text{ Звідси } \cos \angle DMC = -\frac{1}{2}.$$

Тоді $\angle DMC = 120°$.

Відповідь: 120°. ◄

Зауваження. Якби в задачі потрібно було знайти кут між площинами трикутників, то у відповіді потрібно було б записати 60°.

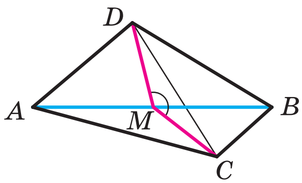


Рис. 14.9

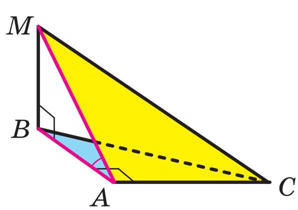


Рис. 14.10

Задача 2. Прямокутні трикутники ABC ($\angle A = 90°$) і ABM ($\angle B = 90°$) мають спільний катет AB (рис. 14.10). Відрізок MB перпендикулярний до площини ABC. Відомо, що $MB = 4$ см, $AC = 6$ см, $MC = 10$ см. Знайдіть кут між площинами ABC і AMC.

Розв'язання. Відрізок BA є проекцією похилої MA на площину ABC. Оскільки $BA \perp AC$, то за теоремою про три перпендикуляри $MA \perp AC$. Отже, кут MAB — лінійний кут двогранного кута з ребром AC, грані якого належать площинам ABC і AMC. Оскільки кут MAB гострий, то кут між площинами ABC і AMC дорівнює величині кута MAB.

Для сторони AM прямокутного трикутника AMC можна записати: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. Звідси $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Для кута MAB прямокутного трикутника MAB запишемо: $\sin \angle MAB = \frac{MB}{MA}$. Звідси $\sin \angle MAB = \frac{1}{2}$ і $\angle MAB = 30°$.

Відповідь: 30°. ◄

Задача 3. Доведіть, що кут між двома площинами дорівнює куту між прямими, перпендикулярними до цих площин.

Розв'язання. Випадок, коли дані площини є паралельними, розгляньте самостійно.

Розглянемо площини α і β, які перетинаються. Нехай $\alpha \cap \beta = c$, $m \perp \alpha$ і $n \perp \beta$ (рис. 14.11).

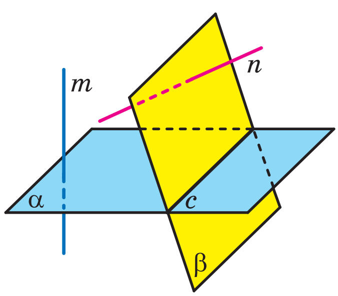


Рис. 14.11

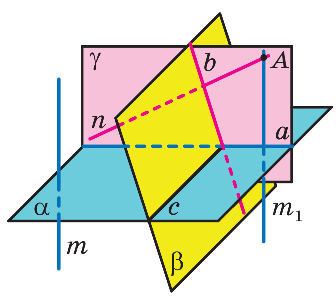


Рис. 14.12

Через точку A прямої n проведемо пряму m_1, паралельну прямій m. Площина γ, яка проходить через прямі n і m_1, перетинає площини α і β по прямих a і b відповідно (рис. 14.12). Оскільки пряма c перпендикулярна до прямих n і m_1, то пряма c перпендикулярна до площини γ. Це означає, що кут між площинами α і β дорівнює куту між прямими a і b.

Скориставшись відомим фактом планіметрії, доходимо висновку, що кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими n і m_1. Отже, кут між площинами α і β дорівнює куту між прямими n і m. ◄

Задача 4. В одній із двох площин, які перетинаються та кут між якими дорівнює α, проведено пряму, що утворює з прямою перетину площин кут β, а з другою площиною — кут γ. Доведіть, що $\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta$.

Розв'язання. Якщо $\alpha = 90°$, то рівність, яку потрібно довести, стає очевидною. Переконайтеся в цьому самостійно.

Нехай пряма AD, яка належить площині τ, утворює з прямою перетину площин τ і σ кут β (рис. 14.13). Опустимо з точки A перпендикуляр AB на пряму перетину даних площин і перпендикуляр AC на площину σ (рис. 14.13).

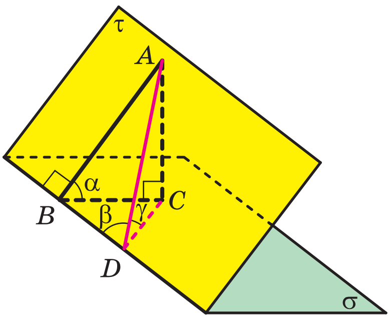


Рис. 14.13

Відрізок BC є проекцією похилої AB на площину σ. Тоді за теоремою про три перпендикуляри отримуємо, що $BC \perp BD$. Отже, кут ABC дорівнює куту між площинами τ і σ. За умовою $\angle ABC = \alpha$.

Відрізок DC є проекцією похилої AD на площину σ. Отже, величина кута ADC є кутом між прямою AD і площиною σ. За умовою $\angle ADC = \gamma$.

Якщо точка D збігається з точкою B, то $\beta = 90°$ і $\alpha = \gamma$. Тоді рівність, яку потрібно довести, стає очевидною.

Розглянемо випадок, коли $0° < \beta < 90°$. Із трикутника ADC маємо: $\sin\gamma = \dfrac{AC}{AD}$. Із трикутника ABC маємо: $\sin\alpha = \dfrac{AC}{AB}$. Із трикутника ADB маємо: $\sin\beta = \dfrac{AB}{AD}$. Звідси $\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta$. ◄

Задача 5. Основою трикутної піраміди $DABC$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($AB = BC$). Відомо, що трикутник ADC рівносторонній і $DB \perp BC$. Знайдіть кут між площинами ACD і ABD.

Розв'язання. Оскільки $CB \perp AB$ і $CB \perp DB$, то $CB \perp ABD$ (рис. 14.14). Тоді пряма AB є проекцією прямої AC на площину ABD. Отже, величина кута CAB — це кут між прямою AC і площиною ABD. З урахуванням умови задачі можна записати: $\angle CAB = 45°$, $\angle DAC = 60°$.

Нехай шуканий кут дорівнює α. Оскільки $0° < \alpha \leqslant 90°$, то, знайшовши $\sin\alpha$, ми зможемо знайти сам кут α.

Для площин ACD, ABD і прямої AC застосуємо ключову задачу 4. Маємо: $\sin 45° = \sin\alpha \sin 60°$. Звідси $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. ◄

Задача 6. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут між площинами AB_1C_1 і A_1B_1C.

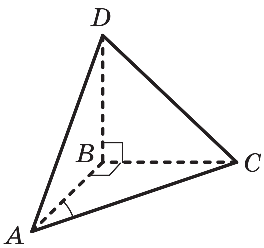


Рис. 14.14

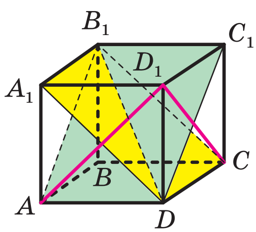


Рис. 14.15

Розв'язання. Оскільки $AD \perp DD_1C$, то $CD_1 \perp AD$. Також $CD_1 \perp DC_1$ як діагоналі квадрата. Отже, $CD_1 \perp AB_1C_1$. Аналогічно можна довести, що $AD_1 \perp A_1B_1C$. Тоді згідно з ключовою задачею 3 отримуємо, що шуканий кут дорівнює величині кута AD_1C. Оскільки трикутник AD_1C рівносторонній, то $\angle AD_1C = 60°$. ◄

?

1. Опишіть, яку фігуру називають двогранним кутом.
2. Що називають гранями двогранного кута? ребром двогранного кута?
3. Яку фігуру називають лінійним кутом двогранного кута?
4. Що називають величиною двогранного кута?
5. Що називають кутом між двома площинами, які перетинаються?
6. Чому дорівнює кут між двома паралельними площинами?
7. Що називають кутом між: 1) многокутником і площиною, якій многокутник не належить; 2) двома многокутниками, які лежать у різних площинах?

ВПРАВИ

14.1.° Покажіть на предметах, що вас оточують, моделі двогранних кутів.

14.2.° На одній із граней двогранного кута, величина якого дорівнює 30°, позначили точку A (рис. 14.16). Відстань від точки A до ребра двогранного кута дорівнює 18 см. Чому дорівнює відстань від точки A до другої грані двогранного кута?

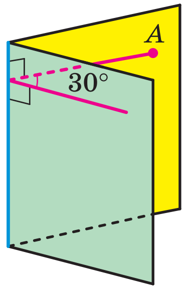


Рис. 14.16

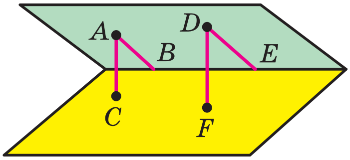


Рис. 14.17

14.3.° На одній із граней гострого двогранного кута позначено точку, відстань від якої до другої грані дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а до ребра двогранного кута — 8 см. Якою є величина даного двогранного кута?

14.4.° На одній грані гострого двогранного кута позначили точки A і D (рис. 14.17). Із точки A опустили перпендикуляри AB і AC відповідно на ребро та другу грань двогранного кута. Із точки D опустили перпендикуляри DE і DF відповідно на ребро та другу грань двогранного кута. Знайдіть відрізок DE, якщо $AB = 21$ см, $AC = 12$ см, $DF = 20$ см.

14.5.° На одній грані гострого двогранного кута позначили точки A і B, віддалені від другої його грані на 14 см і 8 см відповідно. Відстань від точки A до ребра двогранного кута дорівнює 42 см. Знайдіть відстань від точки B до ребра двогранного кута.

14.6.° Точка B лежить усередині двогранного кута та віддалена від його граней на $\sqrt{2}$ см і $\sqrt{3}$ см, а від ребра — на 2 см. Знайдіть даний двогранний кут.

14.7.° Точка C лежить усередині двогранного кута. Кут між перпендикулярами, опущеними з точки C на грані двогранного кута, дорівнює 110°. Знайдіть даний двогранний кут.

14.8.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.18).

1) Серед наведених кутів укажіть лінійний кут двогранного кута, грані якого належать площинам ABC і AB_1C_1:
а) $\angle A_1AB$; б) $\angle A_1AB_1$; в) $\angle B_1DA$; г) $\angle B_1AB$; ґ) $\angle B_1DB$.
2) Знайдіть величину вказаного двогранного кута.

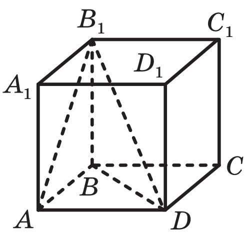


Рис. 14.18

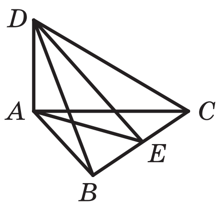


Рис. 14.19

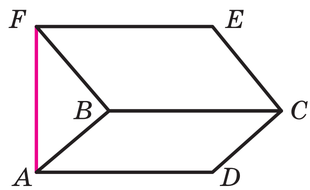


Рис. 14.20

14.9.° Відрізок AD — перпендикуляр до площини правильного трикутника ABC (рис. 14.19), точка E — середина сторони BC. Серед наведених кутів укажіть лінійний кут двогранного кута, грані якого належать площинам ABC і BCD:

1) $\angle ABD$; 2) $\angle AED$; 3) $\angle BAD$; 4) $\angle ACD$.

14.10.° Прямокутники $ABCD$ і $BCEF$ лежать у різних площинах (рис. 14.20), причому пряма AF перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять дані прямокутники, якщо $AF = \sqrt{15}$ см, $CD = \sqrt{5}$ см.

14.11.° Трикутники ABC і ACD лежать у різних площинах (рис. 14.21), причому пряма BD перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять дані трикутники, якщо $\angle ACD = 90°$, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см.

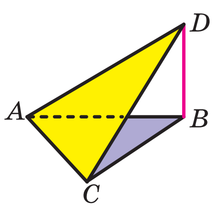


Рис. 14.21

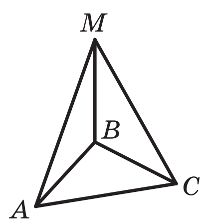


Рис. 14.22

14.12.° Один із двогранних кутів, які утворилися в результаті перетину двох площин, дорівнює 130°. Знайдіть кут між даними площинами.

14.13.° Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки площин можна провести через пряму a таких, щоб кут φ між площиною α і проведеною площиною задовольняв умову:

1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $0° < \varphi < 90°$?

14.14.° Відрізок MB — перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC (рис. 14.22). Знайдіть кут між площинами ABM і CBM.

14.15.° Відрізок CE — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (рис. 14.23). Знайдіть кут між площинами BCE і DCE.

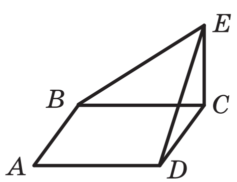


Рис. 14.23

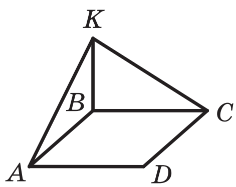


Рис. 14.24

14.16.° Відрізок BK — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ (рис. 14.24), $\angle ABC = 100°$. Знайдіть кут між площинами ABK і CBK.

14.17.° Усі ребра тетраедра $DABC$ рівні, точка M — середина ребра CD. Доведіть, що кут між площинами ACD і BCD дорівнює куту AMB.

14.18.° Грань $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом, $AD = \sqrt{3}$ см, $AA_1 = 3$ см. Знайдіть кут між площинами ABC і A_1B_1C.

14.19.• У гранях двогранного кута, який дорівнює 45°, проведено прямі, паралельні його ребру та віддалені від ребра на $2\sqrt{2}$ см і 3 см відповідно. Знайдіть відстань між даними паралельними прямими.

14.20.• Площина α перетинає грані двогранного кута по паралельних прямих m і n. Відстань від ребра двогранного кута до прямої m дорівнює 3 см, до прямої n — 5 см, а відстань між прямими m і n — 7 см. Знайдіть даний двогранний кут.

14.21.• Ребро DA тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 14.25), $AB = BC = AC = 8$ см, $BD = 4\sqrt{7}$ см. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять трикутники ABC і BCD.

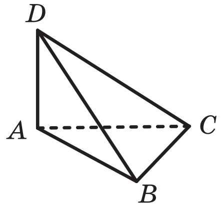


Рис. 14.25

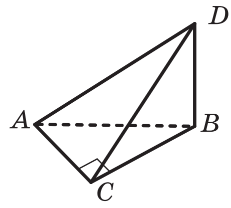


Рис. 14.26

14.22.• Ребро DB тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 14.26), $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 7$ см, $AD = 7\sqrt{5}$ см. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять трикутники ABC і ACD.

14.23.• Точка D рівновіддалена від вершин прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$). Знайдіть кут між площинами ABC і ACD, якщо $AC = BC = 2$ см, а точка D віддалена від площини ABC на $\sqrt{3}$ см.

14.24.• Точка D рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть кут між площинами ABC і ABD, якщо $AB = 12$ см, а точка D віддалена від площини ABC на 2 см.

14.25.• Діагоналі ромба $ABCD$ з тупим кутом при вершині B дорівнюють 30 см і 40 см. Відрізок MB — перпендикуляр до площини ромба, $MB = 24$ см. Знайдіть кут між площиною ромба та площиною CMD.

14.26.• Відрізок MC — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Кут між площиною квадрата та площиною AMD дорівнює 45°. Знайдіть площу квадрата, якщо точка M віддалена від прямої AD на 10 см.

14.27.• Катет BC прямокутного трикутника ABC із прямим кутом при вершині C лежить у площині α, а кут між площинами α і ABC дорівнює 30°. Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо $AB = 15$ см, $BC = 9$ см.

14.28.• Через основу AC рівнобедреного трикутника ABC проведено площину α. Кут між площинами α і ABC дорівнює 45°. Знайдіть відстань від точки B до площини α, якщо $AC = 12$ см, $AB = 10$ см.

14.29.• Сторона BC трикутника ABC лежить у площині α, а вершина A віддалена від цієї площини на $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між площинами ABC і α, якщо $AB = 8$ см, $\angle ABC = 150°$.

14.30.• Сторона AD ромба $ABCD$ лежить у площині α, а відстань між прямою BC і цією площиною дорівнює $7\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут між площинами ABC і α, якщо сторона ромба дорівнює 28 см, а $\angle BAD = 30°$.

14.31.• Рівнобедрені трикутники ABC і ABD, які мають спільну основу AB, лежать у гранях двогранного кута з ребром AB, величина якого дорівнює 60°. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо $AD = 10$ см, $AB = 16$ см, $\angle ACB = 90°$.

14.32.• Трикутники ABC і ADC лежать у різних площинах, $AB = BC = AD = CD = 4$ см, $AC = 6$ см, $BD = \sqrt{21}$ см. Знайдіть кут між площинами ABC і ADC.

14.33.•• Точки A і C належать різним граням двогранного кута, який дорівнює 120°. Із точки A опустили перпендикуляр AB, а з точки C — перпендикуляр CD на ребро двогранного кута. Знайдіть відрізок AC, якщо $AB = 7$ см, $BD = 3$ см, $CD = 11$ см.

14.34.•• Із точок A і B, які належать різним граням двогранного кута, опустили перпендикуляри AC і BD на його ребро. Знайдіть даний двогранний кут, якщо $AC = CD = BD = 2$ см, $AB = 2\sqrt{2}$ см.

14.35.•• Кінці відрізка CD належать різним граням двогранного кута, який дорівнює 30°. Із точок C і D опустили перпендикуляри CE і DF на ребро двогранного кута. Знайдіть відрізок CE, якщо $CD = 5$ см, $DF = 4\sqrt{3}$ см, $EF = 2$ см.

14.36.•• Відрізок MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Знайдіть тангенс кута між площинами ABC і MCD, якщо $MA = AB$, $\angle ABC = 120°$.

14.37.•• Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами BMD і A_1BD.

14.38.•• Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$, точка O — центр даного квадрата, $MO = AC$. Точка K — середина відрізка MC. Знайдіть тангенс кута між площинами BMD і BKD.

14.39.•• У тетраедрі $DABC$ відомо, що $BA = BC = 17$ см, $DA = DC = 25$ см, $BD = 28$ см, $AC = 15\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут між площинами BAD і BCD.

14.40.•• У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AC = AB = 15$ см, $DB = DC = 13$ см, $AD = 14$ см, $BC = 12\sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між площинами BAD і CAD.

14.41.•• Точка M — середина сторони AB правильного трикутника ABC, відрізок DM — перпендикуляр до площини ABC. Знайдіть кут між площинами ACD і BCD, якщо $AB = 2\sqrt{3}$ см, $DM = 4$ см.

14.42.•• Точка M розташована на відстані 3 см від площини квадрата $ABCD$ і рівновіддалена від його вершин. Знайдіть кут між площинами BMC і DMC, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см.

14.43.•• Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC належить площині α. Кут між площинами α і ABC дорівнює $60°$. Відомо, що $AC = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між прямою AC і площиною α.

14.44.•• Катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) належить площині α, а вершина A не належить цій площині. Доведіть, що кут між площинами α і ABC більший за кут між прямою AB і площиною α.

14.45.•• Діагональ AC квадрата $ABCD$ належить площині α. Кут між прямою AB і площиною α дорівнює $30°$. Знайдіть кут між площиною α і площиною квадрата.

14.46.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD і AA_1 відповідно дорівнюють 6 см, $3\sqrt{6}$ см і $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут між площинами AA_1D і A_1DB.

14.47.•• Ребро DC тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC. Відомо, що $DC = 1$ см, $CA = CB = \sqrt{2}$ см і $\angle ACB = 90°$. Знайдіть кут між площинами ABD і ACD.

14.48.* На ребрах AA_1 і B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і N так, що $A_1M = B_1N$. На ребрах DC і B_1C_1 позначили відповідно точки P і K так, що $CP = C_1K$. Площина α проходить через точки M і N паралельно прямій AB. Площина β проходить через точки P і K паралельно прямій CC_1. Знайдіть кут між площинами α і β.

14.49.* Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами BC_1D і AD_1C.

14.50.* Точка M — середина ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами ABM і BC_1D.

14.51.* На ребрі AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку P. Потім на ребрі AD позначили точку Q так, що $AP = DQ$. Доведіть, що кут між площинами A_1PC і A_1QC не залежить від вибору точки P.

14.52.* Точки M, K і E — середини відповідно ребер A_1B_1, BC і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами AME і KME.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.53. Через середину діагоналі AC прямокутника $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD прямокутника в точках M і K відповідно, $AC = 15$ см, $AK = 4$ см, $KD = 8$ см. Знайдіть площу чотирикутника $AMCK$.

14.54. Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 25 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 16 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

15. Перпендикулярні площини

Означення. Дві площини називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Якщо площини α і β перпендикулярні, то записують: $\alpha \perp \beta$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до площини β або площина β перпендикулярна до площини α.

Наочне уявлення про перпендикулярні площини дають площини стіни та стелі кімнати, площини дверей та підлоги, площини сітки та тенісного корту (рис. 15.1).

Рис. 15.1

Очевидно, що перпендикулярні площини в результаті перетину утворюють чотири прямих двогранних кути (рис. 15.2).

Теорема 15.1 (ознака перпендикулярності площин). ***Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.***

Доведення. Нехай площина α проходить через пряму a, перпендикулярну до площини β (рис. 15.3). Доведемо, що $\alpha \perp \beta$.

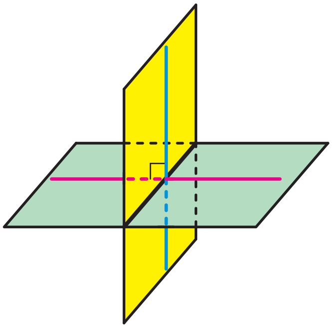


Рис. 15.2

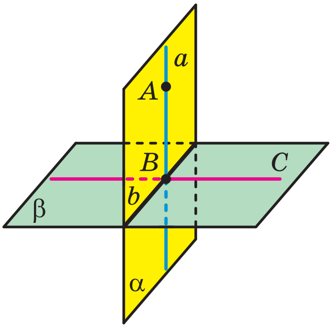


Рис. 15.3

Нехай $\alpha \cap \beta = b$ і $a \cap b = B$. Виберемо на прямій a довільну точку A, відмінну від точки B. Очевидно, що пряма AB перпендикулярна до прямої b. У площині β проведемо пряму BC перпендикулярно до прямої b. Кут ABC є лінійним кутом двогранного кута з ребром b, грані якого належать площинам α і β. Оскільки $AB \perp \beta$ і $BC \subset \beta$, то $AB \perp BC$, тобто $\angle ABC = 90°$. Отже, кут між площинами α і β дорівнює $90°$. ◄

Наприклад, площина грані AA_1B_1B прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна до площини грані $ABCD$ (рис. 15.4). Справді, площина AA_1B_1 проходить через пряму AA_1, перпендикулярну до площини ABC.

Розглянемо кілька властивостей перпендикулярних площин.

Теорема 15.2. ***Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, проведена в одній площині перпендикулярно до прямої перетину площин, є перпендикулярною до другої площини.***

Доведення. Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій a. У площині α проведемо пряму AB перпендикулярно до прямої a, де $B \in a$ (рис. 15.5). Доведемо, що $AB \perp \beta$.

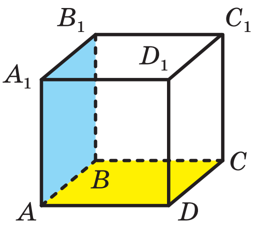


Рис. 15.4

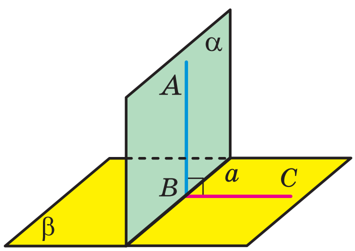


Рис. 15.5

У площині β проведемо пряму BC перпендикулярно до прямої a. Кут ABC є лінійним кутом двогранного кута, утвореного площинами α і β. Оскільки $\alpha \perp \beta$, то $\angle ABC = 90°$. Отже, пряма AB перпендикулярна до двох прямих площини β, що перетинаються, — до прямої a та до прямої BC. Таким чином, $AB \perp \beta$. ◄

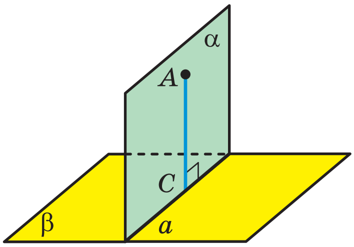


Рис. 15.6

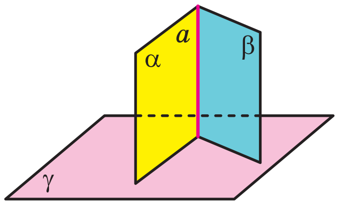


Рис. 15.7

Задача 1. Доведіть, що коли дві площини перпендикулярні та через точку однієї з площин проведено пряму перпендикулярно до другої площини, то ця пряма належить першій площині.

Розв'язання. Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій a (рис. 15.6). Розглянемо довільну точку A площини α. Через цю точку проведемо пряму b, перпендикулярну до площини β. У площині α через точку A проведемо пряму AC перпендикулярно до прямої a. За теоремою 15.2 $AC \perp \beta$. Оскільки через точку A проходить лише одна пряма, перпендикулярна до площини β, то пряма AC і є прямою b. ◄

Задача 2. Доведіть, що коли кожна з двох площин, які перетинаються, перпендикулярна до третьої площини, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до цієї площини.

Розв'язання. Нехай $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ (рис. 15.7). Доведемо, що $a \perp \gamma$.

Через довільну точку A прямої a проведемо пряму a_1, перпендикулярну до площини γ. Оскільки $A \in \alpha$ і $A \in \beta$, то згідно з ключовою задачею 1 пряма a_1 належить і площині α, і площині β. Отже, $a_1 = \alpha \cap \beta$. Отримуємо, що прямі a і a_1 збігаються, а це доводить перпендикулярність прямої a та площини γ. ◄

Задача 3. Дві площини ABD і CBD перпендикулярні до площини ABC (рис. 15.8). Двогранний кут з ребром BD, грані якого містять трикутники ABD і CBD, дорівнює 120°. Відомо, що $AD = 20$ см, $CD = 13$ см, $BD = 12$ см. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими BD і AC.

Розв'язання. Згідно з ключовою задачею 2 $BD \perp ABC$. Тоді $BD \perp AB$ і $BD \perp BC$. Отже, кут ABC — лінійний кут двогранного кута, про який ідеться в умові задачі. За умовою $\angle ABC = 120°$.

Проведемо висоту BE трикутника ABC. Оскільки $BD \perp ABC$ і $BE \subset ABC$, то $BD \perp BE$. Таким чином, відрізок BE — спільний перпендикуляр мимобіжних прямих BD і AC, тому його довжина є шуканою відстанню. Маємо: $AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$ (см); $BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см).

Для сторони AC трикутника ABC запишемо теорему косинусів: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC$.

Звідси отримуємо: $AC^2 = 256 + 25 - 160 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 361$; $AC = 19$ см.

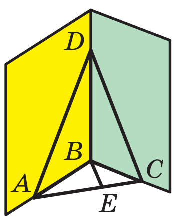


Рис. 15.8

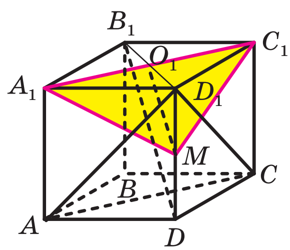


Рис. 15.9

Виразимо висоту трикутника ABC, проведену з вершини B, через довжини його сторін. Для цього знайдемо площу трикутника ABC двома способами.

З одного боку,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \ (\text{см}^2).$$

З другого боку, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{19}{2} BE$. Прирівнявши отримані результати, запишемо: $\frac{19}{2} BE = 20\sqrt{3}$, звідки $BE = \frac{40\sqrt{3}}{19}$ см.

Відповідь: $\frac{40\sqrt{3}}{19}$ см. ◄

Задача 4. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка перпендикулярна до площини AD_1C і проходить через середину M ребра DD_1 та вершину C_1.

Розв'язання. Згідно з ключовою задачею 3 п. 12 отримуємо, що $B_1D \perp AD_1C$ (рис. 15.9). У трикутнику DD_1B_1 відрізок O_1M, де точка O_1 — середина відрізка D_1B_1, є середньою лінією. Отже, $O_1M \parallel B_1D$. Тоді з урахуванням теореми 10.2 доходимо висновку, що $O_1M \perp AD_1C$. Оскільки січна площина проходить через точку M і перпендикулярна до площини AD_1C, то січна площина має містити пряму O_1M. Звідси отримуємо, що січна площина перетинає грань $A_1B_1C_1D_1$ по відрізку A_1C_1. Отже, трикутник MA_1C_1 — шуканий переріз. ◄

1. Які площини називають перпендикулярними?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.
3. Сформулюйте властивості перпендикулярних площин.

ВПРАВИ

15.1.° Покажіть на предметах, що вас оточують, моделі перпендикулярних площин.

15.2.° На рисунку 15.10 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначте, чи є перпендикулярними площини:

1) $A_1B_1C_1$ і CDD_1;
2) ABC і $A_1B_1C_1$;
3) AA_1C_1 і ABC;
4) ACC_1 і BDD_1.

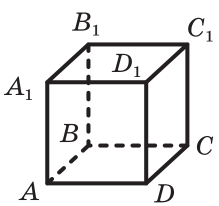


Рис. 15.10

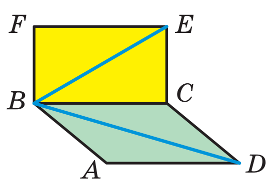


Рис. 15.11

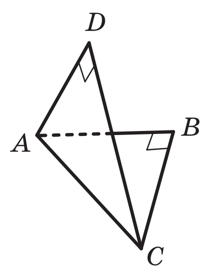


Рис. 15.12

15.3.° Чи є правильним твердження:

1) якщо площини α і β перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить у площині α, перпендикулярна до площини β;
2) якщо площини α і β перпендикулярні, то площина α перпендикулярна до будь-якої прямої, паралельної площині β;
3) якщо дві площини перпендикулярні до третьої площини, то ці площини паралельні?

15.4.° Опишіть, як можна побудувати площину, перпендикулярну до двох інших площин, що перетинаються.

15.5.° Площини прямокутників $ABCD$ і $CBFE$ перпендикулярні (рис. 15.11).

1) Чи є правильним твердження: а) $BF \perp AB$; б) $BE \perp BD$; в) $BE \perp AB$?

2) Знайдіть відстань від точки E до прямої AD і відстань від точки D до прямої BF, якщо $AB = BF = 5$ см, $BC = 12$ см.

15.6.° Площини правильних трикутників ABC і ADC перпендикулярні. Знайдіть кут між прямою BD і площиною ABC.

