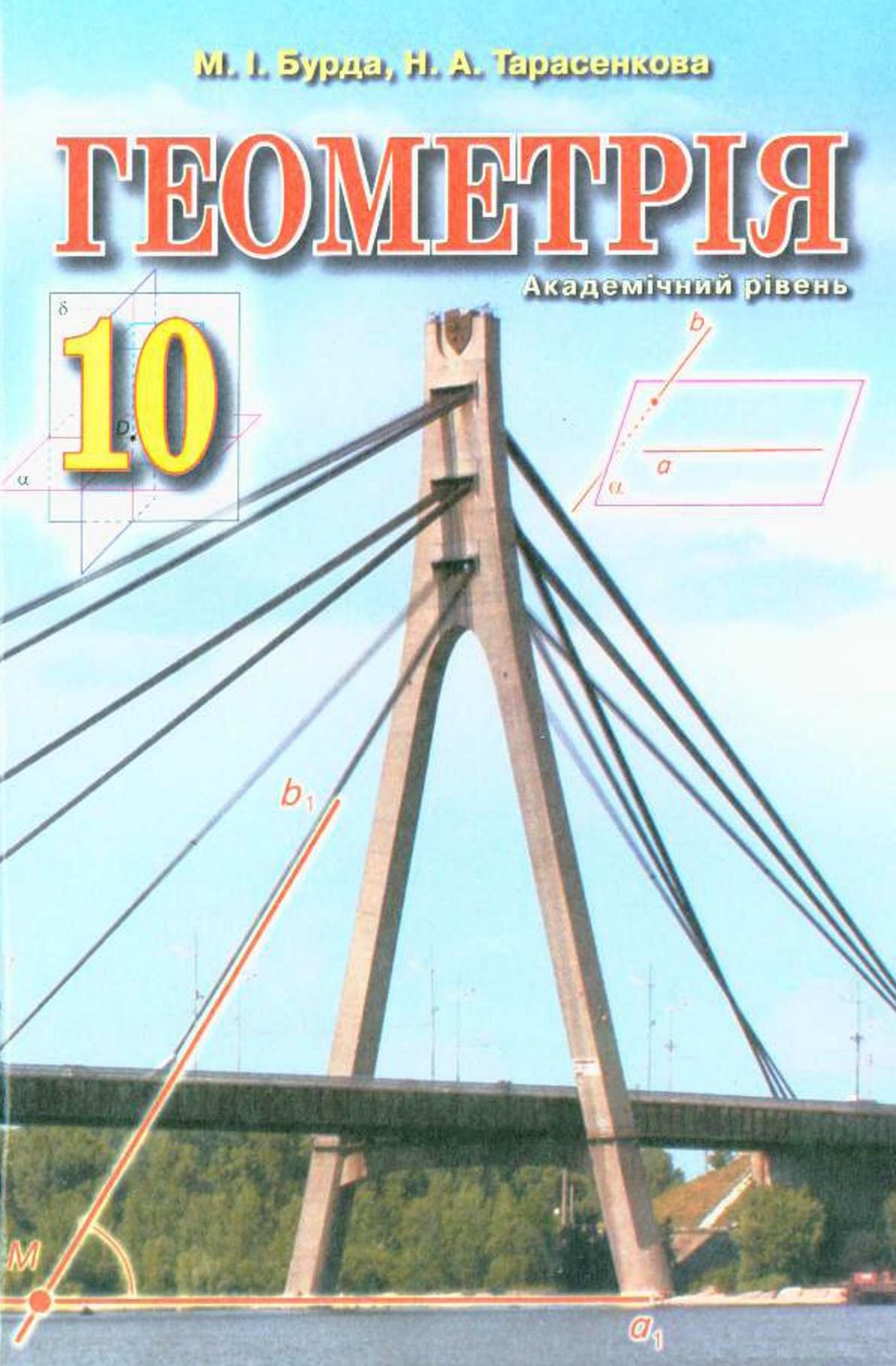
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

Академічний рівень

10



ББК 22.151я721
Б91

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 3 березня 2010 р., № 177)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив ***Інститут математики Національної академії наук України;***
психолого-педагогічну експертизу проводив ***Інститут педагогіки***
Національної академії педагогічних наук.
Експерти рукопису підручника:
Г. А. Губа — вчитель-методист ЗОШ І – ІІІ ступенів № 6, м. Ясинувата, Донецька область;
І. І. Длюба — методист Куликівського РМК, Чернігівська область;
С. І. Остапенко — вчитель-методист Володимирецького районного колегіуму, Рівненська область;
В. І. Тоточенко — доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу
Херсонського державного університету, кандидат педагогічних наук

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту,
розробник концепцій: дизайну, художнього оформлення;
Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА – автори тексту і методичного апарату;
Олена ПОПОВИЧ – редактор-організатор;
Андрій ВІКСЕНКО – макет, художнє оформлення;
Валентина МАКСИМОВСЬКА – організатор виробничого процесу;
Галина КУЗНЄЦОВА – економічний супровід проекту;
Роман КОСТЕНКО – маркетингові дослідження підручника;
Андрій КУЗНЕЦОВ – моніторинг апробації підручника

ISBN 978-966-7090-72-2

ЗМІСТ

Дорогі учні!

Ви розпочинаєте вивчення стереометрії – розділу геометрії про властивості фігур у просторі. У 9 класі ви ознайомилися з деякими властивостями таких фігур. Знаєте, яке взаємне розміщення у просторі прямих і площин, як знаходити поверхні та об'єми окремих видів многогранників і тіл обертання.

Тепер ви розширите і поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтесь про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про властивості паралельних та перпендикулярних прямої і площини, двох площин та про їх ознаки, як обчислювати у просторі відстані й кути. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці. Ви переконаєтесь, що знання і вміння зі стереометрії потрібні багатьом спеціалістам – архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам та ін.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на три розділи, а розділи – на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, обведений рамкою. Це – найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності.

Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використано спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Прочитайте

Поміркуйте

Запам'ятайте

Як записати

Як діяти

Типова задача

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

У розділі повторите:

- основні поняття планіметрії;
- аксіоми – твердження, істинність яких приймають без доведень;
- основні властивості геометричних фігур та їх ознаки;
- методи розв'язування геометричних задач

ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Ви знаєте, що в планіметрії *основними фігурами* є точка і пряма, а *основними відношеннями* – «належати», «лежати між», «накладання». Вони вводяться без означень. Використовуючи ці поняття, ми даємо означення іншим фігурам (променю, відрізку, куту тощо) та відношенням (рівності, подібності, паралельності тощо). Так само, кілька перших тверджень приймають як істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. Всі інші твердження доводять, спираючись на аксіоми, означення понять та раніше доведені теореми.

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

1. Існують точки, що лежать на прямій, і точки, що їй не належать.

2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

3. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

4. Будь-яка фігура F накладанням суміщається сама із собою.

5. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2, то і фігура F_2 накладанням суміщається з фігурою F_1.

6. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2, а фігура F_2 – з фігурою F_3, то фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_3.

→ 7. $\dfrac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$ кожного $\dfrac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$ більша за нуль.

→ 8. $\dfrac{\text{На промені від його початку}}{\text{Від променя по один бік від нього}}$ можна відкласти тільки один $\dfrac{\text{відрізок даної довжини}}{\text{кут даної градусної міри}}$.

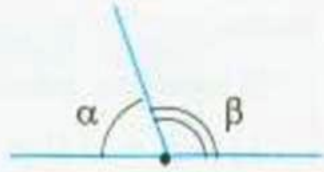
→ 9. $\dfrac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$ дорівнює сумі $\dfrac{\text{довжина відрізків}}{\text{градусних мір кутів}}$, на які він розбивається $\dfrac{\text{будь-якою його точкою}}{\text{будь-яким променем, що проходить між сторонами кута}}$.

→ 10. *(Аксіома паралельних прямих).* Через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Для спрощення викладу планіметрії деякі аксіоми ми не формулювали у підручниках з геометрії для 7 – 9 класів, але ними користувалися.

КУТИ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

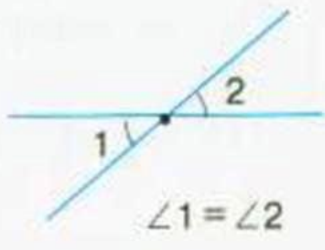
Два кути називаються *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями (мал. 1). Сума суміжних кутів дорівнює 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

Мал. 1

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого (мал. 2). Вертикальні кути рівні.



$\angle 1 = \angle 2$

Мал. 2

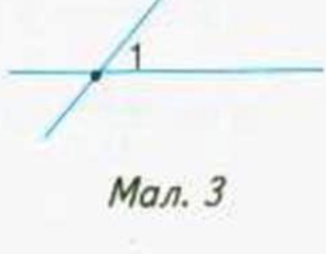
Властивості паралельних прямих. Якщо дві паралельні прямі перетинає третя (мал. 3), то:

1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°:

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$;

2) внутрішні різносторонні кути рівні: $\angle 1 = \angle 3$;

3) відповідні кути рівні: $\angle 1 = \angle 4$.

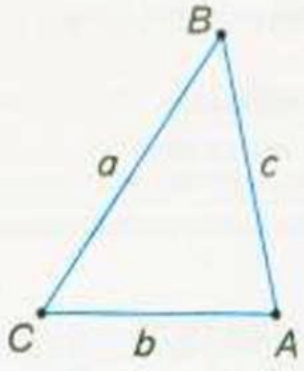


Мал. 3

Твердження, обернені до тверджень 1) – 3), – це *ознаки паралельності прямих*. Сформулюйте їх самостійно.

ТРИКУТНИКИ. КОЛО

Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на гострокутні, тупокутні й прямокутні, а залежно від довжин сторін – на різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні.



Мал. 4

Мал. 5

У будь-якому трикутнику ABC (мал. 4):

1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (теорема про суму кутів трикутника);

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (теорема косинусів);

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів), де R – радіус описаного кола.

У прямокутному трикутнику ABC (мал. 5):

1) $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

2) $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора);

3) $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$.

Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.

Площу трикутника можна обчислити за формулами:

1) $S = \frac{1}{2} a h_a$, де h_a – висота, проведена до сторони a;

2) $S = \frac{1}{2} bc \sin A$;

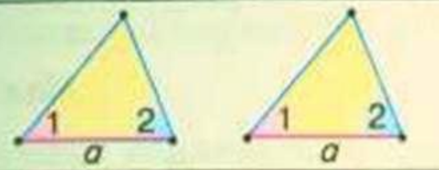
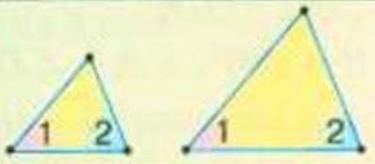
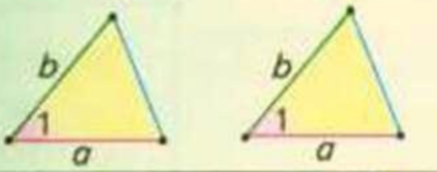
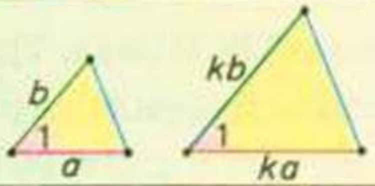
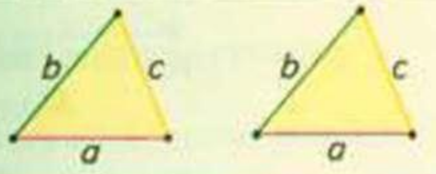
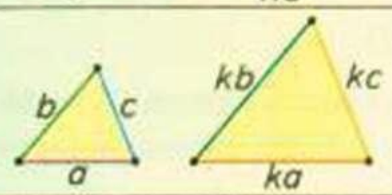
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр (формула Герона);

4) $S = pr$, де p – півпериметр, r – радіус вписаного кола;

5) $S = \frac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола.

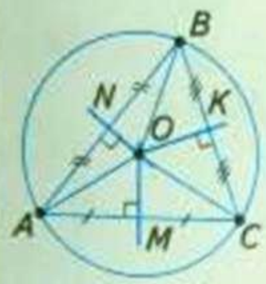
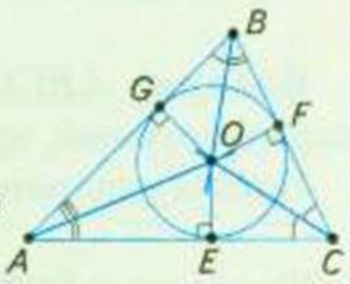
У таблиці 1 подано ознаки рівності й ознаки подібності трикутників. Сформулюйте їх попарно. У чому їх відмінність?

Таблиця 1

Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
	
	
	

Спираючись на таблицю 2, сформулюйте означення вписаних і описаних трикутників та їх властивості.

Таблиця 2

ВПИСАНІ ТРИКУТНИКИ	ОПИСАНІ ТРИКУТНИКИ
	

Центр *O* кола — точка перетину

↑ *серединних перпендикулярів*	↑ *бісектрис кутів*
$R = OA = OB = OC$	$r = OE = OF = OG$
↓	↓

$\dfrac{\text{Навколо будь-якого трикутника}}{\text{У будь-який трикутник}}$ можна $\dfrac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

Довжину кола і площу круга можна обчислити за формулами:

$C = 2\pi R = \pi D$, $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$, де R – радіус кола, D – його діаметр.

ЧОТИРИКУТНИКИ

Спираючись на малюнки та скорочені записи, сформулюйте означення й властивості відомих вам чотирикутників.

Паралелограм *ABCD* (мал. 6):

1) $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$;

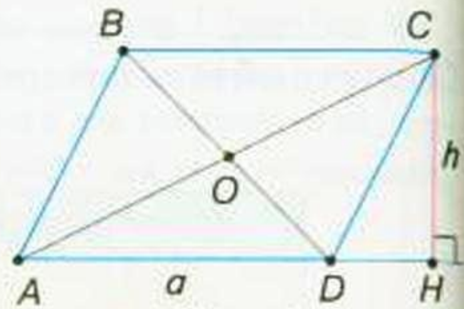
2) $AD = BC$, $AB = DC$;

3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

4) $AO = OC$, $BO = OD$;

5) $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$.

Площа паралелограма: $S = ah$.



Мал. 6

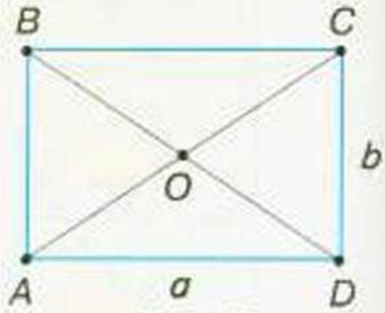
Прямокутник *ABCD* (мал. 7):

1) усі властивості паралелограма;

2) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;

3) $AC = BD$.

Площа прямокутника: $S = ab$.



Мал. 7

Ромб *ABCD* (мал. 8):

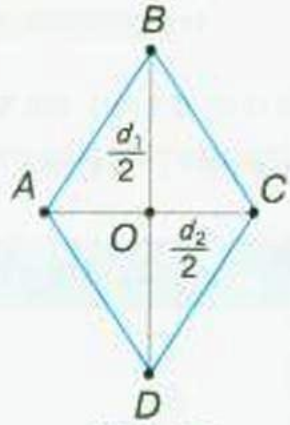
1) усі властивості паралелограма;

2) $AB = BC = CD = DA$;

3) $AC \perp BD$;

4) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$.

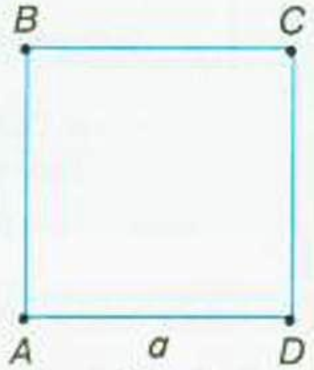
Площа ромба: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



Мал. 8

Квадрат *ABCD* (мал. 9): усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата: $S = a^2$.



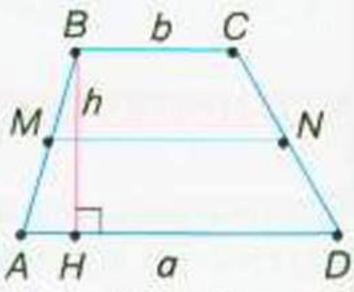
Мал. 9

Трапеція *ABCD* (мал. 10):

1) $AD \parallel BC$;

2) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{AD + BC}{2}$, де MN – середня лінія.

Площа трапеції: $S = \frac{(a + b)h}{2}$.



Мал. 10

Властивості вписаних і описаних чотирикутників:

1) у вписаному чотирикутнику $MNKP$ (мал. 11): $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle N + \angle K = 180°$;

2) в описаному чотирикутнику $ABCD$ (мал. 11): $AB + CD = AD + BC$.

МНОГОКУТНИКИ

Вписані й описані многокутники

Пригадайте означення вписаного многокутника та означення описаного многокутника. Порівняйте ці означення з наведеними у підручнику.

Многокутник називається $\dfrac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$,

якщо всі його $\dfrac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$.

Правильні многокутники

Спираючись на малюнок 12 та скорочені записи, сформулюйте означення та властивості правильних n-кутників.

1) $AB = BC = ... = AF$ і $\angle A = \angle B = ... = \angle F$;

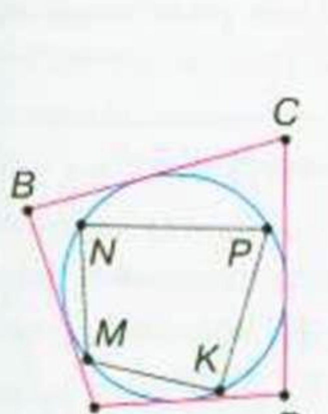
2) точка O є центром описаного кола і вписаного кола;

3) $\angle AOF = \dfrac{360^\circ}{n}$;

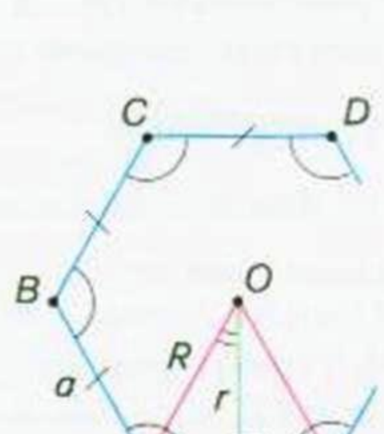
4) $\angle A + \angle B + ... + \angle F = 180^\circ\,(n-2)$;

5) $r = \dfrac{AK}{\operatorname{tg}\angle AOK} = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$;

6) $R = \dfrac{AK}{\sin\angle AOK} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.



Мал. 11



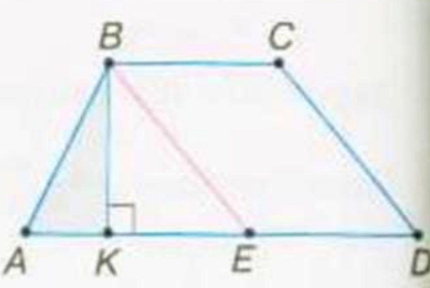
Мал. 12

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

1. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДОПОМІЖНИХ ТРИКУТНИКІВ.

Трикутник або кілька нерівних трикутників

Задача. Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють a і c ($a > c$), а прилеглі до основи a кути дорівнюють α і β.



Мал. 13

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AD = a$, $BC = c$ і $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$ (мал. 13). Проведемо пряму $BE \parallel CD$. У $\triangle ABE$ $AE = a - c$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle BEA = \angle CDA = \beta$.

За теоремою синусів знаходимо AB: $\dfrac{AB}{\sin\beta} = \dfrac{AE}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}$,

звідки $\quad AB = \dfrac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. $\quad$ (1)

Проведемо висоту BK трапеції. $\triangle ABK$ — прямокутний.

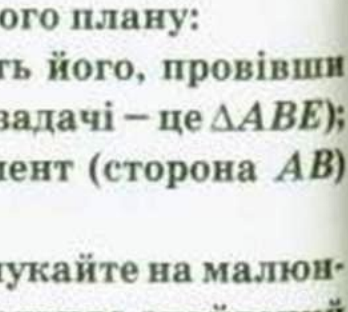
Тоді $\quad BK = AB \cdot \sin\alpha$. $\quad$ (2)

Підставивши рівність (1) у (2), дістанемо: $BK = \dfrac{(a-c)\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Розв'язуючи геометричні задачі, дотримуйтесь такого плану:
1) відшукайте на малюнку трикутник (або утворіть його, провівши потрібні відрізки), який можна розв'язати (у нашій задачі – це $\triangle ABE$);
2) задача буде розв'язаною, якщо знайдений елемент (сторона AB) трикутника задовольняє умову задачі;
3) якщо ні, то, враховуючи знайдений елемент, відшукайте на малюнку другий трикутник ($\triangle ABK$). Якщо задачу задовольняє знайдений елемент другого трикутника (висота BK), – вона розв'язана. В іншому випадку розгляньте третій трикутник і т. д. доти, поки не дістанете такий трикутник, сторона чи кут якого дає розв'язок задачі.

Рівні трикутники

Задача. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.



Мал. 14

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 14). У трикутників ABD і DCA: AD — спільна сторона, $AB = CD$ за означенням рівнобічної трапеції, $\angle A = \angle D$ за властивістю рівнобічної трапеції. Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників випливає, що $AC = BD$.

Пам'ятайте:

– щоб довести рівність двох відрізків (кутів):

1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути);

2) доведіть, що ці трикутники рівні;

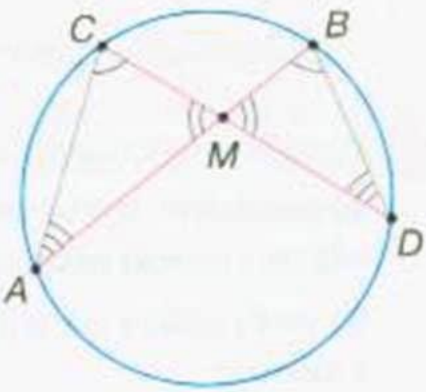
3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

– якщо в задачі треба знайти певний відрізок (кут), то його корисно розглянути як сторону (кут) одного з двох рівних трикутників.

Подібні трикутники

Подібні трикутники використовуються під час доведення рівностей, які містять добутки довжин двох пар відрізків.

Задача. Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Доведіть.



Мал. 15

Розв'язання. Проведемо аналіз (мал. 15). Припустимо, що рівність, яку треба довести, справджується. Запишемо її у вигляді пропорції $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. З пропорції випливає, що трикутники із сторонами AM і CM, DM і BM мають бути подібними. Справді, у них $\angle AMC = \angle DMB$ як вертикальні, $\angle ACM = \angle DBM$ як вписані, що спираються на дугу AD. Отже, $\Delta AMC \backsim \Delta DMB$ за двома кутами.

Міркуючи у зворотному напрямі, дістанемо, що $\Delta AMC \backsim \Delta DMB$. З подібності цих трикутників випливає пропорційність їх сторін: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$. Звідси $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Пам'ятайте:

– щоб довести рівність добутків двох пар відрізків:

1) припустіть правильність рівності, яку доводите;

2) запишіть її у вигляді пропорції;

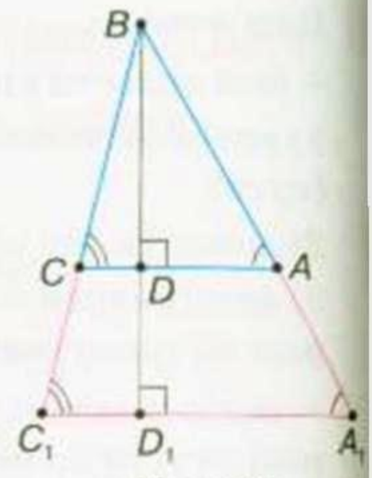
3) відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, довжини сторін яких є членами утвореної пропорції;

4) обґрунтуйте подібність цих трикутників.

– якщо в задачі треба знайти певний відрізок, то його корисно розглянути як сторону одного з двох подібних трикутників і скласти відповідну пропорцію.

2. МЕТОД ПОДІБНОСТІ

Метод подібності часто застосовують у розв'язуванні задач на побудову.



Мал. 16

Задача. Побудуйте трикутник за двома кутами A і C та висотою h, проведеною з вершини кута B.

Розв'язання. Знаючи кути A і C, спочатку будуємо який-небудь трикутник A_1BC_1, подібний шуканому, взявши довільно відрізок A_1C_1 (мал. 16). Потім будуємо висоту BD_1 цього трикутника. На промені BD_1 відкладаємо відрізок $BD = h$ і через точку D проводимо $AC \parallel A_1C_1$. ΔABC – шуканий.

Справді, $AC \parallel A_1C_1$, тому $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ і, отже, два кути трикутника ABC дорівнюють даним кутам. За побудовою, висота $BD = h$. Таким чином, побудований трикутник ABC задовольняє всі вимоги задачі.

Розв'язуючи задачі на побудову методом подібності:

1) виділіть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника (відношення відрізків і кути);

2) побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;

3) побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри (довжини відрізків).

3. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

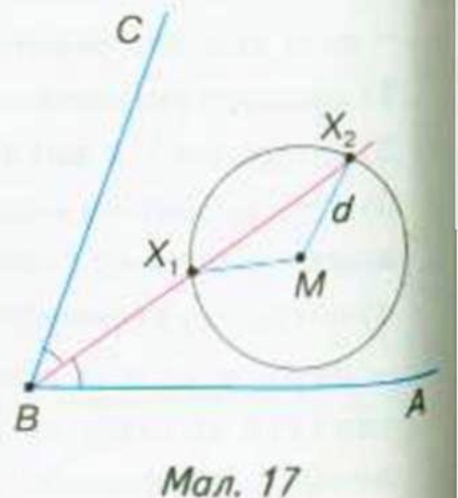
Задача. Побудуйте точку в середині кута ABC, яка рівновіддалена від його сторін і розміщується на відстані d від точки M.

Розв'язання.

Аналіз (мал. 17). Шукана точка X має задовольняти дві вимоги:

1) бути рівновіддаленою від сторін $\angle ABC$;

2) лежати на відстані d від точки M.



Мал. 17

Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є бісектриса $\angle ABC$, а геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром M і радіусом d. Шукана точка X лежить на перетині цих геометричних місць.

Побудова. Будуємо: бісектрису $\angle ABC$; коло з центром M і радіусом d; X – точку перетину бісектриси і кола. Таких точок може бути або дві – X_1 і X_2 (мал. 17), або одна, або жодної.

Розв'язуючи задачі методом геометричних місць:

1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;

2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;

3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють: першу вимогу; другу вимогу;

4) зробіть висновок: шукана точка – точка перетину знайдених геометричних місць.

4. МЕТОД КООРДИНАТ

Розв'язуючи задачу методом координат, дану фігуру слід розміщувати відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювали нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника $ABCD$ доцільно взяти такі: $A\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ b)$, $C\ (a;\ b)$, $D\ (a;\ 0)$.

Задача. Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він – прямокутник.

Розв'язання. *Перший крок.* Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати: $A\ (0;\ 0)$, $B\ (b;\ c)$, $C\ (a+b;\ c)$, $D\ (a;\ 0)$ (мал. 18).

За умовою $AC = BD$. Подаємо відстані між точками A і C, B і D через їх координати:

$$\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2},$$

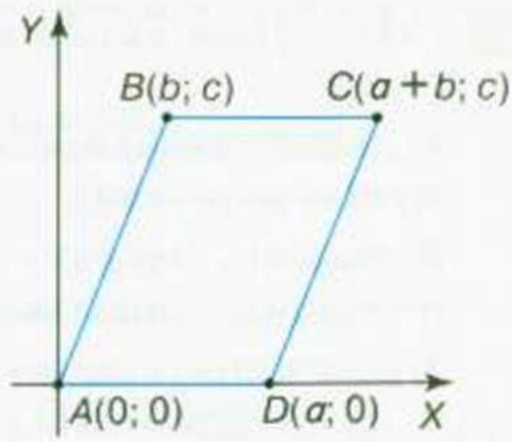
$$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2.$$

Другий крок. Перетворюємо одержану рівність:

$$a^2+2ab+b^2+c^2=a^2-2ab+b^2+c^2,$$

звідси $4ab = 0$.

Третій крок. З останньої рівності випливає: оскільки $a > 0$, то $b = 0$. Це означає, що точка $B(b;\ c)$ лежить на осі OY. Тому кут BAD прямий, а звідси паралелограм $ABCD$ – прямокутник.



Мал. 18

Розв'язуючи задачу координатним методом, виконайте три кроки:

1) запишіть геометричну задачу мовою координат;

2) перетворіть алгебраїчний вираз;

3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

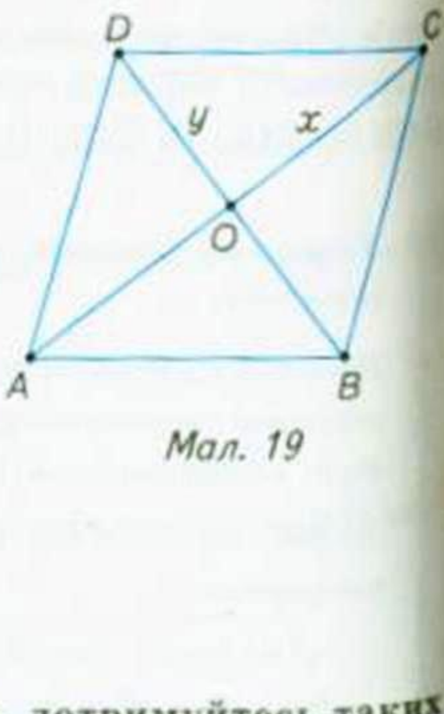
5. АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД

Задача. Периметр ромба дорівнює $2p$, сума його діагоналей m. Знайдіть площу ромба.

Розв'язання. Позначимо діагоналі ромба через x і y (мал. 19). Тоді, за умовою задачі, матимемо: $x + y = m$.

З прямокутного трикутника AOD: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, оскільки сторона ромба дорівнює одній четвертій його периметра, $a = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$. Помноживши обидві частини другого рівняння на 4, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^2 + y^2 = p^2. \end{cases}$$



Мал. 19

З цієї системи рівнянь визначимо добуток xy. Для цього піднесемо перше рівняння до квадрата і віднімемо від нього друге рівняння, матимемо: $2xy = m^2 - p^2$, звідки $xy = \frac{m^2 - p^2}{2}$.

Площа ромба дорівнює половині добутку діагоналей, отже, $S = \frac{1}{2}xy = \frac{m^2 - p^2}{4}$.

Розв'язуючи задачі алгебраїчним методом, дотримуйтесь таких етапів:

1) введіть позначення (буквами x, y, z ... найчастіше позначаємо шукані величини);

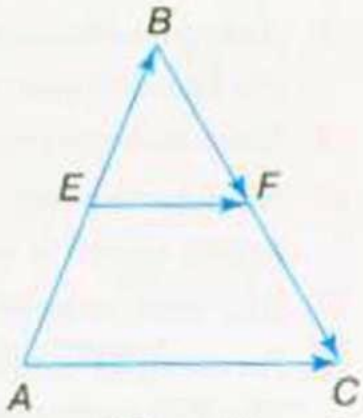
2) складіть рівняння або систему рівнянь, використовуючи відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами;

3) розв'яжіть складене рівняння або систему рівнянь. Якщо є потреба, то дослідіть знайдені розв'язки.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

МЕТОД ВЕКТОРІВ

Задача. Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна стороні й дорівнює її половині.



Мал. 20

Розв'язання. Нехай EF — середня лінія трикутника ABC (мал. 20). Доведемо, що $EF \parallel AC$ і $EF = \frac{1}{2}AC$.

Перший крок. Сформулюємо вимогу задачі мовою векторів: позначимо на малюнку вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{EF}$.

Тоді вимогу задачі запишемо так: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Другий крок. За правилом трикутника, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$.

Перетворимо цю векторну рівність, враховуючи, що

$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Дістанемо:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Третій крок. З останньої векторної рівності $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ випливає:

1) вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні і, отже, відрізки EF і AC паралельні;

2) $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, або $EF = \frac{1}{2}AC$.

Щоб застосувати вектори до розв'язування задачі, виконайте три кроки:

1) сформулюйте задачу мовою векторів. Для цього спочатку розгляньте деякі дані у задачі відрізки як вектори. Потім складіть векторну рівність;

2) перетворіть векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;

3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

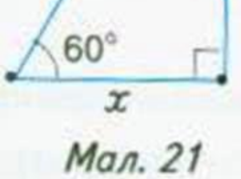
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть основні фігури та основні відношення в планіметрії.
2. Сформулюйте аксіоми планіметрії.
3. Які кути називаються суміжними; вертикальними? Які їх властивості?
4. Сформулюйте властивості й ознаки паралельних прямих.

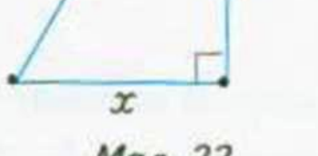
5. Назвіть основні співвідношення між сторонами і кутами довільного трикутника; прямокутного трикутника.
6. За якими формулами можна обчислити площу трикутника?
7. Які є ознаки рівності трикутників? А подібності?
8. Дайте означення паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції. Які їх властивості?
9. Який многокутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
10. Які властивості трикутника, вписаного у коло, і трикутника, описаного навколо кола? А чотирикутника?
11. Що таке правильний многокутник та які його властивості?
12. Як використовують під час розв'язування задач допоміжні трикутники (один або кілька нерівних трикутників, рівні трикутники, подібні трикутники)?
13. У чому полягає суть методу подібності? Методу геометричних місць?
14. Назвіть кроки розв'язування задач методом координат.
15. Поясніть суть етапів алгебраїчного методу розв'язування задач.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

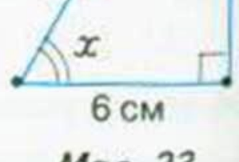
1'. За даними на малюнках 21 — 23, знайдіть x і y.



Мал. 21

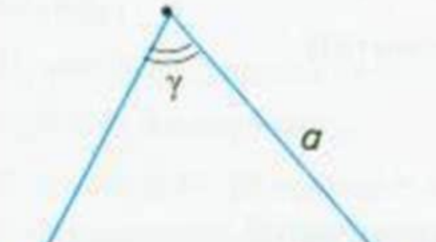


Мал. 22

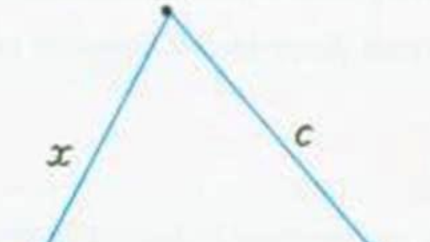


Мал. 23

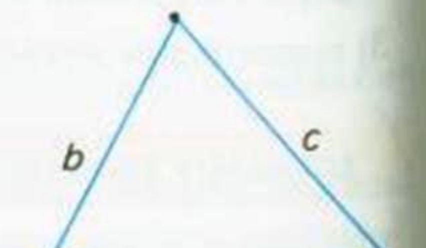
2'. За даними, наведеним на малюнках 24 — 26, запишіть формули для обчислення елемента x трикутника.



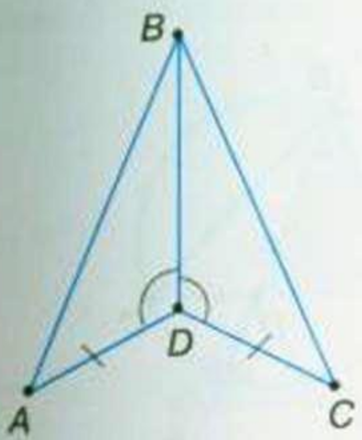
Мал. 24



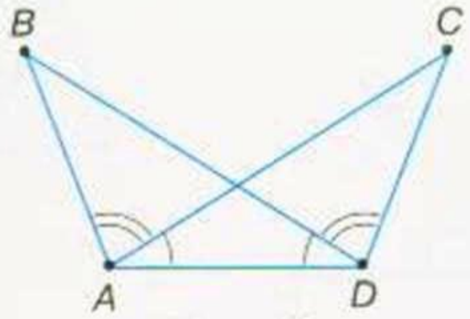
Мал. 25



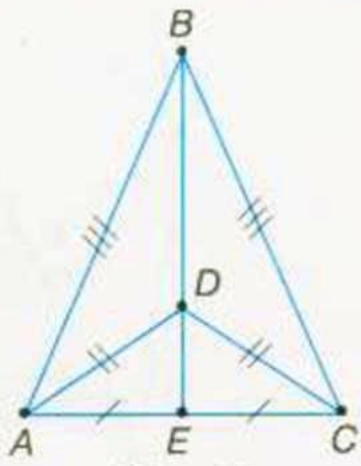
Мал. 26



Мал. 27



Мал. 28



Мал. 29

Розв'язуючи задачі 3 – 19, використайте допоміжні трикутники.

3'. Знайдіть на малюнках 27 – 29 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

4'. Сторони одного трикутника дорівнюють a, b, і c. У подібного трикутника найменша сторона дорівнює d. Знайдіть його сторони, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см, $c = 12$ см, $d = 18$ см;
2) $a = 13$ см, $b = 7$ см, $c = 15$ см, $d = 14$ см;
3) $a = 9$ см, $b = 6$ см, $c = 5$ см, $d = 10$ см.

5'. Знайдіть кут між діагоналями і більшою стороною прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 5 см і 12 см; 2) 6 см і 8 см; 3) 8 см і 15 см.