15.7.° Рівнобедрені прямокутні трикутники ABC і ADC мають спільну гіпотенузу AC завдовжки 6 см, а їхні площини перпендикулярні (рис. 15.12). Знайдіть відстань між точками B і D.

15.8.° Відрізок MB — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (рис. 15.13). Доведіть перпендикулярність площин:

1) ABM і ABC; 2) ABM і CBM; 3) AMB і AMD.

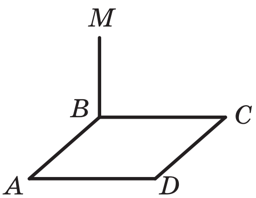


Рис. 15.13

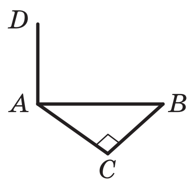


Рис. 15.14

15.9.° Відрізок AD — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$ (рис. 15.14). Доведіть, що площини BCD і ACD перпендикулярні.

15.10.° Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O, точка M не належить площині ABC (рис. 15.15). Доведіть, що коли $MA = MC$ і $MB = MD$, то площини ABC і BMD перпендикулярні.

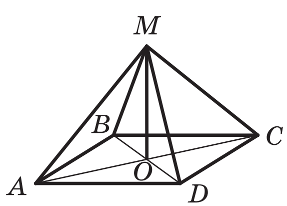


Рис. 15.15

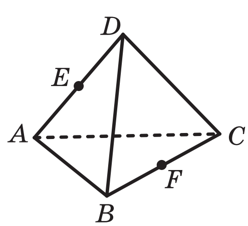


Рис. 15.16

15.11.° Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O, відрізок MO — перпендикуляр до площини ABC. Доведіть, що площини ABC і BMD перпендикулярні.

15.12.° Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB і BC та перпендикулярна до площини ABC.

15.13.° Ребра тетраедра $DABC$ є рівними, точки E і F — середини ребер AD і BC (рис. 15.16). Доведіть перпендикулярність площин: 1) ADF і BCD; 2) ADF і BCE.

15.14.• Кінці відрізка належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 15 см і 16 см. Відстань між основами перпендикулярів, проведених із кінців відрізка до лінії перетину цих площин, дорівнює 12 см. Знайдіть даний відрізок.

15.15.• Точки A і B лежать у перпендикулярних площинах α і β відповідно. Із точок A і B опустили перпендикуляри AC і BD на лінію перетину площин α і β. Знайдіть відстань від точки B до лінії перетину площин α і β, якщо відстань від точки A до цієї лінії дорівнює 9 см, $AB = 17$ см, $CD = 12$ см.

15.16.• Площини α і β перпендикулярні. Точка A лежить у площині α, точка B — у площині β. Точка A віддалена від лінії перетину площин α і β на 5 см, а точка B — на $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між прямою AB і площиною α, якщо кут між прямою AB і площиною β дорівнює $30°$.

15.17.• Кінці відрізка завдовжки 6 см належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 3 см і $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути, які утворює цей відрізок з даними площинами.

15.18.• Площини трапецій $ABCD$ і $AEFD$ зі спільною основою AD перпендикулярні, $\angle BAD = \angle EAD = 90°$, $\angle ADC = \angle ADF = 60°$, $CD = 4$ см, $DF = 8$ см. Знайдіть відстань між: 1) прямими BC і EF; 2) точками C і F.

15.19.• Площини квадрата $ABCD$ і прямокутника $AEFD$ перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими BC і EF, якщо площа квадрата дорівнює 25 см^2, а площа прямокутника — 60 см^2.

15.20.• Доведіть, що коли площина та пряма, яка не лежить у ній, перпендикулярні до деякої площини, то дані площина та пряма паралельні.

15.21.• Доведіть, що коли площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої площини.

15.22.• Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через пряму AA_1 і перпендикулярна до площини BDD_1.

15.23.• Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через пряму AD і перпендикулярна до площини A_1BC.

15.24.• Точка M — середина ребра A_1B_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через пряму AD і точку M.
2) Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини CC_1D_1.
3) Знайдіть площу перерізу, якщо $AD = 10$ см, $AB = 8$ см, $AA_1 = 6$ см.

15.25.• Точки E, F і M — середини відповідно ребер BC, B_1C_1 і C_1D_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною EFM.
2) Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини ABC.
3) Знайдіть площу перерізу, якщо $AD = 8$ см, $AA_1 = 12$ см, $AB = 6$ см.

15.26.• Площини квадрата $ABCD$ і трикутника BEC перпендикулярні. Знайдіть кут між прямою DE і площиною ABC, якщо $AB = 4$ см, $BE = CE = 8$ см.

15.27.• Площини квадрата $ABCD$ і трикутника AFB перпендикулярні, точка O — центр квадрата $ABCD$. Знайдіть відстань від точки F до центра кола, яке проходить через точки C, D і O, якщо $AB = 10$ см, $AF = BF = 15$ см.

15.28.• Площини квадратів $ABCD$ і $BEFD$ перпендикулярні, $AB = a$. Знайдіть відстань між прямими: 1) BE і DF; 2) BE і CD.

15.29.•• Прямокутник $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини ABC і ADC виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань у новому положенні між точками B і D, якщо $AB = 30$ см, $BC = 40$ см.

15.30.•• Паралелограм $ABCD$ перегнули по діагоналі BD так, що площини ABD і CBD виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань у новому положенні між точками A і C, якщо $AB = 4$ см, $BD = 5$ см, $\angle ABD = 60°$.

15.31.•• Точка M рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC і розташована на відстані 8 см від його площини. Знайдіть відстань від центра трикутника ABC до площини AMB, якщо сторона даного трикутника дорівнює $12\sqrt{3}$ см.

15.32.•• Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$ і розташована на відстані $4\sqrt{2}$ см від його площини. Знайдіть відстань від центра квадрата $ABCD$ до площини CMD, якщо сторона квадрата дорівнює 4 см.

15.33.•• Площини рівностороннього трикутника AMB і квадрата $ABCD$ перпендикулярні. Знайдіть кут між прямою MD і площиною ABC.

15.34.•• Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні. Знайдіть кут між площинами ACD і BCD.

15.35.•• Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABD перпендикулярні. Знайдіть кут між площинами ABC і BCD.

15.36.•• Основою піраміди $MABCD$ є прямокутник $ABCD$, площа якого дорівнює S. Грані MAB і MCB перпендикулярні до площини основи, а грані MCD і MAD утворюють із площиною основи кути, що відповідно становлять $15°$ і $75°$. Знайдіть ребро MB.

15.37.•• Основою піраміди $MABCD$ є прямокутник $ABCD$, діагональ якого дорівнює d. Грані MAB і MCB перпендикулярні до площини основи, а грані MCD і MAD утворюють із площиною основи кути, що відповідно становлять $30°$ і $60°$. Знайдіть ребро MB.

15.38.* Площини прямокутників $ABCD$ і $BEFC$ перпендикулярні, $AB = 15$ см, $BE = 20$ см. Знайдіть відстань між прямими BC і DE.

15.39.* Точка A лежить у площині α, точка B — у площині β, площини α і β перпендикулярні та перетинаються по прямій m. Точка A віддалена від прямої m на 8 см, а точка B — на 15 см. Знайдіть відстань між прямими AB і m.

15.40.* Чи існує чотирикутна піраміда, дві протилежні бічні грані якої перпендикулярні до площини основи?

15.41.* Основою чотирикутної піраміди $MABCD$ є рівнобічна трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Площини MAB і MCD перпендикулярні до площини основи. Точка K — середина ребра AD. Відомо, що $AD = MK$, $AB = BC$ і $AD = 2AB$. Знайдіть кут між площинами MAD і ABC.

15.42.* У чотирикутній піраміді $MABCD$ бічне ребро MA перпендикулярне до ребра основи CD. Відомо, що $\angle BAD + \angle CDA = 90°$. Знайдіть кут між площинами MAB і MCD.

15.43.* Основою чотирикутної піраміди $KABCD$ є трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), у якій $AB = 3$ см, $BC = 2$ см, $CD = 4$ см, $AD = 7$ см. Відомо, що прямі AB і KD перпендикулярні. Знайдіть кут між площинами KAB і KCD.

15.44.* Точка D рівновіддалена від вершин рівностороннього трикутника ABC. На відрізку BD позначили точку M так, що $BM : MD = 3 : 1$. Площина, яка проходить через пряму AM перпендикулярно до площини ABC, перетинає відрізок BC у точці E. Знайдіть відношення $BE : EC$.

15.45.* Точка D рівновіддалена від вершин прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$). На відрізку DC позначили точку M так, що $CM : MD = 2 : 1$. Площина, яка проходить через пряму AM перпендикулярно до площини ABC, перетинає відрізок BC у точці K. Знайдіть відношення $BK : KC$.

15.46.* Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій a. Катет AC прямокутного рівнобедреного трикутника ABC належить площині α, а гіпотенуза AB — площині β. Відстані від точок C і B до прямої a дорівнюють відповідно $8\sqrt{5}$ см і 12 см. Знайдіть площу трикутника ABC.

15.47.* Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій a. Катет AC прямокутного рівнобедреного трикутника ABC належить площині α, а гіпотенуза AB — площині β. Відстані від точок C і B до прямої a дорівнюють відповідно 2 см і $\sqrt{15}$ см. Знайдіть площу трикутника ABC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.48. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює a.

15.49. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 15 см, а сума діагоналей — 42 см.

16. Площа ортогональної проекції многокутника

Розглянемо теорему, яка встановлює зв'язок між площею даного многокутника та площею його проекції. Нагадаємо, що йдеться про ортогональну проекцію.

Теорема 16.1. ***Площа проекції опуклого многокутника дорівнює добутку його площі та косинуса кута*** α ***між площиною многокутника та площиною проекції, де*** $0° \leqslant \alpha < 90°$.

Доведення. Нехай S — площа многокутника, що проектується, $S_{\text{пр}}$ — площа його проекції. Доведемо, що $S_{\text{пр}} = S\cos\alpha$.

Із ключової задачі 7.16 випливає, що коли дві площини паралельні, то проекції многокутника на ці площини є рівними фігурами. Отже, під час доведення теореми 16.1 площину проекції можна замінити на будь-яку паралельну їй площину. Із задачі 7.16 також випливає справедливість твердження теореми 16.1 для $\alpha = 0°$.

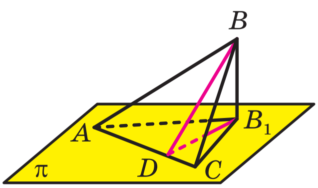


Рис. 16.1

Спочатку доведемо теорему для окремого випадку, коли многокутником, що проектується, є трикутник, одна зі сторін якого паралельна площині проекції.

Замінимо площину проекції на паралельну їй площину π, яка містить указану сторону трикутника (на рисунку 16.1 це сторона AC трикутника ABC).

Із точки B опустимо перпендикуляр BB_1 на площину π. Тоді трикутник AB_1C є проекцією трикутника ABC на площину π. Проведемо висоту BD трикутника ABC. Сполучимо точки D і B_1 (рис. 16.1). Відрізок B_1D є проекцією похилої BD на площину π. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $B_1D \perp AC$. Отже, кут BDB_1 — лінійний кут двогранного кута з ребром AC і гранями, які належать площинам ABC і π. Оскільки кут BDB_1 гострий, то його величина дорівнює куту між площинами ABC і π, тобто дорівнює α.

Маємо: $\angle BDB_1 = \alpha$. Із прямокутного трикутника BDB_1 запишемо: $B_1D = BD\cos\alpha$. Отримуємо:

$$S_{AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1D = \frac{1}{2}AC \cdot BD\cos\alpha = S_{ABC} \cdot \cos\alpha.$$

Отже, ми довели, що $S_{\text{пр}} = S\cos\alpha$.

Розглянемо трикутник ABC, жодна сторона якого не паралельна площині проекції π. Через кожну вершину трикутника проведемо пряму, паралельну прямій перетину площин ABC і π (рис. 16.2).

Одна із цих прямих розбиває трикутник на два трикутники, які мають спільну сторону, паралельну площині проектування. На рисунку 16.2 це трикутники ABM і ACM. Для цих трикутників теорему вже доведено. Нехай площі трикутників ABM і ACM дорівнюють S_1 і S_2. Тоді площі їхніх проекцій відповідно дорівнюють $S_1 \cos\alpha$ і $S_2 \cos\alpha$. Маємо:

$$S_{\text{пр}} = S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\alpha = (S_1 + S_2) \cos\alpha = S \cos\alpha.$$

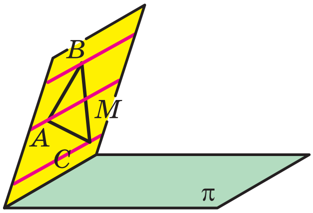


Рис. 16.2

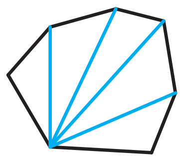


Рис. 16.3

Розглянемо тепер загальний випадок. Розіб'ємо даний опуклий многокутник на трикутники. Це можна зробити, наприклад, провівши діагоналі з однієї вершини (рис. 16.3). Таким чином, ми розбили даний опуклий многокутник на n трикутників, для кожного з яких виконується теорема, яку доводимо. Нехай площі отриманих трикутників дорівнюють S_1, S_2, ..., S_n. Тоді площі їхніх проекцій відповідно дорівнюють $S_1 \cos\alpha$, $S_2 \cos\alpha$, ..., $S_n \cos\alpha$. Маємо:

$$S_{\text{пр}} = S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\alpha + \ldots + S_n \cos\alpha =$$
$$= (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) \cos\alpha = S \cos\alpha. ◄$$

З а у в а ж е н н я. Теорема 16.1 залишається справедливою і для неопуклих многокутників. Для цього потрібно показати, що будь-який многокутник можна розбити на трикутники. Доведення цього факту виходить за межі курсу, що розглядається.

Н а с л і д о к. ***Площа проекції многокутника є не більшою за площу многокутника.***

З а д а ч а 1. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут між площинами AA_1B_1 і BC_1D.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай ребро куба дорівнює a. Проекцією трикутника BC_1D на площину AA_1B_1 є трикутник BB_1A (рис. 16.4). Площа трикутника BB_1A дорівнює $\frac{a^2}{2}$. Оскільки трикутник BC_1D є рівностороннім зі стороною $a\sqrt{2}$, то його площа дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Нехай шуканий кут дорівнює α. Тоді з урахуванням теореми 16.1 можна записати: $\cos\alpha = \dfrac{S_{\Delta BB_1A}}{S_{\Delta BC_1D}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ◄

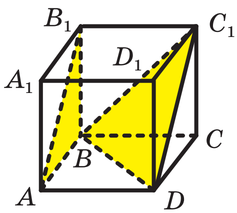


Рис. 16.4

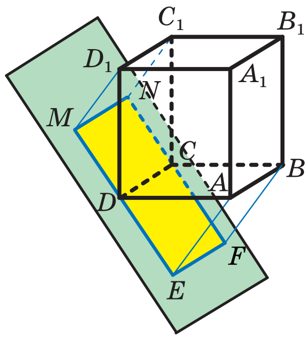


Рис. 16.5

Зазначимо, що задачу 1 можна розв’язати також за допомогою ключової задачі 3 п. 14, знайшовши кут між прямими BC і A_1C. Зробіть це самостійно.

Задача 2. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AB = BC = a$, $AA_1 = b$. Його спроектували на площину, яка містить ребро CD. Знайдіть найбільше значення площі проекції.

Розв’язання. За умовою площина проекції перетинає даний паралелепіпед по ребру CD (рис. 16.5). Тоді площа проекції даного паралелепіпеда дорівнює площі проекції прямокутника ABC_1D_1, тобто площі прямокутника $EMNF$. Отже, з урахуванням наслідку з теореми 16.1 найбільше значення шуканої площі досягатиметься тоді, коли площина проекції паралельна площині ABC_1, і дорівнюватиме площі прямокутника ABC_1D_1.

Маємо: $AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отримуємо, що

$$S_{\text{пр}} = S_{ABC_1D_1} = a\sqrt{a^2 + b^2}. \ ◄$$

?

Сформулюйте теорему про площу ортогональної проекції многокутника.

ВПРАВИ

16.1.° Чи може площа проекції многокутника дорівнювати площі самого многокутника?

16.2.° Чи може площа проекції многокутника бути більшою за площу самого многокутника?

16.3.° Знайдіть площу проекції многокутника на деяку площину, якщо площа многокутника дорівнює $18\sqrt{2}$ см², а кут між площиною многокутника та площиною проекції становить 45°.

16.4.° Знайдіть площу многокутника, якщо площа його проекції на деяку площину дорівнює 24 см², а кут між площиною многокутника та площиною проекції становить 30°.

16.5.° Площа многокутника дорівнює 20 см², а площа його проекції — 16 см². Знайдіть кут між площиною многокутника та площиною проекції.

16.6.° Многокутник F_1 — проекція многокутника F на деяку площину. Заповніть таблицю.

Площа многокутника F	Кут між площинами многокутників F і F_1	Площа многокутника F_1
12 см²	60°	
	45°	8 см²
32 см²		$16\sqrt{3}$ см²

16.7.° Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображеного на рисунку 16.6, дорівнює 2 см. Використовуючи теорему про площу ортогональної проекції, обчисліть площу перерізу AB_1C_1D.

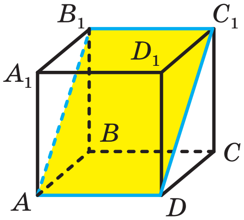


Рис. 16.6

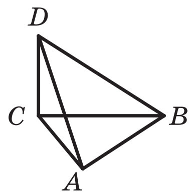


Рис. 16.7

16.8.• Відрізок DC — перпендикуляр до площини трикутника ABC (рис. 16.7). Знайдіть площу трикутника ADB, якщо $\angle ACB = 90°$, $AC = 8$ см, $BC = 10$ см, а кут між площинами ABC і ABD дорівнює 45°.

16.9.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 18 см, а бічна сторона — 8 см. Знайдіть площу проекції даної трапеції на площину α, якщо кут між площиною трапеції та площиною α дорівнює 30°.

16.10.° Через одну зі сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 12 см, проведено площину α, що утворює з площиною ромба кут $30°$. Знайдіть площу проекції даного ромба на площину α.

16.11.° Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 12 см, а сторони трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см. Трикутник $A_1B_1C_1$ є проекцією трикутника ABC. Знайдіть кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$.

16.12.° Сторона правильного шестикутника дорівнює 2 см, а площа його проекції — 9 см^2. Знайдіть кут між площиною даного шестикутника та площиною його проекції.

16.13.° Трикутник $A_1B_1C_1$ є проекцією трикутника ABC на площину α, трикутник $A_2B_2C_2$ — проекцією трикутника $A_1B_1C_1$ на площину ABC. Знайдіть кут між площинами ABC і α, якщо площа трикутника ABC удвічі більша за площу трикутника $A_2B_2C_2$.

16.14.° Кут між площиною многокутника та площиною його проекції дорівнює $60°$. Знайдіть площу даного многокутника, якщо сума площ цього многокутника та його проекції дорівнює 30 см^2.

16.15.°° Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через ребро AD і утворює кут α з площиною ABC.

16.16.°° Основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом. Точка M — середина ребра AB, точка K — середина ребра AD. Через пряму MK проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут α та перетинає три бічних ребра паралелепіпеда. Площа отриманого перерізу паралелепіпеда дорівнює S. Знайдіть відрізок AB.

16.17.°° У тетраедрі $DABC$ двогранні кути з ребрами AB, BC і AC відповідно дорівнюють α_1, α_2 і α_3, а площі трикутників ABD, BCD, CAD і ABC відповідно дорівнюють S_1, S_2, S_3 і S. Доведіть, що $S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 + S_3 \cos\alpha_3 = S$.

16.18.°° Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Через середину ребра AD проведено площину, паралельну прямим AC_1 і BD. Знайдіть площу перерізу куба цією площиною.

16.19.°° Ребра AB, AD і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють відповідно 6 см, 6 см і $6\sqrt{2}$ см. На ребрі CD позначили точку K так, що $CK : KD = 2 : 1$. Через точку K провели площину, паралельну прямим A_1C_1 і DB_1. Знайдіть площу перерізу прямокутного паралелепіпеда цією площиною.

16.20.•• Точки M і K — середини відповідно ребер BC і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами MKD і ABB_1.

16.21.•• Точка E — середина ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами DC_1E і BB_1D_1.

16.22.•• У тетраедрі $DABC$ кути ADB, BDC і CDA прямі. Площі граней ABC і ABD дорівнюють відповідно S і S_1. Знайдіть площу проекції трикутника ABD на площину ABC.

16.23.•• У тетраедрі $DABC$ кути ADB, BDC і CDA прямі. Площі граней ADB, BDC, CDA і ABC відповідно дорівнюють S_1, S_2, S_3 і S. Доведіть, що $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2$.

16.24.* Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 1 см. Трикутник $A_1B_1C_1$ є проекцією трикутника ABC. Відомо, що $A_1B_1<\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $A_1C_1<\frac{1}{2}$. Доведіть, що кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$ більший за $60°$.

16.25.* Грані ABC і ADC тетраедра $DABC$ перпендикулярні. Відомо, що $AB = BC = CD$ і $AC = BD$. Знайдіть кут між площинами ABD і ACD.

16.26.* Грані ABC і ADC тетраедра $DABC$ перпендикулярні. Відомо, що $AC=BC$, $AD=CD=\frac{1}{2}AB$ і $\angle ACB=90°$. Знайдіть кут між площинами ABD і ACD.

16.27.* Якого найбільшого значення може набувати найменший двогранний кут тетраедра?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.28. У коло вписано квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

16.29. У трикутнику ABC відомо, що $AB=4$ см, $\angle BAC=30°$ і радіус описаного кола дорівнює 3 см. Доведіть, що висота, проведена до сторони AB, менша від 3 см.

17. Многогранний кут. Тригранний кут

Нехай дано многокутник $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1} A_n$ і точку S, яка не належить його площині (рис. 17.1).

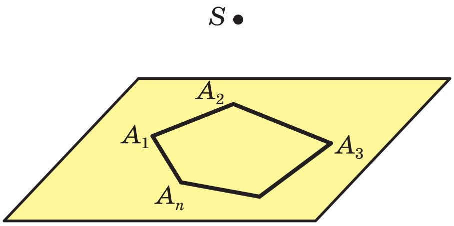


Рис. 17.1

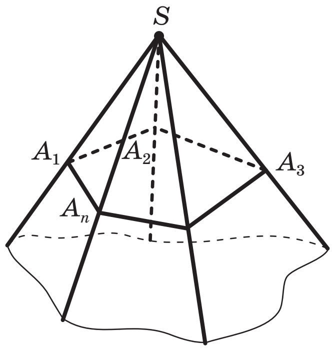


Рис. 17.2

Сполучимо точку S із всіма вершинами многокутника (рис. 17.2). Кути A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 обмежують частину простору, яка містить даний многокутник. Цю частину простору разом із зазначеними кутами називають **многогранним кутом.**

Точку S називають **вершиною многогранного кута**, промені SA_1, SA_2, ..., SA_n — його **ребрами**. Кути A_1SA_2, A_2SA_3, ..., A_nSA_1 називають **гранями многогранного кута** або **плоскими кутами многогранного кута.**

Двогранним кутом многогранного кута при ребрі SA називають двогранний кут з ребром SA, грані якого містять сусідні грані многогранного кута, для яких ребро SA є спільним (рис. 17.3).

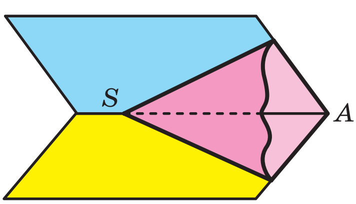


Рис. 17.3

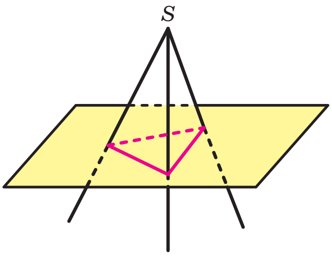


Рис. 17.4

Залежно від кількості граней многогранні кути називають тригранними (рис. 17.4), чотиригранними (рис. 17.5), п’ятигранними (рис. 17.6) тощо.

Многогранний кут позначають за допомогою букв, першою вказуючи вершину, а далі послідовно по одній точці на кожному з ребер. Наприклад, п'ятигранний кут, зображений на рисунку 17.6, позначають $SABCDE$.

Многогранний кут буває опуклим (рис. 17.4, 17.5) і неопуклим (рис. 17.6).

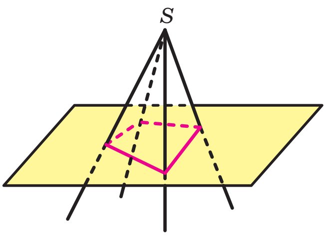


Рис. 17.5

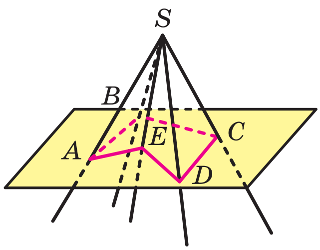


Рис. 17.6

Означення. Многогранний кут називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Будь-який тригранний кут є опуклим.

Зупинимося докладніше на властивостях тригранного кута.

Теорема 17.1 (теорема косинусів для тригранного кута). ***Якщо плоскі кути тригранного кута дорівнюють*** α, β ***і*** γ, ***а двогранний кут при ребрі, протилежному плоскому куту*** γ, ***дорівнює*** φ, ***то*** $\cos\varphi = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Доведення. Розглянемо тригранний кут $SABC$, у якому $\angle CSB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Нехай C_1 — довільна точка ребра SC (рис. 17.7). Через точку C_1 у гранях CSA і CSB проведемо відповідно перпендикуляри C_1A_1 і C_1B_1 до ребра SC. Тоді кут $A_1C_1B_1$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі SC.

За умовою $\angle A_1C_1B_1 = \varphi$.

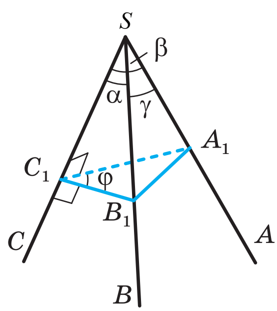


Рис. 17.7

Нехай $SC_1 = a$. Із трикутника SC_1B_1 отримуємо: $C_1B_1 = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ і $SB_1 = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Із трикутника SC_1A_1 отримуємо, що $C_1A_1 = a\,\mathrm{tg}\,\beta$ і $SA_1 = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

Запишемо теорему косинусів для трикутника $A_1C_1B_1$:

$$A_1B_1^2 = a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta - 2a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\varphi.$$

Запишемо теорему косинусів для трикутника A_1SB_1:

$$A_1B_1^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2\beta} - \frac{2a^2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Тоді має місце рівність:

$$a^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta - 2a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\varphi = \frac{a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2\beta} - \frac{2a^2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Звідси

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{tg}^2\,\beta - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\varphi = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$-2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\cos\varphi = 2 - \frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отримуємо, що $\cos\varphi = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Ми провели доведення для випадку, коли α і β — гострі кути. Решту випадків розгляньте самостійно. ◄

Теорема 17.2. ***Кожний плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів.***

Доведення. Нехай із трьох плоских кутів α, β і γ (рис. 17.7) кут α — найбільший. Запишемо теорему косинусів для тригранного кута $SABC$: $\cos\varphi = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Оскільки $\cos\varphi < 1$, то $\dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} < 1$. Ураховуючи, що $\sin\alpha\sin\beta > 0$, можна записати:

$$\cos\gamma < \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

Маємо: $0° < \gamma < 180°$ і $0° \leqslant \alpha - \beta < 180°$. Тоді з нерівності $\cos\gamma < \cos(\alpha - \beta)$ випливає, що $\gamma > \alpha - \beta$, тобто $\alpha < \beta + \gamma$. ◄

Теорема 17.3. ***Сума плоских кутів тригранного кута менша від 360°.***

Наочно цей факт ілюструє рисунок 17.8.

Доведення. Розглянемо тригранний кут $SABC$, у якому $\angle CSB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Доведемо, що $\alpha + \beta + \gamma < 360°$.

Нехай промінь SA_1 — доповняльний до променя SA (рис. 17.9). Тоді $\angle A_1SC = 180° - \beta$, $\angle A_1SB = 180° - \gamma$. До тригранного кута SA_1BC застосуємо теорему 17.1. Отримуємо: $\alpha < 180° - \beta + 180° - \gamma$. Звідси $\alpha + \beta + \gamma < 360°$. ◄

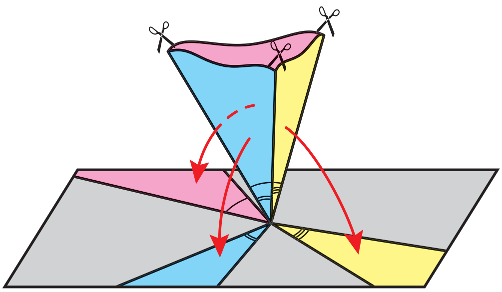


Рис. 17.8

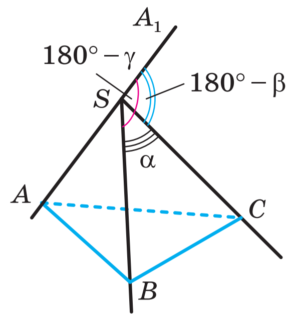


Рис. 17.9

Справедливе й більш загальне твердження, ніж теорема 17.3: ***сума плоских кутів опуклого многогранного кута менша від 360°***. Ви зможете його довести, розв'язавши задачу 17.29.

Задача 1. Пряма l утворює кути α, β і γ з трьома попарно перпендикулярними прямими. Доведіть, що $\alpha + \beta + \gamma < 180°$.

Розв'язання. Можна вважати, що пряма l проходить через вершини S і B прямокутного паралелепіпеда й утворює кути α, β і γ з його ребрами, які виходять з однієї вершини S (рис. 17.10).

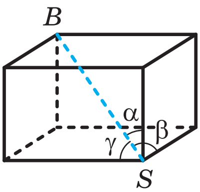


Рис. 17.10

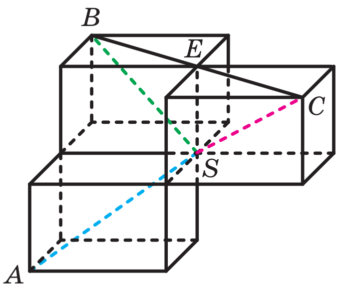


Рис. 17.11

Розташуємо ще два прямокутних паралелепіпеди, рівних даному, так, як показано на рисунку 17.11. Оскільки трикутники SBE і SCE рівні, то $\angle CSB = 2\alpha$. Аналогічно можна довести, що $\angle ASC = 2\beta$ і $\angle ASB = 2\gamma$.