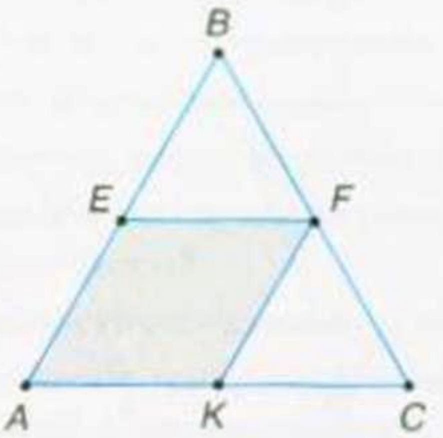
6'. У паралелограма діагональ d, сторона a, а кут між ними α. Знайдіть невідомі діагональ, сторону і кути паралелограма, якщо:
1) $d = 10$ см, $a = 6$ см, $\alpha = 20°$;
2) $d = 12$ см, $a = 5$ см, $\alpha = 35°$;
3) $d = a = 5$ см, $\alpha = 32°$.

7'. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Знайдіть: 1) відрізок BC, якщо $AD = 7$ см;
2) кут ABC, якщо $\angle BAD = 72°$.

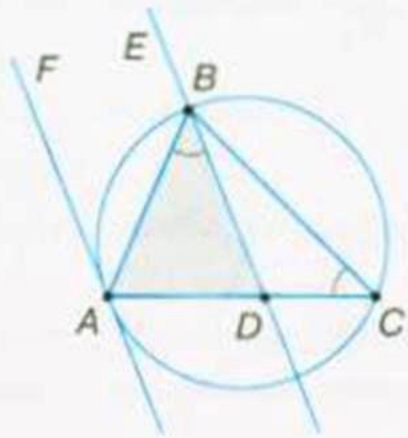
8'. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b, а бічна сторона – a. У подібного трикутника основа дорівнює c. Знайдіть його периметр, якщо:
1) $a = 18$ см, $b = 12$ см, $c = 6$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см;
3) $a = 25$ см, $b = 14$ см, $c = 28$ см.

9. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють a і b. Знайдіть периметр трапеції, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 9$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 4$ см.

10. Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.



Мал. 30



Мал. 31

11. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл, а менша його діагональ дорівнює 12 см.
Знайдіть:
1) кути ромба;
2) периметр ромба.

12. Через точку O перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD у точках M і N.
1) Доведіть, що $OM = ON$;
2) знайдіть сторони AD і BC паралелограма, якщо $BM = 4$ см, $AN = 6$ см.

13. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику:
1) бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні;
2) медіани, проведені з цих самих вершин, також рівні.

14. У рівносторонній трикутник вписано ромб, який має з ним спільний кут (мал. 30).
1) Доведіть, що сторона ромба дорівнює половині сторони трикутника;
2) знайдіть периметр ромба, якщо периметр трикутника дорівнює 18 см.

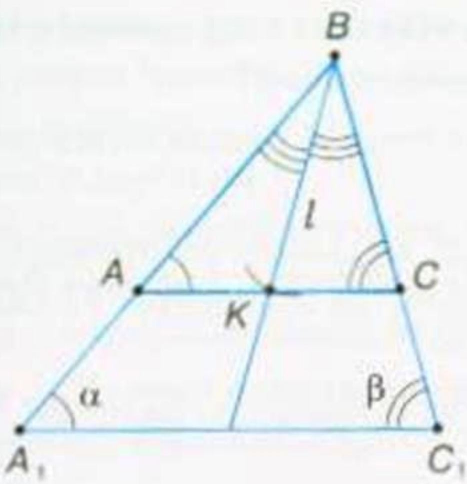
15. Якщо з точки M поза колом проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A, B, C і D, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.
Доведіть.

16. Якщо з точки M поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках A і B, та дотичну, що дотикається до кола в точці C, то $CM^2 = AM \cdot BM$.
Доведіть.

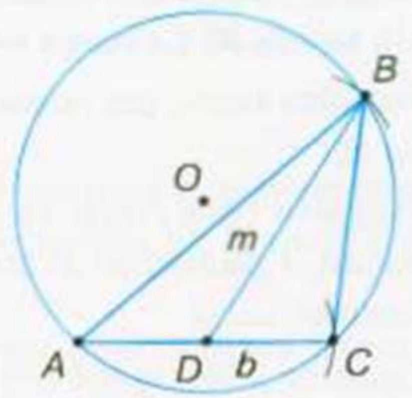
17. Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проекціями її бічних сторін на основу.

18*. Доведіть, що медіана трикутника ABC, проведена з вершини A, менша від півсуми сторін AB і AC.

19*. Трикутник ABC вписаний у коло (мал. 31). Через вершину A проведено дотичну до кола, через B — пряму, паралельну дотичній і яка перетинає сторону AC чи її продовження в точці D. Доведіть, що $AB^2 = AC \cdot AD$.



Мал. 32



Мал. 33

Розв'яжіть задачі 20 – 26 методом подібності.

20'. Побудуйте відрізок, який є середнім пропорційним між двома відрізками довжиною:

1) 9 см і 1 см;

2) 2 см і 8 см;

3) 4 см і 4 см.

21°. Побудуйте трикутник за такими даними:

1) $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$, $l_c = 4$ см;

2) $\angle A = 50°$, $\angle C = 80°$, $h_b = 3$ см;

3) $\angle B = 40°$, $\angle C = 75°$, $l_a = 5$ см.

22. Побудуйте трикутник за двома кутами α і β та бісектрисою l третього кута. За малюнком 32 складіть план побудови.

23. Побудуйте трикутник за двома кутами і медіаною, проведеною з вершини третього кута.

24. Побудуйте трикутник за кутом, відношенням сторін цього кута і проведеною до третьої сторони:

1) медіаною;

2) висотою.

25. Побудуйте прямокутний трикутник:

1) за відношенням катетів і гіпотенузою;

2) за відношенням катета до гіпотенузи і другим катетом.

26*. Побудуйте паралелограм за відношенням діагоналей, кутом між діагоналями і стороною.

Розв'яжіть задачі 27 – 33 методом геометричних місць.

27'. На прямій a, яка перетинає сторони даного кута A, знайдіть точку, рівновіддалену від його сторін.

28*. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін кута ABC і точок M і K.

29. **Знайдіть точку, яка знаходиться на відстані *n* від прямої *a* і на відстані *m* від точки *M*. Скільки може бути таких точок?**

30. Побудуйте коло, що проходить через точку *A* і дотикається до прямої *a* в точці *B*.

31. Побудуйте трикутник за стороною *b*, медіаною *m*, проведеною до цієї сторони, і радіусом *R* описаного кола. За малюнком 33 складіть план побудови.

32. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою *a* і радіусом *R* описаного кола.

33*. Побудуйте трикутник за стороною *a*, проведеною до неї медіаною *m* та висотою *h*, проведеною до другої сторони.

Розв'яжіть задачі 34 – 38 методом координат.

34'. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в точках:
1) $A(4; -2)$, $B(-2; 6)$;
2) $A(4; -2)$, $B(1; 2)$;
3) $O(0; 0)$, $D(5; 12)$.

35'. *CH* – висота рівнобедреного трикутника *ABC*, проведена до основи *AB*. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони, якщо:
1) $AB = 12$ см, $CH = 4$ см;
2) $AB = 4$ см, $CH = 6$ см.

36. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

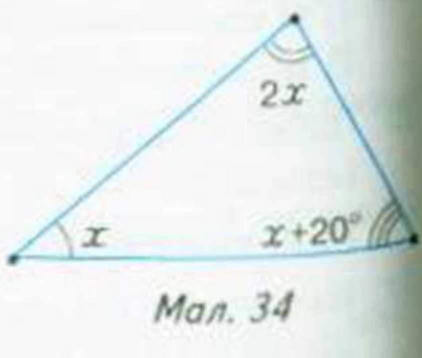
37. Якщо чотирикутник *ABCD* – прямокутник, то для будь-якої точки *M* площини справджується рівність: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
Доведіть.

38. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

39*. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Розв'яжіть задачі 40 – 45 алгебраїчним методом.

40'. За даними, наведеними на малюнку 34, знайдіть кути трикутника.



Мал. 34

41*. Одна сторона трикутника удвічі більша за другу, а третя сторона дорівнює *a*. Периметр трикутника дорівнює *P*.
Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо:
1) $a = 5$ см, $P = 35$ см;
2) $a = 7$ см, $P = 43$ см;
3) $a = 8$ см, $P = 29$ см.

42. Сторони прямокутника відносяться, як $m : n$. Складіть формули для знаходження сторін прямокутника, якщо:
1) площа дорівнює S;
2) периметр дорівнює P.

43. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша від третьої, а четверта сторона – в три рази більша за другу.

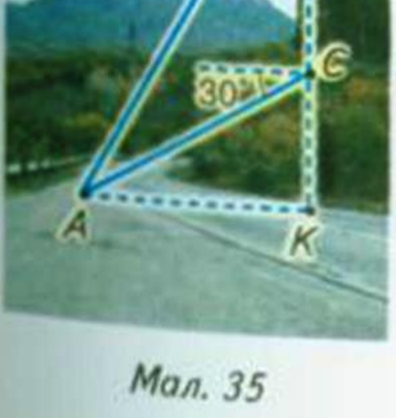
44. З точки до прямої проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5.
Знайдіть:
1) проекції похилих;
2) відстань від точки до прямої.

45*. Сума діагоналей ромба дорівнює m, а його площа S.
Знайдіть діагоналі ромба, якщо:
1) $m = 10$ см, $S = 8$ см^2;
2) $m = 26$ см, $S = 72$ см^2.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

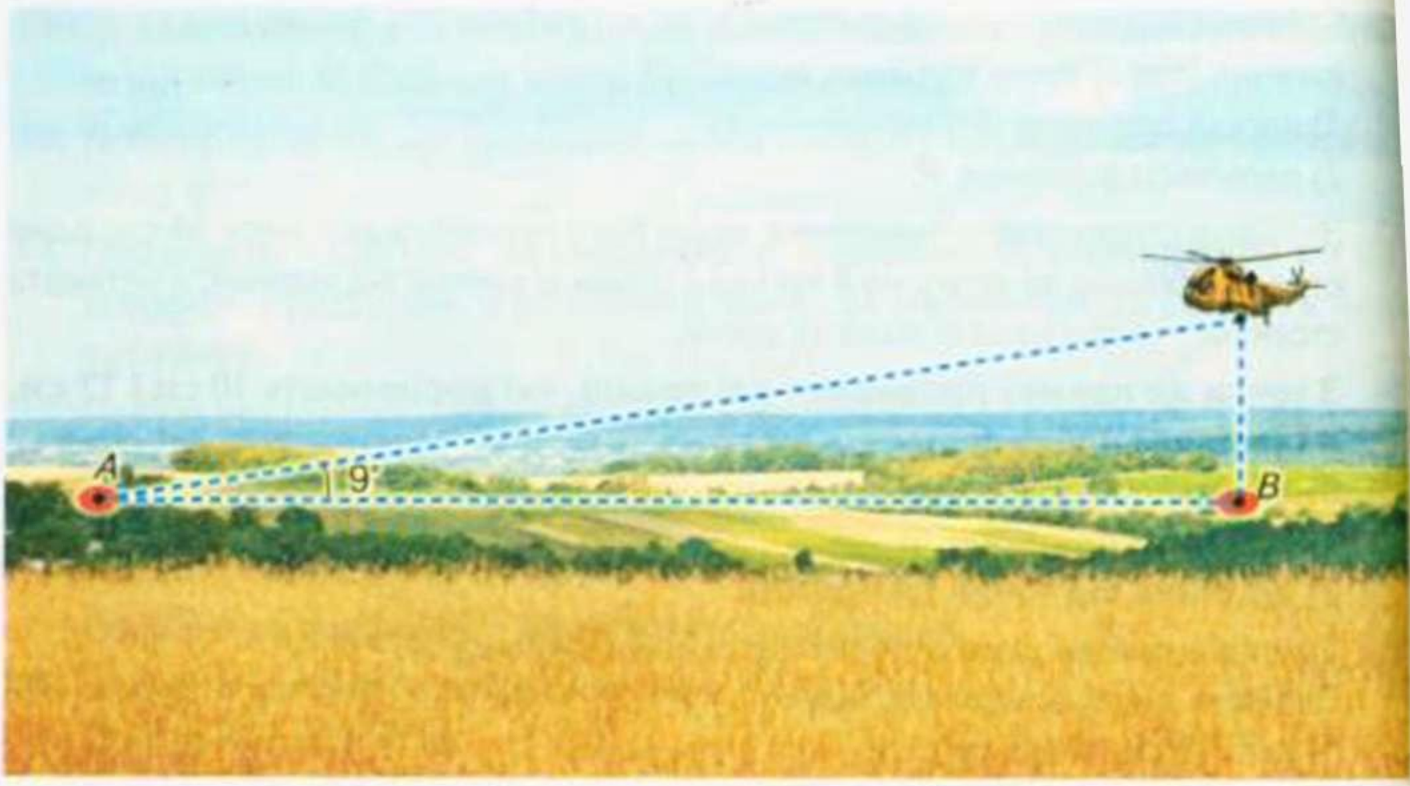
46. На горі знаходиться башта висотою 70 м (мал. 35). Деякий предмет (точка A) на підошві гори видно з вершини башти (точка B) під кутом 60° до горизонту, а з її основи (точка C) – під кутом 30° до горизонту.
Знайдіть висоту гори.

47. На малюнку 36 показано, як можна виміряти висоту дерева, користуючись віхою з планкою.
Поясніть вимірювання.



Мал. 35

Мал. 36



Мал. 37

48. Спостерігачам, які знаходяться у пункті *A*, повідомили, що вертоліт знаходиться над об'єктом *B* на висоті 500 м (мал. 37). Вертоліт видно з пункту *A* під кутом 9°. Знайдіть відстань від пункту *A* до об'єкта *B*.

49. Основа щогли недоступна (мал. 38). Знайдіть висоту щогли, якщо $AB = 10$ м, $\alpha = 45°$, $\beta = 50°$ і висота *h* приладу, яким вимірювали кути, дорівнює 1,5 м.

Мал. 38

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

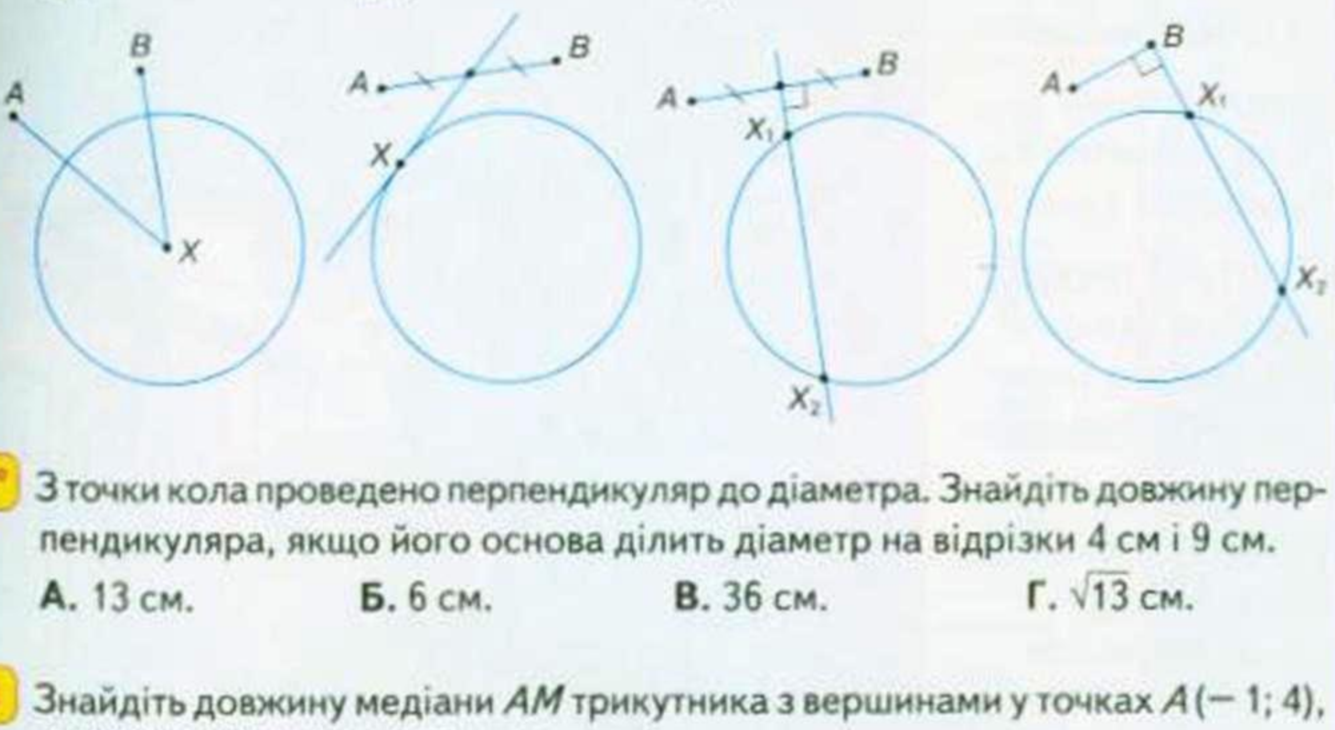
Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. З рівності яких трикутників випливає, що $BC = AD$?

А. $\triangle BOC$ і $\triangle BOD$. **Б.** $\triangle BOC$ і $\triangle AOC$. **В.** $\triangle ABD$ і $\triangle ACD$. **Г.** $\triangle BOC$ і $\triangle AOD$.

2° На даному колі потрібно знайти точку, рівновіддалену від точок A і B. Яка з побудов правильна?

А. **Б.** **В.** **Г.**



3° З точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо його основа ділить діаметр на відрізки 4 см і 9 см.

А. 13 см. **Б.** 6 см. **В.** 36 см. **Г.** $\sqrt{13}$ см.

4 Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами у точках $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(2; -3)$.

А. 3. **Б.** 5. **В.** $\sqrt{17}$. **Г.** $3\sqrt{2}$ см.

5* У прямокутній трапеції $ABCD$ ($\angle A = 90°$) основи AD і BC відповідно дорівнюють 10 см і 3 см, а висота дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від середини більшої основи до вершини C.

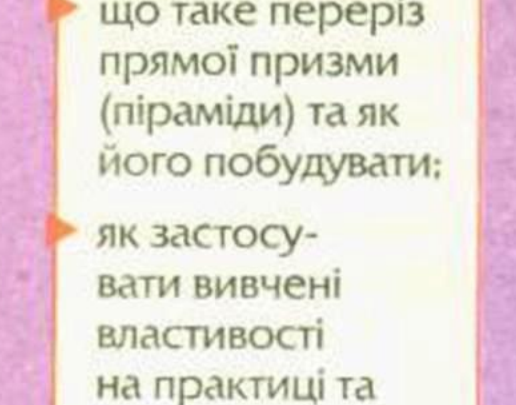
А. 5 см. **Б.** 4 см. **В.** $\sqrt{5}$ см. **Г.** $2\sqrt{5}$ см.

РОЗДІЛ 1

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

У розділі дізнаєтесь:

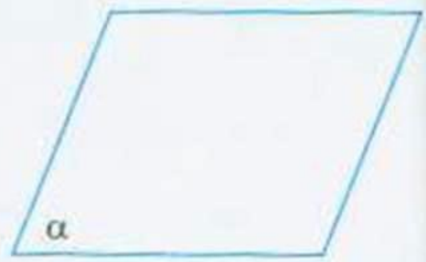
- що вивчає стереометрія;
- які фігури та відношення вважають основними в стереометрії;
- про аксіоми стереометрії та наслідки з них;
- що таке переріз прямої призми (піраміди) та як його побудувати;
- як застосувати вивчені властивості на практиці та у розв'язуванні задач




Z
X
D
B
A

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Ви вже знаєте, що у *стереометрії* вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в планіметрії, використовують *аксіоматичний метод*. Спочатку обирають *основні поняття* – *основні фігури* та *основні відношення*. Їх тлумачать через приклади, не даючи означень. Також приймають без доведення вихідні істинні твердження – *аксіоми*. Всі інші поняття визначають, а всі інші твердження доводять.



Мал. 39

Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*, а основними відношеннями – відношення «*належати*», «*лежати між*» і «*накладання*». Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма (мал. 39).

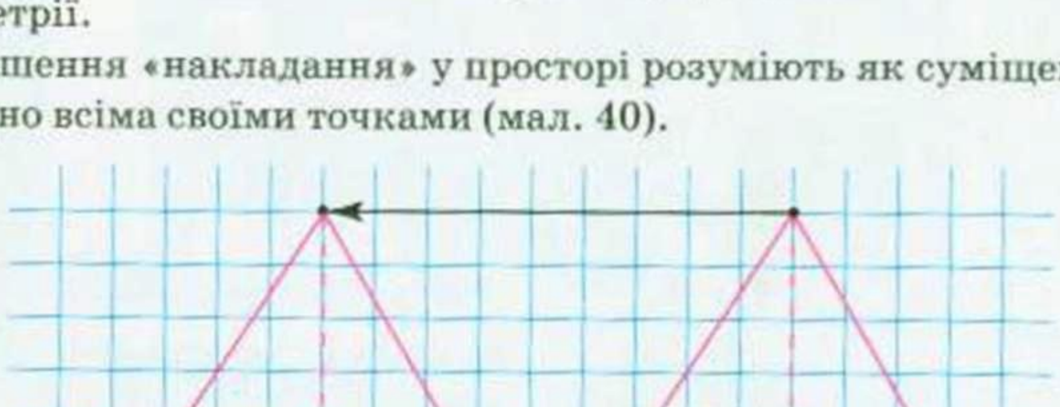
Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами A, B, C, ... , прямі – малими латинськими буквами a, b, c, ... Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) ... .

Введення у просторі нової геометричної фігури – площини – потребує уточнення основних відношень та розширення системи аксіом планіметрії.

Відношення «належати» розглядають не лише для точки і прямої – точка *лежить на* прямій, але й для точки і площини та прямої і площини – точка (пряма) *лежить у* площині.

Відношення «лежати між» для трьох будь-яких точок прямої не залежить від її розміщення в просторі, тому це відношення є основним і в стереометрії.

Відношення «накладання» у просторі розуміють як суміщення фігур відповідно всіма своїми точками (мал. 40).



Мал. 40

Система аксіом стереометрії складається з двох частин. Перша з них включає всі аксіоми планіметрії. Вони виконуються в кожній площині простору.

Пам'ятайте:

1) властивості всіх фігур, які ви вивчали в планіметрії, справджуються в кожній площині простору;

2) якщо йдеться про дві точки (прямі), то ці точки (прямі) є різними, тобто вони не збігаються.

Друга частина системи аксіом стереометрії включає аксіоми, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Коротко називатимемо їх *аксіомами стереометрії*. Сформулюємо ці аксіоми.

Аксіома 1 (належності точки площині).
Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

На малюнку 41 ви бачите, що точка A лежить у площині α, а точка B не належить їй.

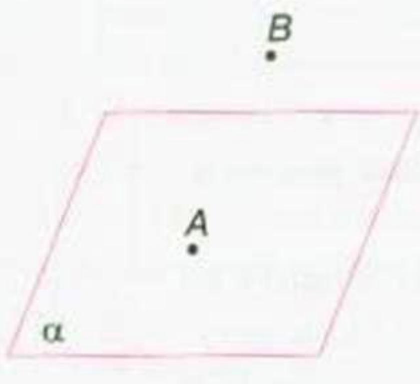
Коротко записуємо: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Аксіома 2 (існування і єдиності площини).
Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

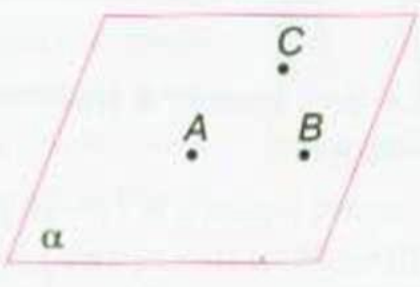
Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками. Наприклад, на малюнку 42 площина ABC – це площина α.

Аксіома 3 (належності прямої площині).
Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

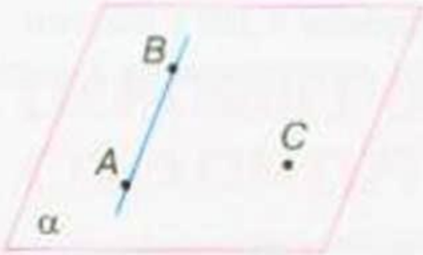
Записуємо: якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то AB лежить в α.



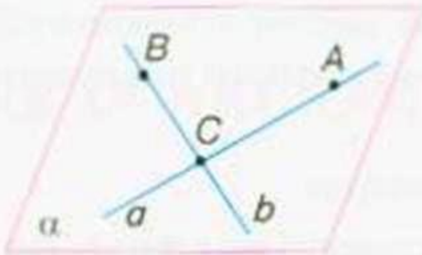
Мал. 41



Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44

З наведених аксіом випливають такі наслідки.

Наслідок 1.

Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, будь-які дві точки даної прямої разом з даною точкою (мал. 43) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.

Наслідок 2.

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Справді, якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, та точку перетину (мал. 44), то утвориться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.

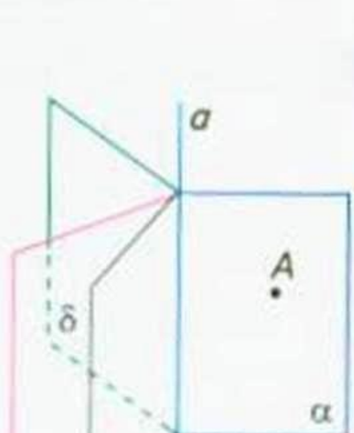
Пам'ятайте, що площину можна задати:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.

Аксіома 4 (про перетин двох площин).
Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Наслідок 3.

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин.

Справді, через пряму a і точку A, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну. Позначимо її α (мал. 45). Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині α. Через



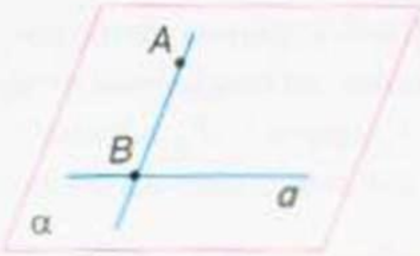
Мал. 45

кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини α. Тому таких площин безліч.

На малюнку 45 ви бачите, що через пряму a проходять площини α, β, γ і δ.

Задача. Дано пряму a і точку A, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a, лежать в одній площині.

Розв'язання. Через дані точку A і пряму a, за наслідком 1 з аксіом стереометрії, проходить площина і до того ж тільки одна. Позначимо її α (мал. 46). Через точку A проведемо довільну пряму так, щоб вона перетинала пряму a. Позначимо точку їх перетину B. Точки A і B лежать у площині α. Тоді, за аксіомою 3, пряма AB лежить у площині α. Аналогічно можна довести, що будь-яка інша пряма, що проходить через точку A і перетинає пряму a, лежить у площині α.



Мал. 46

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Термін «стереометрія» походить від грецьких слів στερεοξ — просторовий і μετρεο — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого Платона (427 — 347 до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка мала назву «Академія». Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко відстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був напис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».


Рафаель Санті Леонардо да Вінчі в образі Платона

2. Ви вже знаєте, що площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (твердження 1), або прямою і точкою, що не лежить на цій прямій (твердження 2), або двома прямими, що перетинаються (твердження 3). У підручнику перше твердження було прийнято як аксіома, а два інші доведені. Виявляється, що будь-яке із цих тверджень можна обрати за аксіому. Тоді два інших твердження можна довести, спираючись на обрану аксіому.

Наприклад, нехай аксіомою є твердження 3: «Через дві прямі, що перетинаються, можна провести єдину площину». Доведемо, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину (твердження 1).

Доведення. Нехай точки A, B і C не лежать на одній прямій. Проведемо прямі AB і BC. Ці прямі перетинаються в точці B. За прийнятою нами аксіомою, через прямі AB і BC можна провести єдину площину. Цій площині належать дані точки A, B і C.

Твердження 2 спробуйте довести самостійно.

3. Якщо з першого твердження випливає друге, а з другого перше, то такі твердження називаються *рівносильними*. Ми довели рівносильність тверджень 1 і 3. Взагалі, рівносильними є всі три наведені твердження. Доведіть це самостійно.

Щоб коротко записати, що деякі твердження рівносильні, їх позначають великими латинськими літерами. Якщо перше з розглянутих тверджень позначити T_1, друге — T_2, а третє — T_3, тоді коротко можна записати: $T_1 \Leftrightarrow T_2 \Leftrightarrow T_3$. Знак $\Leftrightarrow$ заміняє слово «рівносильне».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що вивчає стереометрія?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?
3. Які відношення вважають основними у стереометрії?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

50'. Які поняття вводять без означень у стереометрії?

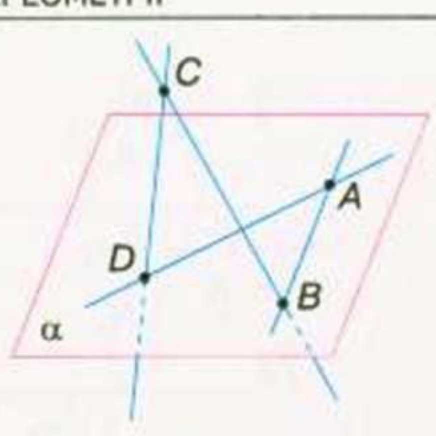
51'. Що таке аксіома? Теорема? Наведіть приклади.

52'. Які з наведених фігур є основними в стереометрії:

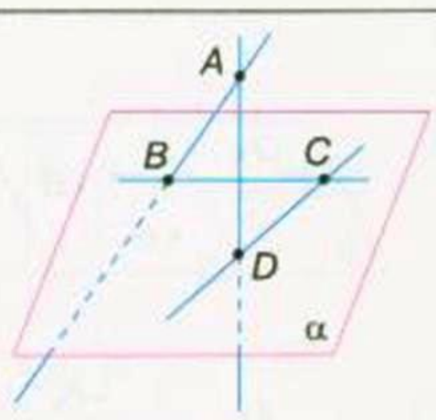
1) точка;	2) відрізок;
3) промінь;	4) пряма;
5) кут;	6) трикутник;
7) коло;	8) ромб;
9) куб;	10) куля;
11) площина;	12) призма?

53'. Які з наведених відношень є основними в стереометрії:

1) належати;
2) перетинати;
3) лежати між;
4) дорівнювати;
5) бути подібним;
6) накладання?



Мал. 47



Мал. 48

54'. На малюнках 47, 48 зображено площину α і прямі *AB*, *BC*, *AD* і *CD*.

1) Які з точок *A*, *B*, *C* і *D* лежать у площині α?

2) Яку іншу назву можна дати площині α?

3) Які з прямих лежать у площині α?

55'. За даними на малюнках 49, 50 з'ясуйте:

1) які спільні точки мають площини α і β;

2) по якій прямій перетинаються площини α і β.

56°. Назвіть неозначувані поняття стереометрії.

57°. Які з наведених аксіом планіметрії справджуються у просторі:

1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;

2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;

3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;

4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один;

5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;

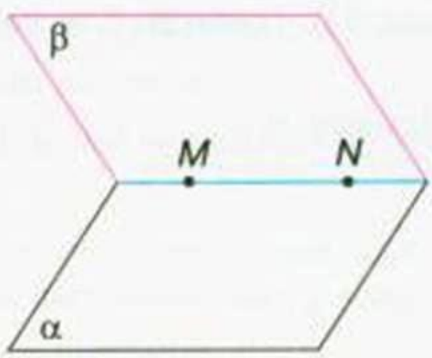
6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;

7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і тільки один;

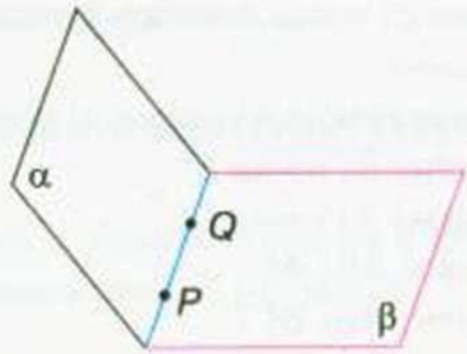
8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від 180°;

9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°;

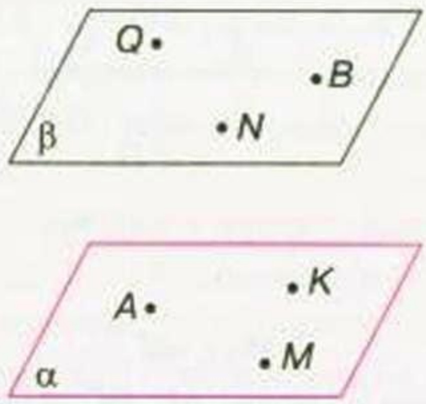
10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами?



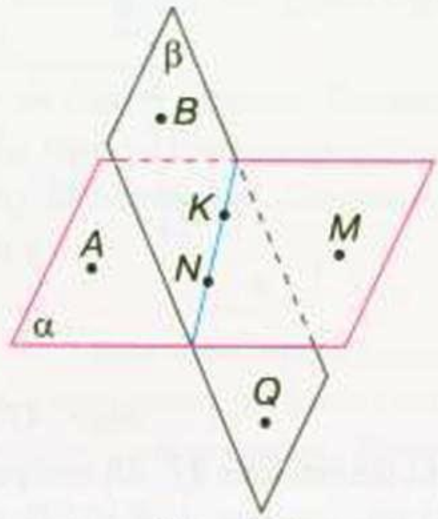
Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52

58••. Сформулюйте аксіоми планіметрії, які справджуються у просторі.

59°. За даними на малюнках 51, 52 визначте точки:
1) які лежать у площині α;
2) не лежать у площині β;
3) через які не проходить площина α;
4) через які проходить площина β.
Зробіть відповідний запис.

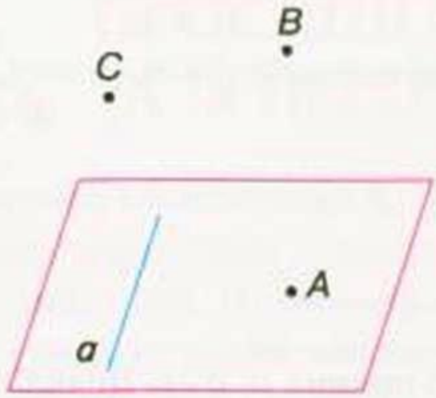
60°. У площині α позначте точки *A*, *B*, *C* і *D*, а поза нею — точки *M* і *N*. Чи можна дати площині α таку іншу назву:

1) *AN*;	2) *ADB*;
3) *BCDM*;	4) *ACD*;
5) *BAC*;	6) *CNB*;
7) *DAB*;	8) *MDC*;
9) *CAD*?	

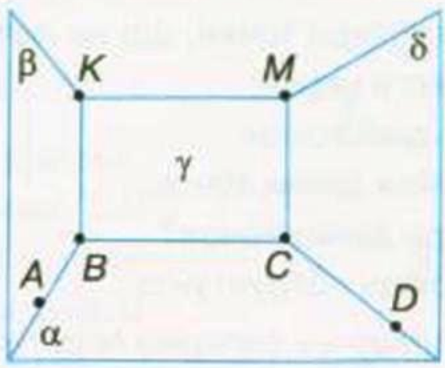
61••. Проведіть площину α. Позначте:
1) точки *B* і *C*, які лежать у площині α, і точку *A*, що не лежить у цій площині;
2) точки *A* і *C*, які лежать у площині α, і точку *B*, що не лежить у цій площині.
Проведіть прямі *AC*, *AB*, *BC*. Які з цих прямих лежать у площині α?
Зробіть відповідний запис.

62°. Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?

63°. Пряма *a* і точка *A* лежать у площині α (мал. 53). Точки *B* і *C* не лежать у даній площині.
Чи визначають площину, відмінну від площини α:
1) пряма *a* і точка *B*;
2) пряма *a* і точка *C*;
3) прямі *AB* і *AC*;
4) прямі *AB* і *BC*?
Відповідь поясніть.



Мал. 53



Мал. 54

64*. За даними на малюнку 54 заповніть таблицю 3 за зразком, наведеним у другому її стовпчику.

Таблиця 3

Площини	α і β	α і γ	α і δ	β і γ	γ і δ
Спільні точки	*A* і *B*				
Спільна пряма	*AB*				

65*. Проведіть площини α і β, що перетинаються. Позначте точки, які лежать:
1) тільки у площині α;
2) тільки у площині β;
3) у площинах α і β.
Зробіть відповідний запис.

66. **Чи завжди можна провести площину через три довільні точки простору? А через чотири? Відповідь поясніть.**

67. Якщо три точки кола лежать у площині α, то й усі точки кола лежать у даній площині. Доведіть.

68. **Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного кута? Відповідь поясніть.**

69. Дано два відрізки, що перетинаються:
1) *AC* і *BD*; 2) *AB* і *CD*.
Чи лежать в одній площині прямі *BA*, *DC*, *DB* і *CA*?
Відповідь поясніть.

70. **Доведіть, що через пряму можна провести принаймні дві різні площини.**

71. Площини α і β перетинаються по прямій *a*. Пряма *b* лежить у площині α. Ці прямі перетинаються в точці *B*. Чи лежить точка *B* на прямій *a*?
Відповідь поясніть.

72*. Доведіть, що існують точки поза даною прямою на площині, в якій лежить дана пряма.

73*. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через:
1) усі дані точки;
2) трійки даних точок;
3) пари даних точок?
Відповідь обґрунтуйте.

74*. Три площини попарно перетинаються по прямих a, b і c. Доведіть, що коли ці площини мають спільну точку A, то прямі a, b і c перетинаються в точці A.

75*. Площина γ перетинає площини α і β по прямих a і b. Доведіть, що коли прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин α і β.