Очевидно, що точка S не належить площині ABC. Розглянемо тригранний кут $SABC$. За теоремою 17.3 отримуємо, що $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 360°$. Звідси $\alpha + \beta + \gamma < 180°$. ◄

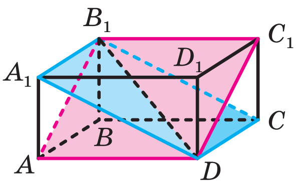


Рис. 17.12

Задача 2. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $DA = 3$ см, $DC = \sqrt{5}$ см, $DD_1 = 1$ см. Знайдіть кут між площинами AB_1C_1 і A_1B_1C (рис. 17.12).

Розв'язання. Площини AB_1C_1 і A_1B_1C мають спільні точки D і B_1. Отже, ці площини перетинаються по прямій DB_1.

Нехай $\angle ADB_1 = \alpha$ і $\angle CDB_1 = \beta$, двогранний кут тригранного кута DAB_1C при ребрі DB_1 дорівнює φ. Тоді за теоремою 17.1 можна записати:

$$\cos\varphi = \frac{\cos 90^\circ - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = -\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Із прямокутного трикутника ABB_1 маємо:

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \text{ см}.$$

Із прямокутного трикутника CBB_1 отримуємо:

$$CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ см}.$$

Оскільки $DA \perp AA_1B_1$, то $DA \perp AB_1$. Аналогічно можна довести, що $DC \perp CB_1$.

Із прямокутного трикутника DAB_1 маємо: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}$. Із прямокутного трикутника DCB_1 маємо: $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$.

Тоді $\cos\varphi = -\frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Звідси $\varphi = 150^\circ$. Оскільки кут між двома площинами не перевищує 90°, то шуканий кут дорівнює 30°. ◄

?

1. Опишіть, що називають многогранним кутом.
2. Назвіть елементи многогранного кута.
3. Який многогранний кут називають опуклим?
4. Назвіть властивості тригранного кута.
5. Запишіть рівність, яка виражає теорему косинусів для тригранного кута.

ВПРАВИ

17.1.• Усі плоскі кути тригранного кута дорівнюють 90°. Доведіть, що всі двогранні кути також дорівнюють 90°.

17.2.• Доведіть, що коли плоскі кути ASB, BSC і CSA тригранного кута $SABC$ відповідно дорівнюють плоским кутам $A_1S_1B_1$, $B_1S_1C_1$ і $C_1S_1A_1$ тригранного кута $S_1A_1B_1C_1$, то двогранні кути при ребрах SA, SB і SC відповідно дорівнюють двогранним кутам при ребрах S_1A_1, S_1B_1 і S_1C_1.

17.3.• Доведіть, що коли всі плоскі кути тригранного кута більші за 90°, то всі його двогранні кути також більші за 90°.

17.4.• Плоскі кути ASB, BSC і CSA тригранного кута $SABC$ дорівнюють 45°, 45° і 60° відповідно. Знайдіть двогранний кут при ребрі SB.

17.5.• Плоскі кути ASB, BSC і CSA тригранного кута $SABC$ дорівнюють 45°, 45° і 60° відповідно. Знайдіть двогранний кут при ребрі SC.

17.6.• Плоскі кути ASB і BSC тригранного кута $SABC$ дорівнюють 45°. Двогранний кут при ребрі SB дорівнює 60°. Знайдіть плоский кут ASC.

17.7.• Плоскі кути ASB і ASC тригранного кута $SABC$ відповідно дорівнюють 90° і 60°. Двогранний кут при ребрі SB дорівнює 45°. Знайдіть плоский кут BSC.

17.8.• Плоскі кути BSC і CSA тригранного кута $SABC$ дорівнюють 45°. Двогранний кут при ребрі SC дорівнює 120°. Знайдіть плоский кут ASB.

17.9.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро AD дорівнює 1 см, а кожне з ребер AB і AA_1 дорівнює 2 см. Знайдіть кут між площинами AB_1D і CB_1D.

17.10.•• У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD і AA_1 дорівнюють 4 см, 3 см і $\sqrt{11}$ см відповідно. Знайдіть кут між площинами ABD_1 і CBD_1.

17.11.•• Кожне ребро n-кутної піраміди дорівнює 1 см. Знайдіть усі можливі значення n.

17.12.•• Усі плоскі кути тригранного кута є рівними. Доведіть, що всі його двогранні кути більші за 60°.

17.13.•• Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює 90°. Знайдіть кути між бісектрисами цих плоских кутів.

17.14.•• Доведіть, що кожний плоский кут опуклого чотиригранного кута менший від суми трьох інших його плоских кутів.

17.15.•• Ребро AD тетраедра $DABC$ дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC, якщо $\angle DAB = \angle BAC = 45°$, $\angle DAC = 60°$.

17.16.•• Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник. Знайдіть відстань між основами призми, якщо відомо, що $AA_1 = 6$ см, $\cos\angle A_1AC = \frac{1}{3}$, $\cos\angle A_1AB = \frac{2}{3}$.

17.17.•• Ребро BD тетраедра $DABC$ дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від точки B до площини DAC, якщо відомо, що $\angle ADC = 90°$, $\angle BDC = 45°$, $\angle BDA = 120°$.

17.18.•• Доведіть, що в будь-якій трикутній піраміді знайдеться вершина, при якій всі плоскі кути менші від 90°.

17.19.•• У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AB = CD$, $BC = AD$, $CA = BD$. Доведіть, що всі грані даного тетраедра — гострокутні трикутники.

17.20.•• Плоскі кути ASB, BSC і CSA тригранного кута $SABC$ дорівнюють α, β і γ відповідно. Двогранні кути при ребрах SA, SB і SC дорівнюють α_1, β_1 і γ_1 відповідно. Із точки M, яка належить даному тригранному куту, на грані BSC, CSA і ASB опустили відповідно перпендикуляри MA_1, MB_1 і MC_1. Знайдіть плоскі та двогранні кути тригранного кута $MA_1B_1C_1$.

17.21.•• Усі двогранні кути тригранного кута дорівнюють 90°. Доведіть, що всі його плоскі кути також дорівнюють 90°.

17.22.•• Доведіть, що сума двогранних кутів тригранного кута більша за 180°.

17.23.•• Доведіть, що сума всіх двогранних кутів довільного тетраедра більша за 360°.

17.24.•• Двогранні кути тригранного кута при ребрах SA, SB і SC дорівнюють α, β і γ відповідно. Плоский кут BSC дорівнює φ. Доведіть рівність $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

17.25.•• Доведіть, що коли всі двогранні кути тригранного кута менші від 90°, то й усі його плоскі кути також менші від 90°.

17.26.•• Плоскі кути ASB, BSC і CSA тригранного кута $SABC$ дорівнюють α, β і γ відповідно. Двогранні кути при ребрах SC, SA і SB дорівнюють α_1, β_1 і γ_1 відповідно. Доведіть рівність $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma}$.

17.27.* Доведіть, що кожний плоский кут опуклого многогранного кута менший від суми всіх інших його плоских кутів.

17.28.* Доведіть, що сума двогранних кутів опуклого n-гранного кута більша за $180° (n - 2)$.

17.29.* Доведіть, що сума плоских кутів опуклого многогранного кута менша від $360°$.

17.30.* Сума плоских кутів деякого n-гранного кута дорівнює сумі його двогранних кутів. Доведіть, що $n = 3$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.31. У коло вписано дві рівнобічні трапеції з відповідно паралельними сторонами. Доведіть, що діагональ однієї з них дорівнює діагоналі другої трапеції.

17.32. Коло, вписане в трикутник, точкою дотику ділить одну зі сторін трикутника на відрізки, що дорівнюють 3 і 4, а протилежний цій стороні кут дорівнює $120°$. Знайдіть площу трикутника.

18. Геометричне місце точок простору

У курсі планіметрії ви ознайомилися з поняттям геометричного місця точок. Аналогічне поняття розглядають і в стереометрії.

Означення. Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину точок простору, які мають певну властивість.

Образно ГМТ можна уявити так: задають деяку властивість, а потім усі точки простору, які мають цю властивість, фарбують у жовтий колір. Та «жовта фігура», яка при цьому утворилася, і буде ГМТ.

Наприклад, геометричним місцем точок, віддалених від даної площини на задану відстань, є дві площини, паралельні даній (рис. 18.1).

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від трьох даних точок A, B і C, що не лежать на одній прямій, є пряма l, яка перпендикулярна до площини ABC і проходить через точку O — центр описаного кола трикутника ABC (рис. 18.2).

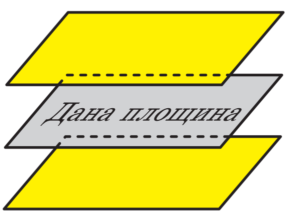


Рис. 18.1

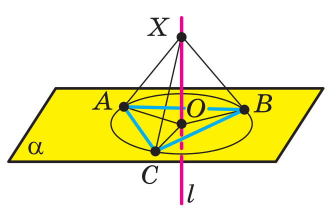


Рис. 18.2

Справді, точка O рівновіддалена від точок A, B і C. Кожна точка X прямої l, відмінна від точки O, також рівновіддалена від точок A, B і C (це випливає з рівності трикутників XOA, XOB, XOC). І навпаки, якщо точка X рівновіддалена від точок A, B і C, то вона належить прямій l. Це випливає з ключової задачі 1 п. 11.

Так само можна довести, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин даного многокутника, є пряма, яка перпендикулярна до площини цього многокутника та проходить через центр його описаного кола (рис. 18.3).

Нагадаємо: щоби стверджувати, що якась множина точок є геометричним місцем точок, треба довести дві взаємно обернені теореми:

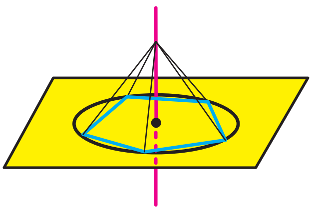


Рис. 18.3

1) кожна точка даної множини має задану властивість;

2) якщо точка має задану властивість, то вона належить даній множині.

Розглянемо теорему, яка є просторовим аналогом теореми про геометричне місце точок площини, рівновіддалених від кінців відрізка.

Теорема 18.1. ***Площина, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.***

Доведення. 1) Нехай площина α перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину — точку M; точка X — довільна точка площини α. Доведемо, що $XA = XB$.

Якщо точка X збігається з точкою M, то $XA = XB$.

Нехай точка X не збігається з точкою M (рис. 18.4). Тоді в площині AXB пряма MX є серединним перпендикуляром відрізка AB. Отже, $XA = XB$.

2) Нехай деяка точка Y рівновіддалена від кінців відрізка AB. Тоді в площині AYB пряма MY є серединним перпендикуляром відрізка AB. Припустимо, що $Y \notin \alpha$. Нехай $AYB \cap \alpha = a$ (рис. 18.5).

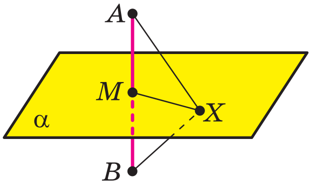


Рис. 18.4

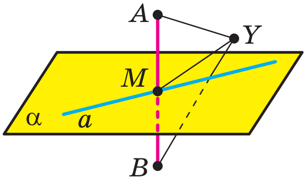


Рис. 18.5

Очевидно, що $AB \perp a$. Тоді в площині AYB через точку M проходять дві прямі, перпендикулярні до прямої AB. Отримали суперечність. Отже, $Y \in \alpha$. ◄

Означення. Бісектором двогранного кута називають півплощину, межею якої є ребро двогранного кута і яка ділить його на два рівних двогранних кути (рис. 18.6).

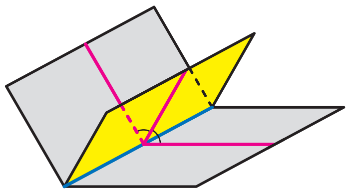


Рис. 18.6

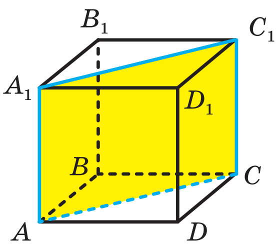


Рис. 18.7

Бісектор є просторовим аналогом бісектриси кута.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ півплощина, яка містить діагональний переріз AA_1C_1C, є бісектором двогранного ребра куба при ребрі AA_1 (рис. 18.7).

Теорема 18.2. ***Бісектор двогранного кута є геометричним місцем точок, які належать двогранному куту й рівновіддалені від його граней.***

Ця теорема є просторовим аналогом теореми про геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін. Доведіть цю теорему самостійно.

1. Яку множину точок називають геометричним місцем точок?
2. Які дві теореми треба довести, щоб мати право стверджувати, що деяка множина точок є ГМТ?
3. Що є геометричним місцем точок, віддалених від даної площини на задану відстань?
4. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від трьох даних точок, які не лежать на одній прямій?
5. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
6. Що називають бісектором двогранного кута?
7. Що є геометричним місцем точок, які належать двогранному куту й рівновіддалені від його граней?

ВПРАВИ

18.1.° На даній прямій l знайдіть точки, рівновіддалені від даних точок A і B.

18.2.° Знайдіть ГМТ вершин X рівнобедрених трикутників AXB, які мають спільну основу AB.

18.3.° На даній площині α знайдіть точки, рівновіддалені від даних точок A і B.

18.4.° На даній прямій l знайдіть точки, які належать даному двогранному куту й рівновіддалені від його граней.

18.5.° Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.

18.6.° Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються.

18.7.° Знайдіть ГМТ середин усіх відрізків, кінці яких належать двом даним паралельним площинам.

18.8.° Точка M не належить площині α. Знайдіть ГМТ середин усіх відрізків MX, кінці X яких належать площині α.

18.9.° Точка M не належить площині α. Знайдіть геометричне місце точок X площини π таких, що прямі MX утворюють із площиною π кути, рівні даному куту α.

18.10.• Знайдіть геометричне місце точок, відстані від яких до двох даних паралельних площин відносяться як $2 : 1$.

18.11.• Дано паралельні площини α і β. Знайдіть геометричне місце точок, відстані від яких до площини α в три рази більші, ніж до площини β.

18.12.• Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > BX$.

18.13.• Дано кут ABC. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\angle XBA = \angle XBC$.

18.14.• Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від прямих AB, BC і CA.

18.15.• Знайдіть геометричне місце точок, які належать тригранному куту й рівновіддалені від його граней.

18.16.• Знайдіть геометричне місце точок, які належать тригранному куту й рівновіддалені від його ребер.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.17. Через вершини A і C трикутника ABC проведено прямі, які перпендикулярні до бісектриси кута ABC та перетинають прямі BC і AB у точках K і M відповідно. Знайдіть сторону AB, якщо $BM = 8$ см, $KC = 1$ см.

18.18. Довжини сторін паралелограма дорівнюють a і b, довжини діагоналей — m і n. Доведіть, що $a^4 + b^4 = m^2n^2$ тоді й тільки тоді, коли гострий кут паралелограма дорівнює 45°.

УКРАЇНА МАЄ ТАЛАНТИ!

Як треба скласти апельсини у велику коробку, щоб помістилося якомога більше? Це питання, на перший погляд просте й несерйозне, має давню історію. У 1611 р. німецький астроном, математик і філософ Йоганн Кеплер, відомий відкриттям законів руху планет Сонячної системи, сформулював задачу про оптимальне пакування куль у просторі. Кеплер висунув гіпотезу, згідно з якою оптимально буде розкласти кулі так, як інколи викладають апельсини в магазинах чи на ринках (рис. 18.8).

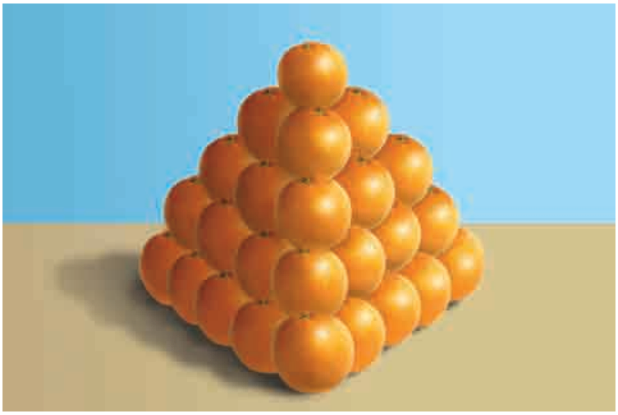


Рис. 18.8

Протягом 400 років провідні математики світу намагалися обґрунтувати це припущення. Остаточну крапку в цьому питанні було поставлено лише у 2017 році. Доведення гіпотези Кеплера, яке містило комп'ютерний перебір величезної кількості варіантів та яке ретельно перевіряли 19 років, було нарешті визнано коректним.

Важливу роль у цій багатовіковій історії зіграли молоді українські вчені в галузі математики А. Бондаренко, М. В'язовська та Д. Радченко, які навчалися в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. У 2016 р. вийшли статті з розв'язанням задачі Кеплера для випадків 8- та 24-вимірного простору. Марина В'язовська, авторка цих статей, була нагороджена премією Салема. Ця премія є надзвичайно престижною. Вищою є лише премія Філдса — аналог Нобелівської премії для математиків.

Це блискуче досягнення українських науковців!

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Кут між прямими в просторі

Кутом між двома прямими, що перетинаються, називають величину того з кутів, утворених при їхньому перетині, який не більший за 90°.

Вважають, що кут між двома паралельними прямими дорівнює 0°.

Кутом між двома мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються та відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Дві прямі в просторі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Перпендикулярність прямої та площини

Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні.

Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.

Симетрія відносно площини

Точки M і M_1 називають симетричними відносно площини α, якщо відрізок MM_1 перпендикулярний до цієї площини та ділиться цією площиною навпіл. Кожну точку площини α вважають симетричною самій собі.

Фігуру називають симетричною відносно площини α, якщо для кожної точки даної фігури точка, симетрична їй відносно площини α, також належить цій фігурі. Площину α називають площиною симетрії фігури.

Ортогональна проекція фігури

Нехай фігура F_1 — паралельна проекція фігури F на площину α в напрямі прямої l. Якщо $l \perp \alpha$, то фігуру F_1 називають ортогональною проекцією фігури F на площину α.

Властивість перпендикуляра та похилої

Якщо з однієї точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, то похила більша за перпендикуляр.

Відстань від точки до площини

Якщо точка не належить площині, то відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки на площину. Якщо точка належить площині, то вважають, що відстань від точки до площини дорівнює нулю.

Відстань від прямої до паралельної їй площини

Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.

Відстань між двома паралельними площинами

Відстанню між двома паралельними площинами називають відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих

Спільним перпендикуляром двох мимобіжних прямих називають відрізок, який перпендикулярний до цих прямих і кінці якого належать цим прямим.

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює довжині їхнього спільного перпендикуляра.

Теорема про три перпендикуляри

Якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до проекції похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до самої похилої. І навпаки, якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину.

Кут між прямою та площиною

Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює 0°.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює 90°.

Якщо пряма перетинає площину й не перпендикулярна до неї, то кутом між такою прямою та площиною називають кут між прямою та її проекцією на площину.

Величина двогранного кута

Величиною двогранного кута називають величину його лінійного кута.

Кут між двома площинами, що перетинаються

Кутом між двома площинами, що перетинаються, називають величину того з утворених двогранних кутів, який не більший за 90°.

Перпендикулярні площини

Дві площини називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Ознака перпендикулярності площин

Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Властивість перпендикулярних площин

Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, проведена в одній площині перпендикулярно до прямої перетину площин, є перпендикулярною до другої площини.

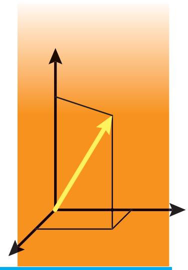
Площа ортогональної проекції многокутника

Площа проекції опуклого многокутника дорівнює добутку його площі та косинуса кута α між площиною многокутника та площиною проекції, де $0° \leqslant \alpha < 90°$.

Бісектор двогранного кута

Бісектором двогранного кута називають півплощину, межею якої є ребро двогранного кута і яка ділить його на два рівних двогранних кути.

КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ §4



У цьому параграфі ви ознайомитеся з прямокутною системою координат у просторі, навчитеся знаходити координати точок у просторі, довжину відрізка та координати його середини.

Ви узагальните й розширите свої знання про вектори.

19. Декартові координати точки в просторі

У попередніх класах ви ознайомилися з прямокутною (декартовою) системою координат на площині — це дві перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку (рис. 19.1).

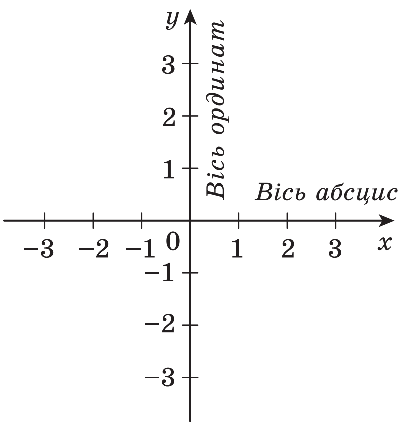


Рис. 19.1

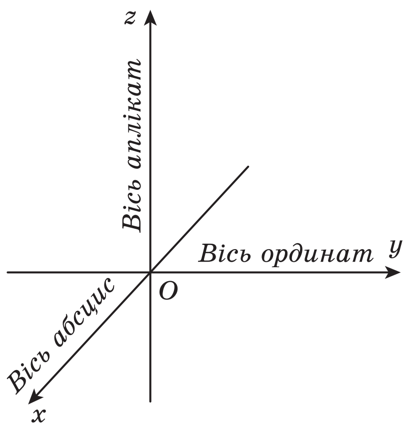


Рис. 19.2

Систему координат можна ввести й у просторі.

Прямокутною (декартовою) системою координат у просторі називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку (рис. 19.2). Точку, у якій перетинаються три координатні прямі, позначають буквою O. Її називають **початком координат**. Координатні прямі позначають буквами x, y і z, їх відповідно називають **віссю абсцис, віссю ординат** і **віссю аплікат**.

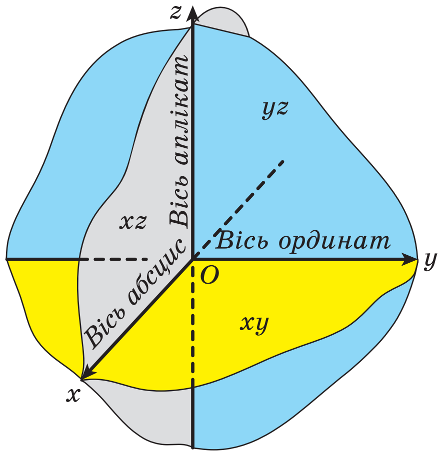


Рис. 19.3

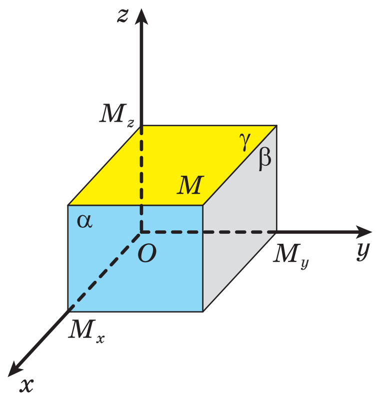


Рис. 19.4

Площини, які проходять через пари координатних прямих x і y, x і z, y і z, називають **координатними площинами**, їх відповідно позначають xy, xz і yz (рис. 19.3).

Простір, у якому задано систему координат, називають **координатним простором**. Якщо осі координат позначено буквами x, y і z, то координатний простір позначають xyz.

Із курсу планіметрії ви знаєте, що кожній точці M координатної площини xy ставиться у відповідність упорядкована пара чисел $(x; y)$, які називають координатами точки M. Записують: $M(x; y)$.

Аналогічно кожній точці M координатного простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел $(x; y; z)$, яку визначають таким чином. Проведемо через точку M три площини α, β і γ перпендикулярно до осей x, y і z відповідно. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_x, M_y і M_z (рис. 19.4). Координату точки M_x на осі x називають **абсцисою** точки M і позначають буквою x. Координату точки M_y на осі y називають **ординатою** точки M і позначають буквою y. Координату точки M_z на осі z називають **аплікатою** точки M і позначають буквою z.

Отриману таким чином упорядковану трійку чисел $(x; y; z)$ називають **координатами точки** M у просторі. Записують: $M(x; y; z)$.

Якщо точка належить координатній площині або координатній осі, то деякі її координати дорівнюють нулю. Наприклад, точка $A(x; y; 0)$ належить координатній площині xy, а точка $B(0; 0; z)$ — осі аплікат.

Теорема 19.1. ***Відстань між двома точками A (x_1; y_1; z_1) і B (x_2; y_2; z_2) можна знайти за формулою***

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доведення. Пряма AB не може бути паралельною одразу трьом координатним прямим.

Нехай пряма AB не паралельна осі z (інші два випадки розглядають аналогічно).

Спроектуємо точки A і B на координатну площину xy. Отримаємо точки A_1 і B_1 (рис. 19.5). Очевидно, що абсциса й ордината точки A відповідно дорівнюють абсцисі й ординаті точки A_1. Таку саму властивість мають точки B і B_1. Із курсу планіметрії ви знаєте, що $A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

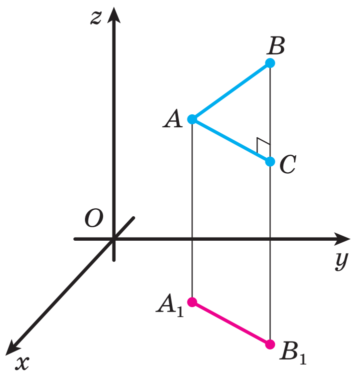


Рис. 19.5

Якщо відрізок AB паралельний координатній площині xy або їй належить, то аплікати точок A і B рівні, тобто $z_1 = z_2$, і $AB = A_1B_1$. Маємо:

$$AB = A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 0} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Отже, для розглядуваного випадку теорему доведено.

Нехай відрізок AB не паралельний координатній площині xy та їй не належить. У трапеції ABB_1A_1 проведемо висоту AC (рис. 19.5). Очевидно, що $BC = |z_2 - z_1|$. Із прямокутного трикутника ABC отримуємо:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A_1B_1^2 + BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \blacktriangleleft$$

Теорема 19.2. ***Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.***

Доведення. Доведемо, що точка $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ є серединою відрізка з кінцями $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Маємо: $$AM=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_1\right)^2+\left(\frac{z_1+z_2}{2}-z_1\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\frac{1}{2}AB;$$
$$MB=\sqrt{\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_2-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(z_2-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\frac{1}{2}AB.$$

Ми отримали, що $AB = AM + MB$ і $AM = MB$. Отже, точка M — середина відрізка AB. ◄

Теорему 19.2 можна узагальнити. Якщо точка M, яка належить відрізку AB, є такою, що $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$, то координати точки M мають вигляд: $M\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}; \frac{ny_1+my_2}{m+n}; \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$. Для доведення цього твердження достатньо показати, що виконуються дві рівності: $AB = AM + MB$ і $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$.

?

1. Як називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку?
2. Як називають точку, у якій перетинаються три координатні прямі?
3. Як називають координатну пряму, позначену буквою x? буквою y? буквою z?
4. Як називають площину, що проходить через пару координатних прямих?
5. Як називають простір, у якому задано систему координат?
6. Опишіть, яким чином кожній точці M координатного простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел $(x;\ y;\ z)$.
7. Як знайти відстань між двома точками, якщо відомо їхні координати?
8. Як знайти координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні, якщо відомо координати його кінців?

ВПРАВИ

19.1.° Визначте, чи лежить дана точка на координатній осі, і в разі ствердної відповіді вкажіть цю вісь:

1) A (4; −3; 0); 3) C (−6; 0; 0); 5) E (0; 0; −2);
2) B (1; 0; −5); 4) D (0; 7; 0); 6) F (3; 0; 0).

19.2.° Визначте, чи належить дана точка координатній площині, і в разі ствердної відповіді вкажіть цю площину:

1) A (4; −3; 5); 3) C (3; 3; 0); 5) E (0; 4; 0);
2) B (0; −2; 6); 4) D (2; 0; 8); 6) F (−1; 1; 2).

19.3.° Які з точок A (5; −8; 1), B (5; 8; 1), C (−5; 7; 1), D (5; −7; −1) лежать на одній прямій, паралельній осі ординат?

19.4.° Які з точок D (2; 3; 4), E (−2; 3; 4), K (2; 3; −4), M (−2; −3; 4) лежать на одній прямій, паралельній осі аплікат?

19.5.° Які з точок A (−1; 6; 2), B (−1; −6; 2), C (1; 6; −2), D (1; −6; 2) лежать в одній площині, паралельній площині xz?

19.6.° Які з точок M (5; 10; −3), N (5; 9; 3), K (4; −9; 3), P (4; −9; 2) лежать в одній площині, паралельній площині xy?

19.7.° Якою є відстань від точки M (4; −5; 2) до координатної площини:

1) xy; 2) xz; 3) yz?

19.8.° Які координати має проекція точки M (−3; 2; 4) на координатну площину:

1) xz; 2) yz; 3) xy?

19.9.° Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розміщено в прямокутній системі координат так, як показано на рисунку 19.6. Точка A має координати (1; −1; 0). Знайдіть координати решти вершин куба.

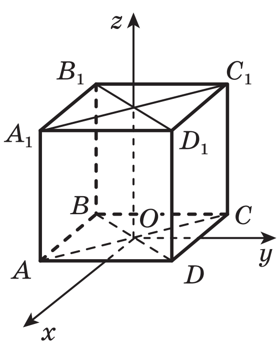


Рис. 19.6

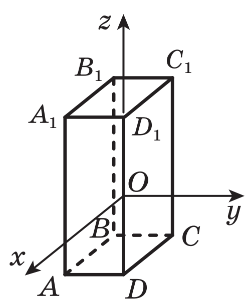


Рис. 19.7

19.10.° Бічні ребра прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні осі аплікат (рис. 19.7), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Початок координат, точка O, є серединою ребра DD_1. Знайдіть координати вершин паралелепіпеда.

19.11.° Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:
1) A (3; −4; 2), B (5; −6; 1); 2) A (−2; 3; 1), B (−3; 2; 0).

19.12.° Знайдіть відстань між точками C (6; −5; −1) і D (8; −7; 1).

19.13.° Знайдіть координати середини відрізка CD, якщо C (−2; 6; −7), D (4; −10; −3).

19.14.° Знайдіть координати середини відрізка EF, якщо E (3; −3; 10), F (1; −4; −8).

19.15.° Точки P (7; 11; −9) і K (8; −6; −1) симетричні відносно точки C. Знайдіть координати точки C.

19.16.° Точка S — середина відрізка AD, A (−1; −2; −3), S (5; −1; 0). Знайдіть координати точки D.

19.17.° Точки A і B симетричні відносно точки M, причому B (1; 3; −5), M (9; 0; −4). Знайдіть координати точки A.

19.18.° Знайдіть відстань від точки M (−3; 4; 9) до осі аплікат.

19.19.° Знайдіть відстань від точки K (12; 10; −5) до осі ординат.

19.20.° Відстань між точками A (1; y; 3) і B (3; −6; 5) дорівнює $2\sqrt{6}$. Знайдіть значення y.

19.21.° Точка A належить осі абсцис. Відстань від точки A до точки C (1; −1; −2) дорівнює 3. Знайдіть координати точки A.

19.22.° Точка M належить відрізку AB і ділить його у відношенні 4 : 1, рахуючи від точки A. Знайдіть координати точки M, якщо A (2; −3; 2), B (−3; 1; −8).

19.23.° Точка M належить відрізку AB і ділить його у відношенні 1 : 2, рахуючи від точки A. Знайдіть координати точки B, якщо A (4; −6; 0), M (3; −2; −3).

19.24.• Знайдіть точку, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок A (2; 3; 1) і B (4; 1; −5).

19.25.• Знайдіть точку, яка належить осі абсцис і рівновіддалена від точки A (−1; 2; 4) і площини yz.

19.26.• Знайдіть точку, яка належить осі аплікат і рівновіддалена від початку координат і точки M (3; −6; 9).

19.27.• Точка C (−4; 3; 2) — середина відрізка AB, точка A належить площині xz, точка B — осі y. Знайдіть координати точок A і B.

19.28.• На відрізку AB позначили точки C і D, які ділять його на три рівні частини, точка C лежить між точками A і D. Знайдіть координати точки B, якщо A (−14; 5; −8), D (7; −7; 2).

19.29.° Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо A (1; −2; 2), B (2; 6; 1), C (−1; −1; 3).

19.30.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 3; −1), B (−2; 7; −6), C (−1; 7; −6) і D (−1; 3; −1) є прямокутником.

19.31.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (4; 2; 10), B (10; −2; 8), C (4; −4; 4) і D (−2; 0; 6) є ромбом.

19.32.° Знайдіть точку, яка належить площині yz і рівновіддалена від точок A (2; 1; −3), B (3; 2; −2) і C (4; −3; −1).

19.33.° Знайдіть точку, відстань від якої до площини xy дорівнює 2 та яка рівновіддалена від точок A (1; 0; 0), B (0; 1; 0) і C (0; 0; 1).

19.34.° Точки D (−1; 2; 4), E (5; −2; 1) і F (3; −3; 5) є серединами сторін деякого трикутника. Знайдіть вершини цього трикутника.

19.35.° У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо координати чотирьох вершин: A (2; −1; 1), B (1; 3; 4), D (6; 0; 1), A_1 (4; 2; 0). Знайдіть координати решти вершин паралелепіпеда.

19.36.° Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо A (1; −2; 5), B (−4; 1; −3), C (6; −5; 1).

19.37.° У трикутнику ABC проведено бісектрису AK. Знайдіть координати точки K, якщо A (5; 3; −4), B (2; −1; −4), C (−7; 3; 1).

19.38.° Відрізок BM — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть координати точки M, якщо A (3; 1; −3), B (7; −1; 1), C (1; 7; 1).

19.39.° Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайдіть відстань від середини ребра B_1C_1 до точки перетину медіан трикутника BA_1D.

19.40.° Основою трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник зі стороною 2 см, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи та дорівнює 4 см. Точки K і M — середини ребер BB_1 і A_1C_1 відповідно. Знайдіть відстань від точки M до точки перетину медіан трикутника AKC.

19.41.°° Дано прямокутник $ABCD$. Доведіть, що для будь-якої точки X простору виконується рівність $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

19.42.°° Точки M, N і K належать відповідно ребрам AA_1, B_1C_1 і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 1. Якого найменшого значення може набувати сума $MN^2 + NK^2 + KM^2$?

19.43.°° Ребра AB, AD і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють відповідно 2 см, 4 см і 6 см. Площина, яка перпендикулярна до діагоналі BD_1 і проходить через її середину, перетинає пряму A_1B_1 у точці M. Знайдіть відрізок A_1M.

19.44.•• Основою піраміди $MABCD$ є прямокутник $ABCD$. Ребро MA перпендикулярне до площини основи. Відомо, що $AB = 3$ см, $AD = 4$ см і $AM = 2$ см. Площина, яка перпендикулярна до ребра MC і проходить через його середину, перетинає прямі AB і AD у точках K і P відповідно. Знайдіть відрізок KP.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.45. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 13 см і 37 см, а її діагоналі перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції.

19.46. По різні боки від центра кола проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань між хордами дорівнює 9 см.

20. Вектори в просторі

У курсі планіметрії ви вивчали вектори на площині. Тепер ви починаєте вивчати вектори в просторі. Багато понять і властивостей, пов'язаних з векторами на площині, можна майже дослівно віднести до векторів у просторі. Доведення такого роду тверджень про вектори в просторі цілком аналогічні доведенням відповідних тверджень про вектори на площині. У таких випадках ми обмежимося формулюваннями тверджень, не наводячи їхніх доведень. При цьому нові властивості, які виникають у просторі, вивчатимемо докладно.

Розглянемо відрізок AB. Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки A до точки B. Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком** або **вектором**.

Вектор з початком у точці A й кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB»). Для позначення векторів також використовують малі букви латинського алфавіту зі стрілкою зверху.

На рисунку 20.1 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ і $\vec{p}$.

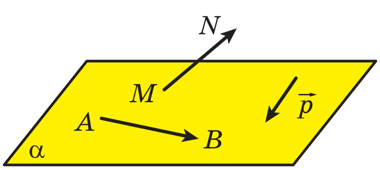


Рис. 20.1

На відміну від відрізка, у якого кінці — різні точки, у вектора початок і кінець можуть збігатися.

Домовилися вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, називати **нульовим вектором** або **нуль-вектором** і позначати $\vec{0}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначають: $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{a}$ позначають так: $|\vec{a}|$. Вважають, що модуль нульового вектора дорівнює нулю. Записують: $|\vec{0}|=0$.

Означення. Два ненульових вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

На рисунку 20.2 зображено чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ є колінеарними. Записують: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

Ненульові колінеарні вектори бувають **співнапрямленими** й **протилежно напрямленими**. Наприклад, на рисунку 20.2 вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ співнапрямлені. Записують: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Вектори $\overrightarrow{OD}$ і $\overrightarrow{D_1B_1}$ протилежно напрямлені. Записують: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Вважають, що нульовий вектор не має напряму.

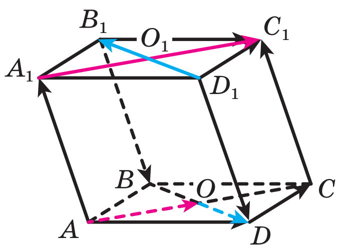


Рис. 20.2

Означення. Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

На рисунку 20.2 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1}=\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B_1C_1}$.

Часто, говорячи про вектори, ми не конкретизуємо, яка точка є початком вектора. Так, на рисунку 20.3, *а* зображено вектор $\vec{a}$. На рисунку 20.3, *б* зображено вектори, рівні вектору $\vec{a}$. Кожний із них також прийнято називати вектором $\vec{a}$. На рисунку 20.3, *в* зображено вектор $\vec{a}$ і точку A. Побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$, який дорівнює вектору $\vec{a}$. У такому разі говорять, що вектор $\vec{a}$ **відкладено від точки** A (рис. 20.3, *г*).

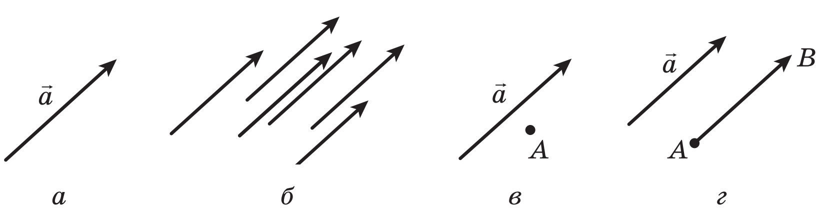


Рис. 20.3

Означення. **Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають компланарними[1], якщо рівні їм вектори, які мають спільний початок, належать одній площині.**

Легко встановити (зробіть це самостійно), що є справедливими такі твердження:

якщо з трьох даних векторів знайдуться два колінеарних вектори, то ці три вектори є компланарними;

якщо вектори компланарні, то всі вони паралельні деякій площині.

На рисунку 20.4 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вектори $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ компланарні. Справді, вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$, а вектори $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$ мають спільний початок і лежать в одній площині.

Вектори $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CC_1}$ некомпланарні (рис. 20.4). Покажемо це. Вектор $\overrightarrow{AA_1}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{CC_1}$. Вектори $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$, маючи спільний початок — точку A, не лежать в одній площині.

Розглянемо в координатному просторі вектор $\vec{a}$. Від початку координат відкладемо вектор $\overrightarrow{OA}$, рівний вектору $\vec{a}$ (рис. 20.5). **Координатами вектора** $\vec{a}$ називають координати точки A. Запис $\vec{a}(x; y; z)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x; y; z)$.

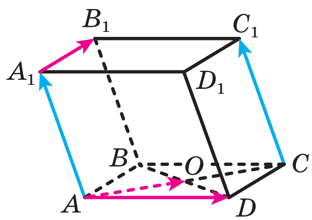


Рис. 20.4

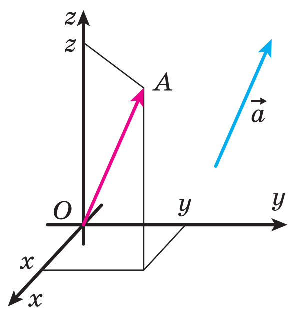


Рис. 20.5

Рівні вектори мають рівні відповідні координати, і навпаки, якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Теорема 20.1. ***Якщо точки A $(x_1; y_1; z_1)$ і B $(x_2; y_2; z_2)$ — відповідно початок і кінець вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ і $z_2 - z_1$ дорівнюють відповідно першій, другій і третій координатам вектора $\vec{a}$.***

[1] Від латин. *com* — «спільно» та *planum* — «площина».

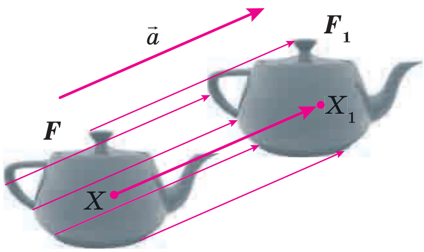


Рис. 20.6

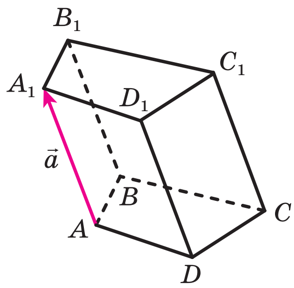


Рис. 20.7

Із формули відстані між двома точками випливає, що ***коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2; a_3)$, то***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Нехай у просторі задано деяку фігуру F і вектор $\vec{a}$ (рис. 20.6). Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 таку, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. У результаті цього перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 20.6). Таке перетворення фігури F називають **паралельним перенесенням** на вектор $\vec{a}$.

Наприклад, основу $A_1B_1C_1D_1$ призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можна отримати в результаті паралельного перенесення основи $ABCD$ на вектор $\vec{a}$ (рис. 20.7).

Із двох будь-яких лінійних кутів двогранного кута один кут є образом другого кута при паралельному перенесенні (рис. 20.8).

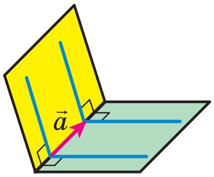


Рис. 20.8

Паралельне перенесення є рухом.

Якщо в результаті паралельного перенесення образом фігури F є фігура F_1, то $F_1 = F$.

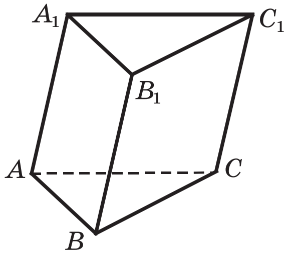


Рис. 20.9

Задача. Точки $B\ (1; 3; -2)$, $B_1\ (4; -1; 0)$, $C\ (-3; 5; 1)$ і $A_1\ (0; 5; -4)$ є вершинами трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 20.9). Знайдіть координати точок A і C_1.

Розв'язання. Знайдемо координати $(a_1; a_2; a_3)$ вектора $\overrightarrow{BB_1}$. Маємо: $a_1 = 4 - 1 = 3$, $a_2 = -1 - 3 = -4$, $a_3 = 0 - (-2) = 2$.

Нехай $(x; y; z)$ — координати точки C_1.

Тоді вектор $\overrightarrow{CC_1}$ має такі координати: $(x + 3; y - 5; z - 1)$.

Вектор $\overrightarrow{CC_1}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{BB_1}$. Оскільки в рівних векторів відповідні координати рівні, то $x + 3 = 3$, $y - 5 = -4$, $z - 1 = 2$. Звідси $x = 0$, $y = 1$, $z = 3$.

Нехай $(t; m; n)$ — координати точки A. Оскільки $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, то вектор $\overrightarrow{AA_1}$ має такі координати: $(-t; 5 - m; -4 - n)$. Аналогічно встановлюємо, що $t = -3$, $m = 9$, $n = -6$.

Відповідь: $A\ (-3; 9; -6)$, $C_1\ (0; 1; 3)$. ◄

1. Як позначають вектор з початком у точці A й кінцем у точці B?
2. Який вектор називають нульовим?
3. Що називають модулем вектора?
4. Які вектори називають колінеарними?
5. Як позначають співнапрямлені вектори? протилежно напрямлені вектори?
6. Які два ненульових вектори називають рівними?
7. Які вектори називають компланарними?
8. Поясніть, що називають координатами даного вектора.
9. Що можна сказати про координати рівних векторів?
10. Що можна сказати про вектори, відповідні координати яких рівні?
11. Як знайти координати вектора, якщо відомо координати його початку й кінця?
12. Як знайти модуль вектора, якщо відомо його координати?
13. Яке перетворення фігури F називають паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$?

ВПРАВИ

20.1.° На рисунку 20.10 зображено призму $ABCA_1B_1C_1$, основою якої є правильний трикутник. Чи є рівними вектори:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$;
3) $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{C_1C}$;
4) $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{AA_1}$?

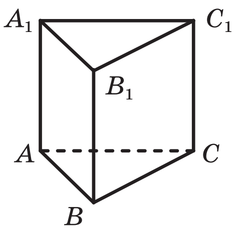


Рис. 20.10

20.2.° Чи можуть бути рівними вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$?

20.3.° Точки E і F — середини відповідно ребер AA_1 і AD прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20.11), $AB \neq AD$. Укажіть вектори з початком і кінцем у вершинах паралелепіпеда, які:

1) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{EF}$;

2) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{AB_1}$;

3) мають рівні модулі з вектором $\overrightarrow{BC_1}$.

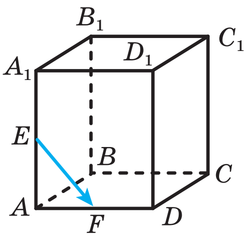


Рис. 20.11

20.4.° Точки M і K — середини відповідно ребер CD і CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть вектори з початком і кінцем у вершинах паралелепіпеда, які:

1) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{AD}$;

2) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MK}$;

3) мають рівні модулі з вектором $\overrightarrow{AC_1}$.

20.5.° Накресліть тетраедр $DABC$. Відкладіть:

1) від точки A вектор, рівний вектору $\overrightarrow{CA}$;

2) від точки B вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$;

3) від точки D вектор, рівний вектору $\overrightarrow{BC}$.

20.6.° Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Відкладіть:

1) від точки A вектор, рівний вектору $\overrightarrow{A_1A}$;

2) від точки C вектор, рівний вектору $\overrightarrow{A_1C_1}$;

3) від точки D_1 вектор, рівний вектору $\overrightarrow{B_1D}$.

20.7.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) $A\ (3;\ 4;\ 2)$, $B\ (1;\ -4;\ 5)$; 2) $A\ (-6;\ 7;\ -1)$, $B\ (2;\ 9;\ 8)$.

20.8.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо $C\ (-1;\ 10;\ 4)$, $D\ (-1;\ 0;\ 2)$.

20.9.° Знайдіть координати кінця вектора $\overrightarrow{PF}\,(2;-3;6)$, якщо $P\ (3;\ 5;\ -1)$.

20.10.° Знайдіть координати початку вектора $\overrightarrow{ST}\,(-3;4;-2)$, якщо $T\ (4;\ 2;\ 0)$.

20.11.° Дано точки $A\ (-2;\ 3;\ 5)$, $B\ (1;\ 2;\ 4)$ і $C\ (4;\ -3;\ 6)$. Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

20.12.° Дано точки $A\ (5; -12; 7)$, $B\ (0; y; 3)$, $C\ (x; 17; -14)$ і $D\ (15; 0; z)$. При яких значеннях x, y і z є правильною рівність $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

20.13.° Знайдіть модуль вектора $\vec{m}\left(2; -5; \sqrt{7}\right)$.

20.14.° Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{MK}$, якщо $M\ (10; -4; 20)$, $K\ (8; -2; 19)$.

20.15.° Модуль вектора $\vec{a}\,(-4; y; 12)$ дорівнює 13. Знайдіть значення y.

20.16.° При яких значеннях k вектори $\vec{a}\,(4; k+3; 10)$ і $\vec{b}\,(k; 4; k+9)$ мають рівні модулі?

20.17.° У просторі виконали паралельне перенесення на вектор $\vec{a}\,(6; -2; 3)$. Знайдіть точку, яка є образом точки:

1) $M\ (5; -3; 7)$; 2) $O\ (0; 0; 0)$; 3) $K\ (-4; 0; 1)$.

20.18.° У просторі виконали паралельне перенесення на вектор $\vec{m}\,(-2; 1; -3)$. Знайдіть точку, яка є образом точки:

1) $O\ (0; 0; 0)$; 2) $C\ (-2; 1; -7)$.

20.19.° Дано точки $A\ (-8; 4; -4)$ і $B\ (5; -6; 1)$. Знайдіть вектор, який задає таке паралельне перенесення, що:

1) образом точки A є точка B;
2) образом точки B є точка A.

20.20.• Використовуючи вектори, доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (-4; 2; 5)$, $B\ (-6; 3; 0)$, $C\ (12; -8; 1)$ і $D\ (14; -9; 6)$ є паралелограмом.

20.21.• Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A\ (10; -8; -1)$, $C\ (-2; 4; 4)$ і $D\ (11; -20; 10)$. Використовуючи вектори, знайдіть координати вершини B.

20.22.• Модуль вектора $\vec{m}$ дорівнює $4\sqrt{3}$, а його координати є рівними. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$.

20.23.• Модуль вектора $\vec{c}\,(x; y; z)$ дорівнює 9, його координати x і z є рівними, а координати x і y — протилежні числа. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

20.24.• У результаті паралельного перенесення образом точки $A\ (-2; -1; 3)$ є точка $A_1\ (-4; 1; -5)$. Які координати має точка, що є образом точки $B\ (7; -5; 4)$) у результаті цього паралельного перенесення?

20.25.• Чи існує паралельне перенесення, у результаті якого образом точки $M\ (-4; 7; -2)$ є точка $M_1\ (-8; 1; -7)$, а образом точки $N\ (-1; 4; -2)$ — точка $N_1\ (-5; -2; -7)$?

20.26.• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що є компланарними вектори: 1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{D_1B}$ і $\overrightarrow{CC_1}$.

20.27.• Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Доведіть, що є компланарними вектори: 1) $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{C_1B}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

20.28.• Точки A $(1; -2; 5)$, C $(-5; 4; 3)$, A_1 $(7; 1; -2)$ і B_1 $(0; 2; -6)$ є вершинами паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За допомогою векторів знайдіть координати решти вершин даного паралелепіпеда.

20.29.• Точки A $(1; 4; -4)$, B $(4; -3; 1)$, C_1 $(-5; 1; 0)$ і B_1 $(8; -2; 3)$ є вершинами паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За допомогою векторів знайдіть координати решти вершин даного паралелепіпеда.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.30. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 15 см і 39 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції.

20.31. По один бік від центра кола проведено дві паралельні хорди завдовжки 30 см і 48 см. Знайдіть відстань між хордами, якщо радіус кола дорівнює 25 см.

21. Додавання і віднімання векторів

Нехай у просторі дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки A простору вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$. Далі від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ називають **сумою векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 21.1) і записують: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Можна показати, що сума $\vec{a}+\vec{b}$ не залежить від вибору точки A. Інакше кажучи, якщо вектор $\vec{a}$ відкласти від іншої точки A_1, то отримаємо, що сума $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{A_1C_1}$, де $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 21.2).

Зазначимо, що *для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Вона виражає правило трикутника.

Теорема 21.1. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють відповідно $(a_1; a_2; a_3)$ і $(b_1; b_2; b_3)$, то координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють $(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$.***

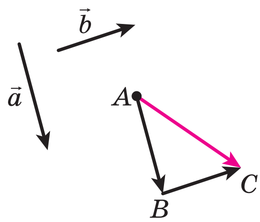


Рис. 21.1

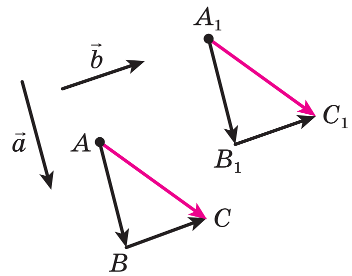


Рис. 21.2

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (***переставна властивість***);

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (***сполучна властивість***).

Суму трьох і більшої кількості векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманої суми додають третій вектор і т. д. Наприклад, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

На рисунку 21.3 зображено тетраедр $ABCD$. Маємо:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}.$$

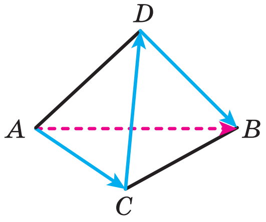


Рис. 21.3

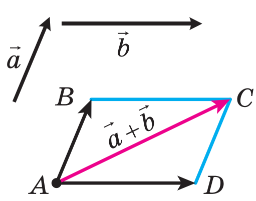


Рис. 21.4

Узагалі, для будь-яких точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n простору виконується рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

Зауважимо, що коли з трьох даних векторів один дорівнює сумі двох інших, то ці вектори компланарні.

Для додавання двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зручно користуватися **правилом паралелограма**.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$ (рис. 21.4). Побудуємо паралелограм $ABCD$. Тоді шукана сума $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.

Розглянемо некомпланарні вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ (рис. 21.5). Знайдемо суму цих векторів.

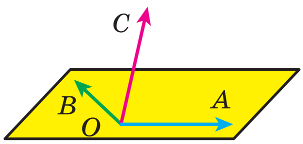


Рис. 21.5

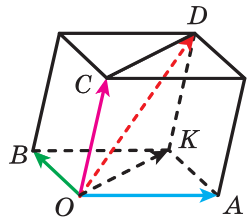


Рис. 21.6

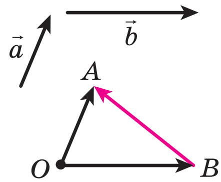


Рис. 21.7

Побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки OA, OB і OC були його ребрами (рис. 21.6). Відрізок OD є діагоналлю цього паралелепіпеда. Доведемо, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

Оскільки чотирикутник $OBKA$ — паралелограм, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}$. Маємо: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}$. Чотирикутник $OCDK$ також є паралелограмом, тому $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

Описаний спосіб додавання трьох векторів, які відкладені від однієї точки та некомпланарні, **називають правилом паралелепіпеда**.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Записують: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, що дорівнює різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 21.7). Тоді $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$. За означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$, отже, вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Зазначимо, що *для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. Вона виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.

Теорема 21.2. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2; a_3)$ і $(b_1; b_2; b_3)$, то координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.***

Означення. Два ненульових вектори називають *протилежними*, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені. Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

На рисунку 21.8 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{C_1C}$ — протилежні. Також протилежними є, наприклад, вектори $\overrightarrow{A_1B_1}$ і $\overrightarrow{BA}$.

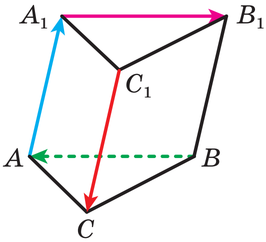


Рис. 21.8

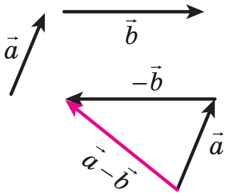


Рис. 21.9

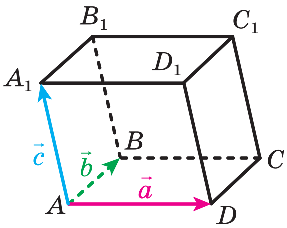


Рис. 21.10

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають $-\vec{a}$.

Очевидно, що вектор $\overrightarrow{AB}$ є протилежним вектору $\overrightarrow{BA}$, тобто для будь-яких двох точок A і B виконується рівність $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Із правила трикутника отримуємо:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Із цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2; a_3)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1; -a_2; -a_3)$.

Теорема 21.3. ***Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$* виконується рівність $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.**

Ця теорема дає змогу звести віднімання векторів до додавання: щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, можна до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$ (рис. 21.9).

Задача 1. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.10). Виразіть вектори $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{DB_1}$ і $\overrightarrow{D_1B}$ через вектори $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Розв'язання. Скористаємося правилом паралелепіпеда. Маємо:

$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c};$$

$$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c};$$

$$\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1D} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}.$$ ◄

Задача 2. Паралелограми $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$ мають спільну вершину A. Доведіть, що прямі BB_1, CC_1 і DD_1 паралельні деякій площині (рис. 21.11).

Розв'язання. Запишемо такі векторні рівності: $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AD}$. Додамо почленно ліві й праві частини цих рівностей: $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Маємо: $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Тоді $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC_1}$. Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ і $\overrightarrow{DD_1}$ компланарні. Отже, існує площина, якій паралельні прямі BB_1, CC_1 і DD_1. ◄

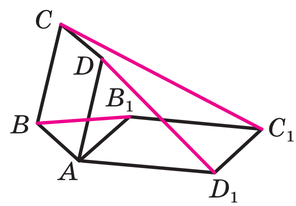


Рис. 21.11

1. Опишіть правило трикутника для знаходження суми векторів.
2. Яка рівність виражає правило трикутника для знаходження суми векторів?
3. Чому дорівнюють координати вектора, рівного сумі двох даних векторів?
4. Опишіть правило паралелограма для знаходження суми двох векторів.
5. Опишіть правило паралелепіпеда для знаходження суми трьох векторів.
6. Який вектор називають різницею двох векторів?
7. Яка рівність виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки?
8. Чому дорівнюють координати вектора, рівного різниці двох даних векторів?
9. Які вектори називають протилежними?
10. Як можна звести віднімання векторів до додавання векторів?

ВПРАВИ

21.1.° Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 21.12). Знайдіть суму векторів:
1) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1C_1}$.

21.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть суму векторів:
1) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1D_1}$.

21.3.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.13). Знайдіть суму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{B_1C_1}$.

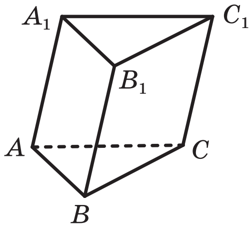


Рис. 21.12

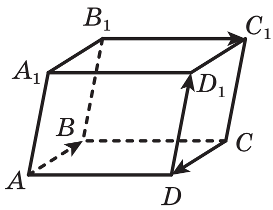


Рис. 21.13

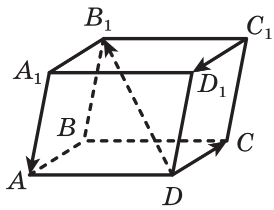


Рис. 21.14

21.4.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.14). Знайдіть суму $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{DC}$.

21.5.° Дано вектори $\vec{a}(3;-6;4)$ і $\vec{b}(-2;4;-5)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|$.

21.6.° Дано вектори $\vec{m}(-7;-1;8)$ і $\vec{n}(-3;2;-4)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\vec{m}+\vec{n}$; 2) $|\vec{m}+\vec{n}|$.

21.7.° Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 21.12). Знайдіть різницю векторів:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{B_1C_1}$.

21.8.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть різницю векторів:

1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$.

21.9.° Дано вектори $\vec{a}(-10;15;-20)$ і $\vec{b}(2;6;-12)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

21.10.° Дано вектори $\vec{m}(3;-1;2)$ і $\vec{n}(4;-2;-3)$. Знайдіть:

1) координати вектора $\vec{m}-\vec{n}$; 2) $|\vec{m}-\vec{n}|$.

21.11.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.15). Укажіть усі вектори, початком і кінцем кожного з яких є вершини паралелепіпеда, протилежні вектору:

1) $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AC}$.

2) $\overrightarrow{B_1D}$;

21.12.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 21.15). Укажіть усі вектори, початком і кінцем кожного з яких є вершини паралелепіпеда, протилежні вектору:

1) $\overrightarrow{B_1B}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$.

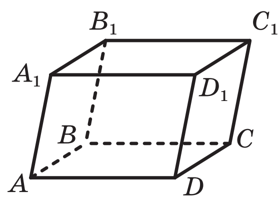


Рис. 21.15

21.13.° Якими є координати вектора, протилежного вектору $\vec{a}(13; -10; 9)$?

21.14.• Спростіть вираз:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{EF}$.

21.15.• Спростіть вираз:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{BM}$;

2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AC}$.

21.16.• Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}$ протилежні.

21.17.• Доведіть, що вектори $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{KE}$ і $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{EC}$ протилежні.

21.18.• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть суму

$$\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB_1}.$$

21.19.• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть суму

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{CB}.$$

21.20.• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{C_1D_1}$.

21.21.• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{BC}$.

21.22.• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OC},$$

де O — довільна точка простору.

21.23.• Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}|$.

21.24.• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 2 см. Знайдіть модуль вектора $\vec{m}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BM}$.

21.25.• Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник, сторона якого дорівнює 4 см. Точка D — середина ребра AB. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}=\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{A_1C}$.

21.26.• Знайдіть координати точки A такої, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, якщо B (4; −2; 12), C (3; −1; 4).

21.27.• Знайдіть координати точки M такої, що $\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, якщо C (1; −5; 3), D (−2; 0; 6).

21.28.•• Дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що справедлива рівність $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}$.

21.29.•• Дано чотирикутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що справедлива рівність $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{DA_1}$.

21.30.•• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AA_1}$ через вектори $\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{B_1C}$ і $\overrightarrow{B_1D}$.

21.31.•• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AD_1}$ через вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{AC_1}$.

21.32.•• Дано вектори $\vec{a}\,(2; -1; 4)$, $\vec{b}\,(0; -3; 6)$ і $\vec{c}\,(1; y; 5)$. Якого найменшого значення набуває модуль вектора $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ і при якому значенні y?

21.33.•• Дано вектори $\vec{m}\,(6; -2; z)$, $\vec{n}\,(x; 1; 2)$ і $\vec{k}\,(3; -4; -7)$. Якого найменшого значення набуває модуль вектора $\vec{m}-\vec{n}-\vec{k}$ і при яких значеннях x і z?