76*. Дано промені зі спільним початком. Ніякі три з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести так, щоб в кожній площині лежало по два з даних променів, якщо всього променів:
1) три;
2) чотири;
3) n?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

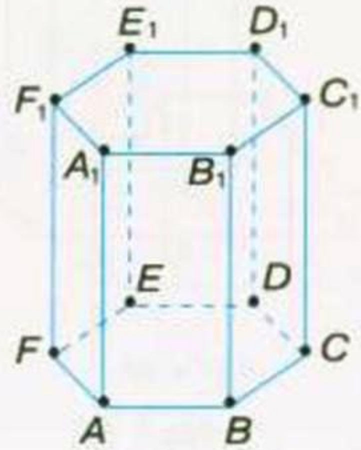
77. Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги?

78. Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку в різних напрямах. Край лінійки, дотикаючись до поверхні у двох точках, повинен повністю лежати в ній. На чому ґрунтується така перевірка?

79. Перевіряючи, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він робить це?

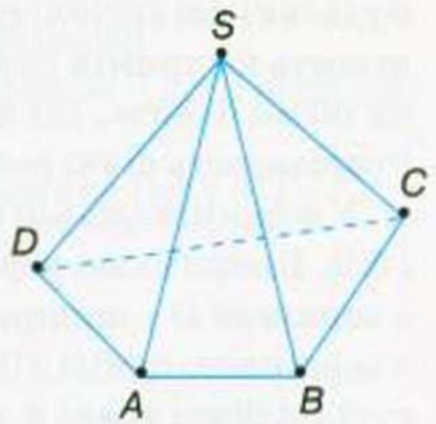
§2. ПРОСТІШІ МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ПЕРЕРІЗИ

Прикладами просторових фігур є *многогранники*. Ви знаєте два їх види – *пряму призму* (мал. 55) і *піраміду* (мал. 56). Ці геометричні фігури та їх перерізи будемо використовувати для ілюстрації властивостей прямих і площин.



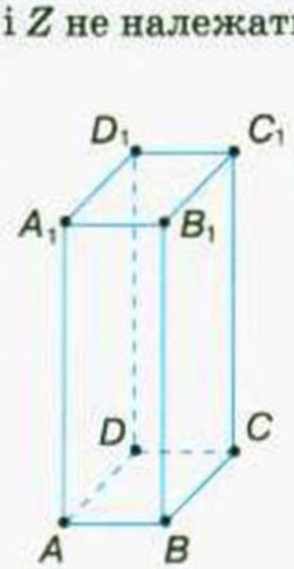
Мал. 55

Поверхня многогранника складається з плоских многокутників, які називаються його *гранями*. Звідси і походить назва «многогранник». Грані прямої призми (піраміди) мають спеціальні назви – *бічна грань* та *основа*. *Бічними гранями* прямої призми є прямокутники, а піраміди – трикутники. У прямої призми дві основи, які є рівними многокутниками, а у піраміди – одна основа. Залежно від того, який многокутник є основою, призму (піраміду) називають *трикутною*, *чотирикутною* чи *n-кутною*. На малюнку 55 ви бачите шестикутну пряму призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ з основами $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, а на малюнку 56 – чотирикутну піраміду $SABCD$ з основою $ABCD$. Прямокутний паралелепіпед (мал. 57) і куб (мал. 58) є окремими видами чотирикутної прямої призми.

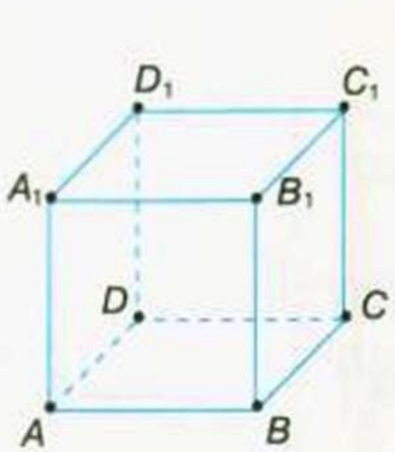


Мал. 56

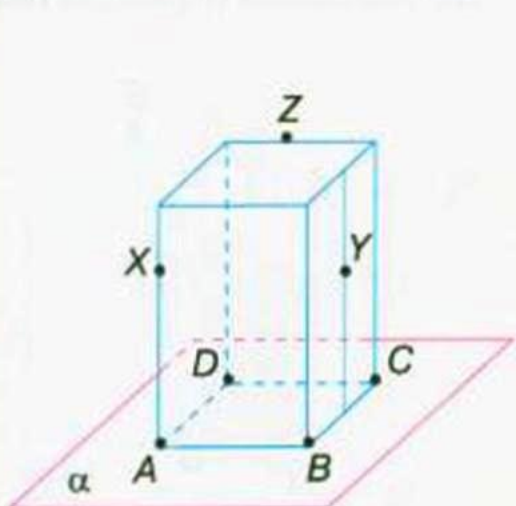
Кожна грань прямої призми (піраміди) лежить у певній площині. На малюнку 59 ви бачите, що точки A, B, C і D лежать у площині α, а точки X, Y і Z не належать їй.



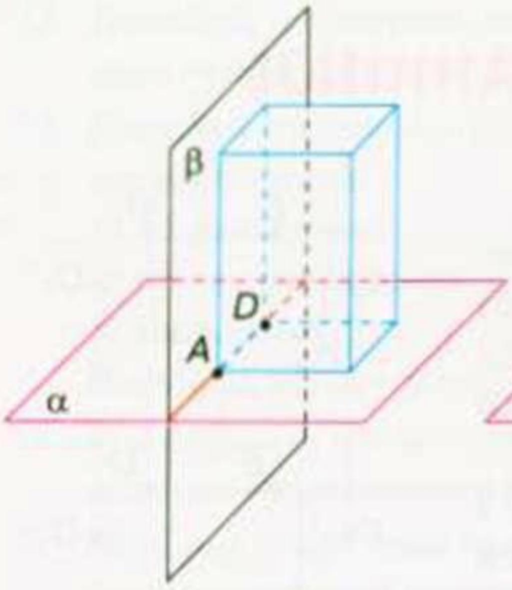
Мал. 57



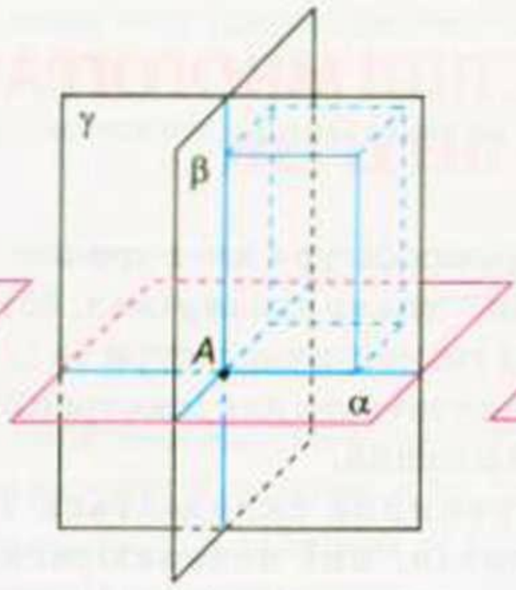
Мал. 58



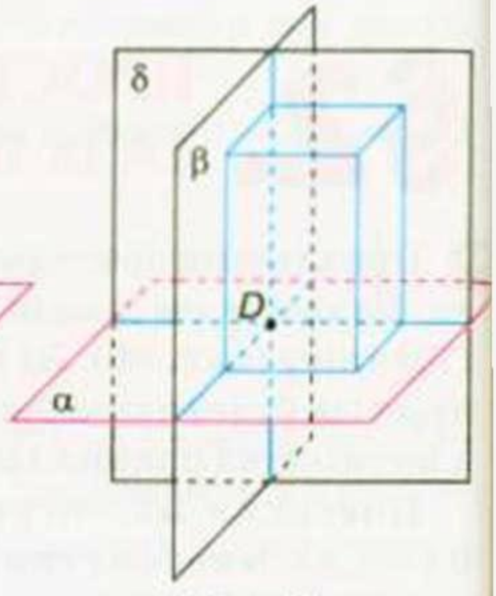
Мал. 59



Мал. 60



Мал. 61



Мал. 62

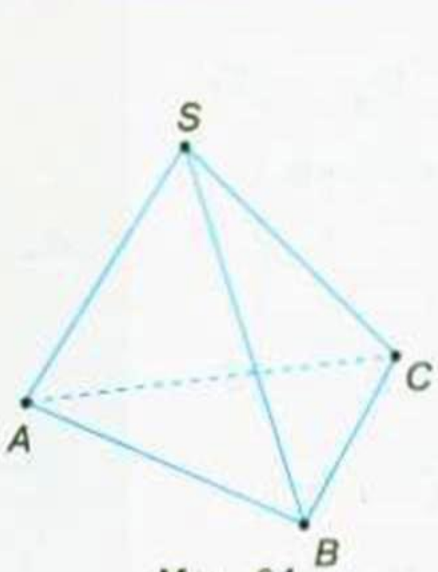
Різні грані прямої призми (піраміди) лежать у різних площинах. Будь-які дві *сусідні грані* мають спільний відрізок – *ребро* (мал. 60). Воно лежить на прямій перетину двох площин, що містять ці грані. На малюнку 60 ви бачите, що точки ребра AD належать і площині α, і площині β. Розрізняють *бічні ребра* і *ребра основ* (*основи*) прямої призми (піраміди).

У кожній *вершині* прямої призми сходяться три сусідні її грані (мал. 61 і 62). Наприклад, вершина A є точкою перетину площин α, β і γ (мал. 61), а вершина D – площин α, β і δ (мал. 62). У прямої призми кожна вершина є вершиною однієї з її основ (верхньої або нижньої), бо у ній сходяться дві сусідні бічні грані й відповідна основа.

У піраміди одна з вершин є особливою – в ній сходяться всі її бічні грані. Вона має спеціальну назву – *вершина піраміди*. На малюнку 63 – це точка S. Вершина піраміди може бути точкою перетину більше ніж трьох площин, що містять грані піраміди. У вершинах основи піраміди сходяться по три грані – дві сусідні бічні грані й основа.

? Чи існує піраміда, в кожній вершині якої сходяться три грані? Так. Це трикутна піраміда (мал. 64).

Мал. 63

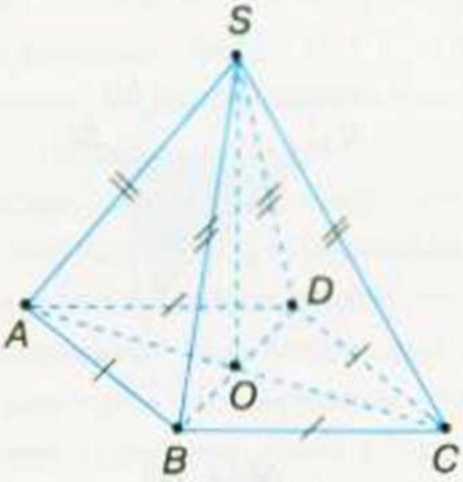


Мал. 64

Пряма призма називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник.

Піраміда називається **правильною**, якщо її основою є правильний многокутник і її бічні ребра рівні.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до її основи. У правильної піраміди висота проходить через центр її основи. На малюнку 65 відрізок SO – висота правильної чотирикутної піраміди $SABCD$.



Мал. 65

Якщо деяка площина α не містить грань многогранника, то можливі такі випадки її розміщення відносно многогранника:

1) площина α не має спільних точок з многогранником;

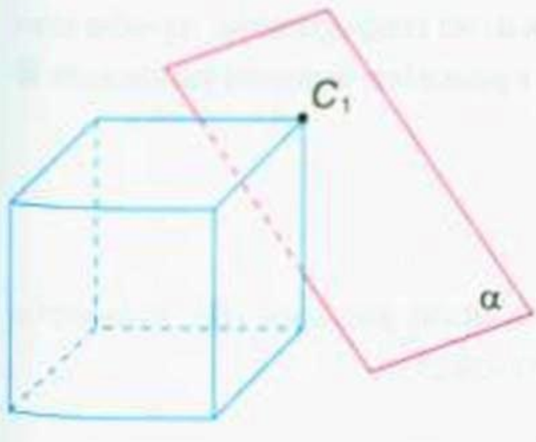
2) площина α має одну спільну точку з многогранником – його вершину (мал. 66);

3) площина α містить лише одне ребро многогранника (мал. 67);

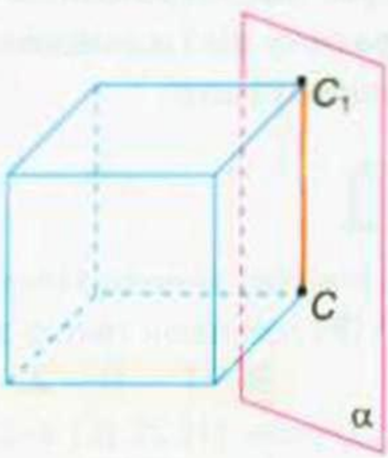
4) площина α перетинає многогранник (мал. 68).

> Площина, що перетинає многогранник, називається **січною площиною**.

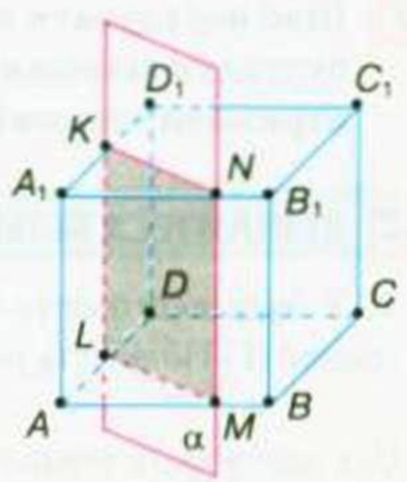
У результаті перетину многогранника січною площиною утворюється *переріз многогранника*. Це плоский многокутник, сторонами якого є відрізки, по яких січна площина перетинає грані многогранника. Тому сторони перерізу лежать у гранях многогранника, а вершини – на ребрах многогранника. На малюнку 68 ви бачите чотирикутник $KLMN$, що є перерізом куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ січною площиною α.



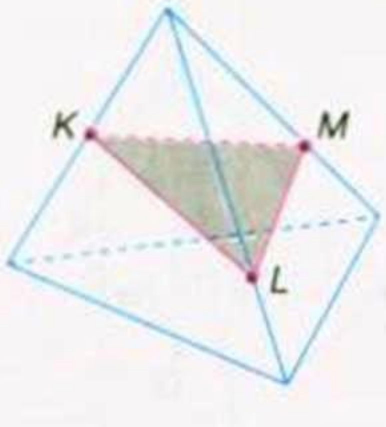
Мал. 66



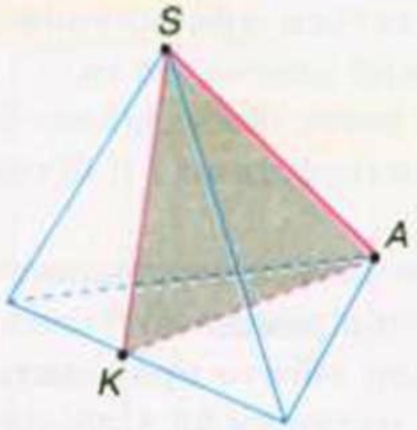
Мал. 67



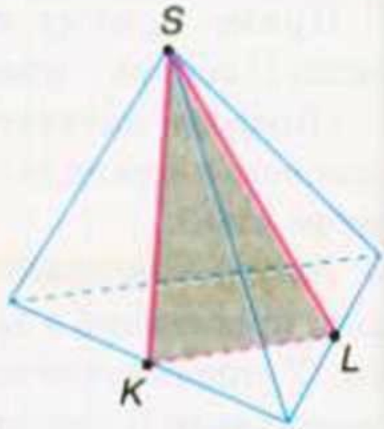
Мал. 68



Мал. 69



Мал. 70



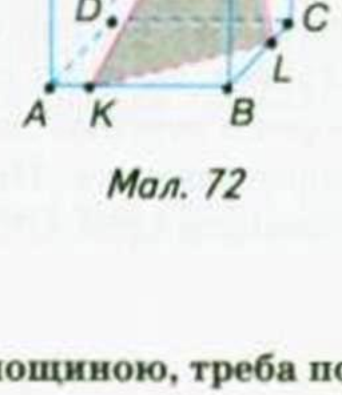
Мал. 71

Оскільки дві площини не можуть перетинатися більше ніж по одній прямій, то в грані многогранника не може бути більше одного відрізка перетину із січною площиною.

Як і будь-яку площину, січну площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (мал. 69), або прямою і точкою, що не належить їй (мал. 70), або двома прямими, що перетинаються (мал. 71).

Задача. На ребрах AB, BC і BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано точки K, L і M (мал. 72). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через ці точки.

Розв'язання. За умовою, точки K і M — спільні точки площини грані ABB_1A_1 і січної площини. Тому ці площини перетинаються по прямій KM, а відрізок KM є відрізком перетину прямокутника ABB_1A_1 із січною площиною. Міркуючи аналогічно, переконуємося, що січна площина перетинає грані $ABCD$ і BCC_1B_1 паралелепіпеда по відрізках KL і ML. Проводимо відрізки KM, KL і ML. Трикутник KLM — шуканий переріз.



Мал. 72

Щоб побудувати переріз многогранника січною площиною, треба побудувати відрізки перетину цієї площини з гранями многогранника й отримати плоский многокутник.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У будь-якого опуклого многогранника кількість його вершин (**В**), кількість граней (**Г**) і кількість ребер (**Р**) пов'язані такою залежністю:

$$\text{В} + \text{Г} - \text{Р} = 2.$$

Цю залежність вперше установив (1620 р.) видатний французький математик Р. Декарт (1596 — 1650), а пізніше (у 1752 р.) заново відкрив і довів німецький математик Л. Ейлер (1707 – 1783). Відповідна теорема носить ім'я Ейлера. Іноді її називають теоремою Декарта – Ейлера про многогранники. Число **В + Г – Р** називають *ейлеровою характеристикою* многогранника. Ейлерові характеристики широко застосовуються в теорії многогранних поверхонь.

2. Термін «призма» походить від грецького слова πρισμα, що означає «розпилений». Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів παραλλος – паралельний та επιπεδον – площина. Термін «куб» (χυβοξ) теж античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, але після обточування – на шість граней. Слово «піраміда» вважають чи не єдиним терміном, який дійшов до нас від стародавніх єгиптян. Воно означає «пам'ятник», тобто обеліск, який поставлено славетній людині – фараону.

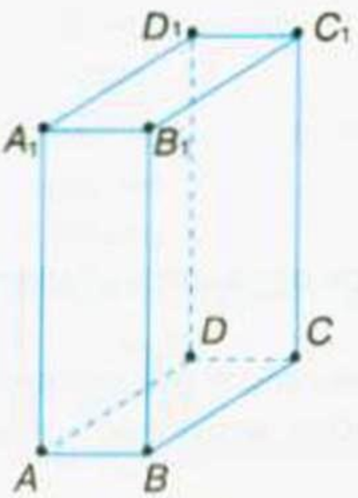
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Наведіть приклади просторових фігур.
2. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
3. Що є основами прямої призми? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
4. Що є основою піраміди? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
5. Чому призму називають трикутною, чотирикутною, *n*-кутною? А піраміду?
6. Яка пряма призма називається правильною? А піраміда?
7. Поясніть, що таке січна площина для многогранника. Як її можна задати?
8. Що є перерізом многогранника?
9. Поясніть, що означає побудувати переріз многогранника.

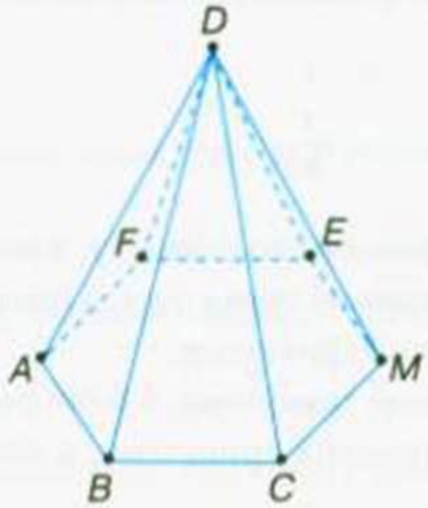
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

80'. За малюнками 73 – 75 з'ясуйте:

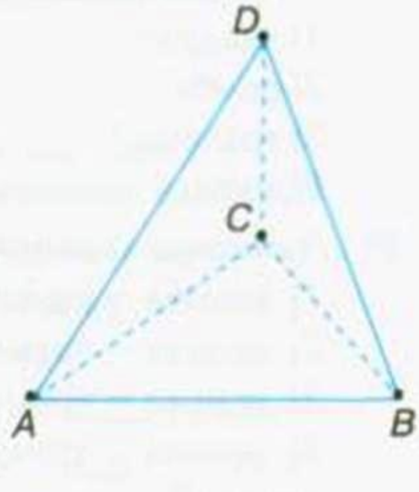
1) як називається даний многогранник;
2) скільки в нього основ і бічних граней;
3) який многокутник є його основою;
4) які многокутники є його бічними гранями.



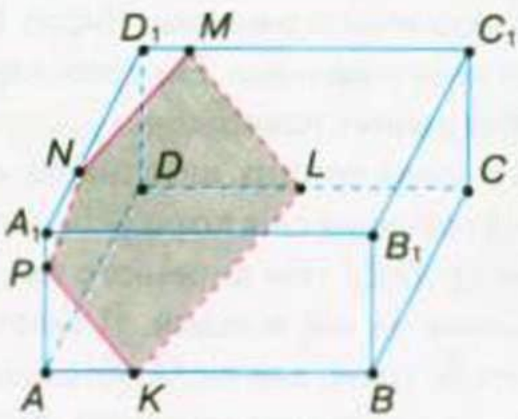
Мал. 73



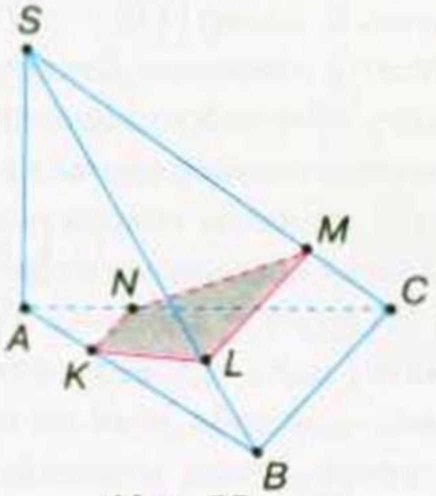
Мал. 74



Мал. 75



Мал. 76



Мал. 77

81'. Назвіть вершини і ребра многогранника (мал. 73 — 75). Які його грані:

1) сходяться у вершині:

а) A; б) B; в) C;

2) мають спільне ребро:

а) AB; б) CD; в) AD?

82'. За малюнками 76, 77 з'ясуйте: 1) яка площина перетинає даний многогранник; 2) по яких відрізках січна площина перетинає його грані; 3) який многокутник утворився в перерізі.

83'. Дано пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить через:

1) три вершини призми;

2) ребро і вершину призми;

3) два ребра призми, що мають спільну точку.

84'. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$. Назвіть площини, кожна з яких проходить через:

1) три вершини піраміди;

2) ребро і вершину піраміди;

3) два ребра піраміди, що перетинаються.

85'. Чи є правильною пряма призма, якщо її основа:

1) квадрат;

2) ромб;

3) трапеція?

Відповідь поясніть.

86'. Чи можна вважати правильною піраміду, в якої:

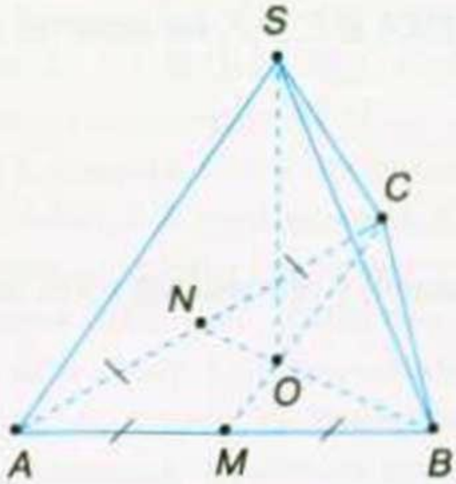
1) основа — рівнобедрений трикутник, а бічні ребра однакової довжини;

2) основа — правильний трикутник;

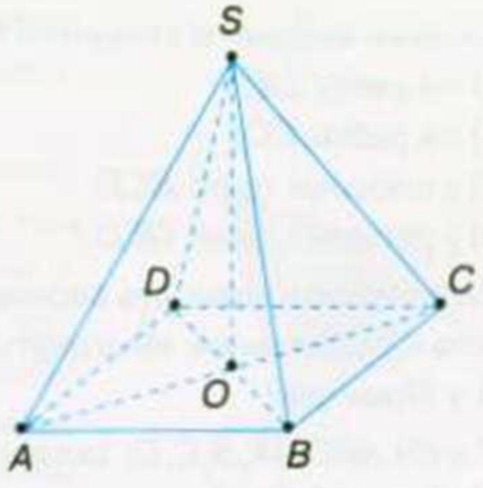
3) основа — правильний трикутник, а бічні ребра не однакової довжини;

4) основа — рівносторонній трикутник, а бічні ребра дорівнюють стороні основи?

Відповідь поясніть.



Мал. 78



Мал. 79

87°. На малюнках 78, 79 зображено правильну піраміду, в якій проведено висоту SO. Поясніть, як розміщена основа висоти піраміди.

88°. Накресліть:
1) прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Проведіть січну площину через:
1) вершини A, C, D_1;
2) вершини B_1, D_1, C;
3) ребра BC і A_1D_1;
4) ребра AA_1 і CC_1.
Який многокутник дістали в перерізі?

89°. Накресліть піраміду:
1) трикутну;
2) чотирикутну;
3) шестикутну.
Позначте середини її бічних ребер і через них проведіть січну площину. Який многокутник дістали в перерізі?

90. Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати:
1) пряма призма;
2) піраміда?

91. Виведіть формулу для обчислення кількості вершин n-кутної:
1) призми;
2) піраміди.

92. Виведіть формулу для обчислення кількості ребер n-кутної:
1) призми;
2) піраміди.

93. Виведіть формулу для обчислення кількості граней n-кутної:
1) призми;
2) піраміди.

94. Скільки вершин п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ не лежить:
1) на ребрі DE;
2) на ребрі CC_1;
3) у площині грані BCD;
4) у площині грані DED_1?

95. Чи залежить кількість вершин (ребер, граней) у призми від того, що її основою є правильний многокутник?
А у піраміди?

96. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точку:
1) P на ребрі AA_1;
2) Q на ребрі AD.
Площини яких граней куба перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба?
Скільки таких прямих можна провести?

97. У піраміді $SABCD$ задано точку:
1) M на ребрі SA;
2) N на ребрі BC.
Площини яких граней піраміди перетинає пряма, що лежить у площині грані піраміди і проходить через дану точку та одну з вершин піраміди?
Скільки таких прямих можна провести?

98. Накресліть:
1) прямокутний паралелепіпед;
2) куб.
Через діагональ нижньої основи та вершину верхньої основи проведіть січну площину так, щоб у перерізі дістати:
а) трикутник; б) чотирикутник.

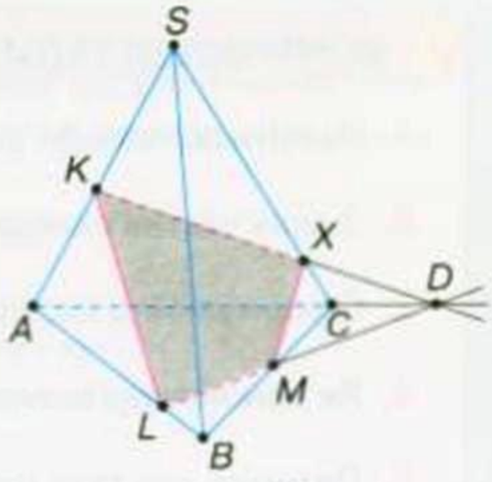
99. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, яка проходить через:
1) середини ребер SA, AB, AD;
2) середину ребра AB і медіану грані SBC;
3) медіани граней SAB і SBC.
Чи завжди задача має розв'язок?

100*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.

101*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

102*. На трьох бічних ребрах чотирикутної піраміди розміщено по три точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

103*. На ребрах *SA*, *AB* і *BC* піраміди *SABC* дано точки *K*, *L* і *M* (мал. 80). Побудуйте переріз піраміди площиною *KLM*.



Мал. 80

Розв'язання. Січна площина *KLM* перетинає грані *SAB* і *SBC* по відрізках *KL* і *LM*. Щоб побудувати відрізки перетину січної площини з гранями *SBC* і *SAC*, достатньо на ребрі *SC* побудувати точку *X*, що належить січній площині. Для цього спочатку знайдемо точку, в якій січна площина перетинає пряму *AC*. Прямі *AC* і *LM* лежать у площині основи піраміди, тому можна побудувати точку *D* їх перетину. Ця точка також належить площині *SAC*, тому можна побудувати пряму *KD*. Вона перетне ребро *SC* у шуканій точці *X*. Сполучимо точки *M* і *X*. Чотирикутник *KLMX* – шуканий переріз.

104*. На трьох бічних ребрах піраміди *SABCD* позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні 1 : 2. На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини піраміди, а на двох інших – від вершини основи. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?

105*. На трьох бічних ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні 2 : 5. На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини верхньої основи куба, а на двох інших – від вершини нижньої основи. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

106. З дерев'яного кубика треба виточити правильну піраміду:
1) чотирикутну; 2) трикутну. Поясніть, як це можна зробити.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Назвіть основні фігури та основні відношення у просторі.
2. З яких частин складається система аксіом стереометрії?
3. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
4. Як можна задати площину?
5. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
6. Яка призма називається правильною? А піраміда?
7. Яка площина називається січною площиною для многогранника?
8. Що таке переріз многогранника?
9. Чому січна площина не може перетинати грань многогранника по двох відрізках?
10. Поясніть, як побудувати переріз многогранника січною площиною.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Основними фігурами в стереометрії є:

А. Точка, площина і кут. **Б.** Точка, пряма і кут.
В. Точка, відрізок і площина. **Г.** Точка, площина і пряма.

2° Площину можна задати:

А. Трьома точками, що лежать на одній прямій.

Б. Двома точками.

В. Прямою і точкою, що не належить їй.

Г. Прямою і точкою, що лежить на ній.

3° Яка фігура утворюється в перетині грані многогранника із січною площиною?

А. Пряма. **Б.** Відрізок. **В.** Промінь. **Г.** Кут.

4 Яке з тверджень не є аксіомою стереометрії?

А. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну.

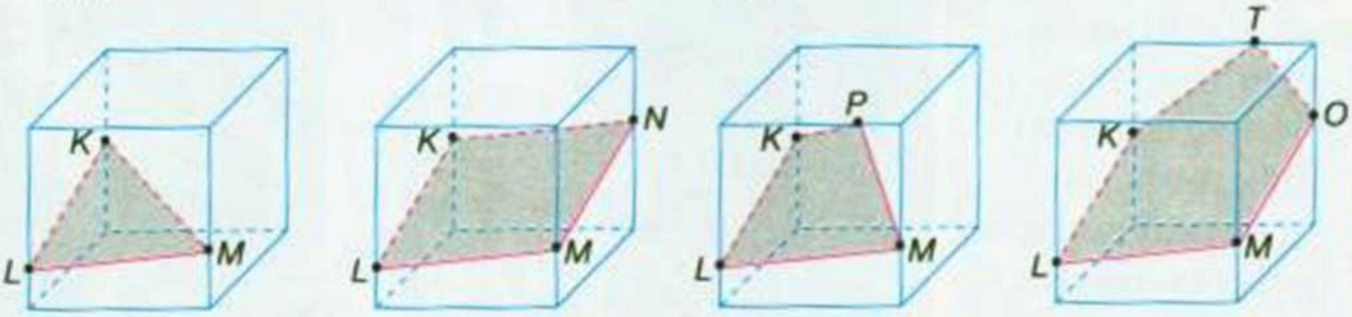
Б. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

В. Існують точки, що належать даній площині, і точки, що не лежать у ній.

Г. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

5* Треба побудувати переріз куба площиною *KLM*.
Яка з побудов правильна?

А. **Б.** **В.** **Г.**

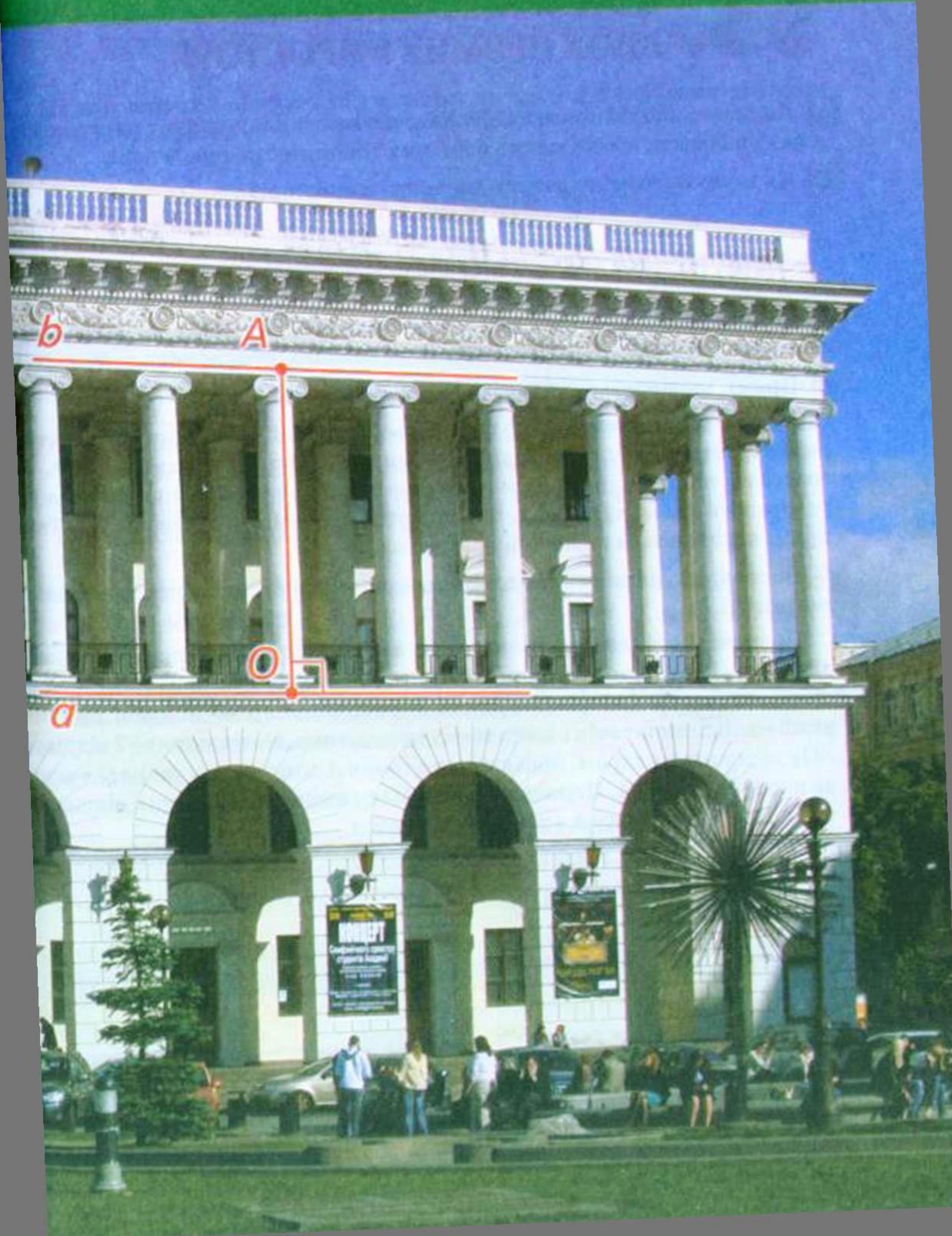


РОЗДІЛ 2

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

У розділі дізнаєтесь:

- про взаємне розміщення двох прямих у просторі; прямої і площини та ознаку їх паралельності;
- як знайти відстань від точки до прямої та між двома паралельними прямими; кут між прямими, що перетинаються;
- про паралельні площини та їх ознаку і властивості;
- що таке паралельне проектування та як зображати просторові фігури на площині;
- як застосувати вивчені означення, ознаки і властивості на практиці та під час розв'язування задач


b
A
O
a
КОНЦЕРТ

§3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Ви знаєте, що дві прямі на площині або мають одну спільну точку, тобто перетинаються, або не мають спільних точок, тобто паралельні.

? Як можуть розміщуватися дві прямі у просторі?

1. ДВІ ПРЯМІ МАЮТЬ ОДНУ СПІЛЬНУ ТОЧКУ

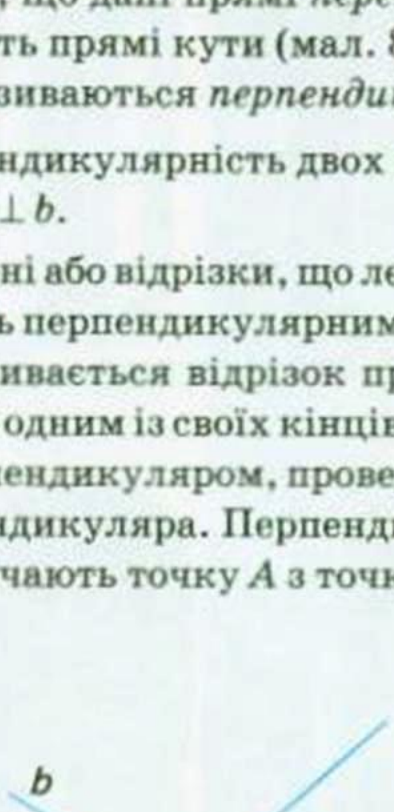
Якщо прямі a і b у просторі мають одну спільну точку, то вони *перетинаються* в цій точці (мал. 81).

Прямі, що перетинаються, позначатимемо так: $a \times b$.

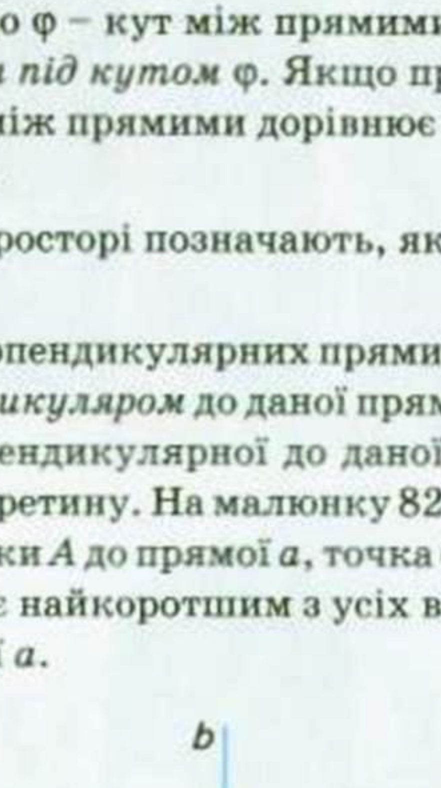
Кутом між прямими a і b вважається гострий кут, якщо прямі утворюють гострі й тупі кути (мал. 81). Якщо φ – кут між прямими a і b, то говорять, що дані прямі *перетинаються під кутом* φ. Якщо прямі a і b утворюють прямі кути (мал. 82), то кут між прямими дорівнює 90°. Такі прямі називаються *перпендикулярними*.

Перпендикулярність двох прямих у просторі позначають, як у планіметрії: $a \perp b$.

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними. *Перпендикуляром* до даної прямої у просторі називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. На малюнку 82 відрізок AO є перпендикуляром, проведеним з точки A до прямої a, точка O – основа перпендикуляра. Перпендикуляр AO є найкоротшим з усіх відрізків, що сполучають точку A з точками прямої a.



Мал. 81



Мал. 82

Відстанню від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

На малюнку 82 відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра AO.

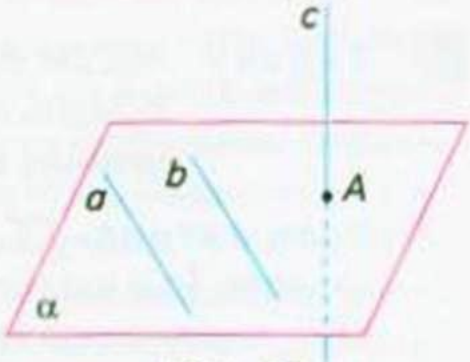
2. ДВІ ПРЯМІ НЕ МАЮТЬ СПІЛЬНИХ ТОЧОК

Якщо прямі a і b у просторі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

У курсі геометрії 9 класу ви ознайомилися з такими прямими. Спробуйте дати відповідні означення та порівняйте їх з наведеними у підручнику.

Дві прямі у просторі, що лежать в одній площині і не перетинаються, називаються ***паралельними***.

Дві прямі у просторі, що не лежать в одній площині, називаються ***мимобіжними***.



Мал. 83

На малюнку 83 прямі a і b паралельні, а прямі a і c та b і c – мимобіжні.

Коротко записуємо: $a \parallel b$, $a \,\dot{-}\, c$, $b \,\dot{-}\, c$. Знак «$\dot{-}$» заміняє слово «мимобіжні».

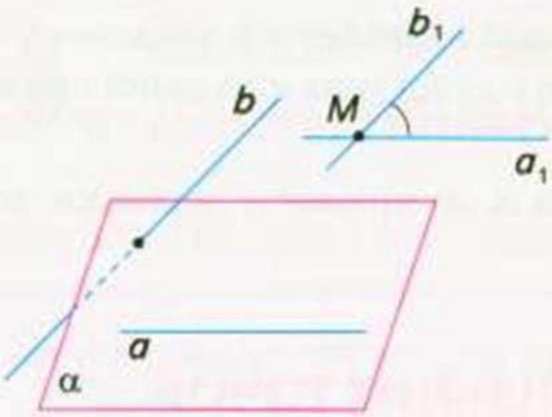
Чому в означенні мимобіжних прямих не вказано, що ці прямі не мають спільних точок? Бо відсутність спільних точок у двох прямих є наслідком того, що вони не лежать в одній площині.

Правильним є і таке означення. Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не мають спільних точок і не паралельні.

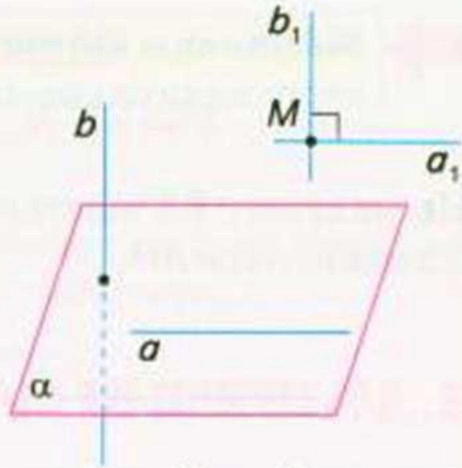
Взаємне розміщення двох прямих у просторі подано в таблиці 4.

Таблиця 4

<table>
<tr><th>Фігури</th><th colspan="3">Взаємне розміщення</th><th>Запис</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Дві прямі a і b</td><td rowspan="3">лежать в одній площині</td><td rowspan="2">мають одну спільну точку</td><td>перпендикулярні</td><td>$a \perp b$</td></tr>
<tr><td>не перпендикулярні</td><td>$a \times b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">не мають спільних точок</td><td>паралельні</td><td>$a \parallel b$</td></tr>
<tr><td>не лежать в одній площині</td><td>мимобіжні</td><td>$a \,\dot{-}\, b$</td></tr>
</table>



Мал. 84



Мал. 85

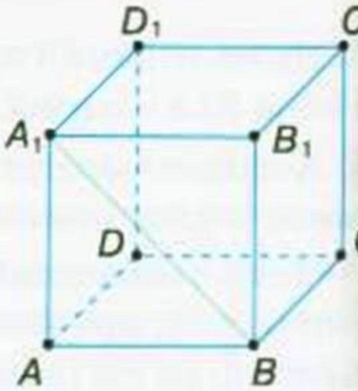
Вважається, що кут між паралельними прямими дорівнює 0°.

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим (мал. 84). Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються. Твердження буде обґрунтовано у § 13.

Якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює 90°, то дані прямі вважають перпендикулярними (мал. 85). Отже, **у просторі перпендикулярні прямі можуть або перетинатися, або бути мимобіжними.**

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 86). Знайдіть кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1.

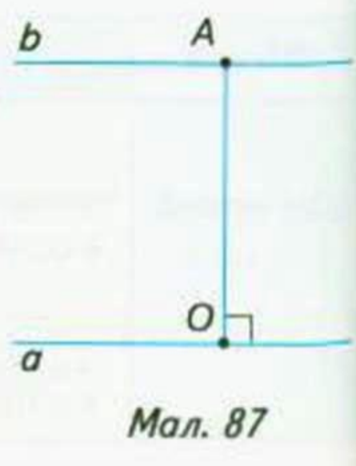
Розв'язання. $CC_1 \parallel BB_1$, оскільки грань куба – квадрат. Тоді кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1 дорівнює куту між прямими BA_1 і BB_1, тобто 45°.



Мал. 86

Щоб знайти кут між мимобіжними прямими, можна на одній з них взяти довільну точку і через неї провести пряму, паралельну другій прямій.

Відстанню між паралельними прямими називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої до другої прямої.



Мал. 87

На малюнку 87 відстань між паралельними прямими a і b дорівнює довжині перпендикуляра AO.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Головна праця «Начала» давньогрецького вченого Евкліда побачила світ бл. 300 р. до н. е. У ній підсумовано й приведено у струнку систему всі досягнення грецької математики, зокрема праці Гіппократа Хіосського, Євдокса Кнідського, Архіта Тарентського, Теєтета Афінського та інших учених. «Начала» містять 13 книг.
У книгах I – IV подано основи планіметрії.
Книга V містить теорію пропорцій геометричних величин, книга VI – теорію подібності, книги VII – IX – теорію чисел і числових пропорцій, книга X – теорію ірраціональних чисел. Стереометрію викладено у книгах XI – XIII.
Книгу XI присвячено основам стереометрії. У ній Евклід формулює 28 означень і доводить 39 тверджень, які стосуються щонайперше взаємного розміщення прямих і площин у просторі.
Книгу XII присвячено круглим тілам, а книгу XIII – правильним многогранникам.
Історичне значення «Начал» Евкліда полягає в тому, що у них вперше зроблено спробу застосування *аксіоматичного методу* в побудові геометрії. Зараз цей метод є основним для створення й обґрунтування математичних теорій.

2. Вам відомі геометричні характеристики планіметричних фігур. Наприклад, трикутник характеризують довжини його сторін та градусні міри кутів, його периметр і площа. Ці характеристики трикутника не залежать від його розміщення на площині і не змінюються (є інваріантними) при будь-якому переміщенні площини. Такі характеристики фігури називають її *інваріантами*. Не всі інваріанти фігури є незалежними. Наприклад, якщо задано три сторони трикутника, то від їх довжин залежать кути, периметр і площа трикутника і т. д. Незалежні інваріанти фігури називають її *параметрами*. У вас може виникнути запитання: «*Які параметри мають дві прямі у просторі?*»
Дві прямі, що перетинаються, мають єдиний параметр – кут між ними.
Дві паралельні прямі також мають єдиний параметр – відстань між ними.
Дві мимобіжні прямі мають два параметри – кут та відстань між ними.
Чим більше параметрів має фігура, тим загальнішою вона є, бо зі зміною значень параметрів утворюється більше фігур, що відносяться до даного поняття. Це дає ще одне пояснення того факту, що мимобіжність прямих є загальнішим випадком розміщення двох прямих у просторі. Справді, якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює нулю, то дістанемо паралельні прямі; якщо відстань між мимобіжними прямими дорівнює нулю, то дістанемо прямі, що перетинаються.

3. Символи «$\times$», «$\perp$», «$\parallel$», «$\underline{\cdot}$» для позначення взаємного розміщення двох прямих називають іконічними. Вони наочно відображають суть понять, які позначають.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які можливі випадки розміщення двох прямих у просторі?
2. Як у просторі визначають кут між прямими, що перетинаються?
3. Сформулюйте означення відстані від точки до прямої.
4. Які прямі в просторі називаються паралельними? Як їх позначають?
5. Дайте означення мимобіжним прямим. Як їх позначають?
6. Що таке кут між мимобіжними прямими?
7. Поясніть, які прямі в просторі вважаються перпендикулярними.
8. Сформулюйте означення відстані між паралельними прямими.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

107'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих на навколишніх предметах.

108'. На малюнках 88, 89 зображено пряму призму.
Назвіть прямі, які мають одну спільну точку з прямою:
1) *AB*; 2) *BC*; 3) *AC*.
В якій точці ці прямі перетинають дану пряму?

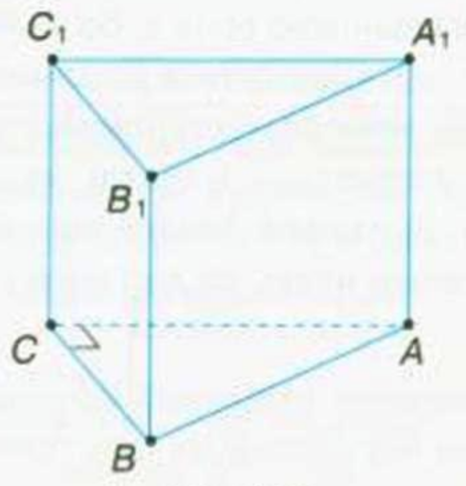
109'. Назвіть перпендикулярні прямі на малюнках 88, 89.

110'. Чи зображено перпендикулярні прямі на малюнках 90, 91?

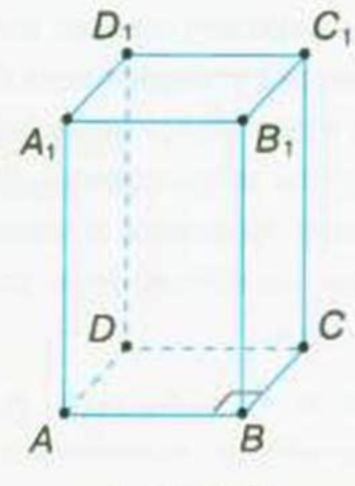
111'. Назвіть пряму і перпендикуляр до неї на малюнках 88 – 91.

112'. Довжина якого відрізка є відстанню від точки *A* до прямої *BC* (мал. 88 – 91)?

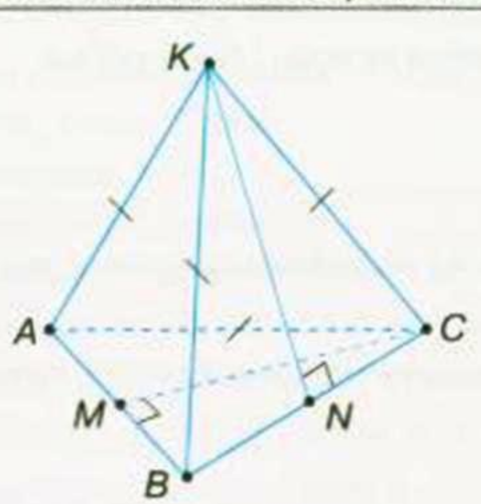
113'. На малюнках назвіть:
1) паралельні прямі (мал. 88, 89);
2) мимобіжні прямі (мал. 88 – 91).
Зробіть відповідний запис.



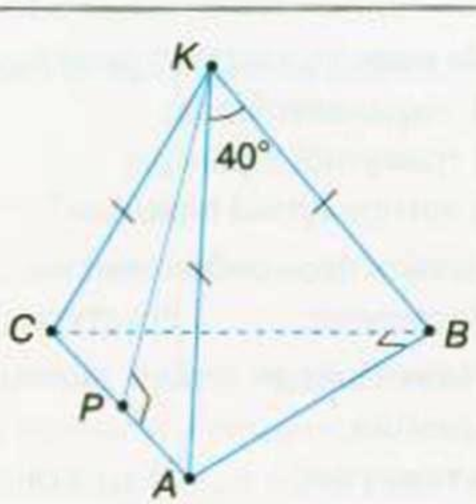
Мал. 88



Мал. 89



Мал. 90



Мал. 91

114*. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть:

1) прямі, що перетинаються і лежать в площині нижньої основи куба;
2) прямі, що перетинаються під прямим кутом і лежать в площині верхньої основи куба;
3) перпендикулярні прямі, що проходять через точку A_1; C;
4) пряму і перпендикуляр, який проведено до цієї прямої з точки B; D_1.

115*. Який кут між прямими:

1) CA і AK (мал. 90); 2) CA і AM, якщо ΔABC — правильний (мал. 90);
3) KA і AB (мал. 91); 4) KC і KP, якщо $\Delta AKB = \Delta AKC$ (мал. 91)?

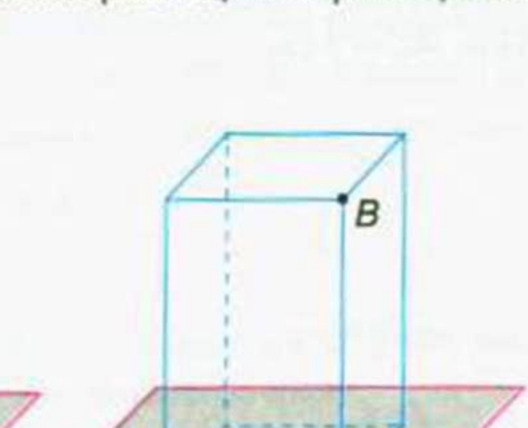
116*. Вершина верхньої основи прямокутного паралелепіпеда і ребро його нижньої основи лежать в одній бічній грані. Якою може бути відстань від даної вершини до даного ребра паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:

1) 3 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 2 см, 2 см; 3) 8 см, 8 см, 8 см?

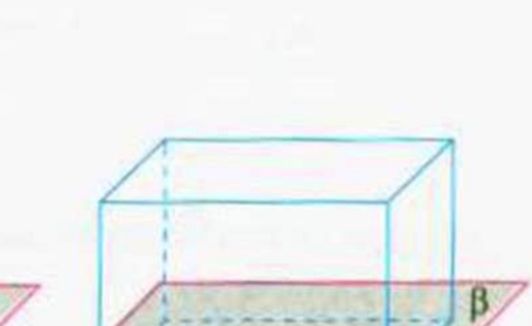
Побудуйте відповідне зображення.

117*. У прямокутного паралелепіпеда (мал. 92) ребра AB і CD лежать на мимобіжних прямих, а ребра CD і BK — на паралельних прямих. На малюнках 93, 94 цей паралелепіпед певним чином повернуто. Скопіюйте малюнки 93, 94 та позначте на них ребра CD і BK. Яке взаємне розміщення прямих, на яких лежать ребра AB і CD? А ребра CD і BK?

Мал. 92



Мал. 93



Мал. 94

118°. Як можуть взаємно розміщуватися ребра основи і бічні ребра:
1) паралелепіпеда;
2) трикутної піраміди;
3) чотирикутної піраміди?

119°. Назвіть пари ребер призми, що лежать на мимобіжних прямих, якщо призма:
1) трикутна; 2) чотирикутна.

120°. Назвіть пари ребер піраміди, що лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда:
1) трикутна; 2) чотирикутна.

121°. AB і CD — мимобіжні прямі.
Чи паралельні прямі: 1) AC і BD; 2) AD і BC?

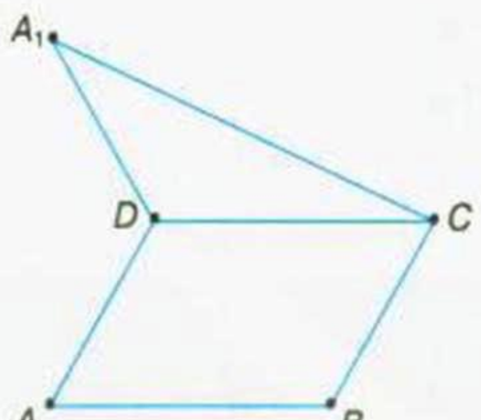
122°. Дано паралелограм і трикутник, що лежать в різних площинах (мал. 95, 96).
Чи є правильним твердження:
1) прямі AA_1 і BD перетинаються;
2) прямі A_1B і AD можуть бути паралельними;
3) прямі CA_1 і AD — мимобіжні?

123°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Назвіть пари його ребер, що лежать на перпендикулярних прямих, які:
1) перетинаються; 2) є мимобіжними.

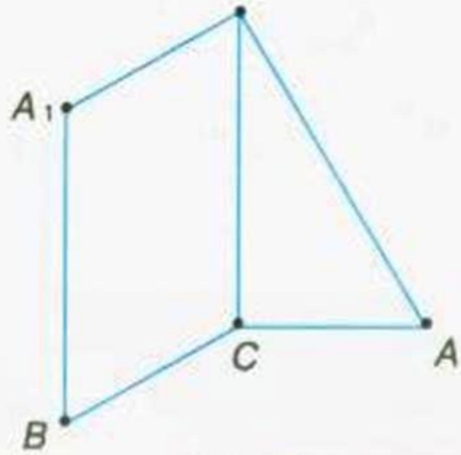
124°. Знайдіть відстані між паралельними ребрами прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:
1) 4 см, 6 см, 9 см;
2) 5 см, 5 см, 5 см;
3) 5 см, 12 см, 12 см.

125. Доведіть, що пряма і проведений до неї перпендикуляр лежать в одній площині.

126. Точки A і B лежать у площині α, а точка C не належить їй. Знайдіть відстань від точки C до прямої AB, якщо:
1) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см.



Мал. 95



Мал. 96

127. Пряма a і точка A лежать у площині α. Скільки прямих можна провести через точку A, кожна з яких:

1) перетинає пряму a;
2) паралельна прямій a;
3) мимобіжна з прямою a?

Розгляньте випадки, коли: $A \in a$; $A \notin a$.

128. Пряма a лежить у площині α, пряма b перетинає її, але не перетинає пряму a. Доведіть, що через прямі a і b не можна провести площину.

129. У просторі дано три прямі a, b і c. Дослідіть, яким може бути взаємне розміщення прямих a і b залежно від взаємного розміщення прямих:

1) a і c; 2) b і c.

130. Скільки пар ребер призми лежать на мимобіжних прямих, якщо призма:

1) трикутна; 2) чотирикутна?

131. Скільки пар ребер піраміди лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда:

1) трикутна; 2) чотирикутна?

132. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими:

1) DA_1 і BC_1; 2) BA_1 і BC_1; 3) AD і CC_1.

133. На прямих AD і BC лежать основи трапеції $ABCD$. Знайдіть відстань між даними прямими, якщо:

1) $AB = CD = 17$, $AD = 8$, $BC - AD = 16$;
2) $AB = 14$, $AD = 8$, $CD = 15$, $BC = 21$.

134*. Доведіть, що якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

135*. Якщо дані прямі не проходять через одну точку й кожні дві з них перетинаються, то всі вони лежать в одній площині. Доведіть.

136*. Вершини чотирикутника не лежать в одній площині. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини його протилежних сторін, перетинаються і в точці перетину діляться навпіл.

137*. Доведіть, що вершини чотирикутника лежать в одній площині, якщо у нього перетинаються або діагоналі, або продовження двох несуміжних сторін.

138*. Скільки пар мимобіжних прямих визначають пари з:

1) чотирьох точок;
2) п'яти точок;
3) n точок?

139*. Дано правильну трикутну призму, в якої бічне ребро вдвічі довше за ребро основи. Знайдіть кут між мимобіжними:

1) ребрами; 2) діагоналями граней.

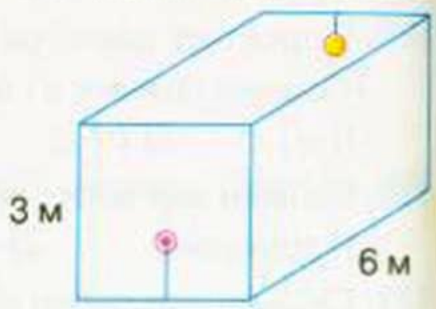
140*. Знайдіть відстань між паралельними ребрами правильної шестикутної призми, в якої ребро основи дорівнює бічному ребру, що має довжину 5 см.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

141. Як за допомогою двох ниток установити, чи буде стіл з чотирма ніжками стояти на рівній підлозі стійко?

142. На подвір'ї (площина α) розміщено колодязь (точка A), прокладено доріжку (пряма a) і встановлено стовп з ліхтарем (пряма b).
У площині α проведіть пряму, яка: 1) перетинає прямі a і b; 2) перетинає пряму b і паралельна прямій a; 3) перетинає прямі a і b та проходить через точку A. Сформулюйте відповідні практичні задачі.

143. Необхідно з'єднати проводкою вимикач і світильник в кімнаті довжиною 6 м, шириною 3 м і висотою 3 м. Вимикач знаходиться посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а світильник — посередині протилежної стіни на відстані 1 м від стелі (мал. 97). Як треба провести проводку, щоб її довжина була найкоротшою?



Мал. 97

144. Як визначити кут між мимобіжними прямими у класній кімнаті?

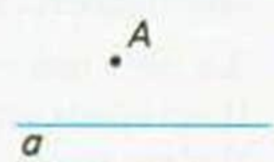
§4. ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

З курсу планіметрії ви знаєте, що через точку, яка не лежить на прямій, можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій. Це твердження було прийнято як аксіому в планіметрії. Воно справджується в кожній площині простору. Однак у просторі це твердження потребує доведення.

Теорема (основна властивість паралельних прямих у просторі). Через точку, яка не лежить на даній прямій, у просторі можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну.

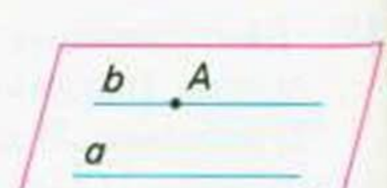
Дано: пряма a, точка A, $A \notin a$ (мал. 98).

Довести: існує тільки одна пряма $b \parallel a$, що $A \in b$.



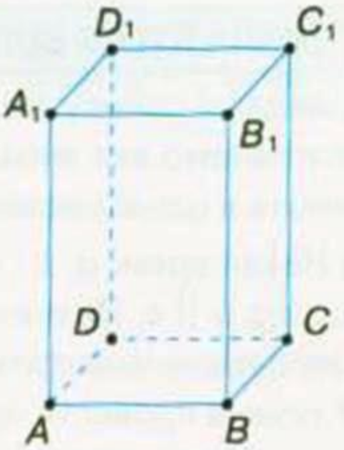
Мал. 98

Доведення. За наслідком 1 з аксіом стереометрії, через пряму a і точку A можна провести площину α і до того ж тільки одну.
У площині α, за аксіомою паралельних прямих, через точку A можна провести пряму b, паралельну прямій a, і тільки одну (мал. 99). Отже, у просторі через точку A можна провести тільки одну пряму $b \parallel a$.



Мал. 99

З означення паралельних прямих та доведеної теореми випливає, що **через дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну.**



Мал. 100

Пам'ятайте, що у просторі справджуються всі властивості двох паралельних прямих, які ви вивчали в планіметрії.

На малюнку 100 ви бачите прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Його бічні грані – прямокутники. У кожного з них протилежні сторони попарно паралельні. Тому прямі, що містять протилежні ребра кожної бічної грані паралелепіпеда, попарно паралельні. Наприклад, прямі AA_1 і BB_1, AB і A_1B_1 – паралельні.

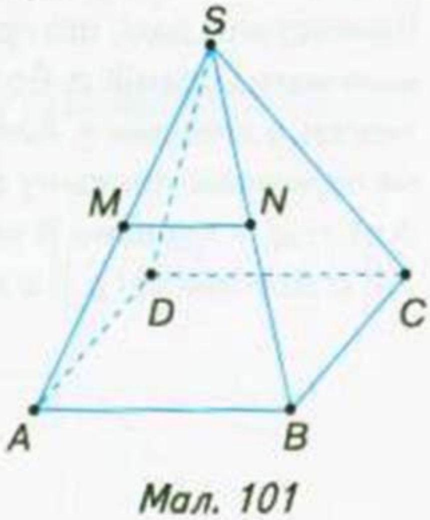
? Ви дізналися, що $AA_1 \parallel BB_1$ і $BB_1 \parallel CC_1$ (мал. 100). Чи правильно, що $AA_1 \parallel CC_1$? Так, але у просторі цей факт потребує доведення, бо прямі AA_1, BB_1 і CC_1 не лежать в одній площині.

Теорема (ознака паралельності прямих).
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Існує кілька способів доведення ознаки паралельності прямих. Спосіб, який можна застосувати зараз, є досить складним. Його ми наводимо в рубриці «Дізнайтеся більше». У §6 ви ознайомитесь з більш простим доведенням цієї ознаки.

Ознака паралельності прямих дає змогу довести, що всі бічні ребра паралелепіпеда на малюнку 100 лежать на паралельних прямих. Доведіть це самостійно.

Задача. *MN* – середня лінія бічної грані *SAB* правильної чотирикутної піраміди *SABCD* (мал. 101). Доведіть, що $MN \parallel CD$.



Мал. 101

Розв'язання. Бічними гранями піраміди є трикутники. *MN* – середня лінія в ΔSAB, тому $MN \parallel AB$. $AB \parallel CD$, оскільки основа даної піраміди – квадрат *ABCD*. Отже, за ознакою паралельності прямих, $MN \parallel CD$.

Щоб встановити паралельність двох прямих, покажіть, що:
або існує пряма, якій паралельна кожна з даних прямих,

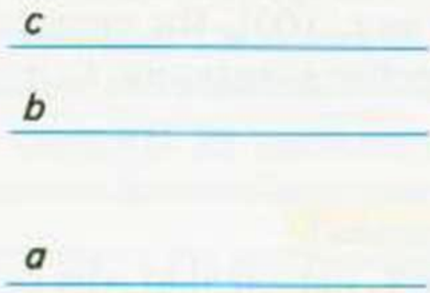
або відрізки даних прямих є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою і середньою лінією трикутника тощо).

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

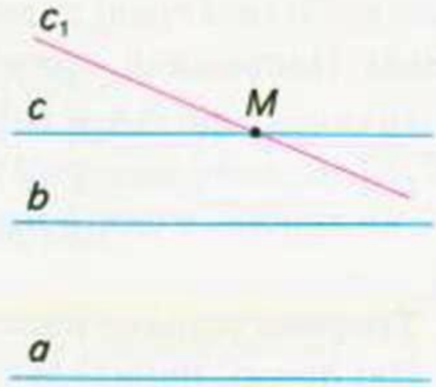
Доведемо ознаку паралельності прямих.

Розглянемо два випадки: 1) дані прямі лежать в одній площині; 2) дані прямі не лежать в одній площині.

1) Нехай прямі a, b і c лежать в одній площині, $a \parallel b$ і $a \parallel c$ (мал. 102). Доведемо, що $b \parallel c$. Позначимо довільну точку M на прямій c. Припустимо, що пряма c не паралельна прямій b. Тоді, за аксіомою паралельних прямих, через точку M можна провести пряму c_1, паралельну прямій b (мал. 103). Дістали, що через точку M проходять дві прямі — c і c_1, паралельні прямій a, що неможливо. Отже, наше припущення було неправильним, а правильним є те, що $b \parallel c$.

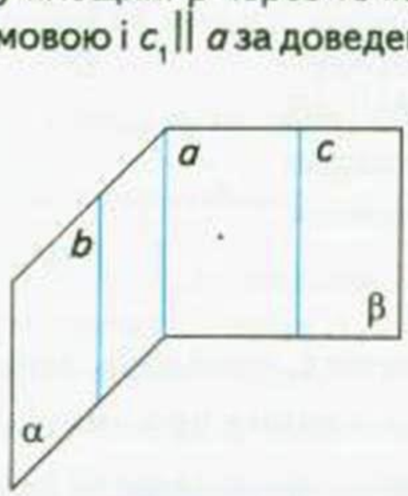


Мал. 102



Мал. 103

2) Нехай прямі a, b і c не лежать в одній площині, $a \parallel b$ і $a \parallel c$. Доведемо, що $b \parallel c$. Проведемо через паралельні прямі a і b площину α, а через паралельні прямі a і c — площину β (мал. 104). Через довільну точку M прямої c і пряму b проведемо площину γ. За аксіомою 4 стереометрії, площина γ перетинає площину β по прямій. Припустимо, що це деяка пряма c_1, відмінна від прямої c (мал. 105). Припустимо далі, що пряма c_1 перетинає площину α. Тоді точка їх перетину має належати і прямій a, бо прямі a і c_1 лежать у площині β, і прямій b, бо прямі b і c_1 лежать у площині γ. Але, за умовою, $a \parallel b$. Дістали суперечність. Отже, пряма c_1 не перетинає площину α, а значить, не може перетинати і пряму a, тобто $c_1 \parallel a$. Але тоді у площині β через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a: $c \parallel a$ за умовою і $c_1 \parallel a$ за доведеним. Дістали суперечність з аксіомою паралель-



Мал. 104

Мал. 105

них прямих. Отже, пряма c_1 збігається з прямою c. Звідси випливає, що пряма c лежить у площині γ і не перетинає площину α. Дістали, що прямі b і c лежать в одній площині γ і не перетинаються. Отже, $b \parallel c$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як формулюється аксіома паралельних прямих?
2. Сформулюйте і доведіть основну властивість паралельних прямих у просторі.
3. Які властивості паралельних прямих?
4. Як формулюється ознака паралельності прямих?
5. Поясніть, як можна встановити паралельність двох прямих.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

145'. Проведіть пряму a і позначте точку A, що не лежить на ній. Проведіть пряму AB паралельно прямій a. Скільки таких прямих можна провести: 1) на площині; 2) у просторі?

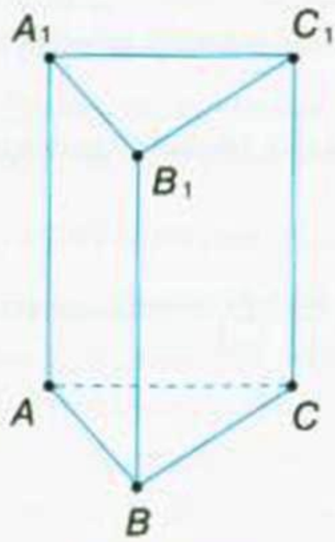
146'. За допомогою навколишніх предметів проілюструйте основну властивість паралельних прямих: 1) на площині; 2) у просторі.

147'. На малюнках 106 – 108 назвіть:
1) пари паралельних прямих;
2) площину, що проходить через певну пару паралельних прямих.

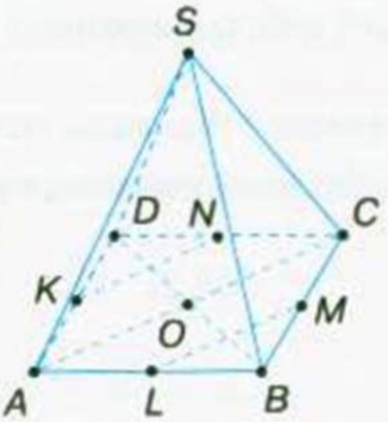
148'. Скільки площин можна провести через дві паралельні прямі? Наведіть приклад з довкілля.

149'. За малюнком 108 назвіть ребро паралелепіпеда, яке паралельне даному ребру і не лежить з ним в одній грані:
1) AA_1; 2) BB_1; 3) AB; 4) BC.

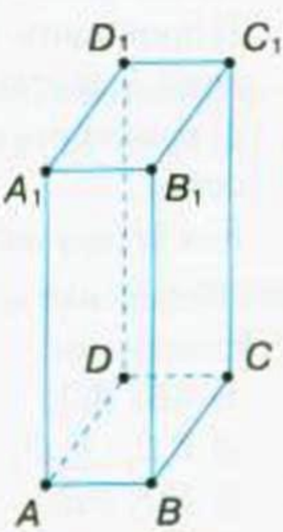
150'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності прямих.



Мал. 106



Мал. 107



Мал. 108

151°. Скільки ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходить через дану його вершину паралельно заданому ребру:

1) A і B_1C_1;

2) D і BB_1;

3) C_1 і AA_1?

Відповідь обґрунтуйте.

152°. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть діагональ його грані, що проходить через дану вершину паралельно вказаній прямій:
1) A і B_1D_1; 2) D_1 і BC_1; 3) B і A_1C_1.

153°. Відрізок AB має з площиною α спільну точку A. Через точку B і середину C відрізка AB проведено паралельні прямі, що перетинають площину α відповідно в точках B_1 і C_1.

Чи лежать в одній площині прямі BB_1 і CC_1?

Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:

1) $BB_1 = 12$ см; 2) $BB_1 = 9$ см; 3) $BB_1 = 32$ см.

154°. Відрізок AB не перетинає площину α. Через кінці відрізка AB і його середину C проведено паралельні прямі, що перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Чи лежать в одній площині прямі AA_1, BB_1 і CC_1?

Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо:

1) $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 12$ см;

2) $AA_1 = 15$ см, $BB_1 = 9$ см;

3) $AA_1 = 18$ см, $BB_1 = 32$ см.

155°. Сформулюйте властивості паралельних прямих, які ви вивчали у планіметрії.

156°. З планіметрії відомо, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й другу. Чи є правильним це твердження у стереометрії?

157°. У кубі проведіть січну площину, яка:

1) проходить через ребро нижньої основи і перетинає верхню основу паралельно даному ребру;

2) проходить через ребро верхньої основи і перетинає нижню основу паралельно даному ребру;

3) проходить через бічне ребро і перетинає бічну грань паралельно даному ребру.

Яку фігуру дістали в перерізі? Відповідь поясніть.

158°. Перерізом прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник зі сторонами:

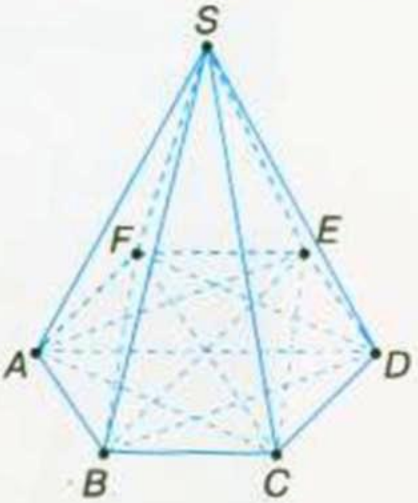
1) AB і AD_1;

2) B_1C_1 і C_1D;

3) BD і BB_1.

Яким прямим паралельні сторони перерізу?

159*. Дано правильну шестикутну піраміду *SABCDEF* (мал. 109). Яким сторонам або діагоналям основи паралельна пряма, що проходить через середину ребра *SA* і середину ребра:
1) *SB*; 2) *SC*; 3) *SD*?
Відповідь поясніть.



Мал. 109

160*. Дві паралельні прямі *a* і *b* відповідно паралельні прямим *c* і *d*.
Яке взаємне розміщення прямих:
1) *a* і *c*; 2) *a* і *d*;
3) *b* і *c*; 4) *b* і *d*?

161. **Усі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині. Доведіть.**

162. Прямі *a* і *b* перетинаються. Доведіть, що усі прямі, які паралельні прямій *a* і перетинають пряму *b*, лежать в одній площині.