21.34.* Доведіть, що для будь-яких чисел a, b, c, a_1, b_1 і c_1 виконується нерівність

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\geqslant\sqrt{(a+a_1)^2+(b+b_1)^2+(c+c_1)^2}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

21.35. Одна з основ прямокутної трапеції на 7 см менша від другої, а більша бічна сторона дорівнює 25 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ ділить прямий кут трапеції навпіл.

21.36. Сторони AB і AD паралелограма $ABCD$ відповідно дорівнюють 2 см і 4 см. Кут BAD дорівнює $60°$. Точки M і N — середини сторін BC і CD відповідно. Знайдіть кут MAN.

22. Множення вектора на число. Гомотетія

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$;

2) якщо $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Записують: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $k=0$, то вважають, що $k\vec{a}=\vec{0}$.

На рисунку 22.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=-2\overrightarrow{OA}$.

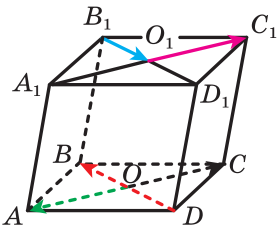


Рис. 22.1

З означення випливає, що

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a};$$

$$-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}.$$

Остання рівність показує, що в результаті множення вектора на -1 отримуємо вектор, протилежний даному.

З означення множення вектора на число випливає, що *коли* $\vec{b}=k\vec{a}$, *то вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні*.

Отже, *з рівності* $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$ *отримуємо, що точки* O, A *і* B *лежать на одній прямій*.

Теорема 22.1. ***Якщо вектори*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***колінеарні й*** $\vec{a}\neq\vec{0}$, ***то існує таке число*** k, ***що*** $\vec{b}=k\vec{a}$.

Теорема 22.2. ***Якщо координати вектора*** $\vec{a}$ ***дорівнюють*** $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, ***то координати вектора*** $k\vec{a}$ ***дорівнюють*** $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$.

Множення вектора на число має такі властивості.

Для будь-яких чисел k, m ***і для будь-яких векторів*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***виконуються рівності:***

$(km)\vec{a}=k(m\vec{a})$ **(*сполучна властивість*);**

$(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ **(*перша розподільна властивість*);**

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ **(*друга розподільна властивість*).**

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, їхню різницю та добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми робимо це в алгебрі. Наприклад,

$$2(\vec{a}-3\vec{b})+3(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}-6\vec{b}+3\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{b}.$$

Теорема 22.3. ***Якщо вектори*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***неколінеарні, то три вектори*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***і*** $\vec{c}$ ***будуть компланарними тоді й тільки тоді, коли вектор*** $\vec{c}$ ***можна подати у вигляді*** $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, ***де*** x ***і*** y ***— деякі числа.***

Доведення. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Тоді, відклавши ці вектори від однієї точки, отримаємо вектори, що належать одній площині. Тепер скористаємося відомим фактом із планіметрії про розкладання вектора за двома даними неколінеарними векторами, а саме: для вектора $\vec{c}$ існують числа x і y такі, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Доведемо обернене твердження. Нехай вектор $\vec{c}$ можна подати у вигляді $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори, x і y — дійсні числа. Відкладемо від довільної точки O вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладені вектори належатимуть деякій площині α. Цій самій площині належатимуть і вектори $x\vec{a}$ і $y\vec{b}$, а також їхня сума — вектор $x\vec{a} + y\vec{b}$. Тому вектор $\vec{c}$, відкладений від точки O, також належатиме площині α. Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. ◄

Наслідок. ***Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то з рівності $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ випливає, що $x = y = z = 0$.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 22.4. ***Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — некомпланарні вектори. Тоді для довільного вектора $\vec{d}$ існує єдина трійка чисел $(x; y; z)$ така, що $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.***

Доведення. З умови теореми випливає, з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ жодні два не є колінеарними.

Нехай вектори $\vec{d}$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ компланарні. Тоді згідно з теоремою 22.3 вектор $\vec{d}$ можна подати у вигляді $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}$, а отже, і в такому вигляді: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + 0\vec{c}$. Аналогічно розглядаємо випадки, коли компланарними є трійки векторів $\vec{d}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Нехай тепер вектор $\vec{d}$ з жодними двома з даних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не утворює трійку компланарних векторів. Відкладемо від довільної точки O вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$, які відповідно дорівнюють векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 22.2).

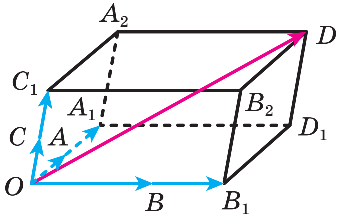


Рис. 22.2

Через точку D проведемо три площини, відповідно паралельні площинам OAB, OBC і OAC. У результаті цієї побудови утворюється паралелепіпед $OA_1D_1B_1C_1A_2DB_2$, для якого відрізок OD є діагоналлю. Тоді за правилом паралелепіпеда можна записати: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{OA_1}$,

$\overrightarrow{OB_1}$ і $\overrightarrow{OC_1}$ відповідно колінеарні векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, то існують такі числа x, y і z, що $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = y\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC_1} = z\overrightarrow{OC}$. Отримуємо, що $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

Звідси $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Отже, ми довели, що вказана в умові теореми трійка чисел $(x; y; z)$ існує. Покажемо, що така трійка є єдиною.

Припустимо, що знайдеться ще одна трійка чисел $(x_1; y_1; z_1)$ така, що $\vec{d} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Тоді виконується рівність $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Звідси $(x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b} + (z - z_1)\,\vec{c} = \vec{0}$.

Згідно з наслідком з теореми 22.3 отримуємо, що $x = x_1$, $y = y_1$ і $z = z_1$. ◄

Трійку некомпланарних векторів $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ називають **базисом**. Якщо для вектора $\vec{d}$ виконується рівність $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, то говорять, що вектор $\vec{d}$ **розкладено за базисом** $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Трійку чисел $(x; y; z)$ називають **координатами вектора** $\vec{d}$ **у базисі** $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$.

Раніше ви ознайомилися з поняттям координат вектора. Зрозуміло, що координати вектора й координати вектора в даному базисі, узагалі кажучи, не збігаються. Проте можна вказати такий базис, що координати будь-якого вектора збігатимуться з його координатами в цьому базисі.

Розглянемо координатний простір xyz і вектори $\vec{i}\,(1; 0; 0)$, $\vec{j}\,(0; 1; 0)$ і $\vec{k}\,(0; 0; 1)$. Якщо ці вектори відкласти від початку координат, то вони належатимуть додатним півосям (рис. 22.3). Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ називають **координатними векторами**.

Розглянемо довільний вектор $\vec{a}$. Нехай його координати в базисі $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ дорівнюють $(x; y; z)$. Тоді можна записати: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Координати векторів $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ і $z\vec{k}$ відповідно дорівнюють $(x; 0; 0)$, $(0; y; 0)$ і $(0; 0; z)$. Тоді координати вектора $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, а отже, і вектора $\vec{a}$ дорівнюють $(x; y; z)$. Тим самим ми показали, що координати вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ дорівнюють його координатам.

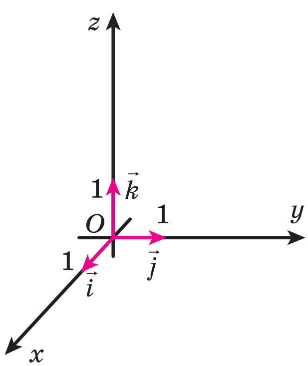


Рис. 22.3

Задача 1. Нехай M — така точка відрізка AB, що $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$ (рис. 22.4). Доведіть, що для будь-якої точки X простору виконується рівність

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \qquad (*)$$

Розв'язання. Маємо: $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM=\frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишемо: $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}$, то отримуємо:

$$\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}\right);$$

$$\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \blacktriangleleft$$

Якщо $m = n$, то точка M є серединою відрізка AB. Тоді формула (*) набуває вигляду

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right).$$

Задача 2. Нехай M — точка перетину медіан трикутника ABC, X — довільна точка простору (рис. 22.5). Доведіть, що $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)$.

Розв'язання. Нехай K — середина відрізка AC. Маємо: $BM : MK = 2 : 1$. Тоді, використовуючи ключову задачу 1, можна записати:

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{XB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{XK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{XB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right). \blacktriangleleft$$

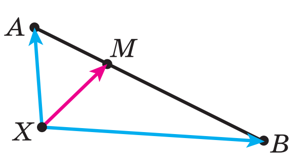


Рис. 22.4

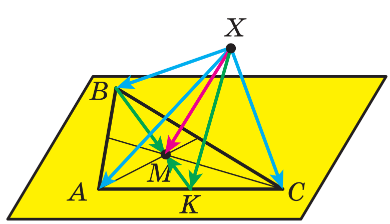


Рис. 22.5

Задача 3. Доведіть, що коли виконується рівність $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, де числа x, y і z одночасно не дорівнюють нулю, то точки O, A, B і C належать одній площині.

Розв'язання. Зауважимо, що $0\overrightarrow{OA}+0\overrightarrow{OB}+0\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Припустимо, що вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ некомпланарні. З урахуванням рівності $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ отримуємо, що для нуль-вектора існують два розклади за трьома даними некомпланарними векторами. Це суперечить твердженню теореми 22.4. Отже, вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ є компланарними.

Оскільки ці вектори відкладено від однієї точки, то вони належать одній площині. Звідси випливає твердження задачі. ◄

Задача 4. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на відрізку D_1C позначили точку M так, що $D_1M : MC = 1 : 3$. На продовженні ребра BC за точку C позначили точку N так, що $BC : CN = 4 : 3$. Доведіть, що $A_1C \parallel MN$.

Розв'язання. Розглянемо в просторі систему координат з початком координат у точці B, осями, які містять ребра BA, BC і BB_1 куба, та одиничними відрізками, що дорівнюють ребру куба (рис. 22.6). Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{A_1C}$ і $\overrightarrow{MN}$ та покажемо, що ці вектори колінеарні.

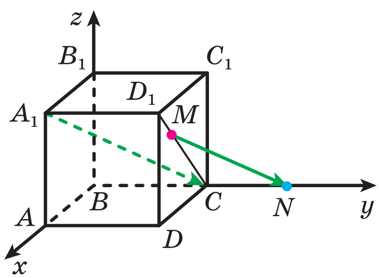


Рис. 22.6

Легко знайти координати точок A_1, C, M і N (зробіть це самостійно): $A_1\ (1; 0; 1)$, $C\ (0; 1; 0)$, $M\left(\frac{3}{4}; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{7}{4}; 0\right)$. Тоді координати вектора $\overrightarrow{A_1C}$ дорівнюють $(-1; 1; -1)$, а вектора $\overrightarrow{MN}$ — $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. Звідси $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1C}$. Отже, вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{A_1C}$ колінеарні. Оскільки відрізки MN і A_1C не лежать на одній прямій, то $A_1C \parallel MN$. ◄

Розв'язуючи задачу, ми зв'язали розглядувану фігуру (у нашому випадку — куб) із системою координат. Поставивши у відповідність окремим точкам фігури їхні координати, а відрізкам з кінцями в цих точках — вектори, нам удалося довести потрібне твердження. У таких випадках говорять, що задачу розв'язано з використанням **координатного** і **векторного методів**.

Якщо точки O, X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$ (рис. 22.7, 22.8), то говорять, що точка X_1 — образ точки X при **гомотетії із центром** O та **коефіцієнтом** k.

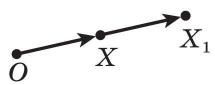


Рис. 22.7

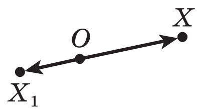


Рис. 22.8

Точку O називають **центром гомотетії**, число k — **коефіцієнтом гомотетії**, $k \neq 0$.

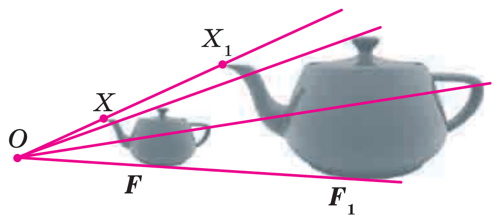


Рис. 22.9

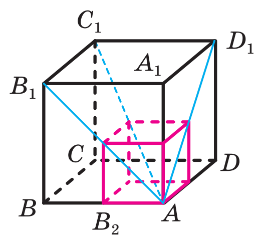


Рис. 22.10

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (якщо точка O належить фігурі F, то їй у відповідність ставиться вона сама). У результаті цього перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 22.9). Таке перетворення фігури F називають **гомотетією із центром** O **та коефіцієнтом** k.

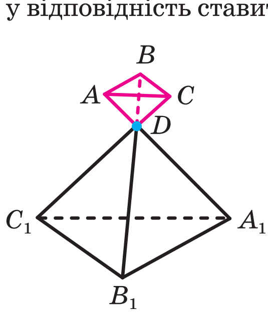


Рис. 22.11

Наприклад, на рисунку 22.10 великий куб гомотетичний меншому із центром A та коефіцієнтом 2.

На рисунку 22.11 піраміда $DABC$ гомотетична піраміді $DA_1B_1C_1$ із центром D і коефіцієнтом $-\frac{1}{3}$.

Розглянемо деякі властивості гомотетії.

При гомотетії:

- образом прямої є пряма; якщо центр гомотетії не належить прямій, то образом прямої є пряма, паралельна даній;
- образом площини є площина; якщо центр гомотетії не належить площині, то образом площини є площина, паралельна даній;
- образом відрізка є відрізок;
- образом кута є кут, рівний даному;
- площа многокутника змінюється в k^2 разів, де k — коефіцієнт гомотетії.

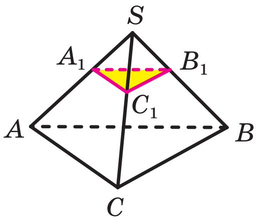


Рис. 22.12

Розглянемо переріз піраміди площиною, паралельною її основі. Подальші міркування проведемо для трикутної піраміди (рис. 22.12). Для інших n-кутних пірамід міркування будуть аналогічними.

Легко показати (зробіть це самостійно), що $\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1}$. Тоді $\overrightarrow{SA} = k\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SB} = k\overrightarrow{SB_1}$, $\overrightarrow{SC} = k\overrightarrow{SC_1}$, де $k > 0$. Отже, трикутник ABC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із центром S і коефіцієнтом k.

Наведені міркування дають змогу зробити такий висновок: *переріз піраміди площиною, яка паралельна її основі, є многокутник, гомотетичний основі піраміди*.

1. Що називають добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля?
2. Що можна сказати про вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, де k – деяке число?
3. Вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2; a_3)$. Чому дорівнюють координати вектора $k\vec{a}$?
4. Запишіть сполучну та розподільні властивості множення вектора на число.
5. Сформулюйте необхідну і достатню умови компланарності трьох векторів.
6. Сформулюйте теорему про розкладання вектора за трьома даними некомпланарними векторами.
7. У якому випадку говорять, що точка X_1 є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k?
8. Сформулюйте властивості гомотетії.

ВПРАВИ

22.1.° Якими векторами — співнапрямленими або протилежно напрямленими — є вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$;
2) $\vec{a} = -2\vec{b}$?

22.2.° Дано вектори $\vec{a}(-3; 2; 5)$ і $\vec{b}(-2; -4; 1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$;
2) $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

22.3.° Дано вектори $\vec{m}(1; 7; -8)$ і $\vec{n}(3; -1; 6)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо:

1) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$;
2) $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$.

22.4.° Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-1; 1; 1)$, $\vec{b}(2; 2; -2)$.

22.5.° Знайдіть модуль вектора $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$, якщо $\vec{a}(0{,}5; -0{,}5; 1{,}5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$.

22.6.° Чи є колінеарними вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A\ (4; -1; -4)$, $B\ (0; 5; 6)$, $C\ (0; 2; 7)$, $D\ (2; -1; 2)$?

22.7.° Чи є колінеарними вектори $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{FK}$, якщо $D\ (2; -3; 4)$, $E\ (-1; 6; 2)$, $F\ (-2; 8; 6)$, $K\ (-3; 11; 7)$?

22.8.° Образом точки $A\ (-3; 9; 5)$ при гомотетії із центром у початку координат є точка $B\ (9; -27; -15)$. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

22.9.° Знайдіть координати образу точки $A\ (20; -35; -55)$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{3}{5}$.

22.10.° Знайдіть значення x і y, при яких вектори $\vec{a}(x; y; 2)$ і $\vec{b}(-2; 3; 1)$ будуть колінеарними.

22.11.° Знайдіть значення x і z, при яких вектори $\vec{m}(-1; 7; z)$ і $\vec{n}(x; 4; 5)$ будуть колінеарними.

22.12.• Дано вектор $\vec{a}(3; 2; 1)$. Знайдіть колінеарний йому вектор $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\ (1; 1; 1)$, а точка B належить площині yz.

22.13.$^{\bullet}$ Дано точки A (−3; 6; 4), B (6; −1; 2) і C (0; 3; −2). Знайдіть точку D, яка належить площині xz, таку, що $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

22.14.$^{\bullet}$ Дано вектор $\vec{a}(-2; 6; 3)$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені, а модуль вектора $\vec{b}$ дорівнює 1.

22.15.$^{\bullet}$ Дано: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}(1; -1; 2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$.

22.16.$^{\bullet}$ Чи лежать на одній прямій точки:
1) A (5; 6; −4), B (7; 8; 2) і C (3; 4; 14);
2) D (−1; −7; −8), E (0; −4; −4) і F (2; 2; 4)?

22.17.$^{\bullet}$ Точки A, B і C є такими, що $\overrightarrow{AB}(10; 15; -5)$ і $\overrightarrow{AC}(-6; y; z)$. При яких значеннях y і z точки A, B і C лежать на одній прямій?

22.18.$^{\bullet}$ Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AE}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

22.19.$^{\bullet}$ Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра A_1B_1, точка K — середина ребра CC_1. Виразіть вектор $\overrightarrow{MK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

22.20.$^{\bullet}$ Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра CC_1, точка F — середина ребра AD. Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

22.21.$^{\bullet}$ Образом точки B (3; −4; 1) при гомотетії із центром A (−1; 2; 9) є точка B_1 (−2; 3,5; 11). Знайдіть образ C_1 точки C (19; −6; 37) при цій гомотетії.

22.22.$^{\bullet}$ Образом точки M (2; 3; −5) при гомотетії із центром A (1; 0; −1) є точка M_1 (4; 9; −13). Знайдіть прообраз K точки K_1 (16; −21; 2) при цій гомотетії.

22.23.$^{\bullet}$ Площини α і β паралельні. Точка O не належить цим площинам (рис. 22.13). Кожній точці X фігури F, яка належить площині α, ставиться у відповідність точка X_1 така, що $X_1 = OX \cap \beta$. Доведіть, що в результаті такого перетворення образом фігури F є фігура F_1, гомотетична фігурі F із центром O та коефіцієнтом $\frac{h}{h_1}$, де h і h_1 — відповідно відстані від точки O до площин α і β.

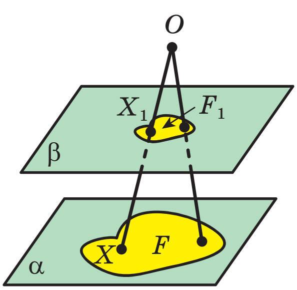


Рис. 22.13

22.24.° Доведіть, що при гомотетії образом кола є коло.

22.25.° Через середину бічного ребра піраміди проведено площину, паралельну площині її основи. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо площа основи піраміди дорівнює 48 см^2.

22.26.° Бічне ребро піраміди дорівнює 25 см. Через точку M, яка належить даному бічному ребру, проведено площину, паралельну площині основи піраміди. Площа утвореного при цьому перерізу дорівнює 12 см^2, а площа основи піраміди — 75 см^2. Знайдіть відстань від точки M до вершини даної піраміди.

22.27.•• Дано тетраедр $DABC$. Медіани грані ADB перетинаються в точці E, а медіани грані BDC — у точці F.

1) Доведіть, що $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AC}$.

2) Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

22.28.•• Медіани грані ABC тетраедра $DABC$ перетинаються в точці O. Виразіть вектор $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DO}$.

22.29.•• Точка M — середина ребра BC тетраедра $DABC$, точка K — середина відрізка DM. Виразіть вектор $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

22.30.•• Точка M — середина ребра BC тетраедра $DABC$. Виразіть вектор $\overrightarrow{DM}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

22.31.•• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Діагоналі грані CC_1D_1D перетинаються в точці M. Виразіть вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{XA}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

22.32.•• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрі AD позначили точку M так, що $AM : MD = 1 : 3$, а на відрізку C_1D — точку K так, що $C_1K : KD = 3 : 2$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

22.33.•• Дано тетраедр $DABC$. Точки M_1, M_2 і M_3 є відповідно точками перетину медіан граней ABD, BCD і ADC. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC і $M_1M_2M_3$ та точка D лежать на одній прямій.

22.34.•• Для даного тетраедра $DABC$ знайдіть такі точки простору X, що $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} = \vec{0}$.

22.35.•• Точки E і F є відповідно серединами ребер BC і AD тетраедра $DABC$. На відрізках BD, EF і AC позначили відповідно точки M, K і P так, що $DM : MB = FK : KE = AP : PC = 2 : 1$. Доведіть, що точки M, K і P лежать на одній прямій.

22.36.•• Точки M, F і K — середини відповідно ребер BC, AD і CD тетраедра $DABC$. На відрізку AM позначили точку P, а на відрізку CF — точку E так, що $AP : PM = 4 : 1$, $CE : EF = 2 : 3$. Доведіть, що прямі PE і BK паралельні.

22.37.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На відрізках B_1C і BD позначили відповідно точки M і K так, що $B_1M : MC = 2 : 1$, $BK : KD = 1 : 2$. Доведіть, що прямі MK і AC_1 паралельні.

22.38.•• Точка M для кожного з трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ є точкою перетину медіан. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельні деякій площині.

22.39.•• Точки N і M — середини відрізків AB і CD відповідно. Доведіть рівність $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

22.40.•• Точки P і K — середини відповідно ребер AD і BC тетраедра $DABC$. Доведіть, що $AC + BD > 2PK$.

22.41.•• Дано паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 лежать на одній прямій або є вершинами паралелограма.

22.42.•• Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника BC_1D — належить діагоналі A_1C паралелепіпеда. Знайдіть відношення $A_1M : MC$.

22.43.* Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. На ребрах SB, SC і SD позначили відповідно точки M, N і K так, що $SM : MB = 3 : 2$, $SN : NC = 1 : 2$ і $SK : KD = 1 : 3$. У якому відношенні, рахуючи від вершини S, площина MNK ділить ребро SA?

22.44.* Точки M, N і K — відповідно середини ребер AB, BC і DD_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У якому відношенні, рахуючи від точки D, площина MNK ділить діагональ DB_1 паралелепіпеда?

22.45.* Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Відомо, що $AD = 2BC$. Точки M, N і K — середини ребер BC, SD і DC відповідно. Точка F належить ребру SA, причому $SF : FA = 1 : 13$. Доведіть, що площина MNF паралельна прямій SK.

22.46.* Точки M, N і K — середини відповідно ребер BD, CD і AB тетраедра $DABC$. На прямих BN і CK позначено відповідно точки F і E так, що $FE \parallel AM$. Знайдіть відношення $\frac{FE}{AM}$.

22.47.* Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На відрізках AB_1 і BC_1 відповідно позначили точки P і K так, що прямі PK і A_1C паралельні. Знайдіть відношення $\frac{PK}{A_1C}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

22.48. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см, а його площа — 432 см^2. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

22.49. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють 3 см і 5 см. Середня лінія трапеції ділить її на дві частини, відношення площ яких дорівнює 5 : 11. Відомо, що в трапецію можна вписати коло. Знайдіть основи трапеції.

23. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових і неспівнапрямлених вектори. Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, що дорівнюють відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 23.1). Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

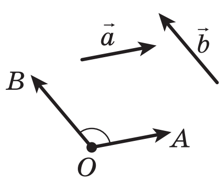


Рис. 23.1

Рис. 23.2

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, що коли $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$ (рис. 23.2).

Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Отже, для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Записують: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунку 23.3 зображено трикутну призму, у якої основою є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи. Маємо: $\angle\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1B_1}\right)=60^\circ$, $\angle\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)=120^\circ$, $\angle\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}\right)=0^\circ$, $\angle\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$, $\angle\left(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}\right)=180^\circ$.

Означення. **Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.**

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

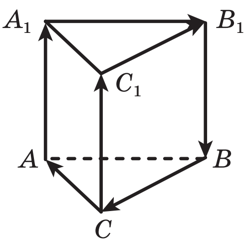


Рис. 23.3

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають так: $\vec{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 23.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Наприклад, для векторів, зображених на рисунку 23.3, маємо:

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \quad \overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0.$$

Теорема 23.2. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 23.3. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Деякі властивості скалярного добутку векторів аналогічні відповідним властивостям добутку чисел. Наприклад,

для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і будь-якого числа k є справедливими рівності:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, за правилами перетворення алгебраїчних виразів. Наприклад,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a}+\vec{b}) =$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Задача 1. Основою призми є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Бічне ребро AA_1 утворює рівні гострі кути з ребрами AB і AC (рис. 23.4). Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

Розв'язання. Нехай $\angle BAA_1 = \alpha$. З урахуванням умови можна записати: $\angle CAA_1 = \alpha$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$. Маємо: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Запишемо:

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\alpha - |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha.$$

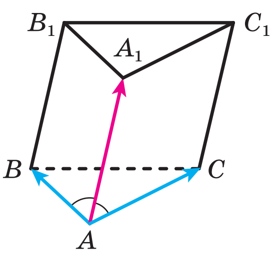


Рис. 23.4

Оскільки $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$, то розглядуваний скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнює 0. Отже, $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$. ◄

Раніше ви ознайомилися з кількома прийомами розв'язування задач на пошук відстані та кута між мимобіжними прямими. Тут ми покажемо, як можна застосовувати вектори для розв'язування задач такого роду.

Задача 2. У трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$, у якій основою є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи, провели пряму через вершину A і точку перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$ — точку M. Відомо, що $AB = \sqrt{6}$ см, $AA_1 = 1$ см. Знайдіть: 1) кут між прямими AM і CB_1; 2) відстань між прямими AM і CB_1.

Розв'язання. 1) За базис $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ виберемо трійку некомпланарних векторів $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA_1})$ (рис. 23.5).

Зазначимо, що базисну трійку векторів доцільно вибирати так, щоби було відомо модулі векторів і попарні кути між ними. Наш вибір задовольняє ці вимоги.

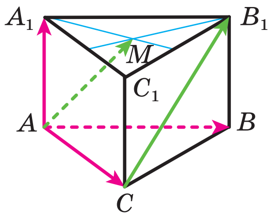


Рис. 23.5

Розкладемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{CB_1}$ у базисі $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ Використовуючи ключову задачу 2 п. 22, запишемо:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB_1}\right).$$

Оскільки $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC_1} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AB_1} = \vec{b} + \vec{c}$, то можна записати: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$. Далі запишемо: $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$. Ураховуючи, що $\overrightarrow{CA} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ і $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$, отримуємо: $\overrightarrow{CB_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Знайдемо скалярний добуток і модулі векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{CB_1}$.

Маємо: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Зрозуміло, що для подальших обчислень нам будуть потрібні скалярні квадрати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та їхні попарні скалярні добутки.

Запишемо: $\vec{a}^2 = 6$, $\vec{b}^2 = 6$ і $\vec{c}^2 = 1$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60° = 3$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 90° = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 90° = 0$.

Далі отримуємо:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB_1} = -\frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{3}\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \frac{4}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} = -2 + 2 + 1 + 0 - 0 = 1.$$

Знайдемо скалярні квадрати векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{CB_1}$.

Маємо:

$$\overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{1}{9}\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} = 3;$$

$$\overrightarrow{CB_1}^2 = \left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} = 7.$$

Звідси отримуємо, що $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{CB_1}\right| = \sqrt{7}$.

Позначимо через φ кут між векторами $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{CB_1}$. Тоді $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\left|\overrightarrow{CB_1}\right|} = \frac{1}{\sqrt{21}}$. Таким чином, шуканий кут дорівнює $\arccos\frac{1}{\sqrt{21}}$.

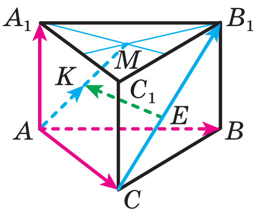


Рис. 23.6

2) Нехай відрізок KE — спільний перпендикуляр мимобіжних прямих AM і CB_1 (рис. 23.6). Тоді можна записати: $\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AK}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{EC}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{CB_1}$ і вектор $\overrightarrow{AK}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{AM}$, то існують такі числа x і y, що $\overrightarrow{EC}=x\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{AK}=y\overrightarrow{AM}$. Отримуємо:

$$\overrightarrow{EK}=x\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{AM}=x\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)-\vec{a}+$$
$$+y\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}+\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{b}+(x+y)\,\vec{c}.$$

Тепер скористаємося тим, що $\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0$.

Запишемо:

$$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}+\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{b}+(x+y)\,\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Розкриємо дужки, ураховуючи, що $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$. Маємо:

$$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}^{\,2}+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+$$
$$+\frac{1}{3}\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{b}^{\,2}+(x+y)\,\vec{c}^{\,2}=x+3y-3;$$

$$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{CB_1}=\left(\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}+\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{b}+(x+y)\,\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=$$
$$=-\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}^{\,2}+\left(\frac{y}{3}-x-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(x+\frac{y}{3}\right)\vec{b}^{\,2}+$$
$$+(x+y)\,\vec{c}^{\,2}=7x+y+3.$$

Отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+3y-3=0,\\7x+y+3=0.\end{cases}$$

Розв’язавши її, отримаємо, що $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{6}{5}$.

Тепер ми можемо розкласти вектор $\overrightarrow{EK}$ за базисом $\left(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c}\right)$.

Маємо: $\overrightarrow{EK}=0\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}=-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$.

Тоді $\overrightarrow{EK}^{2}=\left(-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right)^{2}=\frac{1}{25}\vec{b}^{\,2}-\frac{6}{25}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{9}{25}\vec{c}^{\,2}=\frac{15}{25}$.

Звідси $\left|\overrightarrow{EK}\right| = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Відповідь: $\arccos\frac{1}{\sqrt{21}}, \ \frac{\sqrt{15}}{5}$. ◀

Зауваження. Розв'язавши задачу, ми отримали, що $x = -\frac{3}{5}$, $y = \frac{6}{5}$. Звідси $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{AK} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AM}$. Ці рівності дають змогу зробити такий висновок: точка E належить відрізку CB_1, а точка K не належить відрізку AM. Правильне розташування точок показане на рисунку 23.7. На початку розв'язування було складно визначити, як розміщений спільний перпендикуляр KE мимобіжних прямих AM і CB_1. Проте наведене векторне розв'язування не спиралося на те, як розташовані точка K відносно точок A і M і точка E відносно точок C і B_1.

Задача 3. Доведіть, що всі три кути між бісектрисами плоских кутів тригранного кута одночасно є або гострими, або прямими, або тупими.

Розв'язання. Від вершини O тригранного кута відкладемо на його ребрах одиничні вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$ і $\overrightarrow{OC} = \vec{e}_3$ (рис. 23.8). Розглянемо вектори $\overrightarrow{OE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OK} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ і $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Зрозуміло, що чотирикутники $AOBE$, $BOCK$ і $COAM$ є ромбами, тому вектори $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OK}$ і $\overrightarrow{OM}$ належать бісектрисам плоских кутів даного тригранного кута.

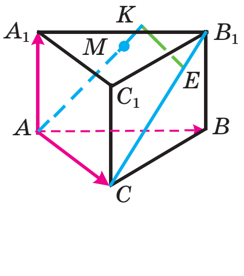


Рис. 23.7

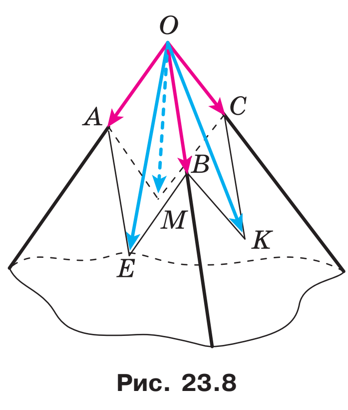


Рис. 23.8

Маємо: $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OK} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3;$

$$\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OM} = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = 1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3;$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OE} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3.$$

Отримали, що $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OE}$. Це означає, що косинуси кутів між векторами $\overrightarrow{OE}$ і $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OK}$ і $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{OE}$ є числами одного знака або одночасно дорівнюють нулю. Звідси випливає твердження задачі. ◄

1. Чому дорівнює кут між двома протилежно напрямленими векторами?
2. Чому дорівнює кут між двома співнапрямленими векторами?
3. У яких межах знаходиться кут між будь-якими двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
4. Які вектори називають перпендикулярними?
5. Що називають скалярним добутком двох векторів?
6. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
7. Сформулюйте умову перпендикулярності двох ненульових векторів.
8. Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомо їхні координати?
9. Запишіть властивості скалярного добутку векторів.

ВПРАВИ

23.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 23.9), точка O — центр грані $ABCD$. Чому дорівнює кут між векторами:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BO}$;
3) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1B}$;
6) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$?

23.2.° Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 40°. Чому дорівнює кут між векторами:

1) $-3\vec{a}$ і $-5\vec{b}$;
2) $-7\vec{a}$ і $10\vec{b}$?

23.3.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;
2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

23.4.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

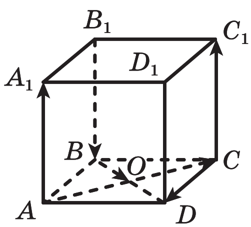


Рис. 23.9

23.5.° Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 45°, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$. Знайдіть:

1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$; 3) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

23.6.° Кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює 150°, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$. Знайдіть:

1) $(3\vec{m}-4\vec{n})\cdot\vec{m}$; 2) $(\vec{m}+\vec{n})^2$.

23.7.° Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Обчисліть скалярний добуток $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(4\vec{a}-7\vec{b})$.

23.8.° Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60°, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Обчисліть скалярний добуток $(5\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-5\vec{b})$.

23.9.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(1;-2;3)$, $\vec{b}(2;-4;3)$; 2) $\vec{a}(-9;4;5)$, $\vec{b}(3;-1;4)$.

23.10.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(4;-1;6)$, $\vec{b}(-7;2;8)$; 2) $\vec{a}(1;-3;9)$, $\vec{b}(-1;3;0)$.

23.11.° Дано вектори $\vec{m}(3;-2;4)$ і $\vec{n}(2;2;z)$. При якому значенні z виконується рівність $\vec{m}\cdot\vec{n}=18$?

23.12.° Дано вектори $\vec{a}(9;c;-1)$ і $\vec{b}(-2;3;c)$. При якому значенні c виконується рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=-24$?

23.13.° Серед векторів $\vec{a}(1;1;2)$, $\vec{b}(1;2;1)$ і $\vec{c}(-5;3;1)$ укажіть пару перпендикулярних векторів.

23.14.° При якому значенні x вектори $\vec{a}(x;-x;1)$ і $\vec{b}(x;2;1)$ перпендикулярні?

23.15.° При якому значенні p вектори $\vec{a}(p;-2;1)$ і $\vec{b}(p;1;-p)$ перпендикулярні?

23.16.• Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точки M, K і P — відповідно середини ребер AB, AD і CD. Знайдіть скалярний добуток векторів:
1) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{PK}$ і $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{PM}$.

23.17.• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a, точки E і F — відповідно середини ребер AB і AD. Знайдіть скалярний добуток векторів:
1) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{C_1D}$; 3) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{C_1C}$; 4) $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{DC}$.

23.18.° Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точка M — середина ребра AB. Знайдіть скалярний добуток векторів:
1) $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

23.19.° Основою піраміди $MABCD$ є квадрат, а кожне її ребро дорівнює a. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AC}$.

23.20.° Знайдіть кут між векторами $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135°$.

23.21.° Знайдіть кут між векторами $\vec{a}=\vec{m}-\vec{n}$ і $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=30°$.

23.22.° Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$, якщо $\vec{a}\,(2;-1;-2)$, $\vec{b}\,(4;-3;2)$.

23.23.° Знайдіть скалярний квадрат $(\vec{m}-2\vec{n})^2$, якщо $\vec{m}\,(2;1;-3)$, $\vec{n}\,(4;-2;0)$.

23.24.° Знайдіть косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо A (3; –2; 1), B (–1; 2; 1), C (4; –1; 5), D (1; 3; 0).

23.25.° Вершинами трикутника є точки A (1; 0; 1), B (–5; 4; 3) і C (0; 3; –1). Знайдіть кут A трикутника.

23.26.° Яким трикутником — гострокутним, прямокутним чи тупокутним — є трикутник з вершинами в точках A (0; 1; 2), B (–2; –1; 0) і C (1; 0; 1)?

23.27.° Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A (1; 0; 2), B (–2; 4; 2) і C (3; 1; 0) є тупокутним.

23.28.° Дано точки A (0; –1; 1), B (–2; 0; –1) і C (–2; –1; 0). Знайдіть на осі z таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ були перпендикулярними.

23.29.° Дано точки A (2; –1; 4), B (5; 1; 0) і C (6; 1; 3). Знайдіть на осі y таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були перпендикулярними.

23.30.° Відомо, що $\vec{a}=4\vec{m}-5\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$. Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$.

23.31.° Відомо, що $\vec{m}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}-3\vec{b}$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{m}\perp\vec{n}$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$.

23.32.° Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник зі стороною a. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини її основи. Точка M — середина ребра B_1C_1. Знайдіть скалярний добуток векторів: 1) $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{A_1M}$; 2) $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{A_1M}$.

23.33.° Основою призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб зі стороною a та гострим кутом $60°$ при вершині A. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини її основи. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CD_1}$.

23.34.•• Точка M — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими BM і BC_1.

23.35.•• Точка O — центр грані AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими OC і B_1D.

23.36.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M і K — відповідно середини ребер AA_1 і AD, точка O — центр грані CC_1D_1D. Доведіть, що прямі B_1K і MO перпендикулярні.

23.37.•• Основою піраміди $DABC$ є рівнобедрений трикутник ABC, $AB = BC$, $\angle DBA = \angle DBC$. Доведіть, що $BD \perp AC$.

23.38.•• Сума плоских кутів ASB і BSC тригранного кута $SABC$ дорівнює $180°$. Доведіть, що ребро SB перпендикулярне до бісектриси плоского кута ASC.

23.39.•• Точки M і N — відповідно середини ребер AA_1 і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O — центр грані CC_1D_1D. Доведіть, що прямі MO і B_1N перпендикулярні.

23.40.•• Ребра AB, AD і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відносяться як $3 : 1 : 2$. На ребрах AB і BC відповідно позначили точки M і N так, що $AM : MB = 1 : 2$ і $BN : NC = 1 : 1$. Точка O — центр грані CC_1D_1D. Доведіть, що прямі MO і A_1N перпендикулярні.

23.41.•• Усі грані чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромбами. Відомо, що $AB = 3$ см, $\angle DAB = \angle DAA_1 = \angle BAA_1 = 60°$. Знайдіть відстань від точки A до точки перетину медіан трикутника BC_1D.

23.42.•• Основою тетраедра $DABC$ є прямокутний трикутник ABC. Точка N — середина гіпотенузи AB. Медіани трикутника ADC перетинаються в точці M. На прямій CD позначили точку K так, що прямі BM і KN перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка CK, якщо відомо, що $\angle DCA = \angle DCB = 60°$, $CB = CD = 2$ см і $CA = 1$ см.

23.43.•• Основою паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є паралелограм $ABCD$. Бічне ребро паралелепіпеда перпендикулярне до основи. Відомо, що $\angle DAB = 60°$, а ребра AB, AD і AA_1 відносяться як $1 : 4 : 2$. Точка O — центр грані CC_1B_1B. На прямій A_1D_1 позначили точку M так, що прямі D_1O і CM перпендикулярні. Знайдіть відношення $A_1M : MD_1$.

23.44.•• Ребра AB і BC прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють відповідно 1 см і $\sqrt{7}$ см. Кут між прямими CB_1 і BD_1 дорівнює 45°. Знайдіть ребро AA_1.

23.45.•• Основою трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник зі стороною a. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Кут між прямими AB_1 і BC_1 дорівнює $\arccos\frac{1}{4}$. Знайдіть бічне ребро призми.

23.46.•• Кут між мимобіжними прямими m і n дорівнює 60°. Точки A і C належать прямій m, а точки B і D — прямій n. Відрізок CD є спільним перпендикуляром прямих m і n. Знайдіть відрізок CD, якщо відомо, що $AC = BD = a$, $AB = 2a$.

23.47.•• Кут між мимобіжними прямими p і k дорівнює 60°. Точки A і N належать прямій p, а точки B і M — прямій k. Відрізок MN є спільним перпендикуляром прямих p і k. Знайдіть кут між прямими AB і MN, якщо відомо, що $AN = NM = MB$.

23.48.•• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Точка M — середина ребра CC_1. Знайдіть кут і відстань між прямими AM і DB_1.

23.49.•• Основою тетраедра $DABC$ є рівносторонній трикутник ABC. Ребро DC перпендикулярне до площини ABC. Точки M і N — середини ребер BC і AB відповідно. Знайдіть кут і відстань між прямими DM і CN, якщо відомо, що $AB = 4$ см, $DC = \sqrt{2}$ см.

23.50.•• Основою чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною a. Бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи та дорівнює $2a$. Знайдіть кут і відстань між прямими DA_1 і CD_1.

23.51.•• Ребра AB і CD тетраедра $DABC$ перпендикулярні, кожне з них дорівнює 3 см. На ребрі AB позначили точки M і N, а на ребрі CD — точки P і K так, що $AM = NB = CP = KD = 1$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків MP і NK.

23.52.* Плоскі кути AOB, BOC і COA тригранного кута $OABC$ відповідно дорівнюють α, β і γ. Доведіть, що $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -\frac{3}{2}$.

23.53.* Для даного тетраедра знайдіть таку точку простору, сума квадратів відстаней від якої до вершин цього тетраедра є найменшою.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23.54. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а радіус вписаного в неї кола — 4 см. Знайдіть площу трапеції.

23.55. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відрізки, які сполучають середини протилежних сторін, рівні. Діагоналі AC і BD чотирикутника відповідно дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть площу даного чотирикутника.

24. Рівняння площини

Із курсу планіметрії вам відоме поняття рівняння фігури, заданої на координатній площині. Аналогічно можна означити рівняння фігури в просторі.

Розглянемо рівняння з трьома змінними:

$$P(x; y; z) = 0.$$

Його розв'язками є впорядковані трійки чисел $(x; y; z)$. Наприклад, трійка чисел $(-1; -1; 1)$ є розв'язком рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Справді, якщо замість змінних x, y і z підставити відповідно їхні значення -1, -1 і 1, то отримаємо правильну числову рівність.

Означення. Рівнянням фігури F, заданої в координатному просторі xyz, називають рівняння з трьома змінними x, y і z, яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі F, то її координати $(x; y; z)$ є розв'язком даного рівняння;

2) будь-який розв'язок $(x; y; z)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

Говоритимемо, що ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$ **перпендикулярний** до прямої a (площини α), якщо пряма AB перпендикулярна до прямої a (площини α). Записують: $\overrightarrow{AB} \perp a$, $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$.

Вектор, перпендикулярний до площини, називають **вектором нормалі** цієї площини. Зрозуміло, що площина має безліч векторів нормалі.

Теорема 24.1. ***Рівняння площини з вектором нормалі $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$, яка проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$, має вигляд $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.***

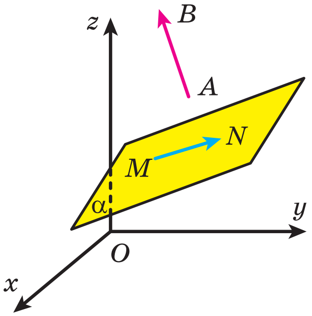


Рис. 24.1

Доведення. Через точку M проходить єдина площина, перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{AB}$. Позначимо цю площину α.

Нехай $N\ (x; y; z)$ — довільна точка площини α, відмінна від точки M. Тоді вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$ перпендикулярні (рис. 24.1). Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Маємо: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Вектор $\overrightarrow{MN}$ має координати $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, тому

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0. \qquad (*)$$

Тепер можна зробити такий висновок: якщо точка належить площині α, то її координати задовольняють рівняння (*).

Нехай $(x_1; y_1; z_1)$ — довільний розв'язок рівняння (*), відмінний від $(x_0; y_0; z_0)$. Тоді

$$a\,(x_1 - x_0) + b\,(y_1 - y_0) + c\,(z_1 - z_0) = 0. \qquad (**)$$

Розглянемо точку K з координатами $(x_1; y_1; z_1)$. Рівність (**) означає, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MK}$ перпендикулярні. Отже, точка K належить площині α.

Зазначимо, що трійка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ є розв'язком рівняння (*), а точка $M\ (x_0; y_0; z_0)$ належить площині α.

Тепер можна зробити такий висновок: кожний розв'язок рівняння (*) є координатами точки, яка належить площині α. ◄

Перетворимо рівняння (*). Маємо: $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$.

Позначивши $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, отримаємо рівняння $ax + by + cz + d = 0$.

Таким чином, ***рівняння будь-якої площини має вигляд*** $ax + by + cz + d = 0$.

Зауважимо, що має місце й таке твердження: ***будь-яке рівняння виду*** $ax + by + cz + d = 0$, **де** ***a, b і c не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням деякої площини, причому вектор*** $\vec{n}\,(a; b; c)$ ***є її вектором нормалі.*** Доведіть це твердження самостійно.

Зрозуміло, що коли площина проходить через початок координат, то $d = 0$, тобто її рівняння має вигляд $ax + by + cz = 0$. Справедливим є й обернене твердження: будь-яке рівняння виду $ax + by + cz = 0$, де a, b і c не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням деякої площини, яка проходить через початок координат.

Наприклад, вектори $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ і $\vec{k}(0;0;1)$ є векторами нормалі координатних площин yz, xz і xy відповідно. Оскільки ці площини проходять через початок координат, то ми можемо записати їхні рівняння:

площина yz: $1x + 0y + 0z = 0$, тобто $x = 0$;

площина xz: $0x + 1y + 0z = 0$, тобто $y = 0$;

площина xy: $0x + 0y + 1z = 0$, тобто $z = 0$.

Якщо рівняння $P\ (x;\ y;\ z) = 0$ є рівнянням фігури F, то також говорять, що рівняння $P\ (x;\ y;\ z) = 0$ **задає** фігуру F.

Наприклад, рівняння $ax + by + cz = 0$, де a, b і c — деякі числа, не рівні нулю одночасно, задає площину, яка проходить через початок координат.

Фігуру в просторі можна задавати не тільки за допомогою рівняння, але й за допомогою систем рівнянь, нерівностей тощо.

Нехай $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ — рівняння двох площин, які перетинаються по прямій m. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

задає пряму m.

Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$ в координатному просторі xyz задає вісь аплікат.

Ви знаєте, що три точки, які не лежать на одній прямій, задають єдину площину. Отже, якщо відомо координати таких точок, то можна знайти рівняння площини, якій ці точки належать.

Задача 1. Знайдіть рівняння площини, яка проходить через точки $A\ (1;\ 2;\ -1)$, $B\ (2;\ 3;\ -2)$ і $C\ (-1;\ -1;\ 3)$.

Розв'язання. Легко встановити, що координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ відповідно дорівнюють $(1;\ 1;\ -1)$ і $(-2;\ -3;\ 4)$.

Нехай вектор $\vec{n}(a;b;c)$ — вектор нормалі шуканої площини. Тоді $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ і $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Для невідомих a, b і c отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b-c=0, \\ -2a-3b+4c=0. \end{cases}$$

Виразивши невідомі a і b через c, отримаємо: $a = -c$ і $b = 2c$.

Доходимо висновку, що координати вектора $\vec{n}$ мають вигляд $\vec{n}(-c;\ 2c;\ c)$. Тоді вектор з координатами $(-1;\ 2;\ 1)$ колінеарний вектору нормалі шуканої площини, а отже, сам є вектором нормалі даної площини.

Таким чином, шукане рівняння має вигляд $-1x + 2y + 1z + d = 0$.

Підставивши в це рівняння координати точки A, отримаємо: $-1 + 4 - 1 + d = 0$. Звідси $d = -2$.

Відповідь: $-x + 2y + z - 2 = 0$. ◄

Задача 2. Доведіть, що відстань ρ від точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до площини, заданої рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, можна обчислити за формулою

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Розв'язання. Нехай точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — основа перпендикуляра, опущеного з точки M на дану площину (рис. 24.2). Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M}(x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$ колінеарний вектору нормалі $\vec{n}(a; b; c)$ даної площини. Отже, існує таке число k, що $x_0 - x_1 = ka$, $y_0 - y_1 = kb$, $z_0 - z_1 = kc$.

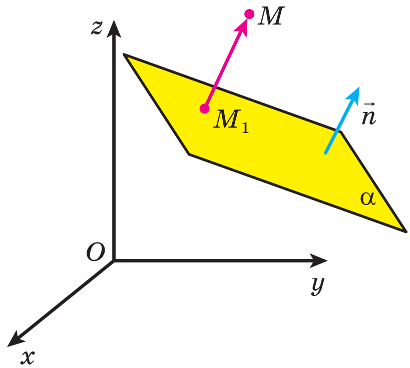


Рис. 24.2

Звідси $M_1M = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Маємо: $x_1 = x_0 - ka$, $y_1 = y_0 - kb$, $z_1 = z_0 - kc$.

Оскільки точка M_1 належить даній площині, то її координати задовольняють рівняння площини. Тоді $a(x_0 - ka) + b(y_0 - kb) + c(z_0 - kc) + d = 0$. Звідси $k = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Таким чином, $M_1M = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. ◄

Задача 3. Основою чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат зі стороною 2 дм, бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи та дорівнює 1 дм. Точка O — центр квадрата $ABCD$, точки M і N — середини відповідно ребер AD і CD.

1) Доведіть, що пряма OB_1 перпендикулярна до площини MD_1N.

2) Знайдіть відстань від точки C_1 до площини MD_1N.

3) Знайдіть кут між площинами MD_1N і MA_1C.

Розв'язання. Розглянемо систему координат з початком координат у точці D і осями з одиничним відрізком 1 дм, які містять ребра DA, DC і DD_1 (рис. 24.3). Точки M, N і D_1 мають відповідно координати (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).

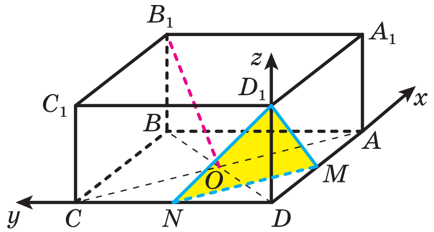


Рис. 24.3

1) Знайдемо рівняння площини MD_1N. Це можна зробити аналогічно тому, як описано в задачі 1. Тут ми проілюструємо інший спосіб.

Нехай рівняння площини MD_1N має вигляд $ax + by + cz + d = 0$. Підставимо в це рівняння координати точок M, N і D_1. Отримаємо: $a + d = 0$, $b + d = 0$, $c + d = 0$. Звідси $a = b = c = -d$. Тоді рівняння площини MD_1N набуває такого вигляду: $-dx - dy - dz + d = 0$.

Оскільки площина MD_1N не проходить через початок координат, то $d \neq 0$. Тоді $-x - y - z + 1 = 0$. Отже, рівняння площини MD_1N має вигляд $x + y + z - 1 = 0$. Зазначимо, що вектор з координатами (1; 1; 1) є перпендикулярним до площини MD_1N.

Точки O і B_1 мають відповідно координати O (1; 1; 0) і B_1 (2; 2; 1). Тоді вектор $\overrightarrow{OB_1}$ має координати (1; 1; 1). Таким чином, вектор $\overrightarrow{OB_1}$ перпендикулярний до площини MD_1N.

2) Точка C_1 має координати C_1 (0; 2; 1). Для того щоб знайти шукану відстань, скористаємося результатом ключової задачі 2. Отримуємо: $\rho = \frac{|0 + 2 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3) Задачу про пошук кута між двома площинами можна звести до пошуку кута між векторами нормалі цих площин.

Площина MA_1C задається рівнянням $2x + y - 2z - 2 = 0$ (переконайтеся в цьому самостійно). Тоді вектори $\overrightarrow{n_1}(2;1;-2)$ і $\overrightarrow{n_2}(1;1;1)$ — вектори нормалі площин MA_1C і MD_1N відповідно.

Маємо: $\cos\angle\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \dfrac{2+1-2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Оскільки $\dfrac{1}{3\sqrt{3}} > 0$, то кут між векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ є гострим, а отже, він дорівнює куту між відповідними площинами. Таким чином, шуканий кут дорівнює $\arccos\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. ◄

1. Що називають рівнянням фігури F, заданої в координатному просторі xyz?
2. Який вектор $\overrightarrow{AB}$ називають перпендикулярним до прямої a? площини α?
3. Який вектор називають вектором нормалі даної площини?
4. Який вигляд має рівняння площини з вектором нормалі $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$, яка проходить через точку $M(x_0; y_0; z_0)$?
5. Який вигляд має рівняння площини, яка проходить через початок координат?

ВПРАВИ

24.1.° Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; -1; 2)$ і перпендикулярна до прямої BC, якщо:

1) $B(2; 0; -3)$, $C(4; -1; -5)$; 2) $B(6; -7; -2)$, $C(9; -5; 1)$.

24.2.° Складіть рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{m}(-8; 4; 12)$.

24.3.° Складіть рівняння площини, якщо точка $A(4; 3; -6)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану площину.

24.4.° Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(0; 4; 0)$ і перпендикулярна до осі ординат.

24.5.° Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $K(0; 0; -3)$ і паралельна площині xy.

24.6.° Знайдіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M(-6; 3; 5)$ і $N(4; -7; 1)$.

24.7.° Дано точки M (3; a; –5) і K (7; 1; a). При якому значенні a пряма MK паралельна площині $4x - 3y + z - 6 = 0$?

24.8.° Чи є паралельними площини:
1) $x + 3y + 4z - 6 = 0$ і $3x + 9y + 12z - 12 = 0$;
2) $x - 6y + 5z - 2 = 0$ і $2x + 3y - 4z + 6 = 0$?

24.9.° Складіть рівняння площини, яка проходить через точку M (2; 3; –9) паралельно площині $x + y - 5z + 3 = 0$.

24.10.• Знайдіть кут між площинами $2x - y + z - 3 = 0$ і $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

24.11.• Чи є перпендикулярними площини:
1) $2x + 5y - z + 7 = 0$ і $3x - 2y - 4z - 9 = 0$;
2) $6x - y + 8 = 0$ і $y - 6z - 8 = 0$?

24.12.• Знайдіть рівняння образу площини $x - 2y + z - 1 = 0$, якщо виконано перетворення:
1) симетрії відносно початку координат;
2) паралельного перенесення на вектор $\vec{a}\,(5; -2; -1)$.

24.13.• Знайдіть рівняння образу площини $x + y - z + 3 = 0$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом $k = -2$.

24.14.• Доведіть, що рівняння площини, паралельної осі аплікат, має вигляд $ax + by + d = 0$. Який вигляд має рівняння площини, паралельної: 1) осі абсцис; 2) осі ординат?

24.15.• Складіть рівняння площини, яка проходить через точки A (1; –2; 1) і B (4; 1; 3) паралельно осі y.

24.16.• Складіть рівняння площини, яка проходить через точки C (–2; 0; 1) і D (1; 5; 0) паралельно осі x.

24.17.• Знайдіть відстань від точки A (1; 2; –3) до площини $x + 3y + 2z - 29 = 0$.

24.18.• Знайдіть відстань від початку координат до площини $2x - y + 5z + 15 = 0$.

24.19.• Складіть рівняння площини, яка проходить через точки A (1; 2; 3), B (4; 1; 2) і C (2; –1; 1).

24.20.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 4 см. Точки M і K — середини ребер AD і BB_1 відповідно. На ребрі CD позначили точку E, а на його продовженні за точку D — точку F так, що $DE = 1$ см, а точка D — середина відрізка CF. Доведіть, що пряма KF перпендикулярна до площини MD_1E.

24.21.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма A_1C перпендикулярна до площини AB_1D_1.

24.22.•• Ребра AD, AB і AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють відповідно 3 см, 6 см і 12 см. Точка M належить відрізку CA_1 і ділить його у відношенні 1 : 2, рахуючи від точки C. Площина α, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої CA_1, перетинає пряму AA_1 у точці K. Знайдіть відрізок AK.

24.23.•• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює 8 см. Ребро MD перпендикулярне до площини основи та дорівнює 4 см. Точка K належить ребру MB і ділить його у відношенні 3 : 1, рахуючи від точки M. Площина α, яка проходить через точку K перпендикулярно до прямої MB, перетинає пряму BC у точці F. Знайдіть відрізок BF.

24.24.•• У тетраедрі $SABC$ ребро SA перпендикулярне до площини ABC. Відомо, що $AC = CB = a$, $AS = AB = a\sqrt{2}$. Через середину ребра AC проведено площину перпендикулярно до прямої SB. У якому відношенні, рахуючи від точки C, проведена площина ділить ребро SC?

24.25.•• Основою паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, сторона якого дорівнює 1 см. Бічне ребро паралелепіпеда перпендикулярне до площини основи. Відомо, що $\angle BAC = 60°$, $AA_1 = 4$ см. Точка M належить відрізку AC_1 і ділить його у відношенні 1 : 2, рахуючи від точки A. Площина α, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої AC_1, перетинає пряму BB_1 у точці P. Знайдіть відрізок BP.

24.26.•• Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см. Точки M і N належать ребрам AA_1 і BC відповідно. Відомо, що $AM = \frac{1}{3}$ см, $BN = \frac{1}{4}$ см. Точка O — середина відрізка DB_1. Знайдіть відстань від точки B_1 до площини MON.

24.27.•• Основою паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є паралелограм $ABCD$ такий, що $\angle BAD = 60°$. Бічне ребро перпендикулярне до площини основи. Відомо, що $AB = AA_1 = a$, $AD = 2a$. Знайдіть відстань від точки C до площини AB_1D_1.

24.28.•• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат зі стороною 6 см, кожне бічне ребро піраміди дорівнює $9\sqrt{2}$ см. Площина α проходить через середини ребер AD і MC та через точку перетину медіан трикутника AMB. Знайдіть відстань від точки C до площини α.

24.29.•• Основою тетраедра $SABC$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle BAC = 90°$). Ребро SA перпендикулярне до площини основи. Ребра AB, AC і AS відносяться як 3 : 4 : 1 відповідно. Точки M і N — середини ребер AB і SC відповідно. Точка K належить ребру AC і ділить його у відношенні 1 : 3, рахуючи від точки A. Знайдіть кут між площинами ABC і MNK.

24.30.•• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведено площину α, яка паралельна прямим BD_1 і B_1C. Знайдіть кут між площинами α і ABC.

24.31.•• Точка M — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка N належить ребру BC і ділить його у відношенні 3 : 1, рахуючи від точки B. Знайдіть кут між площинами AB_1N і DC_1M.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

24.32. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а висота — 17 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

24.33. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $AM : MC = 4 : 5$, $BK : KC = 1 : 3$. Відрізки AK і BM перетинаються в точці D, $DK = 10$ см. Знайдіть відрізок AD.

ЧОТИРИВИМІРНИЙ КУБ

Читаючи фантастичні оповідання, ви, звісно, стикалися з історіями, коли мандрівники за лічені секунди долали значні відстані, скориставшись «рухом по гіперпростору».

Виявляється, вивчені вами поняття координат і векторів можуть слугувати чудовим інструментом для дослідження багатовимірних просторів, про які йдеться у фантастичних творах. У цьому оповіданні ми поговоримо про чотиривимірний простір.

Ви знаєте, що кожній точці координатної прямої (одновимірного простору) відповідає число x — координата цієї точки (рис. 24.4). Кожній точці двовимірного простору можна поставити у відповідність пару чисел $(x; y)$ — координати цієї точки (рис. 24.5). Кожній точці тривимірного простору можна поставити у відповідність трійку чисел $(x; y; z)$ — координати цієї точки (рис. 24.6). Аналогічні міркування застосовують і до точки чотиривимірного простору.

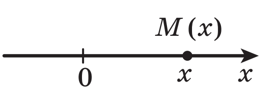


Рис. 24.4

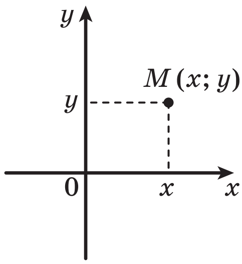


Рис. 24.5

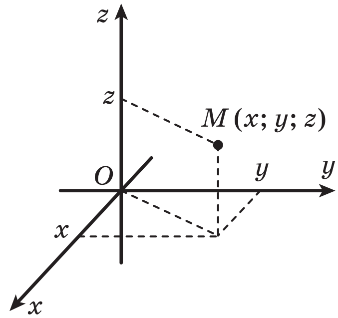


Рис. 24.6

Означення. Точкою чотиривимірного простору називають четвірку чисел $(x; y; z; t)$.

Числа x, y, z і t називають відповідно першою, другою, третьою та четвертою координатами точки.