163. Прямі *a* і *b* не лежать в одній площині.
Чи можна провести пряму *c*, яка:
1) паралельна прямим *a* і *b*;
2) проходить через дану точку і перетинає прямі *a* і *b*?

164. Чи існують дві паралельні прямі, кожна з яких перетинає дані мимобіжні прямі?

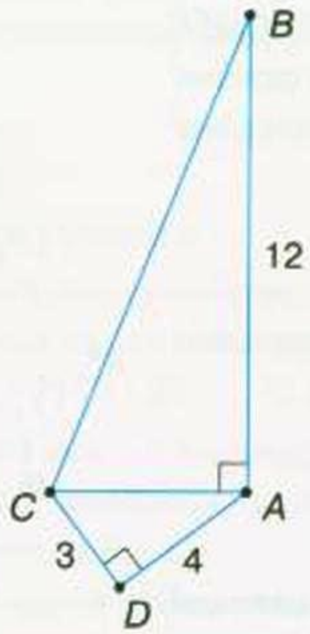
165. **Доведіть, що перерізом прямої призми площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, є многокутник, що дорівнює многокутнику основи.**

166. Січна площина проходить через середини бічних ребер правильної *n*-кутної піраміди зі стороною основи *a*. Який многокутник дістали в перерізі? Знайдіть його периметр і площу, якщо:
1) $n = 3$, $a = 4$ см; 2) $n = 4$, $a = 6$ см.

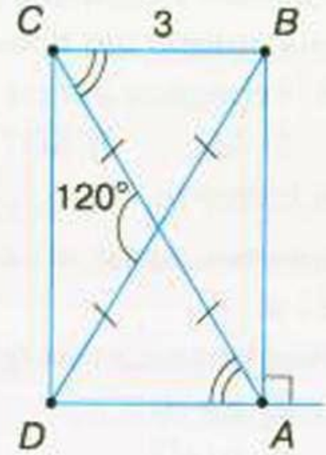
167. Доведіть, що перерізом довільної піраміди площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, є многокутник, подібний до многокутника основи з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.

168. Точка *M* лежить поза площиною трикутника *ABC*. Точки *K*, *P*, *E* і *F* — середини відрізків *MA*, *AB*, *MC*, *BC*.
Як розміщені прямі: 1) *KP* і *EF*; 2) *KE* і *PF*?
Відповідь обґрунтуйте.

169. Точки *A*, *B*, *C* і *D* не лежать в одній площині.
Доведіть, що середини сторін чотирикутника *ABCD* лежать в одній площині.
Вершинами якого чотирикутника є ці точки?



Мал. 110



Мал. 111

170*. Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці яких лежать на даних паралельних прямих, належать не одній площині.

171*. Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці яких лежать на даних мимобіжних прямих, належать не одній площині.

172*. Доведіть, що діагоналі протилежних граней прямокутного паралелепіпеда, які проведено з кінців одного ребра, паралельні.

173*. Існує площина, яка перетинає бічні ребра чотирикутної піраміди так, що в перерізі утворюється паралелограм.
Доведіть.

174*. В основі піраміди лежить многокутник, зображений на малюнках 110, 111. Січна площина ділить кожне бічне ребро піраміди у відношенні 2 : 1, рахуючи від її вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

175*. На сторонах просторового чотирикутника *ABCD* взято точки A_1, B_1, C_1 і D_1 так, що $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{AD_1}{D_1D} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{CB_1}{B_1B}$.
Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм.

176*. Доведіть, що куб можна перетнути січною площиною так, щоб у перерізі утворився правильний шестикутник.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

177. Щоб провести пряму лінію на землі, використовують два кілочки і мотузку. Поясніть, як це роблять. На якій властивості паралельних прямих ґрунтується така побудова?

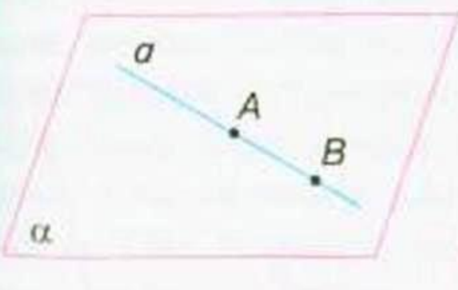
178. Майстриня прикрашає сорочку вишиваними смужками, розміщуючи їх на лівій і правій полах сорочки паралельно лінії ґудзиків. Чому в готовому виробі смужки виглядають паралельними?

179. На певній ділянці автостради її смуги розділені суцільною лінією (її не можна перетинати). Чи можуть на цій ділянці зіткнутися автомобілі законослухняних водіїв, що рухаються назустріч один одному? Відповідь поясніть.

180. Щоб естетично розмістити на стіні картину прямокутної форми, один з її горизонтальних країв вирівнюють відносно стику цієї стіни і стелі. На чому ґрунтується такий спосіб?

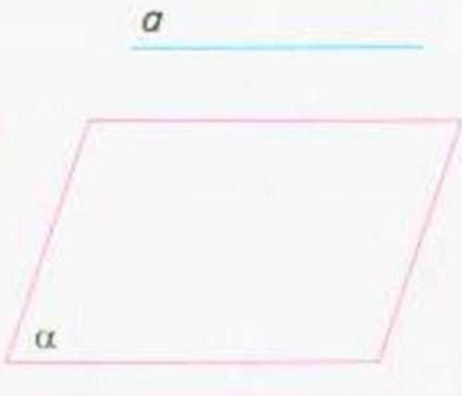
§5. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Можливі три випадки взаємного розміщення прямої і площини: 1) пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма *лежить у* площині (мал. 112); 2) пряма і площина мають одну спільну точку, тобто *перетинаються* (мал. 113); 3) пряма і площина не мають спільних точок, тобто *не перетинаються* (мал. 114).



Мал. 112

Мал. 113



Мал. 114

Пряма і площина, які не перетинаються, називаються ***паралельними.***

Для трьох випадків взаємного розміщення прямої і площини вживатимемо відповідні позначення: $a \in \alpha$, $a \times \alpha$, $a \parallel \alpha$.

? Як встановити, що пряма паралельна площині? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема (ознака паралельності прямої і площини).
Якщо пряма, що не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

Дано: площина α, пряма a не лежить в α, пряма b лежить в α, $a \parallel b$ (мал. 115).

Довести: $a \parallel \alpha$.

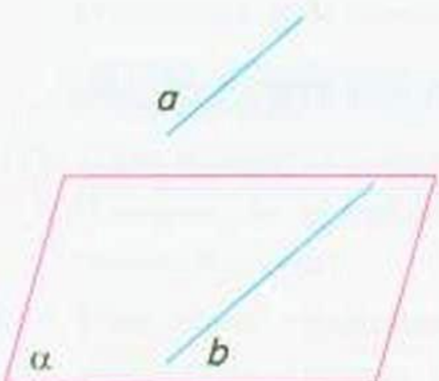
Доведення. Проведемо площину β через паралельні прямі a і b (мал. 116). Площини α і β перетинаються по прямій b. Припустимо, що пряма a не паралельна площині α, а перетинає цю площину в деякій точці M (мал. 117). Ця точка лежить у даній площині α і площині β, тому вона лежить на прямій b перетину площин α і β. Отже, прямі a і b перетинаються. А це неможливо, бо $a \parallel b$ за умовою. Отже, наше припущення неправильне, а правильним є те, що пряма a не перетинає площину α, тобто $a \parallel \alpha$.

Спосіб доведення від супротивного полягає в тому, що:

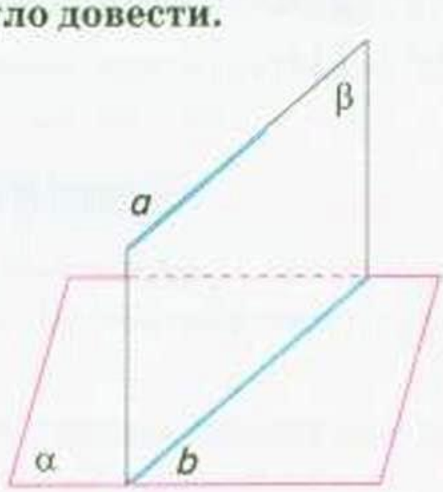
1) робимо припущення, протилежне тому, що треба довести;

2) міркуваннями доходимо до висновку, що суперечить або умові твердження, що доводиться, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі, або припущенню;

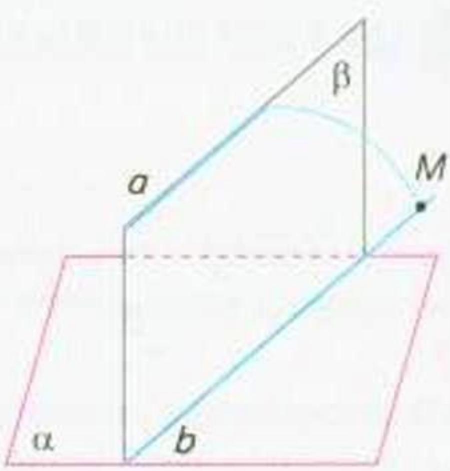
3) робимо висновок – наше припущення неправильне, а тому правильним є те, що треба було довести.



Мал. 115

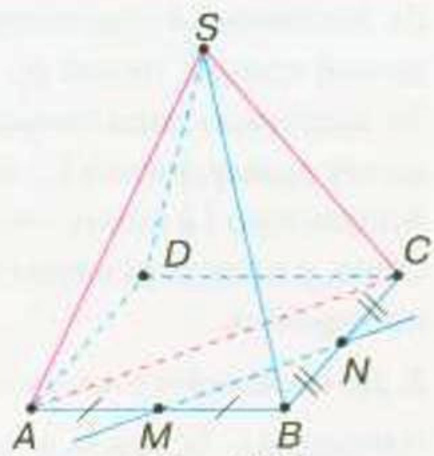


Мал. 116



Мал. 117

Задача. У піраміді $SABCD$ через ребра SA і SC проведено площину (мал. 118). Чи паралельна вона прямій MN, що проходить через середини ребер AB і BC?



Мал. 118

Розв'язання. Відрізок MN – середня лінія трикутника ABC. Оскільки $MN \parallel AC$, а AC лежить у площині SAC, то пряма MN паралельна площині SAC.

Щоб встановити паралельність прямої і площини, покажіть, що:

або в площині існує пряма, якій паралельна дана пряма,

або відрізки даної прямої і прямої, що лежить у даній площині, є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою і середньою лінією трикутника тощо), який не лежить у даній площині.

Взаємне розміщення прямої і площини подано в таблиці 5.

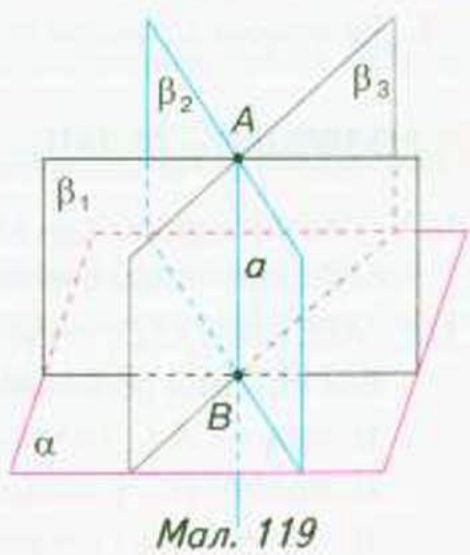
Таблиця 5

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Пряма a і площина α	мають безліч спільних точок	пряма лежить у площині	a лежить в α
	мають одну спільну точку	пряма перетинає площину	$a \times \alpha$
	не мають спільних точок	пряма паралельна площині	$a \parallel \alpha$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас могло виникнути запитання: *Чи є правильним твердження «Через точку, що не лежить у площині, можна провести єдину пряму, паралельну даній площині»?* Поміркуємо.

Через точку A, що не лежить у площині α, проведемо пряму a, що перетинає дану площину в деякій точці B (мал. 119). За наслідком 3 з аксіом стереометрії, через пряму a в просторі можна провести безліч площин. Позначимо їх β_1, β_2, β_3, ...



Мал. 119

За аксіомою 4 стереометрії, кожна із цих площин перетинатиме площину α по деякій прямій, нехай b_1, b_2, b_3, ...

За аксіомою паралельних прямих, у площині β_1 через точку A можна провести єдину пряму, нехай c_1, паралельну прямій b_1.

Аналогічно і в інших площинах можна провести $c_2 \parallel b_2$, $c_3 \parallel b_3$ ... .

Отже, **у просторі через точку A можна провести безліч прямих, паралельних площині α.**

2. До особливого класу теорем належать так звані *теореми існування і єдиності.*

Наприклад, основна властивість паралельних прямих у просторі:

через точку, яка не лежить на прямій, у просторі $\underbrace{\text{можна провести пряму, паралельну даній прямій,}}_{\textit{існування}}$ і $\underbrace{\text{тільки одну}}_{\textit{єдиність}}$.

У «Началах» Евкліда (ІІІ ст. до н. е.) теореми існування і єдиності відіграють ключову роль. Стародавні грецькі математики не допускали існування фігури незалежно від побудови. За Евклідом, геометрична фігура існує лише з моменту її побудови. Тому доведення існування часто містять правила побудови відповідних фігур чи їх комбінацій. Для доведення єдиності застосовується метод від супротивного.

3. Метод доведення від супротивного ґрунтується на *законі виключеного третього*: з двох тверджень «T» і «не T» одне є істинним, а друге — хибним, третього не дано.

Цей закон сформулював давньогрецький вчений Арістотель (384 – 322 до н. е.) у своїй праці «Метафізика».

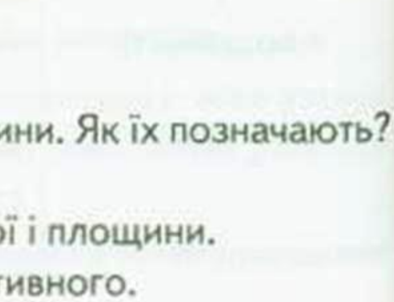
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і площини. Як їх позначають?
2. Дайте означення паралельних прямої і площини.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.
5. Як можна встановити паралельність прямої і площини?

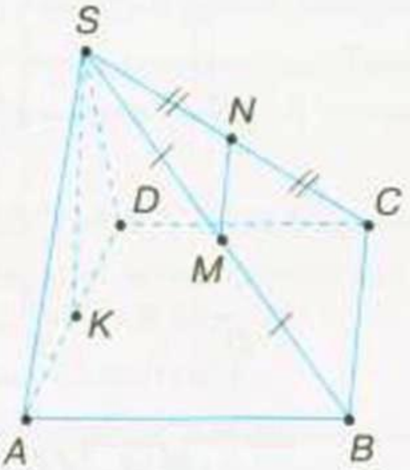
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

181'. Наведіть приклади взаємного розміщення прямої і площини на предметах класної кімнати.

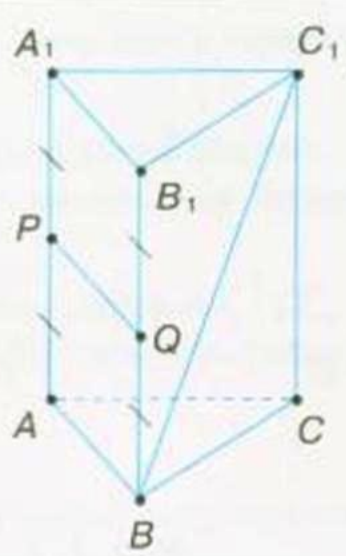
182'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 120).
Яке взаємне розміщення:
1) прямої A_1C_1 і площини ABC;
2) прямої BC_1 і площини $D_1A_1B_1$;
3) прямої AD_1 і площини BCC_1?



Мал. 120



Мал. 121



Мал. 122

183°. На малюнках 121, 122 назвіть:

1) прямі, що лежать у площині *ABC*;

2) прямі, що перетинають площину *ABC*;

3) прямі, паралельні площині *ABC*.

Зробіть відповідні записи.

184°. Чому пряма не може перетинати площину більше ніж в одній точці? Відповідь обґрунтуйте.

185°. Пряма a паралельна площині α. Чи існують у даній площині прямі, не паралельні прямій a? Проведіть одну з них.

186°. Чи правильно, що пряма, паралельна площині, є паралельною будь-якій прямій, що лежить у даній площині?

187°. Чи може пряма a перетинати площину α, коли паралельні їй прямі лежать у цій площині?

188°. Чи правильно, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то і друга пряма паралельна цій площині?

189°. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть пряму KP, яка:

1) лежить у площині грані BCC_1B_1, проходить через середину ребра BB_1 і паралельна площині $A_1B_1C_1$;

2) лежить у площині грані $ABCD$, проходить через середину ребра CD і паралельна площині AA_1D_1;

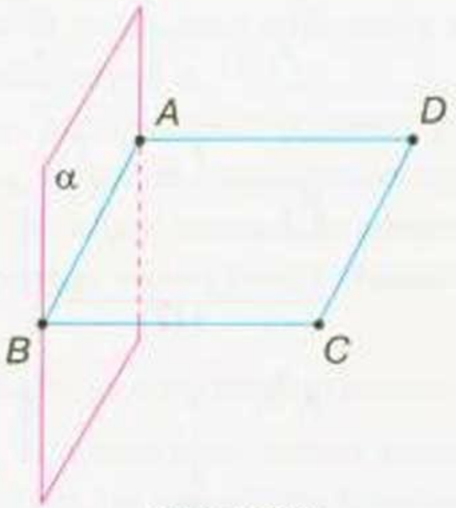
3) лежить у площині грані ABB_1A_1, проходить через середину ребра A_1B_1 і паралельна площині AA_1D_1.

190°. Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник. У площині її грані через середину бічного ребра проведено пряму EF паралельно площині основи. Якою може бути довжина відрізка EF, якщо сторони основи піраміди дорівнюють:

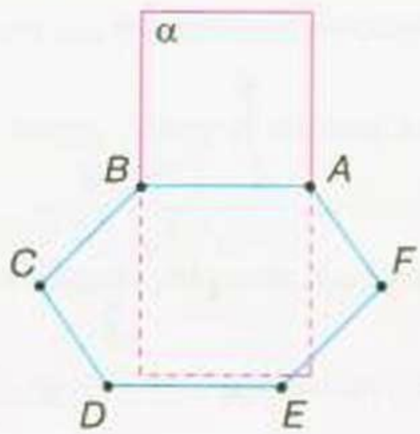
1) 4 см і 6 см;

2) 3 см і 7 см;

3) 2 см і 5 см?



Мал. 123



Мал. 124

191°. *ABCD* — паралелограм. Площина α перетинає площину паралелограма по прямій:

1) *AB* (мал. 123); 2) *BC*; 3) *CD*.

Яке розміщення інших сторін паралелограма відносно площини α?

192°. *ABCDEF* — правильний шестикутник. Площина α перетинає площину шестикутника по прямій:

1) *AB* (мал. 124); 2) *CD*; 3) *EF*.

Яке розміщення інших сторін і діагоналей шестикутника відносно площини α?

193°. Трикутник *ABC* не лежить в одній площині з другим трикутником, але має з ним спільну сторону:

1) *AB*; 2) *BC*; 3) *AC*.

Доведіть, що одна із середніх ліній $\Delta\ ABC$ паралельна площині другого трикутника.

194°. Площина α паралельна стороні *AB* трикутника *ABC* і перетинає сторони *AC* і *BC* в точках *K* і *N*, причому $BN = NC$.

Доведіть, що $KN \parallel AB$ і знайдіть довжину сторони *AB*, якщо:

1) $KN = 9$ см, $AC = 24$ см, $KC = 12$ см;

2) $KN = 8$ см, $AC = 18$ см, $KC = 9$ см;

3) $KN = 11$ см, $AC = 16$ см, $KC = 8$ см.

195. Дві прямі паралельні одній площині. Чи паралельні вони між собою?

196. Паралельні прямі *a* і *b* не лежать у площині α. Якщо $a \parallel \alpha$, то і $b \parallel \alpha$. Доведіть.

197. Пряма *a* паралельна площині α. Чи правильно, що будь-яка пряма, що проходить через деяку точку площини α паралельно прямій *a*, лежить у площині α?

198. Площина α перетинає дві сторони трикутника і ділить їх у відношенні $m : n$. Яке розміщення даної площини відносно третьої сторони трикутника, якщо:

1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 2$, $n = 3$?

Скільки випадків треба розглянути?

199. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.

200. Прямі a і b перетинаються. Точка A не лежить на даних прямих. Чи можна через точку A провести площину, паралельну кожній з даних прямих?

201. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину через ребра AA_1 і CC_1. Чи паралельна вона прямій, що проходить через середини ребер:
1) AB і BC; 2) A_1D_1 і CD?
Відповідь обґрунтуйте.

202. В основі піраміди з вершиною S лежить правильний шестикутник $ABCDEF$. Чи можна в грані SAB провести відрізок, паралельний площині:
1) ABC; 2) SCD;
3) SCE; 4) SAF?

203. Точки A і B лежать у сусідніх бічних гранях призми. Як у площинах цих граней провести паралельні прямі, що проходять відповідно через точку A і точку B?

204. Чи може площина, яка проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати третю його сторону?

205. Дано: 1) квадрат; 2) правильний шестикутник. Площину α проведено паралельно одній із сторін даного многокутника. Дослідіть, як може розміщуватися площина α відносно інших сторін даного многокутника.

206*. Доведіть, що існує безліч площин, які перетинають дану пряму.

207*. Чи можна побудувати площину, яка проходить через дану пряму паралельно:
1) другій даній прямій;
2) двом іншим даним прямим?

208*. Дано довільну піраміду. Доведіть, що прямі, які проходять через середини двох бічних ребер піраміди, паралельні її основі.

209*. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник.
Чи паралельна площина ACC_1 прямій, що проходить через:
1) вершину F і середину ребра DD_1;
2) вершину D і середину ребра E_1F_1?

210*. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму AB і паралельні прямій CD, що є мимобіжною з AB, лежать в одній площині.

211*. Доведіть, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і цією точкою діляться навпіл.

212*. Вершини чотирикутника не лежать в одній площині. Доведіть, що площина, яка паралельна двом мимобіжним сторонам даного чотирикутника, ділить дві інші його сторони на пропорційні відрізки.

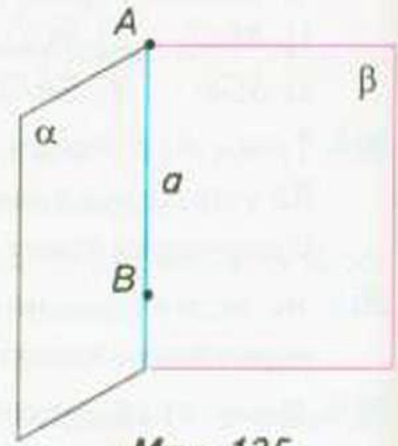
213*. Побудуйте лінію перетину площин двох трикутників, у яких одна вершина спільна, а протилежні їй сторони паралельні.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

214. Яке взаємне розміщення моста через річку (пряма a), напряму її течії (пряма b) і площини водної поверхні (площина α)?

215. Розмічаючи верхній край панелі на стіні, його вирівнюють відносно плінтуса. Чи паралельні край панелі й площина підлоги? Відповідь поясніть.

§6. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН



Мал. 125

Ви вже знаєте, що дві площини можуть або перетинатися, або не перетинатися.

1. ПЛОЩИНИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

За аксіомою 4 стереометрії, якщо дві площини мають спільну точку, то вони *перетинаються* по прямій, яка проходить через цю точку (мал. 125). Кожна точка цієї прямої належить обом площинам.

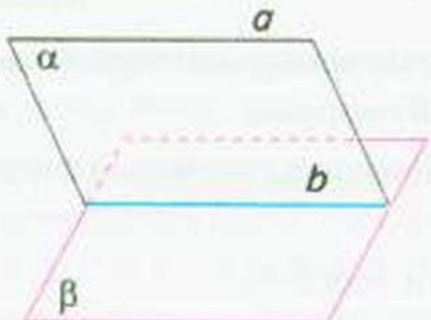
Площини α і β, що перетинаються, позначаємо: $\alpha \times \beta$.

Теорема (властивість площин, що перетинаються).
Якщо одна з двох площин, що перетинаються, проходить через пряму, паралельну другій площині, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

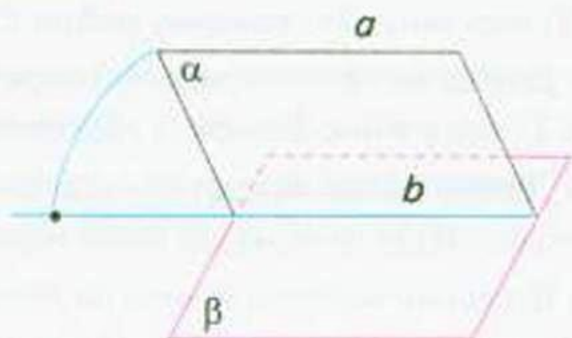
Дано: $\alpha \times \beta$, a лежить в α і $a \parallel \beta$, b лежить в α і β (мал. 126).

Довести: $b \parallel a$.

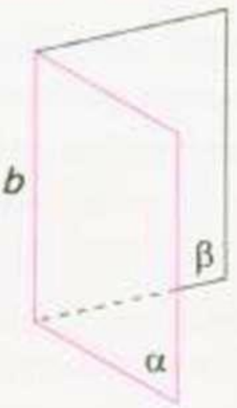
Доведення. За умовою, пряма b лежить в одній площині α з прямою a. Пряма b не може перетинатися з прямою a, бо інакше пряма a перетиналася б із площиною β (мал. 127), а це неможливо.



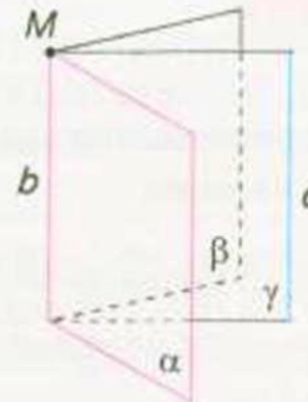
Мал. 126



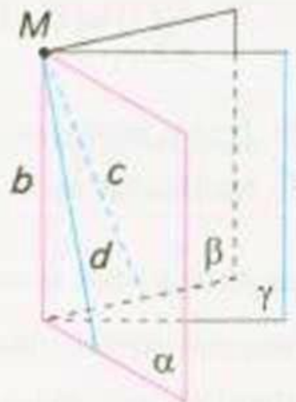
Мал. 127



Мал. 128



Мал. 129



Мал. 130

Наслідок (властивість площин, що перетинаються). Якщо пряма паралельна кожній з двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину.

Нехай площини α і β перетинаються по прямій b і пряма a паралельна обом даним площинам: $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$ (мал. 128). Доведемо, що $a \parallel b$.

Проведемо площину γ через пряму a і довільну точку M прямої b (мал. 129). Припустимо, що площина γ перетинає площини α і β відповідно по прямих c і d, які не збігаються з прямою b (мал. 130).

За властивістю площин, що перетинаються, $a \parallel c$ і $a \parallel d$. Дістали, що через точку M проходять дві прямі – c і d, паралельні прямій a, що неможливо. Отже, прямі c, d і b збігаються, а значить, $a \parallel b$.

Наведені властивості площин, що перетинаються, можна вважати ознаками паралельності двох прямих у просторі.

Задача. Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою. Доведіть, спираючись на властивості площин, які перетинаються.

Розв'язання. Нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (мал. 131). Доведемо, що $a \parallel b$.

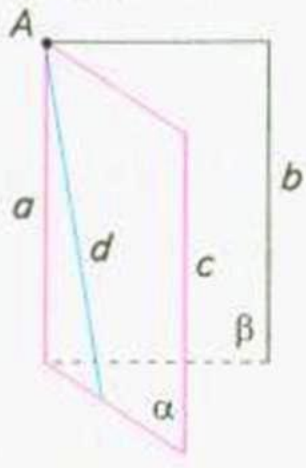
Через прямі a і c проведемо площину α.

Оскільки $b \parallel c$, то $b \parallel \alpha$ (за ознакою паралельності прямої і площини).

Через пряму b і довільну точку A прямої a проведемо площину β.

Оскільки $c \parallel b$, то $c \parallel \beta$ (за ознакою паралельності прямої і площини). Отже, за властивістю площин, що перетинаються, площини α і β мають перетинатися по прямій, яка паралельна прямій c і проходить через точку A. Позначимо її d. Дістали, що в площині α через точку A проходять дві прямі — a і d, паралельні прямій c, що неможливо.

Отже, прямі a і d збігаються, а значить, $a \parallel b$.



Мал. 131

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ

Дві площини, які не перетинаються, називаються ***паралельними***.

Паралельність площини α і β позначаємо: $\alpha \parallel \beta$.

Як встановити, що дві площини паралельні?

Відповідь дає така теорема.

Теорема (ознака паралельності площин).
Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Дано: площини α і β, прямі a і b площини α, $a \times b$, прямі a_1 і b_1 площини β, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (мал. 132).

Довести: $\alpha \parallel \beta$.

Доведення. Оскільки прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1, то $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$ (за ознакою паралельності прямої і площини).

Припустимо, що площини α і β не паралельні, а перетинаються по деякій прямій MN (мал. 133).

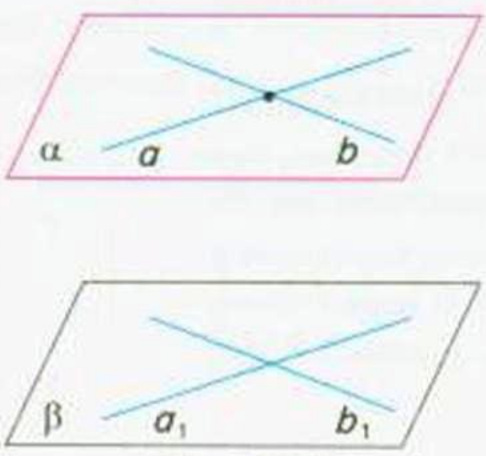
Площина α проходить через пряму a, паралельну площині β, і перетинає цю площину по прямій MN. Тоді, за властивістю площин, що перетинаються, $MN \parallel a$.

Так само, площина α проходить через пряму b, паралельну площині β, і перетинає цю площину по прямій MN.

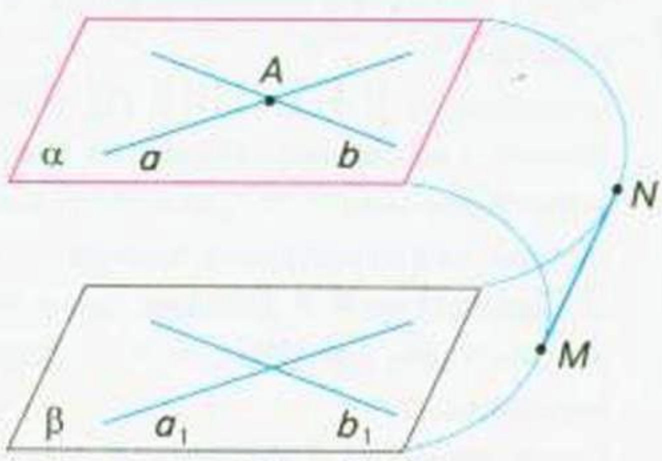
Тоді $MN \parallel b$.

Дістали, що у площині α через точку A проходить дві прямі a і b, паралельні прямій MN. А це суперечить основній властивості паралельних прямих.

Отже, площини α і β не перетинаються, тобто $\alpha \parallel \beta$.



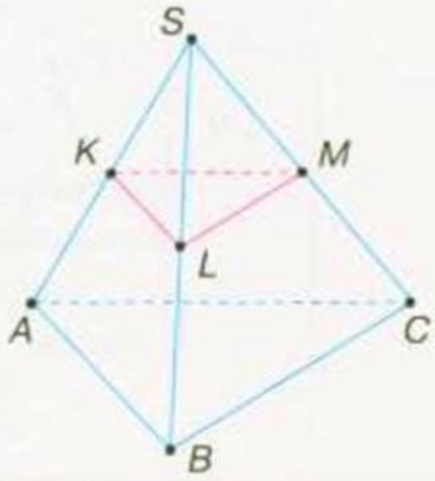
Мал. 132



Мал. 133

Задача. Через середини бічних ребер піраміди *SABC* проведено площину *KLM* (мал. 134). Доведіть, що ця площина паралельна площині основи піраміди.

Розв'язання. Відрізки *KL* і *LM* — середні лінії трикутників *SAB* і *SBC*. Звідси $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. За ознакою паралельності площин, площина *KLM* паралельна площині *ABC*.



Мал. 134

Приймемо без доведення наступну теорему.

Теорема (основна властивість паралельних площин). Через точку, яка не лежить у площині, можна провести площину, паралельну даній площині, і тільки одну.

Взаємне розміщення двох площин наведено в таблиці 6.

Таблиця 6

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві площини α і β	мають спільну точку	перетинаються	$\alpha \times \beta$
	не мають спільних точок	паралельні	$\alpha \parallel \beta$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас може виникнути запитання: *Як довести основну властивість паралельних площин?*

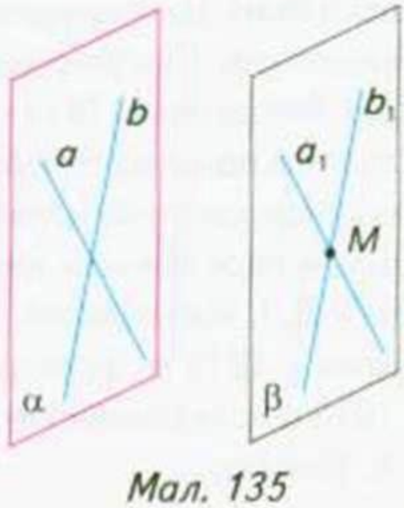
Нехай α — дана площина, а *M* — точка, що не лежить у ній.

Треба довести, що:

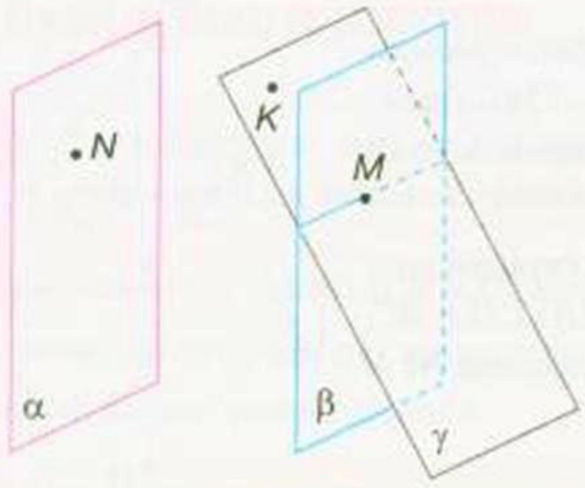
1) через точку *M* можна провести площину β, паралельну площині α;

2) площина β — єдина.

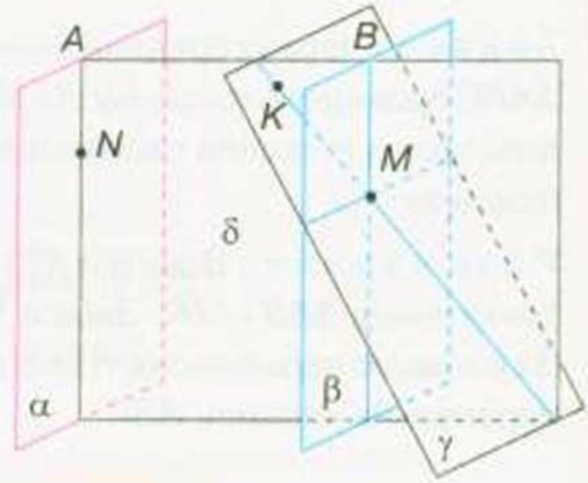
1) Проведемо у площині α дві прямі *a* і *b*, що перетинаються. За основною властивістю паралельних прямих, через точку *M* можна провести прямі a_1 і b_1, паралельні прямим *a* і *b*. За наслідком 2 з аксіом стереометрії, через прямі a_1 і b_1 можна провести площину β (мал. 135). За ознакою паралельності площин, $\beta \parallel \alpha$.



Мал. 135



Мал. 136



Мал. 137

2) Припустимо, що через точку *M* можна провести другу площину γ, паралельну площині α (мал. 136). У площині γ візьмемо довільну точку *K*, що не лежить у площині β, а у площині α — точку *N*. Через точки *M*, *K* і *N* проведемо площину δ (мал. 137). Вона перетне площину α по прямій *NA*, площину β — по прямій *MB*, а площину γ — по прямій *MK*. Прямі *MB* і *MK* не можуть перетинати пряму *NA*, бо вони не перетинають площину α, оскільки лежать у площинах β і γ, які, за припущенням, обидві паралельні площині α. Дістали, що у площині δ через точку *M* проходять дві прямі — *MB* і *MK*, паралельні прямій *NA*, а це неможливо. Отже, площина β — єдина.

2. Термін «класифікація» походить від латинських слів *classis* — розряд і *facio* — роблю. У загальному розумінні, *класифікація* — це розподіл деяких предметів на класи відповідно до найбільш суттєвої ознаки, що притаманна предметам даного роду і відрізняє ці предмети від предметів іншого роду. При цьому кожен клас предметів ділиться на підкласи. Суттєва ознака, що дає підстави здійснити класифікацію, називається *основою класифікації*. Вам добре відомі класифікації у різних галузях знань. Наприклад, у зоології — живих істот, що населяють нашу планету, в історії — суспільно-економічних формацій, у фізиці — елементарних частинок тощо.