Оскільки точку чотиривимірного простору визначають через її координати, то спробуємо уявити систему координат чотиривимірного простору. Звісно, думати про чотиривимірний простір нелегко, оскільки в нашому повсякденному житті ми не стикаємося з такими об'єктами. Однак можна спробувати здійснити перехід від тривимірного простору до чотиривимірного, простеживши за аналогічними переходами від одновимірного простору до двовимірного та від двовимірного до тривимірного.

В одновимірному просторі система координат задається однією координатною прямою — віссю x (рис. 24.4). Для побудови системи координат на площині до цієї прямої через її початок відліку проводять перпендикулярну координатну пряму — вісь y (рис. 24.7). У стереометрії додають ще одну координатну пряму — вісь z, перпендикулярну до кожної з двох інших осей. Систему координат тривимірного простору зображають на площині (рис. 24.8).

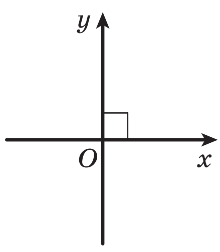


Рис. 24.7

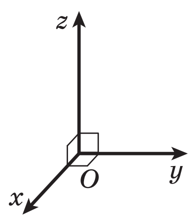


Рис. 24.8

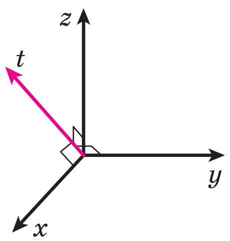


Рис. 24.9

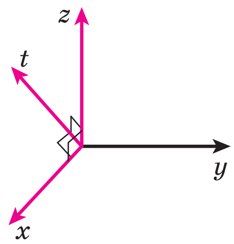


Рис. 24.10

При цьому нас не турбує те, що на зображенні (рис. 24.8) фактичний кут, наприклад між осями x і z, відрізняється від прямого.

Так само для побудови системи координат у чотиривимірному просторі через початок тривимірної системи координат треба провести ще одну пряму — четверту координатну вісь t, перпендикулярну до кожної з трьох інших осей. На рисунку 24.9 зображено на площині систему координат чотиривимірного простору. Зауважимо, що, перебуваючи тільки в тривимірному просторі, таку четверту пряму провести неможливо, так само як на площині неможливо провести третю пряму, перпендикулярну до двох осей двовимірної системи координат.

Якщо із чотирьох координатних осей x, y, z, t вибрати будь-які три, наприклад x, z, t, то отримаємо звичну тривимірну систему координат (рис. 24.10).

Спробуємо в чотиривимірній системі координат зобразити чотиривимірний куб — чотиривимірний аналог квадрата на площині та куба в просторі. Для цього знову міркуватимемо, переходячи від одновимірного простору до дво-, три- і, нарешті, до чотиривимірного.

Позначимо на координатній прямій x відрізок AB завдовжки 1 (рис. 24.11, *а*). Координати x точок цього відрізка задовольняють подвійну нерівність $0 \leqslant x \leqslant 1$.

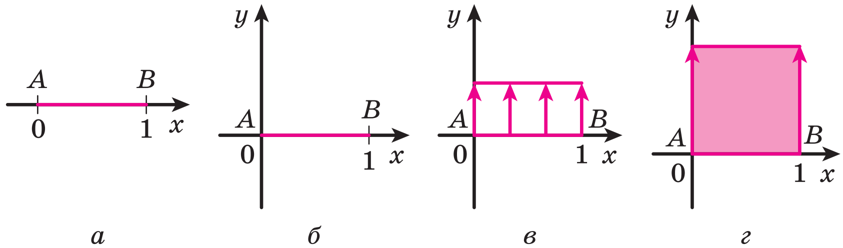


Рис. 24.11

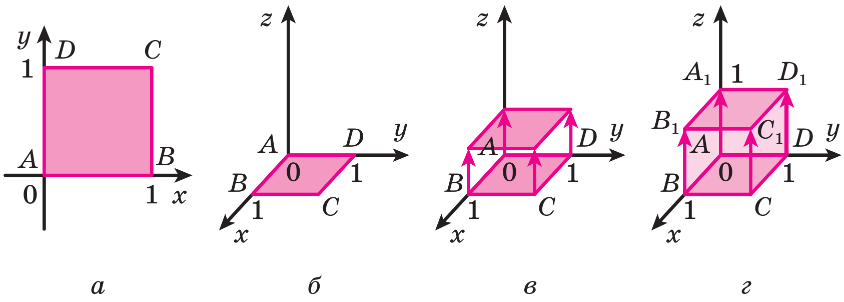


Рис. 24.12

Розмістимо цей самий відрізок у двовимірному просторі xy (рис. 24.11, *б*). Будемо паралельно переносити цей відрізок у напрямі осі y (рис. 24.11, *в*). Якщо відрізок AB переносити на 1 у напрямі осі y, то можна побачити, як утворюється квадрат (рис. 24.11, *г*). При цьому початковий відрізок AB буде стороною цього квадрата.

Розглянемо тепер квадрат $ABCD$ зі стороною, що дорівнює 1 (рис. 24.12, *а*). Координати (x, y) точок цього квадрата задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$ Розмістимо цей квадрат у тривимірному просторі xyz (рис. 24.12, *б*).

Будемо паралельно переносити квадрат $ABCD$ у напрямі осі z (рис. 24.12, *в*). Тоді можна побачити, як утворюється куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 24.12, *г*). При цьому початковий відрізок AB буде ребром цього куба, а квадрат $ABCD$ — гранню куба.

Для побудови чотиривимірного куба спиратимемося на виявлену закономірність. Розглянемо тривимірний куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ у чотиривимірному просторі $xyzt$ (рис. 24.13, *а*). Координати $(x; y; z)$

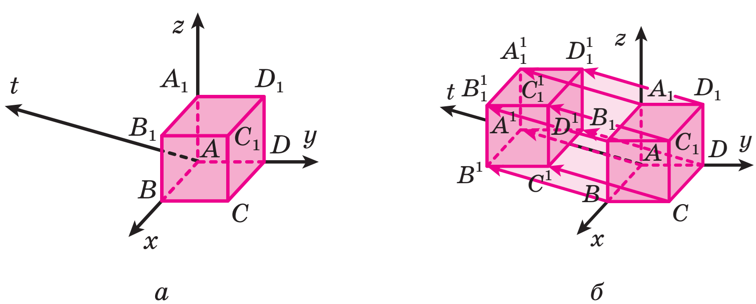


Рис. 24.13

точок цього куба задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$

Будемо паралельно переносити цей куб у напрямі осі t. Якщо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ переносити на 1 у напрямі осі t, то отримаємо чотиривимірний куб $ABCDA_1B_1C_1D_1A^1B^1C^1D^1A_1^1B_1^1C_1^1D_1^1$ (рис. 24.13, *б*). При цьому початковий відрізок AB буде його ребром, квадрат $ABCD$ — гранню, а куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — так званою **гіпергранню**. Координати $(x; y; z; t)$ точок цього чотиривимірного куба задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

Можна підрахувати, що чотиривимірний куб має 16 вершин, 32 ребра (одновимірних відрізки), 24 грані (двовимірних квадрати) і 8 гіперграней (тривимірних кубів). Щоб краще розібратися з геометрією чотиривимірного куба, спробуйте самостійно знайти координати вершин, а також координати точок, які лежать на ребрах, гранях і гіпергранях цього куба.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Відстань між точками

Відстань між двома точками $A\ (x_1; y_1; z_1)$ і $B\ (x_2; y_2; z_2)$ можна знайти за формулою $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Координати середини відрізка

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Взаємне розміщення векторів

Два ненульових вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Три вектори називають компланарними, якщо рівні їм вектори, які мають спільний початок, належать одній площині.

Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.

Координати вектора

Якщо точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$ і $B\ (x_2; y_2; z_2)$ — відповідно початок і кінець вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ і $z_2 - z_1$ дорівнюють відповідно першій, другій і третій координатам вектора $\vec{a}$.

Модуль вектора

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2; a_3)$, то $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Дії над векторами

Для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що: 1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$; 2) якщо $k > 0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a}\neq\vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b}=k\vec{a}$.

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Дії над векторами в координатній формі

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють відповідно $(a_1; a_2; a_3)$ і $(b_1; b_2; b_3)$, то:

- координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$;
- координати вектора $k\vec{a}$ дорівнюють $(ka_1; ka_2; ka_3)$;
- скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
- $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (де вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові).

Гомотетія

Якщо точки O, X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}$, де $k\neq 0$, то говорять, що точка X_1 — образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k. Точку O називають центром гомотетії, число k — коефіцієнтом гомотетії.

Перетворення фігури F, при якому кожній точці X фігури F ставлять у відповідність точку X_1, що є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k, називають гомотетією із центром O та коефіцієнтом k.

Рівняння фігури

Рівнянням фігури F, заданої в координатному просторі xyz, називають рівняння з трьома змінними x, y і z, яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі F, то її координати $(x; y; z)$ є розв'язком даного рівняння;
2) будь-який розв'язок $(x; y; z)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

Рівняння площини

Рівняння площини має вигляд $ax+by+cz+d=0$, де a, b, c і d — деякі числа, причому a, b і c не дорівнюють нулю одночасно; вектор $\vec{n}(a;b;c)$ є вектором нормалі цієї площини.

Дружимо з комп’ютером

У попередніх класах ви вже використовували комп’ютер під час вивчення геометрії, створювали рисунки планіметричних об’єктів.

Опановуючи стереометрію, ви створюватимете рисунки стереометричних об’єктів. Ці рисунки набагато складніші за планіметричні. Існує низка спеціалізованих пакетів програм, призначених для інженерного креслення, у тому числі для зображення об’ємних об’єктів (наприклад, програма *AutoCAD*). Такі програми доволі складні, проте якщо ви виберете професію, яка потребує вміння будувати й читати креслення, — інженерну, технічну, будівельну тощо, — то вам буде корисно набути навичок роботи з такими програмами.

Завдання курсу стереометрії 10 класу для виконання за допомогою комп’ютера

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп’ютера в міру засвоєння відповідних тем. Деякі із цих завдань — продовження та розвиток вправ даного підручника, які ви виконуватимете на уроках і вдома (такі вправи в тексті підручника позначено піктограмою «»).

Для тих, хто любить програмування, пропонуємо створювати алгоритми та програми, у яких ви використовуватимете отримані математичні знання.

До п. 1 «Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії»

1. Освойте інструментарій графічного редактора, за допомогою якого можна зображати площини.

2. Зверніть увагу на рисунок 1.7. «Невидиму» частину прямої зображено пунктирною лінією.

3. До вправ **1.1–1.4**. Побудуйте потрібні зображення за допомогою графічного редактора.

До п. 2 «Наслідки з аксіом стереометрії»

1. Ви знаєте, що пряму можна задати двома різними точками, які їй належать. Припустимо, що існує набір таких підпрограм:
   1) за даними точкою та прямою визначити, чи належить точка прямій;
   2) за даними точкою та площиною визначити, чи належить точка площині;
   3) для даної прямої отримати довільну точку, що належить цій прямій.

Запишіть вхідні та вихідні дані для цих підпрограм, вважаючи, що пряма задається двома точками. Користуючись даним набором підпрограм, запишіть алгоритми для визначення взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі.

До п. 3 «Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники»

1. До вправ **3.3–3.5**. Побудуйте потрібні зображення за допомогою графічного редактора.

2.* До вправи **3.19**. Запишіть алгоритм, який залежно від розміщення трьох заданих точок на ребрах куба визначає, чи задають ці точки єдиний переріз куба, і в разі ствердної відповіді встановлює, якою фігурою є цей переріз.

До п. 4 «Взаємне розміщення двох прямих у просторі»

1. Запишіть алгоритм, який для двох даних прямих визначає їхнє взаємне розміщення. Які підпрограми потрібні, щоб реалізувати цей алгоритм (наприклад, визначення, чи належить точка площині, тощо)? Які вхідні та вихідні дані потрібні для цих підпрограм? Визначте мінімальний набір таких інструментів і запишіть алгоритм за його допомогою.

До п. 5 «Паралельність прямої та площини»

1. Запишіть алгоритм, який для даної площини та даної прямої визначає їхнє взаємне розміщення. Визначте набір підпрограм, потрібних для того, щоб реалізувати цей алгоритм, і запишіть алгоритм за допомогою цих підпрограм.

До п. 6 «Паралельність площин»

1. Узагальніть знання, отримані у вивчених пунктах, і запишіть алгоритм, який дає змогу визначати взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі.

До п. 7 «Перетворення фігур у просторі. Паралельне проектування»

1. Зображення об'ємної фігури на аркуші паперу або на екрані комп'ютера само по собі є проектуванням. Створіть кілька рисунків, що ілюструють це твердження.

2. Якщо ви освоюєте *AutoCAD*, то зобразіть кілька тіл, відомих вам із курсу геометрії попередніх класів (конус, циліндр, паралелепіпед тощо), і дослідіть їхні проекції при різних напрямах проектування.

До п. 8 «Зображення плоских і просторових фігур»

1. Складіть список тіл, відомих вам із курсу геометрії попередніх класів (конус, циліндр, паралелепіпед тощо). Для кожного з них визначте, з яких плоских фігур складається поверхня тіла та як зображуються ці фігури на площині. Побудуйте в графічному редакторі зображення усіх цих тіл. Збережіть зображення у файлі для подальшої роботи з ними.

До п. 9 «Кут між прямими в просторі»

1. Чи є правильним твердження: кут між прямими в просторі дорівнює куту між їхніми зображеннями на екрані комп’ютера? Підтвердьте свою точку зору ілюстрацією в графічному редакторі. Яку фігуру найзручніше використати для цього?

До п. 10 «Перпендикулярність прямої та площини»

1. До вправи **10.19**. Підтвердьте свої висновки ілюстрацією в графічному редакторі. Як потрібно розмістити графічні об’єкти на екрані комп’ютера, щоб ця ілюстрація була наочною та достовірною?

До п. 11 «Перпендикуляр і похила»

1. Побудуйте за допомогою графічного редактора ортогональні проекції відомих вам геометричних тіл. Як розмістити ці тіла відносно площини проектування, щоб за проекцією можна було отримати найкраще уявлення про тіло? Дослідіть, які геометричні фігури є проекціями елементів цих тіл.

До п. 13 «Кут між прямою та площиною»

1. Під час розв’язування задач на знаходження кутів найчастіше можна знайти тригонометричні функції цих кутів. За допомогою якого інструмента калькулятора (або мови програмування, що ви вивчаєте) можна перейти від значення тригонометричної функції до величини кута? Які при цьому існують обмеження та неоднозначності?

До п. 14 «Двогранний кут. Кут між площинами»

1. Чи існують засоби графічного редактора, які дають змогу за зображенням двох площин визначати кут між ними? Чому?

До п. 15 «Перпендикулярні площини»

1. Як доцільно зображати перпендикулярні площини, щоб їхня перпендикулярність була наочною? Який фактичний вигляд може мати на рисунку кут між перпендикулярними площинами? Зробіть відповідні рисунки в графічному редакторі.

До п. 16 «Площа ортогональної проекції многокутника»

1. Запишіть алгоритм для обчислення площі ортогональної проекції многокутників, відомих вам із курсу планіметрії. Передбачте вхідні дані для алгоритму, які дають користувачеві змогу вибирати потрібний вид многокутника та задавати набір елементів многокутника, величини яких потрібно ввести для опису цього многокутника.

2.* Запишіть алгоритм, який за зображенням чотирикутника й величиною кута між площиною чотирикутника та площиною проектування робить висновок про вид чотирикутника. Розгляньте окремо випадки, коли висновок є неоднозначним. Оскільки розпізнавання графічних об’єктів — окрема складна область досліджень, доцільно у вашому алгоритмі задавати (описувати) зображення чотирикутника за допомогою кількох запитань, на які користувач відповідатиме «так» чи «ні», вибиратиме якийсь пункт із меню або вводитиме якісь числові дані. Які це будуть запитання?

До п. 17 «Многогранний кут. Тригранний кут»

1. Як змінюються величини кутів при паралельному проектуванні? Побудуйте приклади в графічному редакторі. Зробіть висновок, чи можна за зображенням многогранного кута судити про величини його плоских кутів.

До п. 18 «Геометричне місце точок простору»

1. Екран комп’ютера являє собою множину точок («пікселів»). Як застосувати це для зображення геометричного місця точок на екрані комп’ютера в планіметрії? у стереометрії?

До п. 19 «Декартові координати точки в просторі»

1. Напишіть програму, яка зображає на екрані комп’ютера осі декартової системи координат з вибраним одиничним відрізком. Напишіть програму, яка за заданими координатами точки зображає її в цій системі координат. Для зображення відрізків знайдіть у мові програмування, яку ви вивчаєте, засоби зображення відрізка на екрані комп’ютера.

2. Запишіть алгоритм для знаходження відстані між двома точками, заданими своїми координатами в просторі. Які структури даних мови програмування, що ви вивчаєте, доцільно вибрати для задання точки в просторі? Напишіть за цим алгоритмом підпрограму.

3. Напишіть спільну програму для знаходження координат середини відрізка та для знаходження координат точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні.

До п. 20 «Вектори в просторі»

1. Створіть набір підпрограм для роботи з векторами, які дають змогу:

1) за координатами початку й кінця вектора знайти координати вектора;
2) за координатами вектора знайти модуль вектора;
3) за координатами двох векторів визначити, чи є ці вектори колінеарними;
4) за координатами двох векторів визначити, чи є ці вектори рівними.

Визначте, які ще підпрограми будуть корисними для роботи з векторами, і додайте їх до цього набору.

2. Напишіть програму для розв’язування якої-небудь задачі даного пункту з використанням підпрограм зі створеного набору.

До п. 21 «Додавання і віднімання векторів»

1. Додайте до набору підпрограм для роботи з векторами, заданими своїми координатами, підпрограми:
   1) додавання двох векторів;
   2) віднімання двох векторів.
2. Визначте, які корисні підпрограми для роботи з векторами можна створити за матеріалом цього пункту. Напишіть їх.
3. Напишіть програму для додавання n векторів, використовуючи раніше створені підпрограми. Зверніть особливу увагу на спосіб задання набору цих векторів.

До п. 22 «Множення вектора на число. Гомотетія»

1. Додайте до набору підпрограм для роботи з векторами підпрограму множення вектора на число.
2. Напишіть програму для знаходження образу даної точки при гомотетії з даним центром і даним коефіцієнтом. Використайте раніше створені підпрограми для роботи з векторами.

До п. 23 «Скалярний добуток векторів»

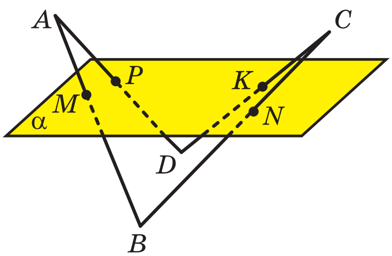
1. Додайте до набору підпрограм для роботи з векторами підпрограми:
   1) знаходження скалярного добутку двох векторів;
   2) знаходження кута між двома векторами.

До п. 24 «Рівняння площини»

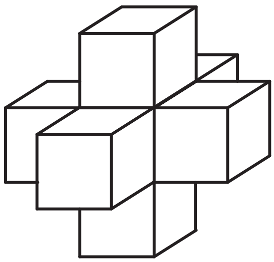
1. Припустимо, що є підпрограма, яка за координатами точки в просторі визначає, чи належить ця точка деякому ГМТ. Як, користуючись цією підпрограмою, побудувати зображення цього ГМТ на екрані комп'ютера в декартовій системі координат? Напишіть програму для побудови такого зображення. Які недоліки цього зображення? Яке перетворення, що ви вивчали в 10 класі, фактично реалізує ця програма?
2. Напишіть підпрограму, яка за координатами точки в просторі визначає, чи належить вона площині, заданій у вхідних параметрах підпрограми значеннями a, b, c і d. Зверніть увагу на те, що в математиці площина має «нульову» товщину, і поясніть, чому комп'ютерні обчислення не для всіх даних дадуть правильний результат. Як потрібно змінити постановку задачі, щоб ця програма мала практичну значущість?
3. За допомогою програм, створених у завданнях 1 і 2, зобразіть кілька різних площин на екрані комп'ютера. Зробіть висновок про доцільність зображення площини «цілком». Підберіть параметри a, b, c і d так, щоб отримати зображення площини у вигляді прямої.
4. Як можна модифікувати програму зображення площини, щоб це зображення було інформативним?

Відповіді та вказівки до вправ

1.21. *Вказівка*. Точки M, D і K лежать на прямій перетину площин ABC і α. **1.24.** 11 см або 3 см. **1.26.** Ні. *Вказівка*. Див. рисунок. **1.27.** *Вказівка*. Покажіть, що коли хоча б одна з вершин ламаної належить площині α, то інші чотири вершини також належать цій площині. Нехай жодна з точок A, B, C, D і E не належить площині α. Тоді точки A і D лежать по один бік від площини α. Також по один бік від площини α лежать точки B і D. Проте точки A і B мають лежати по різні боки від площини α. Отримали суперечність. **1.28.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **1.29.** 1008 см^2. **1.30.** 28 см.



До задачі 1.26



До задачі 3.35

2.1. Безліч або одну. **2.11.** 3 точки. **2.12.** Одну площину або три площини. **2.21.** Не можуть. *Вказівка*. Якщо припустити, що точки M, N, P і K належать одній площині, то пряма AB перетинає цю площину у двох точках. **2.24.** Так. *Вказівка*. Покажіть, що точки P, E і Q, які не лежать на одній прямій, є спільними для площин ABC і MNK. **2.25.** 32 см^2. **2.26.** 5 см.

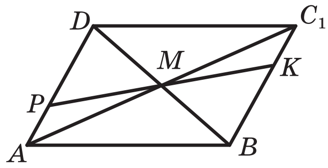
3.21. *Вказівка*. Знайдіть точку M перетину прямих EF і BC та точку N перетину прямих FK і CD. Тоді пряма MN — лінія перетину площини перерізу та площини ABC. **3.22.** *Вказівка*. Знайдіть точку E перетину прямих NK і BC. Тоді пряма ME — лінія перетину площини перерізу та площини ABC. **3.23.** *Вказівка*. Знайдіть точку E перетину прямих MK і AC. Тоді пряма NE — лінія перетину площини перерізу та площини ACD. **3.27.** *Вказівка*. Знайдіть точку P перетину прямих EF і BC та точку N перетину прямих EK і AB. Тоді пряма MP — лінія перетину площини перерізу та площини основи. **3.28.** *Вказівка*. Знайдіть точку E перетину прямих AB і CD. Тоді пряма ME — лінія перетину площини перерізу та площини ABB_1. **3.29.** *Вказівка*. Знайдіть точку F перетину прямих B_1C_1 і BE. Тоді пряма A_1F — лінія перетину площини перерізу та площини $A_1B_1C_1$. **3.32.** *Вказівка*. Знайдіть точку E_1 перетину прямих DE і AB та точку F_1 перетину прямих DF і BC. Тоді точка перетину прямих EF і E_1F_1 належить лінії перетину площини перерізу та площини ABC. **3.35.** Ні. *Вказівка*. Див. рисунок. **3.39.** Не може. *Вказівка*. Якщо чотирикутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ є зображеннями граней многогранника, то точки перетину прямих AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, CD і C_1D_1, AD і A_1D_1 належать одній прямій. **3.40.** 2) 3 : 5. **3.41.** 2) 1 : 1. **3.42.** 72°, 108°, 72°, 108°. **3.43.** 4 : 9.

4.9. Мимобіжні. **4.10.** Перетинаються або паралельні. **4.12.** Одну площину або три площини. **4.13.** 6 площин. **4.23.** 4 см. **4.24.** 6 см. **4.25.** 9 см. **4.26.** 2 см. **4.27.** $4\sqrt{2}$ см. **4.29.** Не існують. **4.32.** *Вказівка.* Побудуйте пряму перетину площин ANK і CMK. Нехай площина CMK перетинає пряму AN у точці F. Тоді пряма KF — шукана. Якщо прямі KF і CM паралельні, то задача не має розв'язків. **4.34.** 35 см або 17 см. **4.35.** 6 см. **4.36.** 1 : 2.

5.13. 7,5 см. **5.14.** 8 : 3. **5.15.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, і скористайтеся рівністю кутів подібних трикутників. **5.19.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **5.20.** $\left(4\sqrt{3}+2\right)$ см. **5.22.** $a\left(2+\sqrt{2}\right)$. **5.27.** *Вказівка.* Проведіть площину через пряму a та точку M. **5.30.** 60 см. **5.31.** 28 см. **5.43.** 3 : 1. **5.44.** 3 : 5. **5.48.** 3 : 2. **5.49.** *Вказівка.* Площина BMN перетинає площину основи по прямій, паралельній прямій ED. **5.51.** 2 : 5. *Вказівка.* Нехай P — середина відрізка BM. Тоді точка перетину прямих BN і CP збігається з точкою F. Далі доведіть, що $\frac{FE}{PK}=\frac{CF}{CP}$. **5.52.** 1 : 3. **5.53.** 1 : 4. *Вказівка.* На промені BB_1 позначте точку F таку, що $C_1F \parallel CN$. Тоді точка перетину прямих AF і BM збігається з точкою P. Далі доведіть, що $\frac{PK}{C_1F}=\frac{AP}{AF}$. **5.54.** 1 : 5. **5.55.** 8,4 см. **5.56.** 156 см^2.

6.13. 2) 24 см. **6.16.** $\frac{2a\left(2\sqrt{2}+3\right)}{3}$. **6.17.** $a\left(2+\sqrt{2}\right)$. **6.18.** *Вказівка.* Щоб знайти перетин січної площини з гранню BB_1C_1C, проведіть через точку N пряму, паралельну прямій MK. **6.19.** *Вказівка.* Щоб знайти перетин січної площини з гранню $ABCD$, проведіть через точку E пряму, паралельну прямій FK. **6.27.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **6.28.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **6.36.** *Вказівка.* На відрізку CN побудуйте точку K таку, що $MK \parallel BN$. **6.38.** *Вказівка.* Якщо припустити, що площини BCD і AFE паралельні, то $AB = DE$. **6.40.** *Вказівка.* На промені CB побудуйте таку точку M, що $MB_1 \parallel AD_1$. **6.42.** 3 : 2. *Вказівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Тоді площина, яка проходить через точки M і N паралельно площині BC_1D, перетинає пряму AC у такій точці K, що $MK \parallel DO$, $KN \parallel C_1O$. Позначимо через F точку перетину прямих KN і A_1C_1. Тоді шукане відношення дорівнює $KC : FA_1$. **6.43.** 1 : 4. **6.44.** 3 : 1. *Вказівка.* Нехай точка K — середина відрізка AB. Тоді січна площина перетинає ребро B_1C_1 у точці F такій, що $NF \parallel AM$. **6.45.** 2 : 3. **6.46.** 5 см. **6.47.** 4 : 1.

7.10. 9 см. **7.16.** *Вказівка.* Скориставшися ключовою задачею 7.15, доведіть, що дане перетворення фігури є рухом. **7.17.** Дві паралельні прямі або пряма та точка поза цією прямою. **7.18.** Ні. **7.19.** Площина α паралельна кожній із прямих a і b або площина α містить одну з даних прямих і паралельна другій. **7.20.** Ні. *Вказівка.* Нехай точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Пряма l_1 паралельна паралельним площинам, які містять мимобіжні прямі AB і CD. Пряма l_2 паралельна паралельним площинам, які містять мимобіжні прямі BC і AD. **7.21.** *Вказівка.* Розглянемо паралельну проекцію тетраедра на площину ADB у напрямі прямої MN. Такою проекцією є паралелограм $ADBC_1$, а проекцією площини MNK — пряма KP, яка проходить через точку перетину діагоналей паралелограма (див. рисунок). **7.22.** 1 : 3. **7.23.** 15 см і 20 см. **7.24.** 12 см².



До задачі 7.21

8.18. *Вказівка.* Проведіть яку-небудь хорду еліпса, паралельну відрізку A_1B_1. **8.19.** *Вказівка.* Побудуйте зображення радіуса кола, який проходить через середину хорди BC. **8.20.** *Вказівка.* Проведіть які-небудь дві паралельні хорди еліпса. **8.28.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $AM : MB = BN : NC$. **8.30.** *Вказівка.* Точка дотику кола до бічної сторони рівнобічної трапеції ділить цю сторону на відрізки, пропорційні основам трапеції. **8.32.** *Вказівка.* Через точку K проведіть відрізок KP, який паралельний відрізку MN і дорівнює його половині. Тоді відрізок FP дорівнює бічному ребру призми та паралельний йому. **8.34.** Існує. *Вказівка.* Розгляньте паралельну проекцію правильного п'ятикутника. **8.35.** *Вказівка.* Розгляньте чотирикутник $OABC$ як зображення тетраедра $OABC$. Можна вважати, що точки M, N і K належать граням AOB, BOC і COA відповідно. Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK. **8.36.** *Вказівка.* Розгляньте точки A, B, C і D як вершини тетраедра $ABCD$, а трапецію $MNKF$ — як переріз тетраедра площиною, паралельною ребру AC. **8.37.** *Вказівка.* Розгляньте паралельне проектування, при якому зображенням трикутника ABC є рівнобедрений прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ такий, що $\angle B_1A_1C_1 = 90°$. **8.38.** *Вказівка.* Розгляньте паралельне проектування, при якому зображенням трикутника ABC є рівносторонній трикутник. **8.39.** $12\sqrt{26}$ см. **8.40.** 10 см.

9.4. 60°. **9.5.** 1) 90°; 2) 40°. **9.6.** 1) 0°; 2) 70°; 3) 35°. **9.7.** 80°. **9.8.** 10 см. **9.9.** 10 см. **9.10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **9.11.** α або $180° - \alpha$. **9.12.** 90°. *Вказівка.* Доведіть, що шуканий кут дорівнює куту між прямими OB_1 і AC та що трикутник AB_1C рівнобедрений. **9.13.** 60°. **9.14.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутник ED_1F рівнобедрений. **9.15.** 90°. *Вказівка.* Доведіть, що чотирикутник $EFMK$ — прямокутник. **9.16.** 15° або 75°. **9.17.** 60°. **9.18.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **9.19.** 45°. *Вказівка.* Нехай K — середина ребра BD. Доведіть, що трикутник MNK — рівнобедрений прямокутний. **9.20.** *Вказівка.* Нехай точки M і N — відповідно середини ребер AB і D_1C_1. Тоді $MN \parallel AD_1$. Далі скористайтеся тим, що чотирикутник MB_1ND — ромб. **9.21.** 60°. *Вказівка.* Нехай точки K, F і N — середини ребер AC, CC_1 і C_1B_1 відповідно, O — точка перетину діагоналей грані ABB_1A_1. Скористайтеся тим, що точки K, F, N і O — вершини ромба, діагональ OF якого дорівнює його стороні. **9.22.** 90°. **9.23.** 52 см. **9.24.** 24 см².

10.8. 2 см. **10.9.** $2\sqrt{5}$ см. **10.10.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.11.** 8 см. **10.20.** 9 см. **10.21.** *Вказівка.* Нехай точка K — середина відрізка BC. Доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини AKD. **10.25.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **10.26.** 12 см. **10.27.** 14 см. **10.28.** 17 см. **10.29.** $3\frac{1}{3}$ см. **10.30.** 23 см. **10.32.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ см². **10.33.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ см². **10.36.** Ні. **10.37.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$. **10.39.** $4\sqrt{3}$ см². *Вказівка.* Доведіть, що прямі BD і AC перпендикулярні. **10.40.** $5\sqrt{39}$ см². **10.41.** *Вказівка.* Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини BCD. **10.42.** *Вказівка.* Доведіть, що лінія перетину площин ABM і CDM паралельна прямій CD. **10.43.** *Вказівка.* Доведіть, що $AD \parallel EF$. **10.44.** $\frac{15}{2}$ см². *Вказівка.* Переріз перетинає ребро DC у точці K такій, що $DK : KC = 3 : 1$. **10.45.** 3 : 5. *Вказівка.* Через точку M проведіть пряму, перпендикулярну до ребра AB. **10.46.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ см². *Вказівка.* Переріз є правильним шестикутником, сторона якого дорівнює $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ см. Скористайтеся тим, що пряма B_1D перпендикулярна до прямої AC і до прямої AD_1 (див. ключову задачу 9.20). **10.47.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ см². **10.48.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **10.49.** 45°. *Вказівка.* Позначте на відрізку KB точку N так, щоб $MN \parallel CK$. Шуканий кут дорівнює куту між прямими SM і MN. **10.50.** 60°. **10.51.** 9 см². *Вказівка.* Нехай точка N — середина ребра AD. Тоді $CN \parallel AB$. Далі доведіть, що $\angle DCN = 90°$. Шуканий переріз паралельний прямим SD і AB. **10.52.** 1 см². *Вказівка.* Нехай точка K — середина ребра AD. Шуканий переріз — трикутник MKB. **10.53.** $\frac{15}{8}$ см. **10.54.** 1) 8 см; 2) 60°, 120°.

11.5. 7 см. **11.6.** 12 см. **11.14.** $5\sqrt{2}$ см. **11.18.** 15 см. **11.19.** 15 см, 13 см. **11.20.** $2\sqrt{2}$ см. **11.21.** $2\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\sqrt{6}$ см. **11.22.** 3 см. **11.23.** 12 см. **11.24.** $\sqrt{d^2+\frac{a^2}{4\sin^2\alpha}}$. **11.25.** 10 см. **11.26.** 5 см. **11.27.** $3\sqrt{41}$ см. **11.28.** 4 см, $\sqrt{55}$ см, $3\sqrt{3}$ см. **11.29.** 9 см. **11.30.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **11.31.** $\frac{a}{2}$. **11.32.** 40 см². **11.33.** 12 см. **11.34.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **11.35.** 120°. **11.36.** 8 см. **11.37.** 5 см. **11.38.** $3\sqrt{15}$ см.

11.39. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **11.40.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **11.41.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **11.42.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.43.** *Вказівка*. Нехай точки A_1, B_1, C_1, D_1 і O_1 — основи перпендикулярів, опущених відповідно з точок A, B, C, D і O на площину α. Тоді $OO_1 \leqslant OM$. Скористайтеся тим, що відрізок OO_1 є середньою лінією кожної з трапецій AA_1C_1C і BB_1D_1D. **11.44.** 28 см або $4\sqrt{69}$ см. *Вказівка.* Із точки C опустіть перпендикуляр CK на площину β. Відстань між прямими AB і CD дорівнює відстані від точки B до прямої DK. **11.45.** 2,4 см. **11.46.** $\frac{4}{3}$ см. *Вказівка*. Спроектуйте прямі DA_1 і CD_1 на площину AC_1D_1. Далі скористайтеся ключовою задачею 5 п. 11. **11.47.** $\frac{2a}{3}$. **11.48.** 2,4 см. *Вказівка*. Нехай точка K — середина відрізка AC. Спроектуйте прямі AC і DM на площину BDK. **11.49.** $\frac{20}{13}$ см. **11.50.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. *Вказівка*. Через точку C проведемо в площині ABC пряму l, перпендикулярну до прямої CK. Із точки M опустимо перпендикуляр MP на пряму l. Площина SMP паралельна прямій CK. Опустимо з точки C перпендикуляр CF на пряму SP. Довжина відрізка CF дорівнює шуканій відстані. **11.51.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **11.52.** 420 см^2. *Вказівка*. Нехай точка E — середина відрізка SO. Відстань між прямими AC і KD дорівнює відстані від точки O до прямої DE. **11.53.** 3 см і $\frac{5\sqrt{34}}{3}$ см. **11.54.** $\frac{120}{7}$ см.

12.10. 17 см. **12.11.** 8 см. **12.12.** 10 см. **12.13.** 5 см. **12.14.** $3\sqrt{5}$ см. **12.15.** 2 см. **12.16.** 4 см. **12.18.** 20 см. **12.19.** $3\sqrt{10}$ см. **12.20.** 28 см або 12 см. **12.21.** 21 см або 9 см. **12.22.** 90°. **12.25.** *Вказівка*. Нехай точка K — середина ребра CD. Доведіть, що трикутник AMK — шуканий переріз. **12.26.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **12.27.** 18 см. **12.28.** 58,5 см^2. *Вказівка*. Доведіть, що трикутник ACM прямокутний, де M — проекція точки B на площину α. **12.29.** $\sqrt{13}$ см або 7 см. **12.30.** $2\sqrt{97}$ см або 10 см. **12.31.** $4\sqrt{10}$ см, або 5 см, або $\sqrt{105}$ см. *Вказівка*. Проекцією точки M на площину ABC може бути центр вписаного або центр одного із зовнівписаних кіл трикутника ABC. **12.32.** $\sqrt{193}$ см або 13 см. **12.33.** 1 : 4. *Вказівка*. Проекцією відрізка KM на площину ABC є відрізок AP, перпендикулярний до відрізка BD. Скористайтеся тим, що $BP : PD = B_1M : MD$. **12.34.** 3 : 4. **12.35.** 8 : 17. *Вказівка*. У площині ABC опустимо перпендикуляр AP на пряму BD. Із точки P опустимо перпендикуляр на пряму B_1D. Доведіть, що основою цього перпендикуляра є точка M. **12.36.** 5 см і 40 см або 20 см і 10 см. **12.37.** 243 см^2.

13.8. 30°. **13.11.** 30°. **13.12.** $6\sqrt{2}$ см. **13.13.** 3 см. **13.14.** $8\sqrt{2}$ см. **13.15.** $3\sqrt{10}$ см. **13.16.** 6 см. **13.17.** $3\sqrt{14}$ см. **13.18.** 30°. **13.19.** $2\sqrt{6}$ см,

$\sqrt{15}$ см. **13.20.** 45°. **13.21.** $4\sqrt{7}$ см. **13.22.** 45°. **13.23.** 1) 30°; 2) 60°. **13.24.** 1) 45°; 2) 30°. **13.25.** 45°. **13.26.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **13.27.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **13.28.** 45°. **13.29.** 45°. **13.30.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.31.** 45°. **13.32.** 60°. **13.33.** 30°. **13.34.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2 п. 13. **13.35.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ см. **13.36.** $\frac{1}{4}$. **13.37.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **13.38.** 60°. *Вказівка*. Установіть, що кут між прямими AK і BP дорівнює 45°. **13.39.** 60°. **13.40.** *Вказівка*. Спочатку переконайтеся, що рівність, яку потрібно довести, виконується для випадків, коли пряма m перпендикулярна до площини π або паралельна їй. Нехай пряма n — проекція прямої m на площину π — утворює з прямою a кут φ. Тоді кут між прямими n і b дорівнює $90° - \varphi$. До двох трійок прямих m, n, a і m, n, b застосуйте ключову задачу 2 п. 13. **13.41.** 0,5 см. *Вказівка*. Перший спосіб. Із точки C опустіть перпендикуляр CK на площину ADB. За допомогою ключової задачі 13.40 знайдіть кут CDK. Другий спосіб. Проведіть висоту DM трикутника ADB. Проведіть висоту CK трикутника CDM. Доведіть, що довжина відрізка CK — шукана відстань. **13.42.** 1 см. **13.43.** $12\sqrt{3}$ см^2.

14.4. 35 см. **14.5.** 24 см. **14.6.** 105°. **14.7.** 70°. **14.10.** 60°. **14.11.** 60°. **14.16.** 80°. **14.18.** 60°. **14.19.** $\sqrt{5}$ см. **14.20.** 120°. **14.21.** 45°. **14.22.** 60°. **14.23.** 60°. **14.24.** 30°. **14.25.** 45°. **14.26.** 50 см^2. **14.27.** 6 см. **14.28.** $4\sqrt{2}$ см. **14.29.** 45°. **14.30.** 60°. **14.31.** $2\sqrt{13}$ см. **14.32.** 60°. **14.33.** 16 см. **14.34.** 60°. **14.35.** 3 см або 9 см. **14.36.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **14.37.** 90°. **14.38.** $\frac{1}{2}$. **14.39.** 60°. **14.40.** 90°. **14.41.** $2\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{12}$. **14.42.** $180° - 2\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$. **14.43.** 45°. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 4 п. 14. **14.45.** 45°. **14.46.** 45°. **14.47.** 60°. **14.48.** 60°. **14.49.** $\arccos\frac{1}{3}$. *Вказівка*. Перший спосіб. Скориставшись ключовою задачею 3 п. 12, доведіть, що кут між даними площинами дорівнює куту між прямими A_1C і B_1D. Другий спосіб. Скористайтеся ключовою задачею 4 п. 14. **14.50.** $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. *Вказівка*. Доведіть, що пряма, яка проходить через точку A_1 і середину ребра DD_1, перпендикулярна до площини ABM. **14.51.** *Вказівка*. Доведіть, що кут між площинами A_1PC і A_1QC становить 60°. Для цього спроектуйте куб на площину, перпендикулярну до прямої A_1C. Проекцією куба на цю площину є правильний шестикутник. Кут між площинами A_1PC і A_1QC дорівнює куту P_1OQ_1, де точка O — центр правильного шестикутника, точки P_1 і Q_1 — проекції точок P і Q відповідно. **14.52.** 90°. *Вказівка*. Спроектуйте куб на площину ABC_1. **14.53.** 36 см^2. **14.54.** 26 см.

15.5. 2) $5\sqrt{2}$ см, 13 см. **15.6.** 45°. **15.7.** $3\sqrt{2}$ см. **15.14.** 25 см. **15.15.** 8 см. **15.16.** 45°. **15.17.** 30°, 60°. **15.18.** 1) $2\sqrt{15}$ см; 2) 8 см. **15.19.** 13 см. **15.24.** 3) $20\sqrt{13}$ см². **15.25.** 3) 60 см². **15.26.** 60°. **15.27.** $10\sqrt{3}$ см. **15.28.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) a. **15.29.** $2\sqrt{337}$ см. **15.30.** 5 см. **15.31.** 4,8 см. *Вказівка*. Нехай точка O — центр трикутника ABC, точка D — середина сторони AB. Доведіть, що площини AMB і DMO перпендикулярні. **15.32.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см. **15.33.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{5}$. **15.34.** $\arccos\frac{1}{5}$. **15.35.** arctg 2. **15.36.** $\sqrt{S}$. **15.37.** $\frac{d\sqrt{30}}{10}$. **15.38.** 12 см. **15.39.** $\frac{120}{17}$ см. **15.40.** Існує. *Вказівка*. Розгляньте трикутну піраміду $DABC$, у якої бічне ребро DA перпендикулярне до площини основи. Позначте на ребрах AB і AC довільні точки M і K. **15.41.** 30°. *Вказівка*. Нехай F — точка перетину прямих AB і CD. Доведіть, що шуканий кут дорівнює куту MKF. **15.42.** 90°. *Вказівка*. Доведіть, що пряма CD перпендикулярна до площини MAB. **15.43.** 90°. *Вказівка*. Доведіть, що прямі AB і CD перпендикулярні. **15.44.** 1 : 2. *Вказівка*. Доведіть, що проекція точки M на площину ABC належить прямій AE. **15.45.** 1 : 1. **15.46.** 360 см². **15.47.** 10 см². **15.48.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **15.49.** 216 см².

16.5. $\arccos\frac{4}{5}$. **16.9.** 84 см². **16.11.** $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **16.12.** 30°. **16.13.** 45°. **16.14.** 20 см². **16.15.** $\frac{a^2}{\cos\alpha}$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$, або $\frac{a^2}{\sin\alpha}$, якщо $45° < \alpha \leqslant 90°$. **16.16.** $\frac{2\sqrt{14S\cos\alpha}}{7}$. **16.17.** *Вказівка*. Візьміть до уваги, що не обов'язково всі двогранні кути при ребрах основи є гострими. **16.18.** $\frac{7\sqrt{6}}{16}$ см². *Вказівка*. Знайдіть площу ортогональної проекції перерізу на площину ABC. **16.19.** $34\sqrt{2}$ см². **16.20.** $\arccos\frac{2}{3}$. *Вказівка*. Скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 1 п. 16. **16.21.** 30°. **16.22.** $\frac{S_1^2}{S}$. *Вказівка*. Доведіть, що косинус кута між площинами ADB і ABC дорівнює $\frac{S_1}{S}$. **16.24.** *Вказівка*. Нехай φ — кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$, S і S_1 — площі трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. Тоді $\cos\varphi = \frac{S_1}{S} \leqslant \frac{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot A_1C_1}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 60°} < \frac{1}{2}$. **16.25.** 60°. *Вказівка*. Проведіть медіану BM трикутника ABC. Доведіть, що трикутник AMD є ортогональною проекцією трикутника ABD на площину ABC. **16.26.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.27.** $\arccos\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Нехай найбільша з площ граней даного тетраедра дорівнює S, двогранні кути при ребрах цієї грані дорівнюють α_1, α_2 і α_3. Тоді $S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3=S$, де S_1, S_2 і S_3 — площі інших трьох граней тетраедра. У лівій частині записаної рівності знайдеться доданок не менший, ніж $\frac{S}{3}$.

17.4. 90°. **17.5.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **17.6.** $\arccos\frac{3}{4}$. **17.7.** 45°. **17.8.** $\arccos\frac{1}{4}$. **17.9.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. *Вказівка.* Застосуйте теорему косинусів до тригранного кута DAB_1C. **17.10.** $\arccos\frac{2\sqrt{15}}{15}$. **17.11.** 3, 4, 5. **17.13.** 60°. **17.14.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 17.2. **17.15.** $\sqrt{2}$ см. *Вказівка.* Опустимо перпендикуляр DO на площину ABC. Із точки O опустимо перпендикуляр OK на пряму AC. Для знаходження кута DKO застосуйте теорему косинусів для тригранного кута $ADBC$. **17.16.** $2\sqrt{5}$ см. **17.17.** 2 см. **17.18.** *Вказівка.* Припустимо, що при кожній вершині піраміди є хоча б один негострий кут. Тоді сума кутів при кожній вершині буде більшою за 180°. Звідси сума всіх кутів граней тетраедра більша за 720°. **17.19.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 17.18. **17.20.** Плоскі кути A_1MB_1, B_1MC_1 і C_1MA_1 дорівнюють $180°-\alpha_1$, $180°-\beta_1$ і $180°-\gamma_1$ відповідно. Двогранні кути при ребрах MA_1, MB_1 і MC_1 дорівнюють $180°-\alpha$, $180°-\beta$ і $180°-\gamma$ відповідно. **17.21.** *Вказівка.* Перший спосіб. Скористайтеся теоремою 17.1. Другий спосіб. Скористайтеся задачею 17.20. **17.22.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 17.20 і теоремою 17.2. **17.24.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 17.20 і теоремою 17.2. **17.26.** *Вказівка.* Із довільної точки ребра тригранного кута опустіть перпендикуляр на протилежну грань. Далі скористайтеся ключовою задачею 4 п. 14. **17.27.** *Вказівка.* Доведення проведемо методом математичної індукції для n-гранного кута $SA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ (рис. 17.2). Теорема база індукції — це теорема 17.2. Нехай твердження, яке потрібно довести, є правильним для будь-якого $(n-1)$-гранного кута ($n \geqslant 4$). Не порушуючи загальності доведення, вважатимемо, що кут A_1SA_n — найбільший з плоских кутів даного n-гранного кута. Запишемо: $\angle A_1SA_n < \angle A_1SA_2 + \angle A_2SA_n$, $\angle A_2SA_n < \angle A_2SA_3 + \angle A_3SA_4 + \ldots + \angle A_{n-1}SA_n$. Далі додайте почленно записані нерівності. **17.28.** *Вказівка.* Розглянемо n-гранний кут $SA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Зазначимо, що сума двогранних кутів цього n-гранного кута дорівнює сумі двогранних кутів тригранного кута $SA_1A_2A_n$, до якої додано суму двогранних кутів $(n-1)$-гранного кута $SA_2A_3...A_{n-1}A_n$. Далі скористайтеся результатом задачі 17.22 та методом математичної індукції. **17.29.** *Вказівка.* Розглянемо n-гранний кут $SA_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Нехай SB — пряма перетину площин SA_1A_n і SA_2A_3. Скориставшись теоремою 17.2, покажіть, що сума плоских кутів ($n-1$)-гранного кута $SBA_3...A_{n-1}A_n$ більша за суму плоских кутів даного n-гранного кута. Далі скористайтеся результатом задачі 17.3 та методом математичної індукції. **17.32.** $4\sqrt{3}$.

18.10. Чотири площини, паралельні даним. **18.11.** Дві площини, паралельні даним. **18.13.** Площина, яка перпендикулярна до площини ABC і проходить через бісектрису кута ABC, без точки B. **18.14.** Чотири прямі, які перпендикулярні до площини ABC і проходять через центр вписаного та центри зовнівписаних кіл трикутника ABC. **18.17.** 7 см або 9 см.

19.18. 5. **19.19.** 13. **19.20.** $y = -2$ або $y = -10$. **19.21.** A (3; 0; 0) або A (−1; 0; 0). **19.22.** $M\left(-2; \frac{1}{5}; -6\right)$. **19.23.** B (1; 6; −9). **19.24.** (0; −7; 0). **19.25.** (−10,5; 0; 0). **19.26.** (0; 0; 7). **19.27.** A (−8; 0; 4), B (0; 6; 0). **19.28.** B (17,5; −13; 7). **19.29.** D (−2; −9; 4). **19.32.** (0; −0,5; 2). **19.33.** (2; 2; 2) або (−2; −2; −2). **19.34.** (−3; 1; 8), (1; 3; 0), (9; −7; 2). **19.35.** C (5; 4; 4), B_1 (3; 6; 3), C_1 (7; 7; 3), D_1 (8; 3; 0). **19.36.** (1; −2; 1). **19.37.** $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{9}; -\frac{3}{2}\right)$. **19.38.** $M\left(\frac{9}{4}; \frac{13}{4}; -\frac{47}{18}\right)$. **19.39.** $\sqrt{33}$ см. **19.40.** $\frac{\sqrt{103}}{3}$ см. **19.42.** $\frac{9}{2}$. **19.43.** 6 см. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що точка M належить геометричному місцю точок, рівновіддалених від кінців відрізка BD_1. **19.44.** $\frac{35}{8}$ см. **19.45.** 625 см^2. **19.46.** $8\frac{1}{3}$ см.

20.11. D (7; −4; 5). **20.12.** $x = 20$, $y = -29$, $z = -18$. **20.14.** 3. **20.15.** −3 або 3. **20.16.** −14 або 2. **20.21.** B (−3; 16; −7). **20.22.** $\vec{m}(4; 4; 4)$ або $\vec{m}(-4; -4; -4)$. **20.23.** $\vec{c}\left(3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$ або $\vec{c}\left(-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$. **20.24.** B_1 (5; −3; −4). **20.25.** Так. **20.30.** 486 см^2. **20.31.** 13 см.

21.14. 1) $\overrightarrow{NK}$; 2) $\overrightarrow{DB}$. **21.15.** 1) $\overrightarrow{FM}$; 2) $\overrightarrow{BE}$. **21.22.** *Вказівка*. Розгляньте різницю правої та лівої частин даної рівності. **21.24.** $2\sqrt{2}$ см. **21.25.** $2\sqrt{3}$ см. **21.26.** A (3,5; −1,5; 8). **21.27.** M (−0,5; −2,5; 4,5). **21.30.** $\overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{B_1A} - \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1D}$. **21.31.** $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$. **21.32.** $\sqrt{26}$ при $y = -4$. **21.33.** 1 при $x = 3$, $z = -5$. **21.34.** *Вказівка*. Розгляньте вектори $\vec{m}(a; b; c)$, $\vec{n}(a_1; b_1; c_1)$. **21.35.** 660 см^2. **21.36.** $\arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

22.8. −3. **22.9.** (12; −21; −33). **22.11.** $x = -\frac{4}{7}$, $z = \frac{35}{4}$. **22.12.** $\overrightarrow{AB}\left(-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **22.13.** D (6; 0; 10). **22.14.** $\vec{b}\left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. **22.15.** $\vec{m}(5; -5; 10)$. **22.16.** 1) Ні; 2) так. **22.17.** $y = -9$, $z = 3$. **22.18.** $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **22.19.** $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} +$

$+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **22.20.** $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **22.21.** C_1 (−6; 4; 2). **22.22.** K (6; −7; 0). **22.25.** 12 см². **22.26.** 10 см. **22.27.** 2) $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **22.28.** $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DO}$. **22.29.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **22.30.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. **22.31.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **22.32.** $\overrightarrow{MK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AA_1}$. **22.33.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2 п. 22. **22.34.** *Вказівка*. Використовуючи ключову задачу 2 п. 22, отримуємо, що $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=3\overrightarrow{XM}$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC. Отже, $3\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}$. Звідси випливає, що точка X лежить на відрізку MD і ділить його у відношенні 3 : 1, рахуючи від точки D. **22.35.** *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MP}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ та покажіть, що $\overrightarrow{MK}\parallel\overrightarrow{MP}$. **22.36.** *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{PE}$ і $\overrightarrow{BK}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BD}$. **22.37.** *Вказівка*. Розгляньте систему координат з початком координат у точці B та осями, які містять ребра BA, BC і BB_1 куба. **22.38.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2 п. 22. **22.40.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 22.39. **22.41.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 22.39. **22.42.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 2 п. 22. **22.43.** 3 : 5. *Вказівка*. Нехай площина MNK перетинає ребро SA в точці F. Позначимо $SF : SA = k$. Нехай $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BS}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Покажіть, що $\overrightarrow{MN}=\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{7}{20}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$, $\overrightarrow{MF}=k\vec{a}+\left(\frac{3}{5}-k\right)\vec{b}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MF}$ компланарні, то за теоремою 22.3 існують такі числа x і y, що $\overrightarrow{MF}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MK}$. Тоді $k\vec{a}+\left(\frac{3}{5}-k\right)\vec{b}=x\left(\frac{4}{15}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+y\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{7}{20}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)$. Звідси $\left(\frac{y}{4}-k\right)\vec{a}+\left(\frac{4}{15}x+\frac{7}{20}y+k-\frac{3}{5}\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)\vec{c}=\vec{0}$. Оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, то, скориставшись наслідком з теореми 22.3, можна дійти висновку, що в останній рівності всі коефіцієнти при векторах дорівнюють нулю. **22.44.** 3 : 7. **22.45.** *Вказівка*. Застосовуючи теорему 22.3, покажіть, що вектори $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NF}$ і $\overrightarrow{SK}$ компланарні. **22.46.** 2 : 5. *Вказівка*. Нехай $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Тоді $\overrightarrow{BF}=x\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{CE}=y\overrightarrow{CK}$, де x і y — деякі числа. Покажіть, що $\overrightarrow{FE}=\frac{y}{2}\vec{a}-\frac{x}{2}\vec{b}+\left(-\frac{x}{2}-y+1\right)\vec{c}$ і $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{FE}$ і $\overrightarrow{AM}$ колінеарні, то $\overrightarrow{FE}=k\overrightarrow{AM}$. Звідси $\overrightarrow{FE}=-k\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$. Далі скористайтеся тим, що розклад вектора $\overrightarrow{FE}$ за базисом $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ є єдиним. **22.47.** 1 : 3. **22.48.** 8 см.

23.7. −19,5. **23.8.** −12. **23.11.** 4. **23.12.** −3. **23.13.** $\vec{a}$ і $\vec{c}$. **23.14.** 1. **23.15.** −1 або 2. **23.16.** 1) $-\frac{a^2}{2}$; 2) $-\frac{a^2}{4}$; 3) $-\frac{a^2}{4}$; 4) 0. **23.17.** 1) a^2; 2) $-2a^2$; 3) 0; 4) $-\frac{a^2}{2}$. **23.18.** 1) $-\frac{a^2}{2}$. *Вказівка*. Виразіть вектор $\overrightarrow{CM}$ через вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$; 2) 0. *Вказівка*. Виразіть вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектори $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DB}$. **23.19.** a^2. *Вказівка*. Виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$. **23.20.** $180° - \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **23.21.** $180° - \arccos\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **23.22.** 143. **23.23.** 70. **23.24.** 0,7. **23.25.** 60°. **23.26.** Гострокутним. **23.28.** D (0; 0; −5). **23.29.** D (0; 4; 0). **23.30.** 60°. **23.31.** 45°. **23.32.** 1) $\frac{3a^2}{4}$; 2) 0. **23.33.** $-\frac{3a^2}{2}$. *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CD_1}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$. **23.34.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. *Вказівка*. Перший спосіб. Розгляньте вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ та виразіть їх через вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BB_1}$. Другий спосіб. Розгляньте систему координат з початком координат у точці B, осями, які містять ребра BA, BC і BB_1 куба, та одиничними відрізками, що дорівнюють ребру куба. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ у цій системі координат. **23.35.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **23.38.** *Вказівка*. Скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 3 п. 23. **23.41.** $\sqrt{17}$ см. **23.42.** 8 см. *Вказівка*. За базисну трійку візьмемо вектори $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CD}$, тоді $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{NC} + x\overrightarrow{CD}$. Далі виразіть вектори $\overrightarrow{NK}$ і $\overrightarrow{BM}$ через базисні та знайдіть x, скориставшись перпендикулярністю цих векторів. **23.43.** 2 : 1. **23.44.** 1 см або $\sqrt{42}$ см. *Вказівка*. Розкладіть вектори $\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$ за базисом $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB_1})$. Складіть рівняння з невідомим $|\overrightarrow{BB_1}|$, виразивши скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CB_1}$ і $\overrightarrow{BD_1}$ двома способами. Візьміть до уваги, що кут між цими векторами дорівнює 45° або 135°. **23.45.** a або $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **23.46.** a або $a\sqrt{3}$. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})^2$. Візьміть до уваги, що кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$ дорівнює 60° або 120°. **23.47.** 60° або 45°. **23.48.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$, $\frac{\sqrt{26}}{26}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 2 п. 23. **23.49.** 45°, $\frac{\sqrt{6}}{3}$ см. **23.50.** $\arccos\frac{4}{5}$, $\frac{2a}{3}$. **23.51.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 22.39. **23.52.** *Вказівка*. Від вершини O тригранного кута відкладіть на його ребрах одиничні вектори

$\overrightarrow{OA}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{e_2}$ і $\overrightarrow{OC}=\vec{e_3}$. Далі скористайтеся очевидною нерівністю $\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}\right)^2 \geqslant 0$. **23.53.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 22.34. **23.54.** 80 см^2.

24.1. 1) $2x - y - 2z - 3 = 0$; 2) $3x + 2y + 3z - 13 = 0$. **24.2.** $2x - y - 3z = 0$. **24.3.** $4x + 3y - 6z - 61 = 0$. **24.4.** $y - 4 = 0$. **24.5.** $z + 3 = 0$. **24.6.** $5x - 5y - 2z + 1 = 0$. **24.7.** $-4{,}5$. **24.8.** 1) Так; 2) ні. **24.9.** $x + y - 5z - 50 = 0$. **24.10.** $\arccos\frac{\sqrt{21}}{14}$. **24.11.** 1) Так; 2) ні. **24.12.** 1) $x - 2y + z + 1 = 0$; 2) $x - 2y + z - 9 = 0$. **24.13.** $x + y - z - 6 = 0$. **24.14.** 1) $by + cz + d = 0$; 2) $ax + cz + d = 0$. **24.15.** $2x - 3z + 1 = 0$. *Вказівка.* Рівняння площини, паралельної осі y, має вигляд $ax + cz + d = 0$. Підставивши в це рівняння координати точок A і B, виразіть коефіцієнти a і c через коефіцієнт d. **24.16.** $y + 5z - 5 = 0$. **24.17.** $2\sqrt{14}$. *Вказівка.* Нехай точка B $(x_0; y_0; z_0)$ — основа перпендикуляра, опущеного з точки A на дану площину. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ колінеарний вектору $\vec{m}(1; 3; 2)$ та існує число k, відмінне від нуля, таке, що $\overrightarrow{AB}=k\vec{m}$. Виразіть координати точки B через коефіцієнт k і скористайтеся тим, що точка B належить даній площині. **24.18.** $\frac{\sqrt{30}}{2}$. **24.19.** $x - 5y + 8z - 15 = 0$. **24.20.** *Вказівка.* Розгляньте систему координат з початком координат у точці D. **24.21.** *Вказівка.* Розгляньте систему координат з початком координат у точці A та осями, які містять ребра AD, AB і AA_1, з одиничним відрізком, рівним ребру куба. Складіть рівняння площини AB_1D_1 у цій системі координат. **24.22.** $\frac{3}{2}$ см. *Вказівка.* Введіть систему координат з початком координат у точці A та знайдіть рівняння площини α. Потім знайдіть координати точки перетину прямої AA_1 і площини α. **24.23.** 4,5 см. **24.24.** 1 : 5. *Вказівка.* Введіть систему координат так, щоби початок координат збігався з точкою C, а осі абсцис і ординат належали прямим CA і CB відповідно. Тоді вісь аплікат буде паралельною прямій SA. **24.25.** $\frac{29}{24}$ см. **24.26.** $\frac{11\sqrt{170}}{170}$ см. **24.27.** $a\sqrt{2}$. *Вказівка.* Введіть систему координат з початком координат у точці A. **24.28.** $\frac{24}{5}$ см. *Вказівка.* Введіть систему координат так, щоби початок координат збігався із центром основи піраміди. **24.29.** $\arccos\frac{6}{7}$. **24.30.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$. *Вказівка.* Виберіть систему координат і знайдіть рівняння площини α, ураховуючи, що вектор нормалі цієї площини перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{B_1C}$. **24.31.** $\arccos\frac{4\sqrt{34}}{51}$. **24.32.** 13 см. **24.33.** 32 см.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ
НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *А. Ю. Вєнза*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 15,88.
Тираж 10 398 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003