Наукова класифікація відіграє важливу роль у теоретичній та практичній діяльності людини. Вона полегшує процес дослідження, надає можливість виявити й приховані закономірності. Показовим є приклад розробки класифікації хімічних елементів. Працюючи над книгою «Основи хімії», видатний російський вчений Д. І. Менделєєв (1834 — 1907) відкрив у 1869 році один з найфундаментальніших законів природи — періодичний закон хімічних елементів. Це дозволило вченому не лише систематизувати й уточнити дані про відомі на той час хімічні елементи, але й передбачити існування ще трьох елементів. У таблиці, що зараз носить ім'я Д. І. Менделєєва, вони містяться за номерами 21, 31 і 32. Галій (№ 31) відкрив у 1875 р. французький хімік П.-Е. Лекон де Буарбон, скандій (№ 21) — у 1879 р. шведський хімік Л. Нільсон, германій (№ 32) — у 1886 р. німецький хімік К. Вінклер.

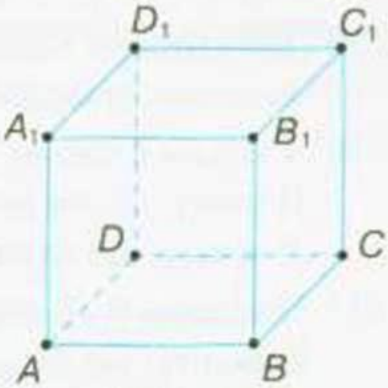
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке взаємне розміщення двох площин?
2. Які властивості мають площини, що перетинаються?
3. Доведіть теорему про властивість площин, що перетинаються.
4. Дайте означення паралельним площинам. Як їх позначають?
5. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності площин.
6. Як формулюється основна властивість паралельних площин?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

216'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох площин на предметах довкілля.

217'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 138). По якій прямій перетинаються площини:
1) ABB_1 і ABC;
2) A_1D_1D і ABB_1;
3) BCC_1 і CDD_1?
Яким прямим у даних площинах паралельна лінія їх перетину?



Мал. 138

218'. Які площини паралельні на малюнку 138. Назвіть пару прямих, що перетинаються і лежать в одній з даних площин, та відповідну пару прямих у другій площині.

219'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності площин.

220°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. У площині α проведіть пряму a. Яке взаємне розміщення прямої a і площини β?

221°. Чи можуть перетинатися дві площини, які паралельні тій самій прямій?

222°. $ABCD$ — паралелограм. Площина α перетинає площину паралелограма по прямій: 1) AB; 2) BC; 3) CD.
Доведіть, що пряма перетину двох даних площин паралельна протилежній стороні паралелограма.

223°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть площину, паралельну грані:
1) $ABCD$;
2) AA_1B_1B;
3) CDD_1C_1.

224°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Доведіть паралельність площин:
1) ABC і $A_1B_1C_1$;
2) ABB_1 і DCC_1;
3) B_1C_1C і D_1DA.

225*. Якщо пряма, що лежить в одній з даних площин, паралельна прямій, що лежить в другій площині, то дані площини паралельні.
Чи є правильним таке твердження?

226*. Якщо дві прямі, що лежать в одній площині, паралельні двом прямим, які лежать в другій площині, то дані площини паралельні.
Чи є правильним таке твердження?

227*. Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі?

228*. Прямі a і b — мимобіжні. Точка A лежить на прямій a, а точка B — на прямій b. На прямій AB взято точку C. Через цю точку проведено дві площини: α, в якій лежить пряма a, і β, в якій лежить пряма b.
Як взаємно розміщуються площини α і β?

229*. Дві сторони паралелограма паралельні даній площині α.
Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

230*. Скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через:
1) точку, що не лежить у даній площині;
2) пряму, що паралельна даній площині?

231. Площини α і β перетинаються.
Доведіть, що будь-яка площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β.

232. Площина β перетинає деяку пряму, паралельну площині α.
Доведіть, що площини α і β перетинаються.

233. α і β — паралельні площини.
Точка A лежить у площині α.
Доведіть, що будь-яка пряма, що проходить через точку A паралельно площині β, лежить у площині α.

234. **Якщо площина α паралельна площині β, а площина β паралельна площині γ, то площина α паралельна площині γ.**
Доведіть.

235. Площини α і β паралельні площині γ.
Чи можуть площини α і β перетинатися?

236. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих.
Чи паралельні площини α і β?

237. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Доведіть паралельність площин:
1) ACB_1 і A_1C_1D; 2) B_1D_1C і BDA_1.

238. **Дано дві мимобіжні прямі.**
Доведіть, що існує тільки одна пара площин, кожна з яких проходить через одну з даних прямих.

239. Як провести паралельні площини через дві дані мимобіжні прямі?

240. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник. Чи паралельні між собою площини, які проходять через точки:
1) A, A_1, C_1 і D, D_1, F_1;
2) A, A_1, B і C, C_1, F;
3) A, B_1, C і D, E_1, F;
4) A, A_1, D і C, C_1 та середину ребра AB?

241. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Середини відрізків AB, BC, AC, AD, CD і BD позначено відповідно K, L, M, N, E і F.
Чи паралельні площини:
1) BCD і KMN; 2) ABD і LME; 3) ACD і KLF?
Відповідь обґрунтуйте.

242*. Дано дві площини, які перетинаються.
Чи можна провести площину, яка перетинає дві дані площини по паралельних прямих?
Скільки таких площин можна провести через дану:
1) точку;
2) пряму, яка паралельна даним площинам;
3) пряму, яка паралельна одній з даних площин;
4) пряму, яка перетинає дані площини;
5) пряму, яка лежить в одній з даних площин?

243*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудуйте лінії перетину площин:
1) AB_1D_1 і A_1BD;
2) A_1BC і B_1BD;
3) A_1D_1C і AB_1D.

244*. Спільна вершина двох трикутників не лежить у даній площині, а протилежні цій вершині сторони трикутників лежать у даній площині.
Побудуйте лінію перетину площин даних трикутників.
Скільки випадків треба розглянути?

245*. Через пряму a, що лежить в одній з паралельних площин, проведено площини, які перетинають другу площину по прямих a_1, a_2, a_3, ...
Як взаємно розміщуються дані прямі? Відповідь обґрунтуйте.

246*. Скільки пар відповідно паралельних площин можна провести через дві паралельні прямі у просторі?

247*. **Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.**

248*. Кожна пряма, яка проходить через задану точку площини паралельно деякій прямій, що паралельна даній площині, лежить у даній площині. Доведіть.

249*. Чи можуть бути паралельними:
1) дві бічні грані призми;
2) три бічні грані призми?

250*. В основі прямої призми лежить правильний п'ятикутник.
Доведіть, що площина, яка проходить через бічне ребро і діагональ основи призми, паралельна площині однієї з її бічних граней.

251*. Дослідіть, як можуть взаємно розміщуватися три площини, якщо:
1) дві з них паралельні;
2) вони попарно перетинаються.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

252. Які випадки взаємного розміщення двох площин можна проілюструвати за допомогою зошита?

253. Яке взаємне розміщення книг на повністю заповненій полиці, якщо книги щільно прилягають одна до одної?
А якщо зняти декілька книг з полиці?

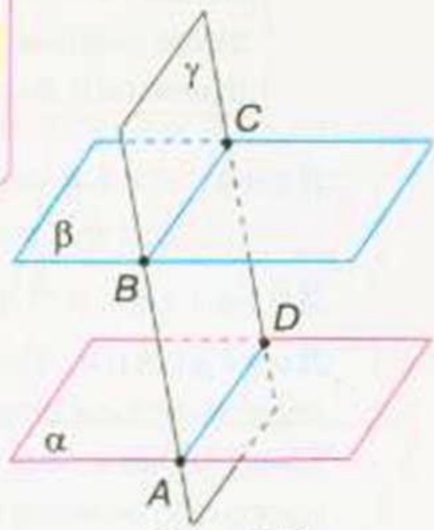
254. Чи можна перевірити паралельність підлоги і стелі кімнати за допомогою:
1) двох прямих у цих площинах;
2) трьох прямих у цих площинах;
3) чотирьох прямих у цих площинах.
Якщо так, то як саме?
Запропонуйте власний спосіб перевірки.

255. Щоб з'ясувати, чи не деформувалися дерев'яні двері під час експлуатації, їх зачиняють і обирають на їх периметрі кілька контрольних точок.
Якщо в цих точках полотно дверей не однаково розміщується відносно дверної коробки (в одному місці заглиблюється, а в іншому виступає), то двері — деформовані.
Скільки контрольних точок достатньо обрати?
На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?

§7. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

Важливі властивості паралельних площин пов'язані з площиною, що їх перетинає. Цю площину називають *січною площиною*.

Теорема
(про паралельні площини і січну площину).
Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі перетину паралельні.



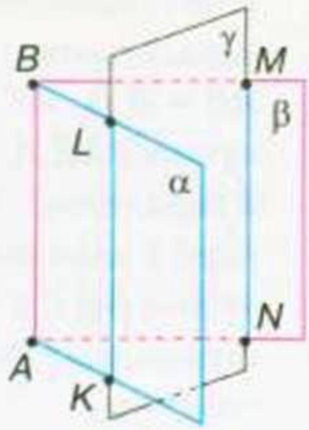
Мал. 139

Дано: $\alpha \parallel \beta$,
γ — січна площина,
AD — пряма перетину площин α і γ,
BC — пряма перетину площин β і γ (мал. 139).

Довести: $AD \parallel BC$.

Доведення. За умовою, прямі AD і BC лежать у січній площині γ. Вони не можуть перетинатися, бо інакше перетиналися б площини α і β, а це суперечить умові. Отже, $AD \parallel BC$.

? Чи правильне твердження, обернене до теореми про паралельні площини і січну площину? Ні. З того, що прямі перетину двох даних площини третьою паралельні, не випливає, що дані площини паралельні (мал. 140).

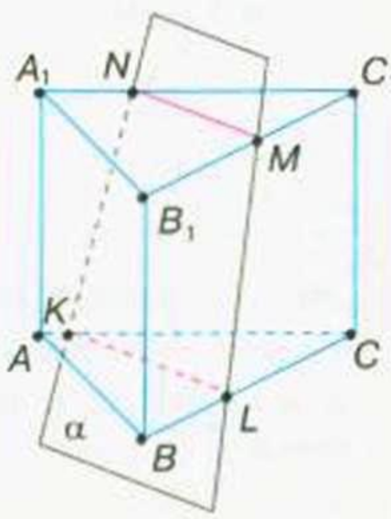


Мал. 140

Задача. Доведіть, що січна площина перетинає основи прямої призми по паралельних прямих.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — дана призма з основами ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 141), січна площина α перетинає її основи по прямих KL і MN. Доведемо, що $KL \parallel MN$.

Оскільки бічними гранями прямої призми є прямокутники, то $AB \parallel A_1B_1$ і $BC \parallel B_1C_1$. Тоді, за ознакою паралельності площин, площини основ призми ABC і $A_1B_1C_1$ — паралельні. За теоремою про паралельні площини і січну площину, прямі перетину KL і MN площин основ призми січною площиною α — паралельні.



Мал. 141

Пам'ятайте, що:

- **у прямої призми основи паралельні;**
- **у прямокутного паралелепіпеда протилежні грані попарно паралельні;**
- **січна площина перетинає паралельні грані многогранника по паралельних прямих.**

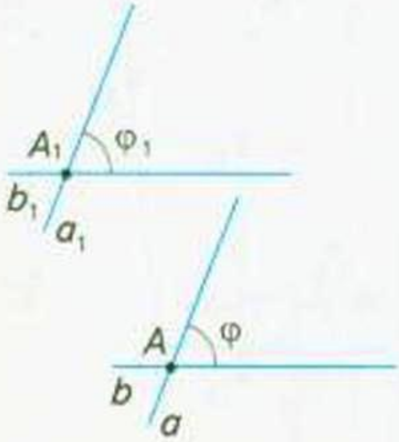
Теорема (про рівність кутів між прямими, що перетинаються). Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

Дано: $a \times b$ в точці A, $a_1 \times b_1$ в точці A_1, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, φ — кут між прямими a і b, φ_1 — кут між прямими a_1 і b_1 (мал. 142).

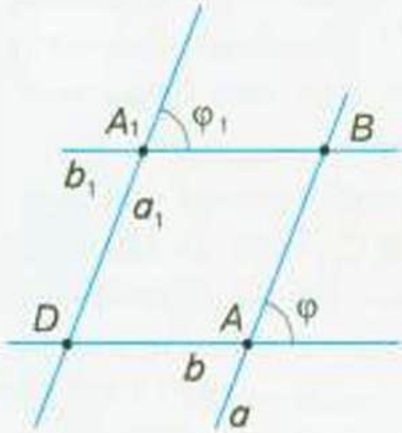
Довести: $\varphi = \varphi_1$.

Доведення. Якщо прямі a, b, a_1 і b_1 лежать в одній площині, тоді пряма a перетинається з прямою b_1, а пряма b — з прямою a_1 (мал. 143). Позначимо точки їх перетину B і D. Чотирикутник ABA_1D — паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони попарно паралельні. Тому $\varphi = \varphi_1$.

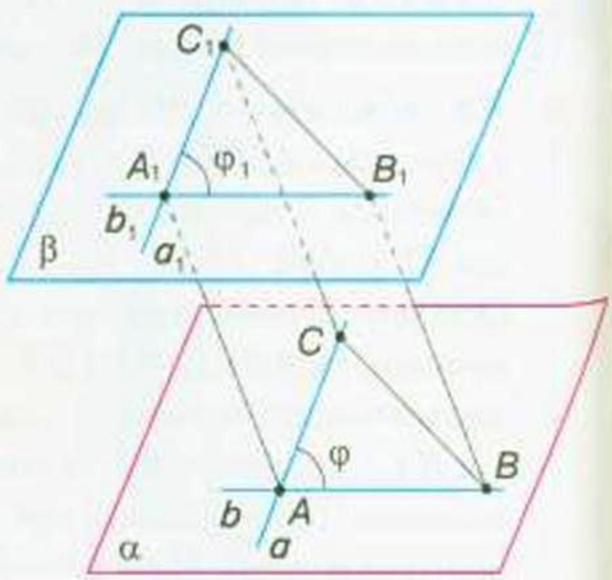
Нехай прямі a, b, a_1 і b_1 не лежать в одній площині (мал. 144). Через прямі a і b проведемо площину α, а через прямі a_1 і b_1 — площину β. За ознакою паралельності площин, $\alpha \parallel \beta$. Відкладемо на даних прямих рівні відрізки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і проведемо прямі AA_1, BB_1, CC_1, BC і B_1C_1. Чотирикутник ABB_1A_1 — паралелограм, оскільки протилежні сторони AB і A_1B_1 рівні й паралельні. Тому відрізки AA_1 і BB_1 також рівні і паралельні. Аналогічно, рівні й паралельні відрізки AA_1 і CC_1. Звідси $BB_1 = CC_1$, $BB_1 \parallel CC_1$ і чотирикутник BB_1C_1C — паралелограм. Тому $BC = B_1C_1$ і $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за трьома сторонами. Звідси $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Оскільки $\angle BAC = \varphi$ і $\angle B_1A_1C_1 = \varphi_1$, то $\varphi = \varphi_1$.



Мал. 142



Мал. 143



Мал. 144

Наслідок 1 (властивість перпендикулярних прямих).
Дві прямі, що паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні.

Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми, якщо $\varphi = 90°$.

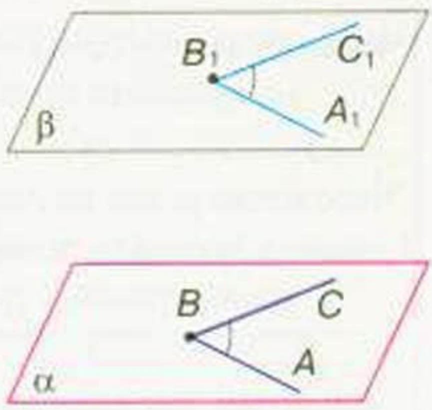
Наслідок 2. Кут між мимобіжними прямими не залежить від вибору точки, через яку проходять прямі, що перетинаються і відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми.

Наслідок 3 (властивість кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами).

Два кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами рівні (мал. 145).

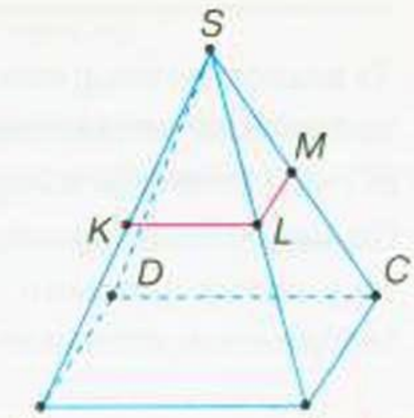
Справді, сторони кожного з даних кутів є променями відповідної пари прямих, що перетинаються у вершині цього кута. За теоремою про рівність кутів між прямими, що перетинаються, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.



Мал. 145

Задача. *KL* і *LM* — середні лінії бічних граней *SAB* і *SBC* правильної чотирикутної піраміди *SABCD* (мал. 146). Яка градусна міра кута *KLM*?

Розв'язання. Оскільки *KL* і *LM* — середні лінії трикутників *SAB* і *SBC*, то $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. Кути *KLM* і *ABC* мають однаково напрямлені сторони, бо лежать у відповідних площинах по один бік від прямої *SB*. Тому, за властивістю кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами, $\angle KLM = \angle ABC$. За умовою, дана піраміда — правильна, тому $\angle ABC = 90°$. Отже, $\angle KLM = 90°$.



Мал. 146

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Математики у своїх міркуваннях часто застосовують *аналогію.* У перекладі з грецької мови «аналогія» означає подібність, схожість предметів або явищ за якими-небудь властивостями, ознаками, відношеннями, причому самі ці предмети, взагалі, різні. Багато питань стереометрії вивчається за аналогією до питань планіметрії. Аналогом точки на площині є пряма у просторі, а прямої на площині — площина у просторі.

У таблиці 7 наведено деякі властивості взаємного розміщення точок і прямих на площині та властивості прямих і площин у просторі, які сформульовано за аналогією.

Таблиця 7

На площині	У просторі
Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються у цій точці	Якщо дві площини мають спільну пряму, то вони перетинаються по цій прямій
Через будь-яку точку на площині можна провести безліч прямих	Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин
Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну	Через пряму, яка не перетинає площину, можна провести площину, паралельну даній площині, і тільки одну
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою	Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою

За аналогією іноді можна дістати хибне твердження. Наприклад, якщо у третьому з наведених тверджень для простору замість вимоги «не перетинає площину» вказати вимогу «не лежить у площині», то дістанемо хибне твердження.

Справді, пряма, що не лежить у площині, може перетинати цю площину, а через таку пряму провести площину, паралельну даній площині, неможливо. Тому твердження, отримане за аналогією, потребує доведення.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

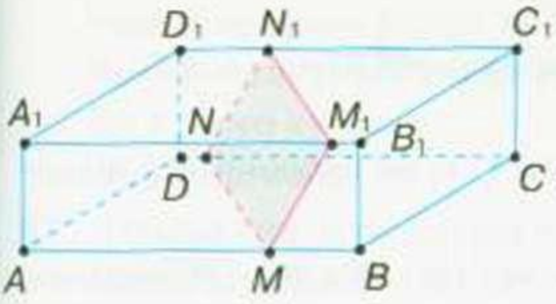
1. Поясніть, що таке січна площина для двох даних паралельних прямих.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про паралельні площини і січну площину.
3. Як формулюється теорема про рівність кутів між прямими, що перетинаються? Доведіть її.
4. Яка властивість перпендикулярних прямих у просторі?
5. Поясніть, від чого не залежить кут між мимобіжними прямими.
6. Яку властивість мають кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

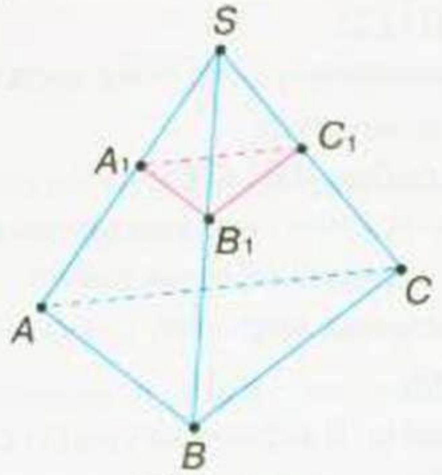
256'. На малюнках 147 — 149 назвіть січну площину та прямі її перетину з паралельними площинами ABC і $A_1B_1C_1$. Яке взаємне розміщення прямих перетину? Скільки січних площин для даних паралельних площин зображено на малюнку?

257'. Наведіть приклади паралельних площин і січної площини на предметах класної обстановки.

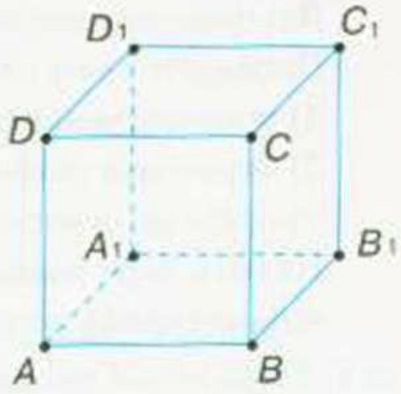
258'. За малюнками 147 — 149 з'ясуйте, чи виконується рівність: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, якщо площини ABC і $A_1B_1C_1$ — паралельні. Відповідь поясніть.



Мал. 147



Мал. 148



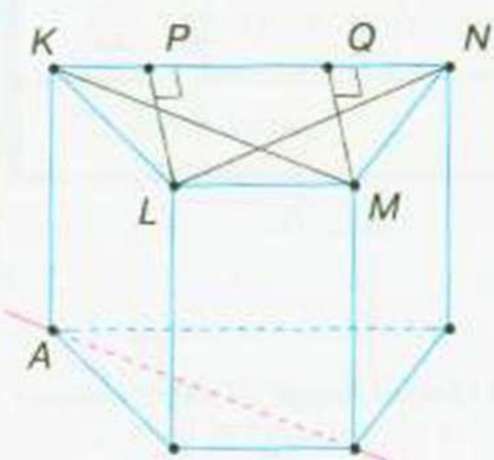
Мал. 149

259'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють властивість:

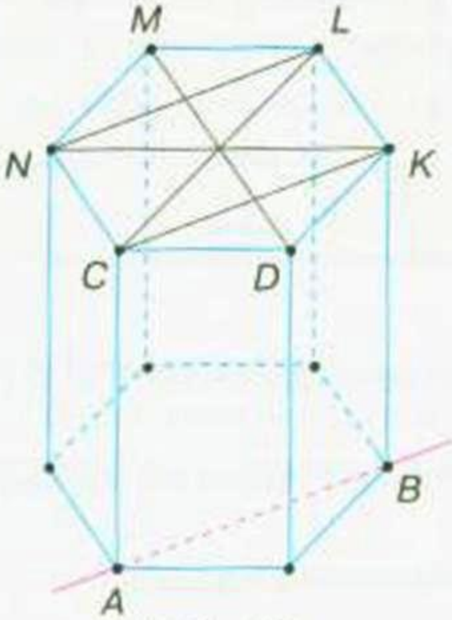
1) перпендикулярних прямих;

2) кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.

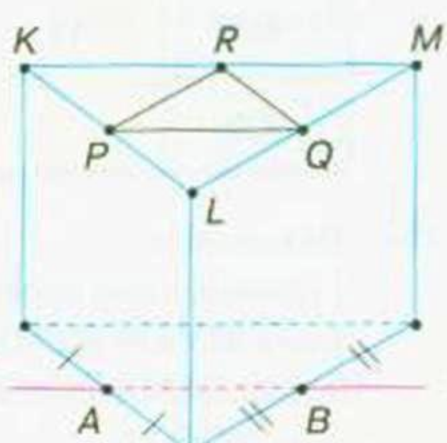
260'. Січна площина перетинає нижню основу призми по прямій AB (мал. 150 — 152). По якій з прямих, позначених на малюнку, січна площина не може перетинати верхню основу даної призми? Відповідь поясніть.



Мал. 150



Мал. 151



Мал. 152

261*. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Проведіть січну площину, яка перетинає вказані паралельні площини:
1) ABC і $A_1B_1C_1$;
2) ADD_1 і BCC_1;
3) ABB_1 і C_1CD.
Чи перетинає побудована січна площина іншу пару паралельних площин?
Назвіть прямі перетину січної площини з паралельними площинами.
Яке їх взаємне розміщення?
Зробіть відповідний запис.

262*. Накресліть пряму чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основою якої є трапеція з основами AB і CD.
Які грані призми паралельні, а які — не паралельні?
Проведіть січну площину, яка:
1) проходить через ребра AB і C_1D_1;
2) перетинає основи призми і не проходить через їх ребра;
3) проходить через середини бічних ребер.
Назвіть пари паралельних відрізків, що лежать у січній площині та у відповідних гранях призми.

263*. Паралельні площини α і β відтинають на сторонах BA і BC кута ABC відрізки: $BM = MM_1$ і $BN = NN_1$.
Заповніть таблицю 8.

Таблиця 8

BM	5			10		13
BM_1		7	12		3	
BN	12		5			21
BN_1		7		18	5	
MN	13		9	17		20
M_1N_1		10			4	

264*. Накресліть:
1) прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
На ребрі AB позначте точку K і через неї проведіть січну площину паралельно грані AA_1D_1D.
Який чотирикутник утворився в перерізі?
Відповідь поясніть.

265*. Накресліть правильну призму:

1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

2) $ABCA_1B_1C_1$.

Позначте точку A_2 на ребрі AA_1 призми і через цю точку проведіть січну площину паралельно нижній основі призми.

Який многокутник утворився в перерізі?

Позначте його вершини A_2, B_2, ...

Назвіть кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.

Яка їх градусна міра?

266*. Накресліть трикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник:

1) з кутом при вершині 110°;

2) з кутом при основі 50°;

3) з кутом при вершині 30°.

Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину.

Який многокутник утворився в перерізі?

Які в нього кути?

Відповідь поясніть.

267*. Накресліть чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб з кутом:

1) 100°; 2) 40°; 3) 60°.

Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину.

Який многокутник утворився в перерізі?

Які в нього кути?

Відповідь поясніть.

268. Дві сторони паралелограма паралельні площині α.

Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

269. Бічна сторона і діагональ трапеції паралельні площині α.

Чи паралельні площина α і площина трапеції?

270. Дві сторони трикутника паралельні площині α.

Доведіть, що і третя сторона трикутника паралельна площині α.

271. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною, яка паралельна даній грані й проходить через середину заданого ребра:

1) SAB, SC;

2) SBC, SA.

Поясніть побудову.

272. У кубі з ребром a проведіть площину через:

1) середини двох суміжних сторін верхньої основи і центр нижньої;

2) середини двох суміжних сторін бічної грані і центр протилежної бічної грані.

Знайдіть периметр і площу перерізу.

273. Чи може пряма, яка перетинає одну з двох паралельних площин, не перетинати другу?

Відповідь обґрунтуйте.

274. **Паралельні площини відтинають від двох паралельних прямих рівні відрізки. Доведіть.**

275. Чи можуть паралельні площини відтинати рівні відрізки від непаралельних прямих?
Відповідь обґрунтуйте.

276. Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї з них проведено паралельні прямі, що перетинають другу площину відповідно у точках D і C. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

277. Паралельні площини α і β перетинають сторону AB кута BAC у точках M і M_1, а сторону AC — відповідно у точках N і N_1.
Знайдіть довжину відрізка MN, якщо:
1) $AM = 12$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см;
2) $AM = 24$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см.

278. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, які не лежать в одній площині, мають спільну середину. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні.
Чому дорівнюють кути $\Delta A_1B_1C_1$, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$;
2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$?

279. Точка D не лежить у площині трикутника ABC, точки M, N і P — середини відрізків DA, DB, DC.
Доведіть, що площини ABC і MNP паралельні.
Чому дорівнюють кути $\Delta\, ABC$, якщо:
1) $\angle M = 120°$, $\angle N = 25°$, $\angle P = 35°$;
2) $\angle M = 40°$, $\angle N = 40°$, $\angle P = 80°$?

280*. **Доведіть, що три прямі, які перетинають кілька паралельних площин, визначають на кожній з них вершини трикутників, що є:**
1) рівними, якщо дані прямі паралельні;
2) подібними, якщо дані прямі перетинаються в одній точці.

281*. Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці кожного з яких лежать у двох даних паралельних площинах, належать одній площині.

282*. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник.
Чи паралельна пряма AD_1 площині BCC_1?
Відповідь обґрунтуйте.

283*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площини:
1) A_1BD і B_1CD_1;
2) AB_1D_1 і BDC_1.
Доведіть, що дані площини ділять відрізок AC_1 (для другого випадку A_1C) на три рівні частини.

284*. Дано дві паралельні площини і точку O, що не належить їм.
З точки O проведено три прямі, які перетинають дані площини відповідно в точках A, B, C і A_1, B_1, C_1. $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.
Знайдіть: 1) A_1B_1; 2) площу $\Delta A_1B_1C_1$.

285*. Два рівних рівносторонніх трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні й однаково напрямлені. BE і CD – висоти ΔABC, C_1D_1 – висота $\Delta A_1B_1C_1$.
Знайдіть кути між прямими:
1) AC і B_1C_1; 2) AC і A_1B_1;
3) CD і A_1B_1; 4) AC і C_1D_1;
5) BE і B_1C_1; 6) BE і C_1D_1.

286*. Два рівних рівносторонніх трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні, але протилежно напрямлені. BE і CD – висоти ΔABC, C_1D_1 – висота $\Delta A_1B_1C_1$.
Знайдіть кути між прямими:
1) AC і B_1C_1; 2) AC і A_1B_1;
3) CD і A_1B_1; 4) AC і C_1D_1;
5) BE і B_1C_1; 6) BE і C_1D_1.

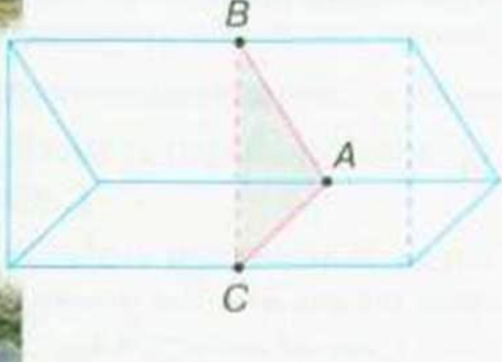
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

287. Чому можна одночасно висунути усі шухляди тумбочки?

288. Поясніть, як розмітити на стінках шафи місця для кріплення поличок.

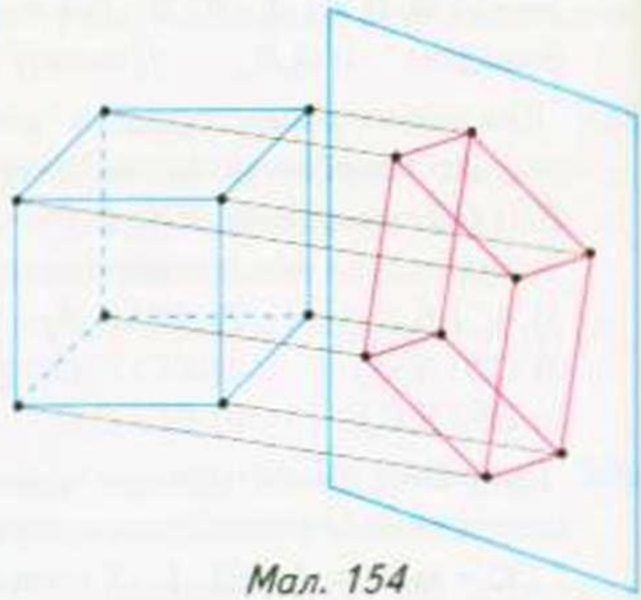
289. Як перевірити за допомогою косинця, чи правильно навісили двері. На якій властивості ґрунтується така перевірка?

290. Канал з трикутним перерізом і глибиною 2,8 м перегороджено щитом, який має форму рівностороннього трикутника.
Щоб визначити гідростатичний тиск на перегородку, треба знати її площу. Обчисліть площу трикутного щита ABC, якщо його розміщено вертикально (мал. 153).



Мал. 153

§8. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ



Мал. 154

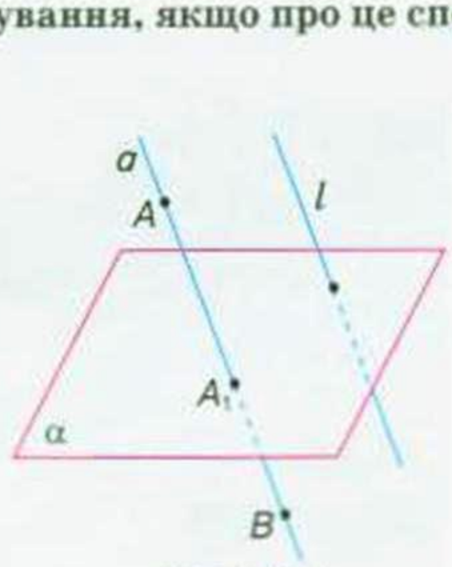
Ви вже знаєте, що для вивчення властивостей просторових фігур користуються макетами цих фігур або їх зображеннями на площині. На малюнку 154 ви бачите каркасний макет куба, який розміщено перед екраном (стіною, аркушем паперу), освітленим сонцем. Макет куба дає на екрані тінь, яка є зображенням куба на площині. Якщо промені сонця вважати паралельними прямими, то можна сказати, що зображення куба дістали за допомогою *паралельного проектування*.

Подивіться на малюнок 155. Пряма l перетинає площину α. Через точку A фігури F проведено пряму, яка паралельна прямій l і перетинає площину α в точці A_1. Ця точка є *зображенням* точки A в площині α. Побудувавши у такий спосіб зображення кожної точки фігури F, дістали фігуру F_1 – зображення фігури F у площині α. Фігура, яку проектували, називається *оригіналом*. Зображення фігури, яке дістали, називається *паралельною проекцією* цієї фігури. Пряма l задає *напрям проектування*. Прямі, паралельні прямій l, називаються *проектувальними прямими*, а площина α – *площиною проекцій*.

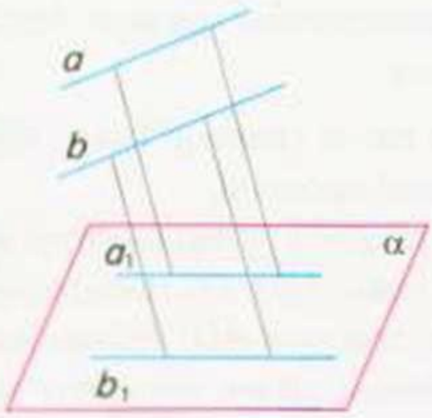
? Що є проекцією прямої, яка паралельна напряму проектування? Точка, бо кожна точка даної прямої проектується в ту саму точку площини проекцій (мал. 156).

При паралельному проектуванні прямі й відрізки, що проектуються, вважають не паралельними напряму проектування, якщо про це спеціально не зазначено.

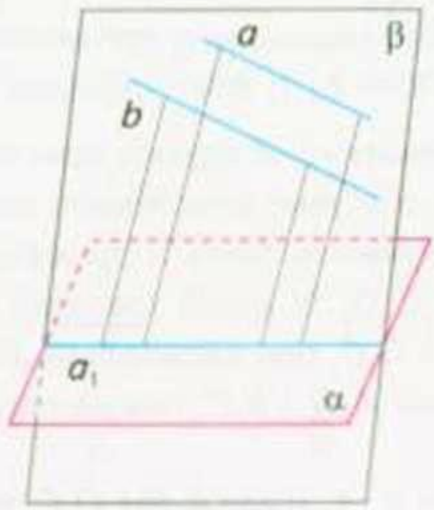
Мал. 155



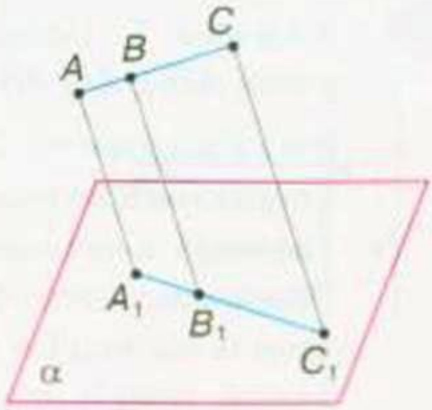
Мал. 156



Мал. 157



Мал. 158



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 159

Наведемо основні властивості паралельного проектування.

1. Паралельною проекцією точки є точка.

2. Паралельною проекцією прямої є пряма.

3. Проекції паралельних прямих паралельні між собою (мал. 157) **або збігаються, якщо дані прямі лежать у площині, паралельній напряму проектування** (мал. 158).

4. Якщо відрізки лежать на одній прямій або на паралельних прямих, то відношення їх проекцій дорівнює відношенню самих відрізків (мал. 159).

З наведених властивостей випливає, що під час паралельного проектування деякі властивості фігур зберігаються, а деякі – ні (див. табл. 9).

Таблиця 9

Властивості фігур, що ЗБЕРІГАЮТЬСЯ під час паралельного проектування	Властивості фігур, що НЕ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ під час паралельного проектування
1) **Належність фігури своєму класу фігур** (точку зображають точкою, пряму – прямою, відрізок – відрізком, трикутник – трикутником тощо); 2) **належність точок прямій;** 3) **порядок розміщення точок на прямій** (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції); 4) **паралельність прямих;** 5) **рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій**	1) **Довжина відрізка**; 2) **міра кута** (зокрема прямий кут зображають довільним кутом); 3) **перпендикулярність прямих**; 4) **рівність (пропорційність) кутів**; 5) **рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються**

Задача 1. Побудуйте паралельну проекцію прямокутної трапеції $ABCD$, у якої $AD \perp AB$, $AB : DC = 2 : 1$, MN – середня лінія.

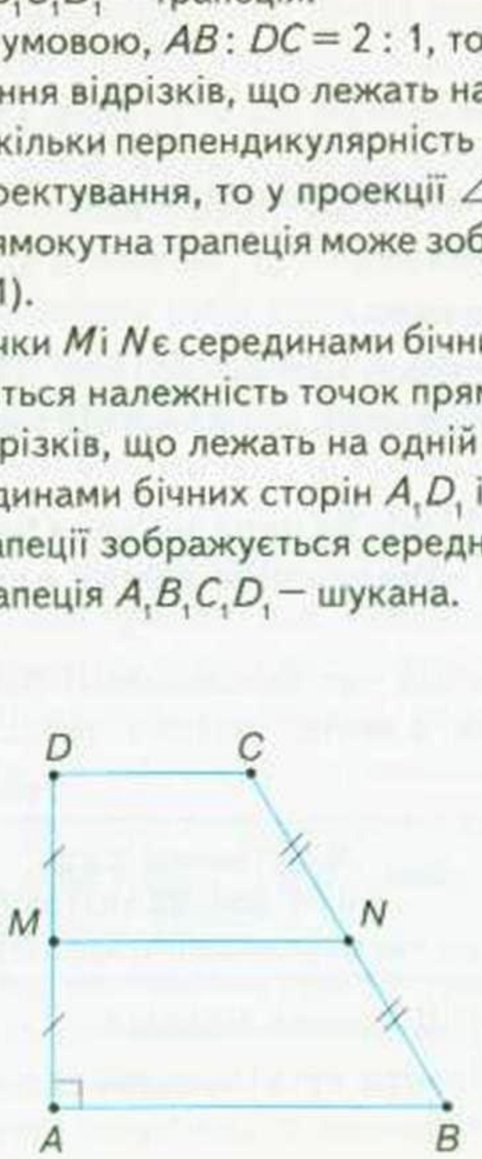
Розв'язання. Спочатку побудуємо оригінал даної трапеції (мал. 160). Спираючись на нього, з'ясуємо властивості шуканої проекції.

Трапеція є чотирикутником, тому її проекція також є чотирикутником. Позначимо його $A_1B_1C_1D_1$. У даній трапеції: основи AB і DC паралельні, тому їх проекції A_1B_1 і D_1C_1 теж паралельні; бічні сторони AD і BC не паралельні, тому їх проекції A_1D_1 і B_1C_1 теж не паралельні. Отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ – трапеція.

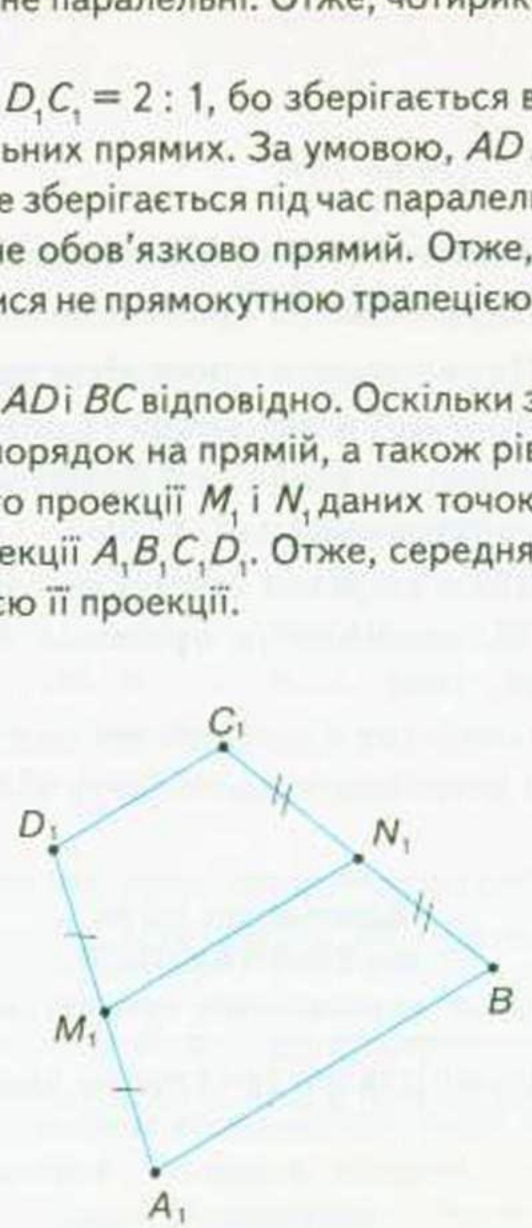
За умовою, $AB : DC = 2 : 1$, тому $A_1B_1 : D_1C_1 = 2 : 1$, бо зберігається відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих. За умовою, $AD \perp AB$. Оскільки перпендикулярність прямих не зберігається під час паралельного проектування, то у проекції $\angle D_1A_1B_1$ не обов'язково прямий. Отже, дана прямокутна трапеція може зображуватися не прямокутною трапецією (мал. 161).

Точки M і N є серединами бічних сторін AD і BC відповідно. Оскільки зберігається належність точок прямій та їх порядок на прямій, а також рівність відрізків, що лежать на одній прямій, то проекції M_1 і N_1 даних точок є серединами бічних сторін A_1D_1 і B_1C_1 проекції $A_1B_1C_1D_1$. Отже, середня лінія трапеції зображується середньою лінією її проекції.

Трапеція $A_1B_1C_1D_1$ – шукана.



Мал. 160

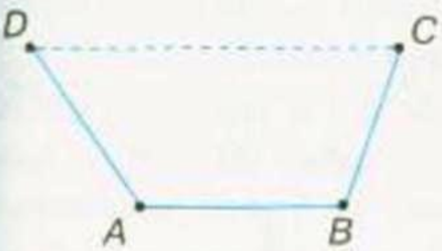


Мал. 161

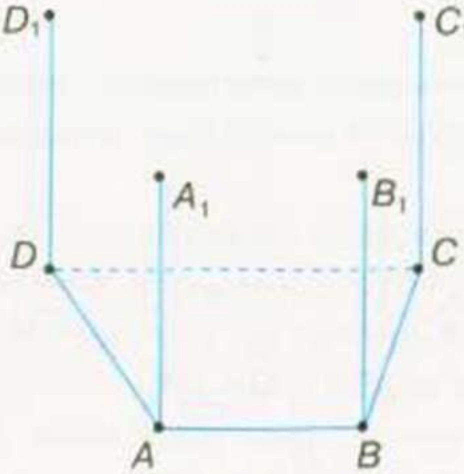
Щоб побудувати паралельну проекцію плоскої фігури, спочатку побудуйте її оригінал. Потім, спираючись на оригінал, виділіть властивості фігури:

– які зберігаються під час паралельного проектування (на них треба спиратися, будуючи проекцію);

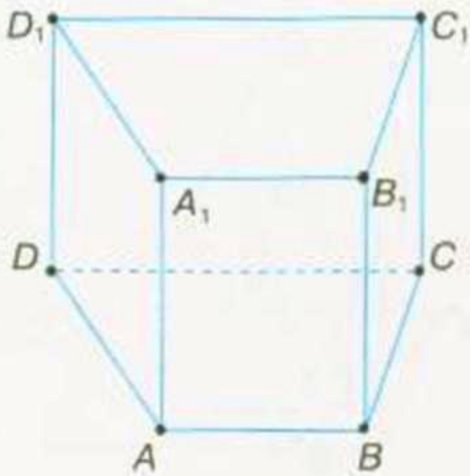
– які не зберігаються під час паралельного проектування (їх не можна використовувати, будуючи проекцію).



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

? Як побудувати паралельну проекцію многогранника? Для цього треба з'ясувати, як зображуватимуться усі його грані, та послідовно виконати побудову проекції кожної з них. Розглянемо приклади.

Задача 2. Побудуйте зображення прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основою якої є рівнобічна трапеція.

Розв'язання. Побудову призми виконуємо в три етапи:

1) будуємо зображення однієї з основ; 2) проводимо бічні ребра;

3) будуємо зображення другої основи.

1. В основі даної призми лежить рівнобічна трапеція. Її паралельні сторони проектуються в паралельні відрізки, а не паралельні — в не паралельні й не обов'язково рівні відрізки. Тому проекцією основи даної призми є довільна трапеція $ABCD$ (мал. 162).

2. Бічними гранями прямої призми є прямокутники, отже, їх проекціями є паралелограми. Тому проекції бічних ребер є рівними паралельними відрізками. Проводимо їх паралельно вертикальному краю аркуша (мал. 163).

3. Сполучивши кінці паралельних відрізків, дістанемо зображення другої основи даної призми. При цьому враховується те, що основи призми — рівні многокутники, які лежать у паралельних площинах. Отже, їх проекції є рівними многокутниками з відповідно паралельними сторонами (мал. 164).

Пряма призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — шукана.

Пам'ятайте, що на зображенні многогранника видимі лінії проводимо суцільними лініями, а невидимі — штриховими.

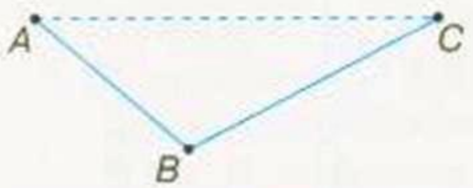
Задача 3. Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди $SABC$.

Розв'язання. Побудову піраміди виконуємо в три етапи:

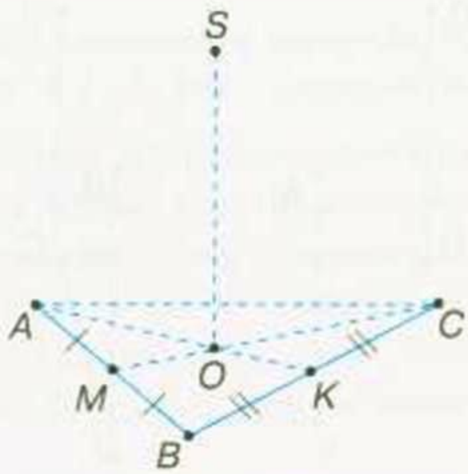
1) будуємо зображення основи;

2) з'ясовуємо розміщення висоти і вершини піраміди;

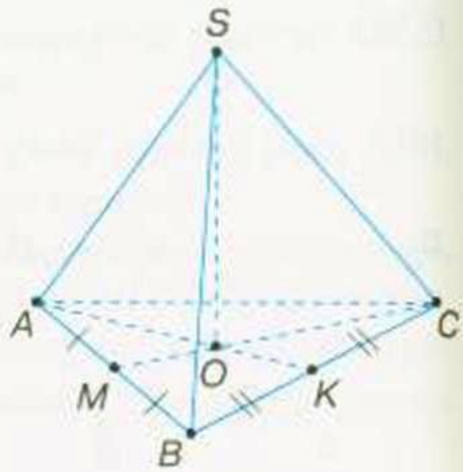
3) проводимо бічні ребра.



Мал. 165



Мал. 166



Мал. 167

1. В основі даної піраміди лежить правильний трикутник. Його проекцією є довільний трикутник ABC (мал. 165), оскільки рівність сторін правильного трикутника та рівність його кутів не зберігаються під час проектування.

2. Вершина правильної піраміди лежить на прямій, що містить висоту піраміди. Висота даної піраміди проходить через точку перетину медіан її основи. Через цю точку проводимо пряму паралельно вертикальному краю аркуша. На цій прямій позначаємо довільну точку S.
Дістали зображення вершини піраміди (мал. 166).

3. Сполучивши вершину піраміди з вершинами її основи, дістанемо зображення бічних ребер піраміди. При цьому враховується те, що: бічними гранями правильної піраміди є рівні рівнобедрені трикутники; на зображенні рівність бічних сторін цих трикутників не зберігається. Тому проекції бічних ребер піраміди — це відрізки довільної довжини, що з'єднують вершину піраміди з вершинами її основи (мал. 167).

Піраміда $SABC$ — шукана.

Пам'ятайте, що:

– розміщення висоти піраміди залежить від властивостей піраміди;

– якщо піраміда правильна, то її висота проходить через центр многокутника основи;

– висоту піраміди проводять паралельно вертикальному краю аркуша;

– розміщення вершини піраміди визначають після побудови її висоти.

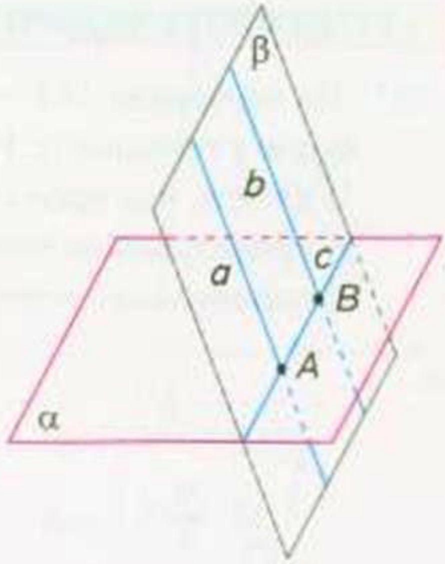
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Побудова зображень просторових фігур під час паралельного проектування ґрунтується на такій властивості паралельних прямих: **Якщо одна з паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину.**

Доведемо цю властивість.

Нехай a і b — паралельні прямі, a перетинає площину α в точці A (мал. 168). Доведемо, що і пряма b перетинає площину α.

Через паралельні прямі a і b проведемо площину β. Оскільки пряма a перетинає площину α в точці A, то площини α і β перетинаються по прямій c, яка проходить через точку A. У площині β пряма c перетинає пряму a, отже, вона перетинає і пряму b. Позначимо B точку перетину прямих b і c. Точка B належить прямій перетину площин α і β, отже, вона лежить у площині α. Дістали, що пряма b має спільну точку B з площиною α. Інших спільних точок вони не мають, бо тоді пряма b збігалася б з прямою c, що неможливо. Отже, пряма b перетинає площину α.



Мал. 168

2. Значний вклад у розвиток теорії зображень просторових фігур на площині вніс російський геометр М. Ф. Четверухін (1891 — 1974). Він обґрунтував можливість побудови наочного зображення просторових фігур більш простими способами, ніж це робиться в *аксонометрії* — науковій теорії про способи зображення геометричних фігур. Завдяки досягненням вченого елементи теорії зображень стали доступними для вивчення у шкільному курсі геометрії.

М. Ф. Четверухін

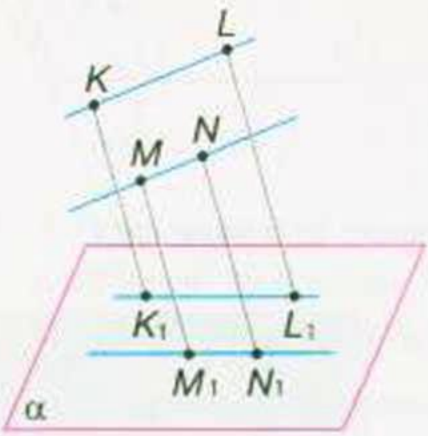
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке паралельне проектування; площина проекцій; проектувальні прямі?
2. Назвіть властивості паралельного проектування.
3. Які властивості фігур зберігаються під час паралельного проектування?
4. Назвіть властивості фігур, які не зберігаються під час паралельного проектування.
5. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника; паралелограма; прямокутника; трапеції?
6. Поясніть, як побудувати зображення прямої призми; піраміди.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

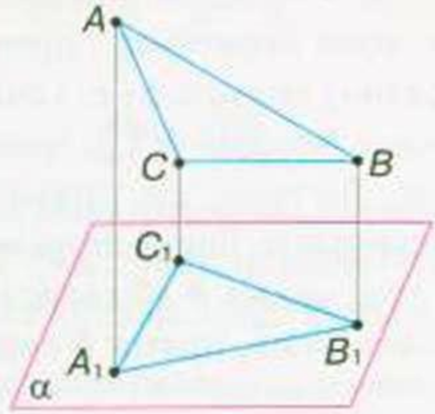
291'. На малюнках 169 — 171 зображено фігуру-оригінал та її паралельну проекцію у площині α. Назвіть:

1) фігуру, яку проектували;
2) проектувальні прямі;
3) паралельну проекцію даної фігури.

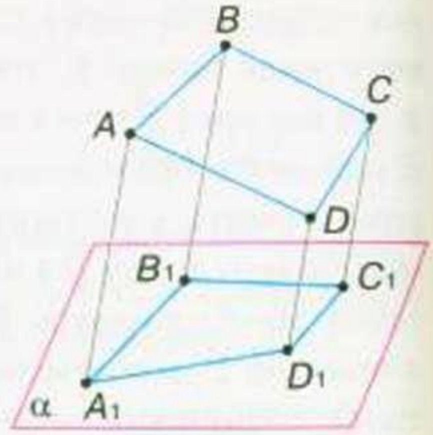


$KL \parallel MN$

Мал. 169



Мал. 170



Мал. 171

292'. Чи може чотирикутник бути проекцією трикутника?

293'. Чи може трикутник бути проекцією чотирикутника?

294'. Відрізки AB і BC лежать на одній прямій. Точка B лежить між точками A і C. Як відносяться проекції даних відрізків, якщо:

1) $AB : BC = 3 : 4$;
2) $AB : BC = 7 : 1$;
3) $AB : BC = 4 : 9$?

295'. На промені AO відкладіть відрізки:

1) $AB = 2$ см і $BC = 3$ см;
2) $AB = 2$ см і $BC = 1$ см;
3) $AB = 3$ см і $BC = 1{,}5$ см.

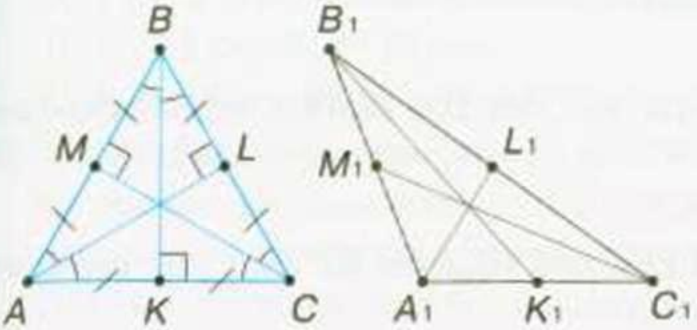
Чому дорівнює відношення їх проекцій?

296'. Відрізки AB і CD лежать на паралельних прямих.
Як відносяться їх проекції, якщо:

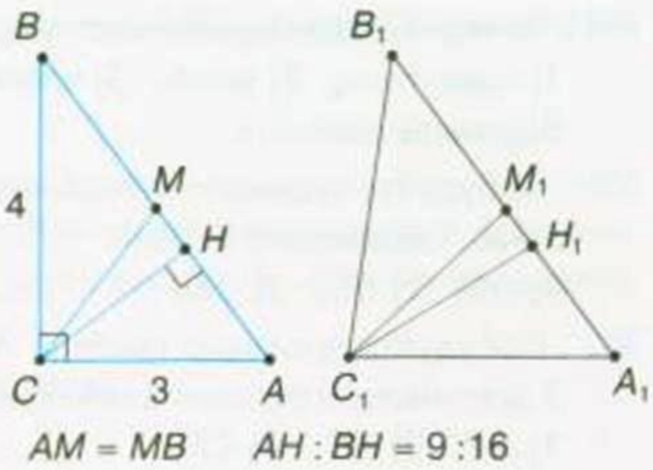
1) $AB : CD = 3 : 4$;
2) $AB : CD = 7 : 1$;
3) $AB : CD = 4 : 9$?

297'. Точка B лежить між точками A і C.

1) Чи може проекція точки C лежати між проекціями точок A і B?
2) Чи може проекція точки A лежати між проекціями точок B і C?
3) Проекція якої точки лежить між проекціями двох інших?



Мал. 172



Мал. 173

298°. На малюнках 172, 173 зображено трикутник ABC та його паралельну проекцію $A_1B_1C_1$.

Назвіть властивості трикутника ABC, які під час проектування:

1) збереглися; 2) не збереглися.

Пам'ятайте, що у прямокутному трикутнику основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться, як квадрати катетів (мал. 173).

299°. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника ABC, в якому проведено:

1) медіану до бічної сторони;
2) висоту до основи;
3) бісектрису кута при вершині.

300°. Побудуйте проекцію рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, в якому проведено:

1) медіани;
2) середні лінії;
3) висоту до гіпотенузи.

301°. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника ABC, в якому проведено серединні перпендикуляри до катетів, якщо прямим є кут:

1) A; 2) B; 3) C.

302°. Чи може паралельною проекцією паралелограма бути:

1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

303°. Чи може паралельною проекцією квадрата бути:

1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

304°. Побудуйте проекцію прямокутника $ABCD$, в якому сполучено відрізками:

1) середину більшої сторони з вершинами протилежної сторони;
2) середини протилежних сторін;
3) середини суміжних сторін.

305*. Чи можна при паралельному проектуванні трапеції дістати:
1) трикутник; 2) ромб; 3) трапецію?
Відповідь поясніть.

306*. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції *ABCD*, в якій проведено середню лінію, паралельну основі:
1) *AB*; 2) *BC*; 3) *CD*.

307*. Побудуйте проекцію трапеції *ABCD*, в якій відрізок *KP* сполучає середини її діагоналей і паралельний основі:
1) *AB*; 2) *BC*; 3) *CD*.

308*. Побудуйте проекцію правильного:
1) трикутника;
2) чотирикутника;
3) шестикутника.
Як побудувати проекцію центра даного многокутника?

309*. Побудуйте зображення правильної призми:
1) трикутної;
2) чотирикутної;
3) шестикутної.

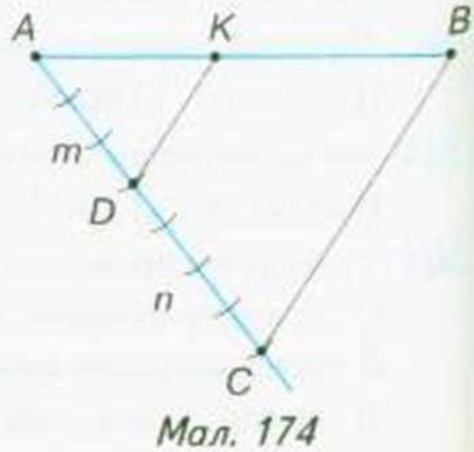
310*. Побудуйте зображення правильної піраміди:
1) трикутної;
2) чотирикутної;
3) шестикутної.

311. Під час паралельного проектування деякої фігури дістали відрізок. Якою могла бути фігура-оригінал?

312. Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.

313. Побудуйте проекцію відрізка *AB*, який точка *K* ділить у відношенні:
1) 1 : 3; 2) 3 : 5;
3) 3 : 1,5; 4) 2 : 0,5.

Щоб поділити відрізок *AB* у відношенні *m* : *n* (мал. 174):
1) проведіть допоміжний промінь з початком в точці *A*;
2) від точки *A* відкладіть на цьому промені *m* рівних відрізків і позначте точку *D*;
3) від точки *D* відкладіть на цьому ж промені *n* рівних відрізків і позначте точку *C* – кінець останнього відрізка;
4) проведіть пряму *CB*;
5) через точку *D* проведіть пряму, паралельну *CB* – вона перетинає відрізок *AB* у шуканій точці *K*.



Мал. 174

314. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника ABC, в якому проведено висоту CH до гіпотенузи, а катети дорівнюють:

1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см;
2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см.

315. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, бічна сторона — b, а висота, проведена до основи, — c. З основи даної висоти трикутника проведено перпендикуляр до його бічної сторони.

Побудуйте проекцію даного трикутника, якщо:

1) $a = 10$, $b = 13$, $c = 12$;
2) $a = 14$, $b = 25$, $c = 24$.

316. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b, в якому позначено центр вписаного кола і центр описаного кола, якщо: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$.

317. Побудуйте проекцію прямокутника $ABCD$, в якому проведено перпендикуляр з його вершини до діагоналі, якщо:

1) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см.

318. Побудуйте проекцію ромба з гострим кутом $60°$, в якому проведено висоту з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.

319. Діагоналі ромба зі стороною a дорівнюють d_1 і d_2. Висота ромба проходить через точку перетину діагоналей. Побудуйте проекцію ромба, якщо:

1) $a = 25$ см, $d_1 = 30$ см, $d_2 = 40$ см;
2) $a = 169$ см, $d_1 = 130$ см, $d_2 = 312$ см.

320. Побудуйте проекцію трапеції $ABCD$, у якої бісектриси тупих кутів перетинаються на більшій основі і одна з них паралельна:

1) AB; 2) BC; 3) CD.

321. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції, в якій проведено висоту з вершини тупого кута, а основи дорівнюють:

1) 12 см і 24 см;
2) 8 см і 14 см.

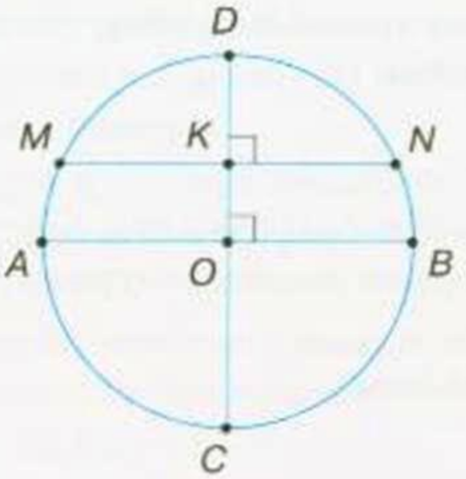
322. Побудуйте зображення прямої призми, основа якої — прямокутний трикутник ABC з катетами:

1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см;
2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см.

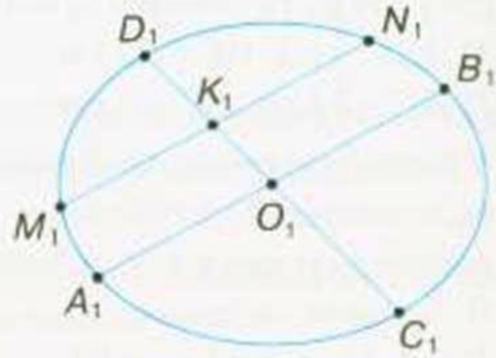
Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через вершину C_1 призми і висоту CH, проведену до гіпотенузи основи.

323. Побудуйте зображення прямої призми, основою якої є ромб з гострим кутом $60°$. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить паралельно її бічному ребру і перетинає основу по висоті ромба, яку проведено з вершини:

1) гострого кута; 2) тупого кута.



Мал. 175



Мал. 176

324. Побудуйте зображення піраміди, основа якої — рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b, якщо:
1) $a = 6$, $b = 8$;
2) $a = 10$, $b = 13$.
Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди, вершину її основи та центр кола, вписаного в основу.

325. Побудуйте зображення піраміди, основа якої — рівнобічна трапеція з основами:
1) $AB = 12$ см, $CD = 24$ см;
2) $AC = 8$ см, $BD = 14$ см.
Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди і висоту основи, проведеної з вершини її тупого кута.

326*. У трикутнику ABC проведено бісектрису кута B і відомо, що $AB : BC = m : n$. Побудуйте проекцію даного трикутника, якщо:
1) $m = 2$, $n = 3$;
2) $m = 5$, $n = 4$.

327*. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з катетами a і b та гіпотенузою c, в якому позначено центр вписаного кола і центр описаного кола, якщо:
1) $a : b : c = 3 : 4 : 5$;
2) $a : b : c = 8 : 15 : 17$.

328*. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника, на сторонах якого побудовано квадрати, якщо трикутник:
1) є рівнобедреним; 2) має кут 30°.

329*. Побудуйте проекцію тупокутного трикутника з кутом: 1) 120°; 2) 150°.
В яку точку проектується центр вписаного кола?
А центр описаного кола?

330*. Квадрат $ABCD$ добудовано до рівнобічної трапеції так, що сторона CD квадрата стала однією з основ трапеції, а сторона BC — висотою трапеції. Побудуйте проекцію отриманої трапеції.

331*. Правильний трикутник добудовано до прямокутної трапеції з гострим кутом 30°, висотою, яка дорівнює висоті даного трикутника, та меншою основою, що дорівнює стороні даного трикутника.
Побудуйте проекцію отриманої трапеції.

332*. Побудуйте проекцію кола і двох взаємно перпендикулярних його діаметрів.

Розв'язання.

1. Побудуємо фігуру-оригінал — коло з центром O, в якому проведено діаметри $AB \perp CD$ (мал. 175). Проведемо хорду MN паралельно діаметру AB. Оскільки $AB \perp CD$, то $MN \perp CD$, а за властивістю хорди, перпендикулярної до діаметра, $MK = KN$.

2. Проекцією кола є еліпс з центром O_1 (мал. 176). Проекцією діаметра AB кола є довільний діаметр A_1B_1 еліпса. Проекцією хорди MN кола є хорда M_1N_1 еліпса, яка паралельна A_1B_1. Точка K ділить хорду MN навпіл, тому точка K_1 є серединою хорди M_1N_1 еліпса. Шуканий діаметр C_1D_1 еліпса проходить через точки O_1 і K_1.

333*. Побудуйте проекцію квадрата:
1) вписаного в коло;
2) описаного навколо кола.
Розв'яжіть задачу двома способами.

334*. Побудуйте проекцію правильного трикутника:
1) вписаного в коло;
2) описаного навколо кола.

335*. Побудуйте проекцію правильного шестикутника:
1) вписаного в коло;
2) описаного навколо кола.

336*. Побудуйте проекцію прямокутника, у якого одна зі сторін дорівнює a і він є вписаним у коло радіуса R, якщо:
1) $a = 3$, $R = 2{,}5$; 2) $a = 12$, $R = 6{,}5$.

337*. Побудуйте зображення правильної трикутної призми. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну шестикутну призму.

338*. Побудуйте зображення правильної шестикутної призми. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну призму.

339*. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи:
1) $AB = 5$ см, $BC = 12$ см;
2) $AB = 24$ см, $BC = 1$ см.
Побудуйте січну площину, яка проходить через перпендикуляр, проведений з вершини нижньої основи до її діагоналі, та центр верхньої основи. Через центр нижньої основи проведіть другу січну площину, яка паралельна першій. По якій прямій друга січна площина перетинає верхню основу?

340*. Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди, кожна грань якої є вписаною в коло того самого радіуса.

341*. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кут:

1) 120°; 2) 150°.

Висота піраміди проходить через центр даного кола.

342*. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кути:

1) 30° і 60°; 2) 40° і 50°.

Висота піраміди проходить через центр даного кола.

343*. Побудуйте зображення куба.

Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну:

1) призму з найбільшою площею основи;

2) піраміду з найбільшою висотою.

344*. Побудуйте зображення правильної чотирикутної піраміди.

Проведіть січні площини так, щоб дістати:

1) прямокутний паралелепіпед з найбільшою площею основи;

2) куб з найбільшим ребром.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

345. Яким многокутником може бути тінь споруди на площині подвір'я, якщо споруда має форму:

1) прямокутного паралелепіпеда;

2) куба;

3) правильної чотирикутної піраміди?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які прямі називаються паралельними? Мимобіжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних прямих у просторі та ознаки їх паралельності.
3. Як знайти відстань від точки до прямої; між двома паралельними прямими?
4. Яке взаємне розміщення прямої і площини?
5. Опишіть взаємне розміщення двох площин.
6. Які властивості площин, що перетинаються? Доведіть їх.
7. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних площин та ознаку їх паралельності.
8. Що таке паралельне проектування? Які його властивості?
9. Поясніть, як побудувати паралельну проекцію трикутника; паралелограма; трапеції.
10. Як побудувати зображення прямої призми; піраміди?

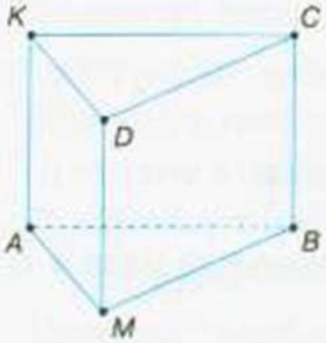
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

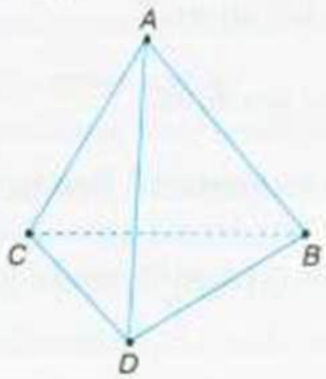
№ 1

1° На якому з малюнків прямі AB і CD не є мимобіжними?

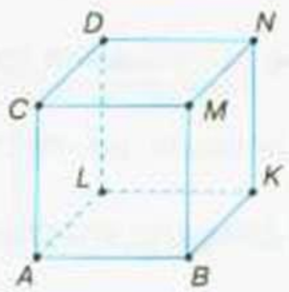
А.



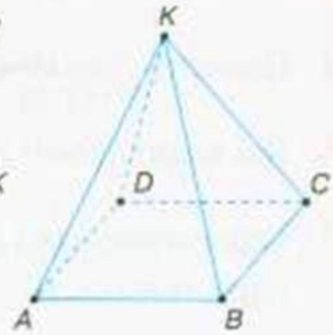
Б.



В.



Г.



2° Пряма a не лежить у площині квадрата $ABCD$ і паралельна його стороні AB. Яке твердження є правильним?

А. $a \parallel CD$. **Б.** $a \perp CD$. **В.** $a \parallel AC$. **Г.** $a \parallel BD$.

3° Дано: $\alpha \parallel \beta$, $MN \in \alpha$, $M_1N_1 \in \beta$, $MM_1 \parallel NN_1$, $MN = 10$ см. Яка довжина відрізка M_1N_1?

А. 5 см. **Б.** 10 см. **В.** 15 см. **Г.** 20 см.

4 Сторона AB трикутника ABC лежить у площині α, а вершина C не належить їй. На сторонах AC і BC трикутника позначено точки K і N так, що $AK : AC = 2 : 3$, $BN : NC = 2 : 1$. Яке взаємне розміщення прямої KN і площини α?

А. KN лежить в α. **Б.** $KN \times \alpha$. **В.** $KN \parallel \alpha$. **Г.** Не можна визначити.

5* Площини α і β паралельні. Ромб $ABCD$ зі стороною 10 см лежить у площині α. Через його вершини проведено паралельні прямі, що перетинають площину β у точках A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть діагоналі чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо більша діагональ ромба $ABCD$ дорівнює 16 см.

А. 5 см і 10 см. **Б.** 8 см і 10 см. **В.** 10 см і 16 см. **Г.** 12 см і 16 см.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

№ 2

1° Точка C є серединою відрізка AB, а точка D — серединою відрізка AC. В якому порядку розміщені точки A, B, C і D на паралельній проекції відрізка AB?

А. A, B, C, D. **Б.** A, C, B, D. **В.** A, D, C, B. **Г.** A, C, D, B.

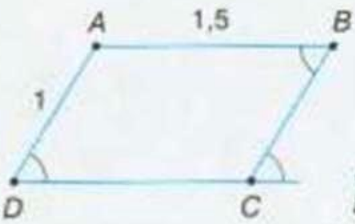
2° Паралельною проекцією трикутника ABC є різносторонній $\Delta A_1B_1C_1$. Що є проекцією медіани ΔABC, проведеної з вершини C?

А. Медіана до сторони A_1B_1. **Б.** Висота до сторони A_1B_1.

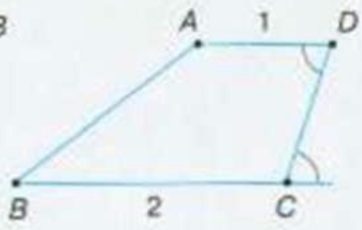
В. Бісектриса кута C_1. **Г.** Медіана до сторони A_1C_1.

3° Треба побудувати паралельну проекцію трапеції $ABCD$, основа AD якої у півтора раза менша від другої основи. Яка з побудов правильна?

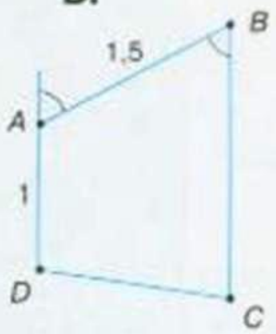
А.



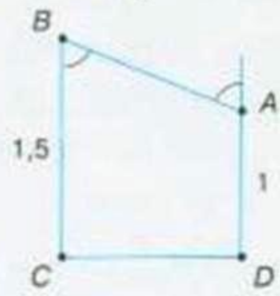
Б.



В.



Г.



4 Яких кутів не може бути у паралельної проекції паралелограма, вписаного в коло?

А. 80°, 90°, 90°, 100°. **Б.** 90°, 90°, 90°, 90°.

В. 45°, 45°, 135°, 135°. **Г.** 62°, 62°, 118°, 118°.

5* На зображенні правильної трикутної піраміди $SABC$ проведено січну площину, що проходить через основу висоти піраміди і бічне ребро SA. Яке ребро піраміди перетинає січна площина і в якому відношенні вона його ділить?

А. SB, 1 : 1. **Б.** BC, 2 : 1. **В.** AB, 1 : 2. **Г.** BC, 1 : 1.

РОЗДІЛ 3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

У розділі дізнаєтесь:

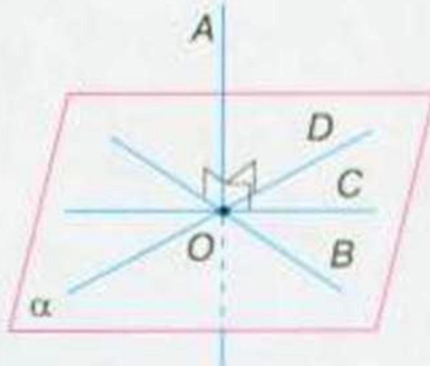
- про прямі, перпендикулярні до площин, перпендикулярні площини та їх властивості й ознаки;
- як розпізнавати й обгрунтовувати розміщення прямих і площин;
- про залежності між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин;
- про відстані й кути у просторі та як їх обчислювати;
- що таке ортогональне проектування та як його використовувати для зображення просторових фігур;
- як застосовувати вивчені властивості й ознаки на практиці та під час розв'язування задач


A
D
C
O
B

§9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Ви знаєте, що коли пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину. Якщо пряма перетинає площину, то вона може бути перпендикулярною до цієї площини.

Подивіться на малюнок 177. Пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD, ... лежать у цій площині і проходять через точку перетину. Пряма AO перпендикулярна до кожної з цих прямих. Говорять, що пряма AO перпендикулярна до площини α.



Мал. 177

Записуємо: $AO \perp \alpha$ або $\alpha \perp AO$.

Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини, та порівняйте його з наведеним у підручнику.

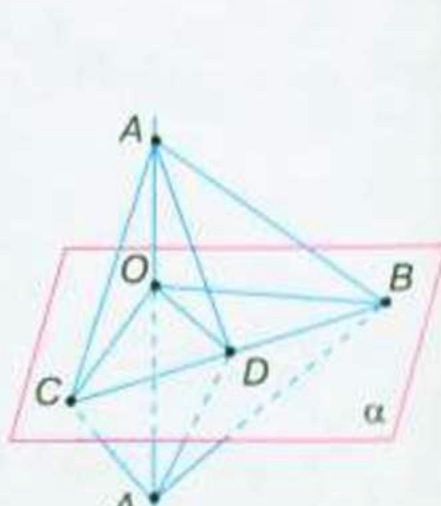
Пряма називається ***перпендикулярною до площини***, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину.

Теорема (ознака перпендикулярності прямої і площини).
Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.

Дано: пряма AA_1 перетинає площину α в точці O (мал. 178); прямі OB і OC лежать у площині α, $AA_1 \perp OB$, $AA_1 \perp OC$.

Довести: $AA_1 \perp \alpha$.

Доведення. Доведемо, що пряма AA_1 перпендикулярна до будь-якої прямої OD, що лежить у площині α і проходить через точку перетину O (мал. 178). Відкладемо на прямій AA_1 у різні боки від точки O рівні відрізки OA і OA_1. Проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OD і OC у точках B, D і C. Ці точки сполучимо з точками A і A_1 відрізками.



Мал. 178

Розглянемо три пари трикутників.

1. ΔABA_1 і ΔACA_1 рівнобедрені, оскільки відрізки

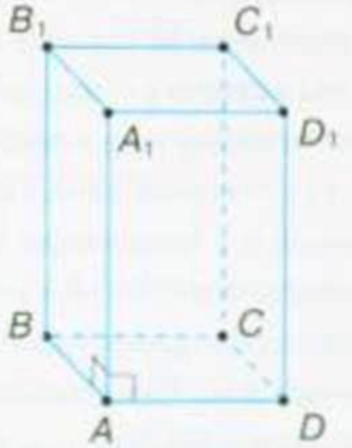
OC і OB є висотами за умовою і медіанами за побудовою ($OA = OA_1$). Звідси $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$.

2. $\Delta ABC = \Delta A_1BC$ за трьома сторонами. У них $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$ за доведеним, BC – спільна сторона. З рівності трикутників випливає: $\angle ABD = \angle A_1BD$.

3. $\Delta ABD = \Delta A_1BD$ за двома сторонами (BD – спільна сторона, $AB = A_1B$) і кутом між ними ($\angle ABD = \angle A_1BD$). З рівності трикутників матимемо: $AD = A_1D$.

Отже, ΔAA_1D рівнобедрений. Тому його медіана OD є і висотою, тобто $AA_1 \perp OD$. За означенням, пряма AA_1 перпендикулярна до площини α.

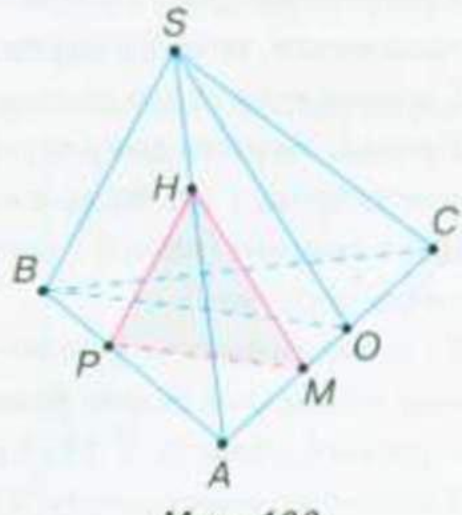
? Чому ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 179) перпендикулярне до площини основи? Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD, то, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, воно перпендикулярне до площини основи $ABCD$.



Мал. 179

Задача. Побудуйте переріз правильної піраміди $SABC$ площиною, яка проходить через точку M на ребрі AC і перпендикулярна до цього ребра.

Розв'язання. Проведемо медіану BO ΔABC (мал. 180). Оскільки ΔABC рівносторонній, то $BO \perp AC$. Проведемо $MP \parallel BO$, тоді $MP \perp AC$. ΔSAC – рівнобедрений, тому його медіана SO є висотою.
Проведемо $MH \parallel SO$, тоді $MH \perp AC$. Сполучимо точки P і H відрізком. ΔMHP – шуканий переріз. Справді, пряма AC перетинає площину MHP і перпендикулярна до двох прямих MH і MP цієї площини, що проходять через точку перетину. За ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма AC перпендикулярна до площини MHP.



Мал. 180

1. Щоб довести, що дана пряма перпендикулярна до площини:

а) виділіть на малюнку дві прямі, які лежать у площині і проходять через точку перетину;

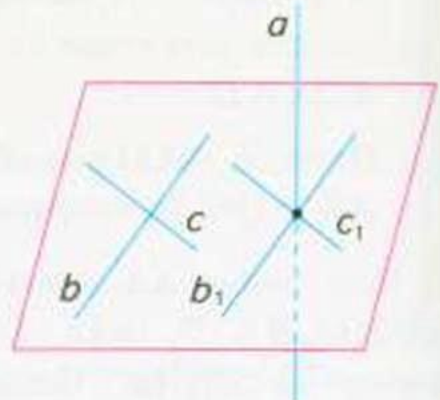
б) доведіть, що дана пряма перпендикулярна до кожної з цих прямих.

2. Пам'ятайте: якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині і проходить через точку перетину.

Ознака перпендикулярності прямої і площини застосовується на практиці. Щоб перевірити, чи перпендикулярна лінія перетину стін кімнати до площини підлоги, перевіряють, чи є прямими кути між цією лінією і двома прямими, які лежать на площині підлоги і перетинають цю лінію.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас може виникнути запитання: *Чи обов'язково, щоб дві прямі, про які йдеться в ознаці перпендикулярності прямої і площини, проходили через точку перетину даної прямої і площини?* Не обов'язково. На малюнку 181 пряма a перпендикулярна до прямих b і c, які лежать у площині α і перетинаються, але не проходять через точку перетину прямої і площини. Прямі a і b, a і c — мимобіжні. Проведемо через точку перетину прямої a з площиною α прямі $b_1 \parallel b$ і $c_1 \parallel c$. Тоді, за означенням кута між мимобіжними прямими, пряма a буде перпендикулярною до прямих b_1 і c_1, а отже, і до площини α. Тому ознаку перпендикулярності прямої і площини можна узагальнити і сформулювати так:



Мал. 181

Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що перетинаються, то вона перпендикулярна до площини.

Справедливе і таке твердження:

Пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна і до будь-якої прямої, що лежить у цій площині (хоча б і такої, що не проходить через точку перетину).

Б. Я. Букреєв

2. Значний внесок у розвиток геометрії зробив відомий математик Борис Якович Букреєв (1859 — 1962), який народився в м. Льгові Курської області. У 1878 році Б. Я. Букреєв вступив на математичне відділення Київського університету, в якому плідно працював усе своє життя і виховав не одне покоління науковців України. Пішов на заслужений відпочинок у 1959 р. Наукові інтереси вченого пов'язані з дослідженнями у проективній та диференціальній геометрії, з теорією поверхонь і задачами на побудову в геометрії Лобачевського.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Як довести, що дана пряма перпендикулярна до площини?

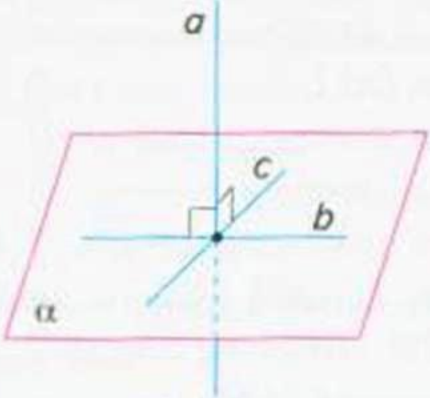
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

346'. Пряма a перпендикулярна до прямих b і c площини α (мал. 182). Чи випливає з цього, що $a \perp \alpha$?

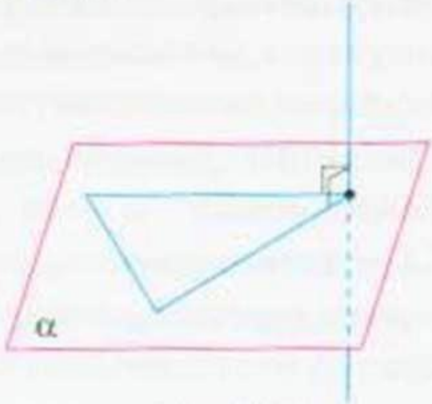
347'. Пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника (мал. 183). Чи можна стверджувати, що ця пряма перпендикулярна до площини трикутника?

348'. $a \perp \alpha$ (мал. 184). Чи перпендикулярна пряма a до прямої b, яка лежить у площині α?

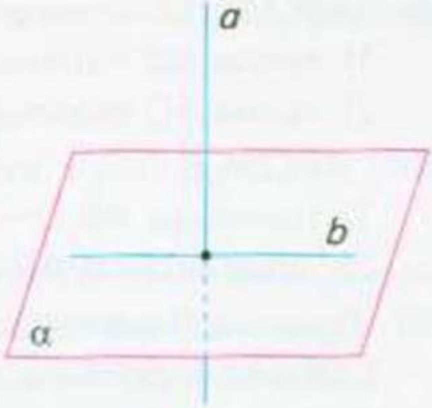
349°. Пряма a перетинає площину α і перпендикулярна до прямої b, яка лежить у цій площині (мал. 184). Чи може пряма a не бути перпендикулярною до площини α? Поясніть відповідь.



Мал. 182



Мал. 183

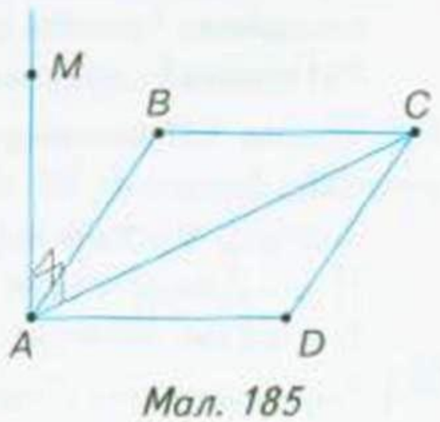


Мал. 184

350°. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до прямих AB і AC (мал. 185). Доведіть, що $AM \perp AD$.

351°. Через вершину A трикутника ABC проведено пряму AK, перпендикулярну до прямих AB і AC.
Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до висоти, медіани і бісектриси трикутника ABC, проведених з вершини A.

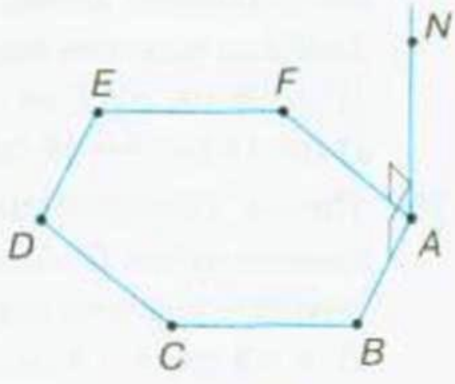
352°. Пряма BM перпендикулярна до площини трикутника ABC. На стороні AC взято довільну точку K.
Якого виду трикутник KBM?
Поясніть відповідь.



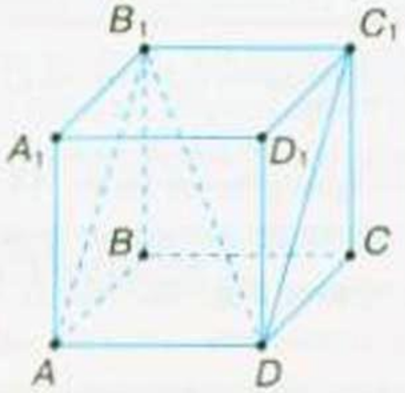
Мал. 185

353°. Через точку N, що лежить поза площиною шестикутника $ABCDEF$, проведено пряму AN, перпендикулярну до прямих AB і AF (мал. 186).
Доведіть, що:
1) $AN \perp AC$; 2) $AN \perp AD$; 3) $AN \perp AE$.

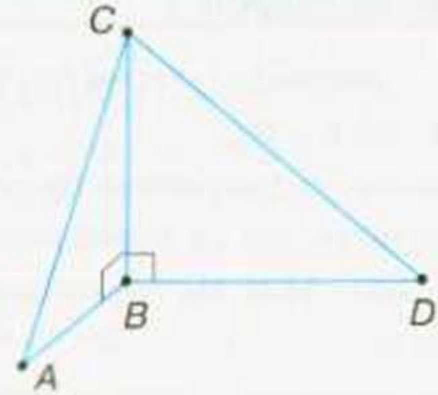
354°. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів?
Поясніть відповідь.



Мал. 186



Мал. 187



Мал. 188

355°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що:

1) пряма DD_1 перпендикулярна до площини грані $ABCD$;
2) пряма AD перпендикулярна до площини грані DD_1C_1C.

356°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 187). Доведіть, що:

1) трикутник AB_1D — прямокутний;
2) чотирикутник AB_1C_1D — прямокутник.

357. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що:

1) пряма BC перпендикулярна до площини прямих AC і CM;
2) пряма AC перпендикулярна до площини прямих BC і CM.

358. Пряма CD перпендикулярна до сторони BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

359. **Прямокутні трикутники ABC і BCD з прямим кутом B лежать у різних площинах і мають спільний катет BC** (мал. 188).
Які пряма і площина перпендикулярні між собою? Поясніть відповідь.

360. Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ зі стороною a, $CM = b$.
Знайдіть відстань від точки M до вершин квадрата, якщо:

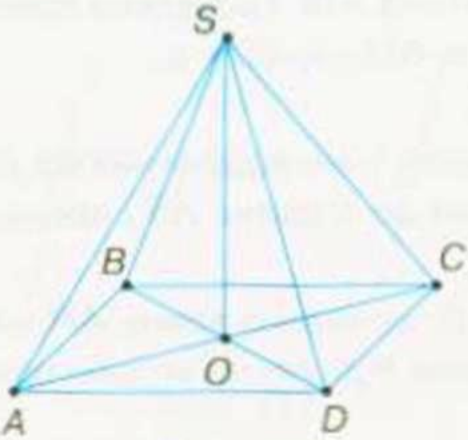
1) $a = 2$ см, $b = 1$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 4$ см.

361. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$.
Знайдіть відстань від точки D до середини M гіпотенузи трикутника, якщо:

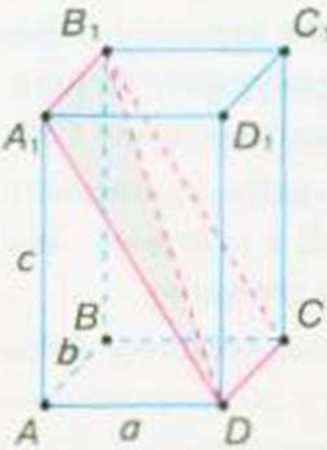
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 24$ см.

362. Пряма AD перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C. $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.
Знайдіть відстань від точки D до вершин B і C, якщо:

1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 15$ см.



Мал. 189



Мал. 190

363. Через точку O перетину діагоналей ромба $ABCD$ проведено пряму OM, перпендикулярну до його площини.
Доведіть, що:
1) пряма BD перпендикулярна до площини AMC;
2) пряма AC перпендикулярна до площини BMD.

364. Точка S лежить поза площиною паралелограма $ABCD$ (мал. 189). Відомо, що $SA = SC$, $SB = SD$ і O — точка перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини паралелограма.

365. a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCD$ (мал. 190). Знайдіть площі трикутника A_1B_1D і чотирикутника A_1B_1CD, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 8$ см, $c = 16$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см.

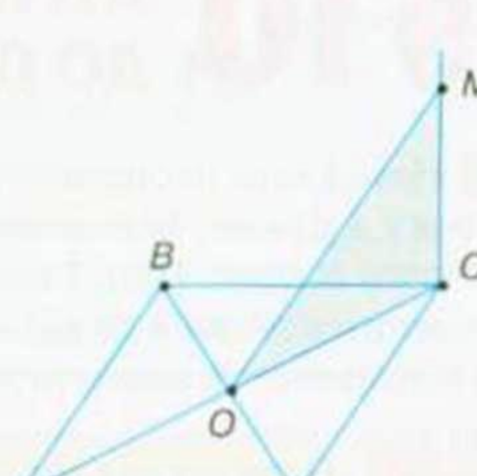
366. Пряма OM перпендикулярна до площини кола з центром O, а точка A лежить на колі. Знайдіть AM, якщо:
1) $OA = 6$ см, $\angle OMA = 30°$;
2) $OM = 4$ см, площа круга дорівнює 25π см^2.

367. Усі ребра піраміди $SABC$ рівні, D — середина ребра AB. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини DSC.

368. Усі ребра піраміди $SABC$ рівні.
Через довільну точку D на ребрі SA проведіть площину, перпендикулярну до:
1) AB; 2) BC.

369. **Доведіть, що через точку, яка лежить поза площиною α, не може проходити дві прямі, перпендикулярні до площини α.**

370*. O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, CM — пряма, перпендикулярна до його площини (мал. 191).
Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини OMC.



Мал. 191

371*. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$.
Знайдіть медіану CM трикутника ABC.

372*. Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від даних точок A і B, є площина, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину.

373*. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки M до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c ($a < c$, $b < c$).
Знайдіть довжини відрізка AM і сторін прямокутника.

374*. У трикутнику ABC кут C прямий, а кут A дорівнює $30°$. Через точку C проведено пряму CM, перпендикулярну до площини трикутника. $AC = 18$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

375. Вважаючи підлогу в кімнаті і двері з цієї кімнати в іншу за моделі площин, а косяк дверей за модель прямої, проілюструйте на цих моделях означення прямої, перпендикулярної до площини.

376. Як за допомогою виска можна перевірити вертикальність стовпа?

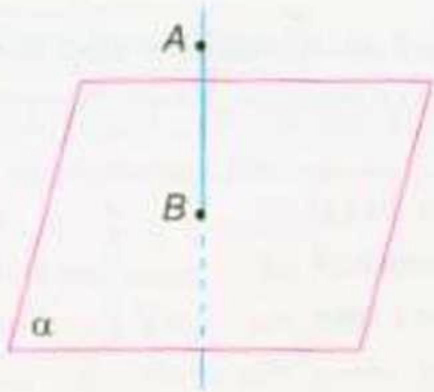
377. Перпендикулярність осі свердла до площини столу, на якому кріпиться деталь (мал. 192), слюсар перевірив за допомогою кутника.
Як він це зробив?

Мал. 192

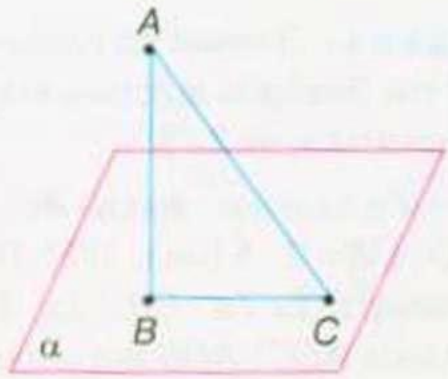
§ 10. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА ДО ПЛОЩИНИ

Нехай дано площину α і точку A, яка не лежить на ній. Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до площини, яка перетинає площину в точці B (мал. 193). Говорять, що відрізок AB є ***перпендикуляром***, проведеним з точки A до площини α, а кінець B цього відрізка, який лежить у площині, – ***основою перпендикуляра***.

Перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної площини, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.



Мал. 193



Мал. 194

Нехай AB – перпендикуляр до площини α, а C – відмінна від точки B точка цієї площини (мал. 194). Тоді відрізок AC називають *похилою*, проведеною з точки A до площини α, а точку C – *основою похилої*. Відрізок BC, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, називають *проекцією похилої* AC на площину α.

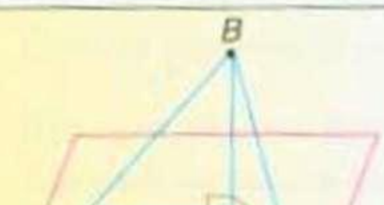
? Чи існують залежності між довжинами перпендикуляра і похилої, похилої та її проекції? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема (властивості перпендикуляра і похилої).
Якщо з точки, взятої поза площиною, проведені до площини перпендикуляр і похилі, то:
1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу;
2) проекції рівних похилих рівні і, навпаки, похилі, що мають рівні проекції, рівні;
3) з двох похилих більша та, проекція якої більша.

Доведіть теорему самостійно, використавши властивості прямокутного трикутника.

Твердження теореми наведено в таблиці 10.

Таблиця 10

	$BC < AB$, $BC < BD$
	Якщо $\begin{array}{c}AB = BD\\ \hline AC = CD\end{array}$, то $\begin{array}{c}AC = CD\\ \hline AB = BD\end{array}$
	Якщо $AC > CD$, то $AB > BD$

Теорема про властивості перпендикуляра і похилої застосовується на практиці. Наприклад, якщо встановлюють щоглу на радіостанції, то стяжки беруть рівної довжини. Нижні кінці їх закріплюють на однакових відстанях від основи щогли (рівномірно по колу). Це сприяє стійкості щогли.

Задача. З точки до площини проведені дві похилі, які дорівнюють 20 см і 34 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини, якщо проекції похилих відносяться, як 2 : 5.

Розв'язання. Нехай $AC = 20$ см, $AB = 34$ см і $CO : OB = 2 : 5$ (мал. 195). Позначимо проекції похилих $CO = 2x$ і $OB = 5x$. З прямокутних трикутників AOC і AOB знаходимо AO^2.

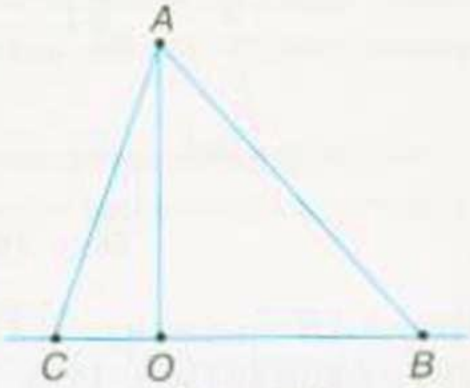
З ΔAOC: $AO^2 = AC^2 - CO^2 = 20^2 - (2x)^2 = 400 - 4x^2$,

а з ΔAOB: $AO^2 = AB^2 - OB^2 = 34^2 - (5x)^2 = 1156 - 25x^2$.

Дістанемо рівняння: $400 - 4x^2 = 1156 - 25x^2$.

Звідки $21x^2 = 756$, $x^2 = 36$.

Отже, $AO = \sqrt{400 - 4x^2} = \sqrt{400 - 4 \cdot 36} = \sqrt{256} = 16$ (см).



Мал. 195

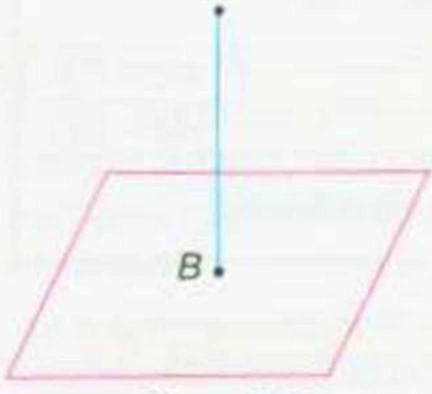
Якщо в задачі йдеться про дві похилі, проведені з однієї точки до площини, то розгляньте два прямокутних трикутники, спільним катетом яких є перпендикуляр, проведений з даної точки до площини.

Подивіться на малюнки 196 – 198. На них зображено відрізок AB, довжина якого є відстанню: від точки до площини (мал. 196); від прямої до паралельної їй площини (мал. 197); між паралельними площинами (мал. 198).

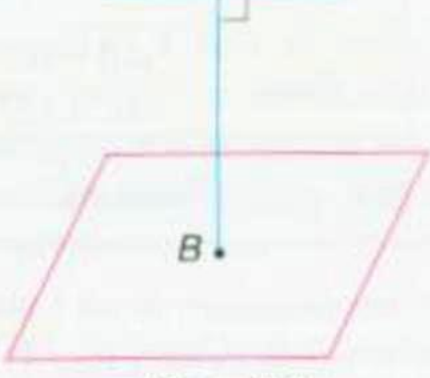
Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини.

Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки цієї прямої до площини.

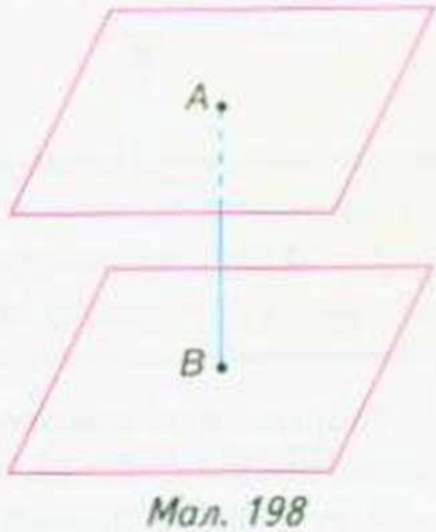
За *відстань між паралельними площинами* приймають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до іншої.



Мал. 196



Мал. 197



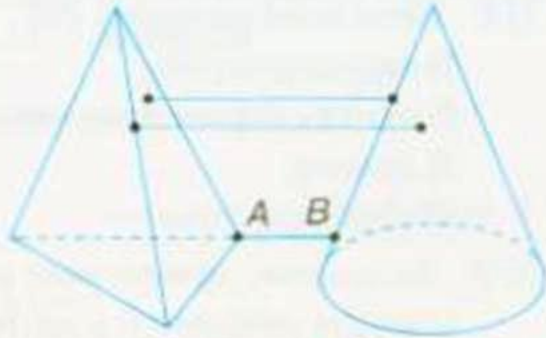
Мал. 198

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Може виникнути запитання: *Що таке відстань між будь-якими двома геометричними фігурами?*

Подивіться на малюнок 199.

Нехай AB найменша відстань між точками фігур. Тоді AB буде відстанню між цими фігурами.



Мал. 199

2. Значний внесок у розвиток шкільної геометрії зробив відомий український педагог-математик, доктор педагогічних наук, професор Іван Федорович Тесленко (1908 – 1994), який народився в селі Домоткань на Дніпропетровщині.

У своїх працях учений запропонував такий підхід до викладу елементарної геометрії, який дозволив поєднати абстрактність і наочність змісту, дохідливіше розкрити методи геометрії, особливості розв'язування планіметричних і стереометричних задач.

І досі не втратили цінності його підручники і навчальні посібники, серед яких: «Геометрія: Підручник для 9 – 10 кл.» і «Геометрія: Посібник для студентів фіз.-мат. факультетів педагогічних інститутів».

Тесленко І. Ф.

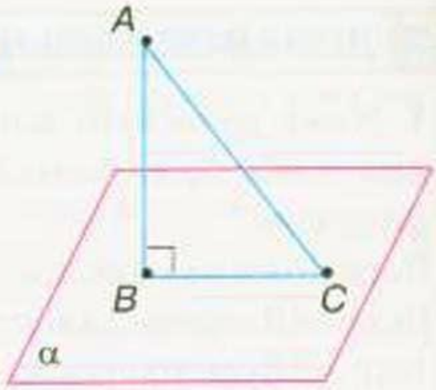
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке перпендикуляр, проведений з даної точки до даної площини? Основа перпендикуляра?
2. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
3. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої.
4. Що називається відстанню від точки до площини? Від прямої до паралельної їй площини? Між паралельними площинами?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

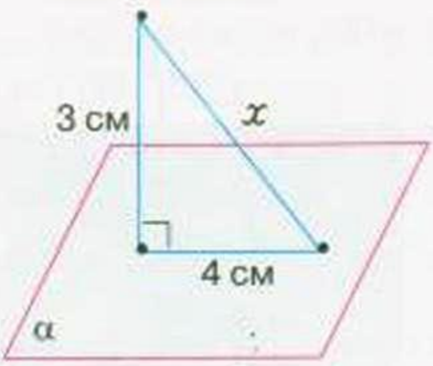
378'. Назвіть на малюнку 200:

1) перпендикуляр;
2) основу перпендикуляра;
3) похилу;
4) проекцію похилої.

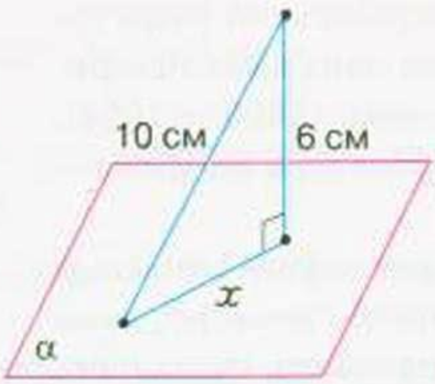


Мал. 200

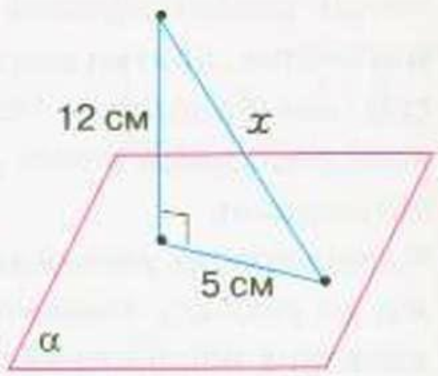
379'. За даними, наведеними на малюнках 201 – 203, знайдіть невідомий відрізок x.



Мал. 201



Мал. 202



Мал. 203

380'. На малюнку 204 AD і DC – проекції похилих AB і BC.

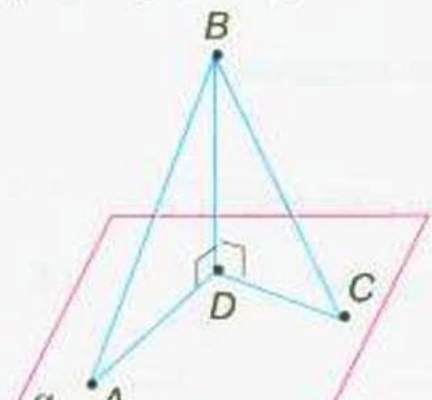
1) $AD < DC$. Яке із співвідношень правильне?
 а) $AB = BC$; б) $AB > BC$; в) $AB < BC$?
2) $AB = BC$. Порівняйте довжини проекцій цих похилих.

381°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 205). Чому дорівнює відстань:

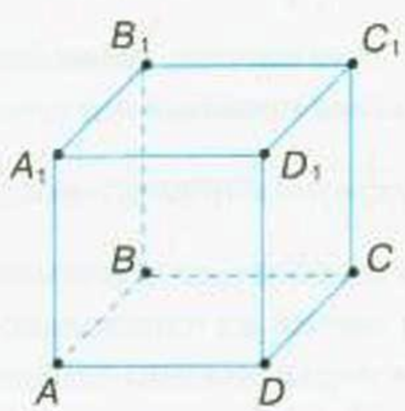
1) від вершини A до площини грані DD_1C_1C;
2) від прямої A_1D_1 до площини грані $ABCD$;
3) між площинами граней AA_1D_1D і BB_1C_1C?

382°. Проведіть з точки O до площини α перпендикуляр OM і похилу OK. Знайдіть:

1) довжину похилої OK, якщо $OM = 12$ см, $MK = 16$ см;
2) довжину перпендикуляра OM, якщо $MK = 12$ см, $OK = 15$ см;
3) довжину проекції MK похилої, якщо $OM = 9$ см, $OK = 15$ см.



Мал. 204



Мал. 205

Розв'язування задач про похилу та її проекцію на площину зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, сторонами якого є похила, її проекція на площину і перпендикуляр до площини.

383°. AB – перпендикуляр, AC – похила, BC – проекція похилої. Заповніть таблицю 11.

Таблиця 11

AB	24 см	15 см	
BC	7 см		$24a$
AC		25 см	$26a$

384°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина похилої дорівнює a, а кут між похилою і перпендикуляром – α. Знайдіть довжини перпендикуляра і проекції похилої, якщо:

1) $a = 10$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 12$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 8$ см, $\alpha = 30°$.

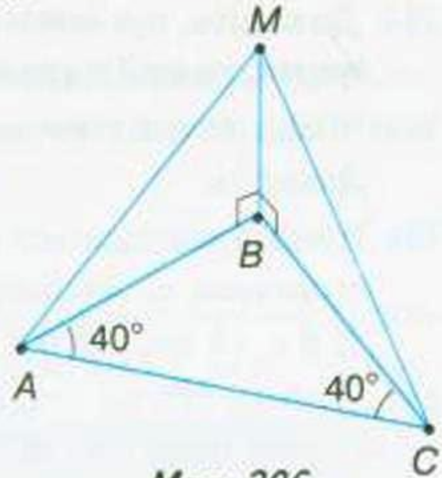
385°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює a, а кут між похилою і перпендикуляром дорівнює α. Знайдіть довжину похилої і її проекцію на площину, якщо:

1) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 5$ см, $\alpha = 45°$;

3) $a = 14$ см, $\alpha = 30°$.

386°. Скільки рівних похилих можна провести з даної точки до площини? Якою фігурою є геометричне місце основ цих похилих?

387°. OM – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O – точка перетину його діагоналей. Доведіть, що точка M рівновіддалена від вершин квадрата.



Мал. 206

388°. **AK – перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Порівняйте довжини похилих KC і KB. Поясніть відповідь.**

389°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a. Знайдіть відстань:

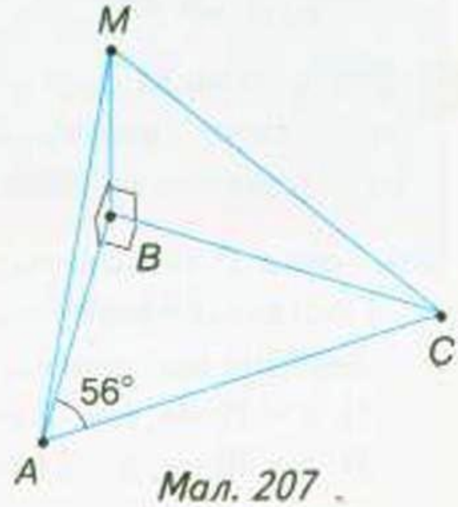
1) від прямої AA_1 до площини BB_1D_1D;

2) від прямої AD до площини A_1B_1CD.

390. Порівняйте похилі MA і MC за даними:

1) на малюнку 206;

2) на малюнку 207.



Мал. 207

391. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть кут між перпендикуляром і похилою, якщо:

1) довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої;
2) довжина проекції похилої дорівнює половині довжини похилої;
3) довжина перпендикуляра дорівнює половині довжини похилої.

392. ***AB* – перпендикуляр, *AC* – похила, *BC* – проекція похилої, α – кут між перпендикуляром і похилою.**
Заповніть таблицю 12.

Таблиця 12

AB			5 см	6 см	7 см	14 см
BC		4 см				14 см
AC	6 см	8 см		12 см		
α	30°		45°		60°	

393. З точки *M* до площини проведено рівні похилі *MA*, *MB*, *MC*, *MD*. Чи може чотирикутник *ABCD* бути:

1) квадратом; 2) паралелограмом; 3) прямокутником?

Поясніть відповідь.

394. **Доведіть, що коли існує точка, рівновіддалена від вершин паралелограма, то цей паралелограм – прямокутник. Розгляньте два випадки.**

395. Якщо точка рівновіддалена від вершин ромба, то цей ромб – квадрат. Доведіть.

396. Точка *A* знаходиться на відстані a від вершин рівностороннього трикутника із стороною a. Знайдіть відстань від точки *A* до площини трикутника, якщо:

1) $a = \sqrt{6}$ см; 2) $a = 3$ см.

397. З точки *M* поза площиною α проведено до неї три рівні похилі *MA*, *MB*, *MC* і перпендикуляр *MO*.

Доведіть, що основа перпендикуляра *O* є центром кола, описаного навколо трикутника *ABC*.

Якщо дано кілька рівних похилих, проведених з точки до площини, то їх кінці лежать на колі, центром якого є основа перпендикуляра, проведеного до площини зі спільної точки похилих.

398. Точка *D* знаходиться на відстані a від вершин прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює b.

Знайдіть відстань від точки *D* до площини трикутника, якщо:

1) $a = 10$ см, $b = 12$ см;
2) $a = 20$ см, $b = 24$ см.

399. З точки до площини проведені перпендикуляр довжиною 6 см і похила довжиною 9 см.
Знайдіть проекцію перпендикуляра на похилу.

400. З точки A до площини α проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5. Знайдіть:
1) проекції похилих;
2) відстань від точки A до площини α.

401. З точки до площини проведено дві похилі.
Знайдіть довжини похилих, якщо:
1) різниця їх довжин дорівнює 6 см, а проекції похилих дорівнюють 15 см і 27 см;
2) похилі відносяться, як 5 : 8, а проекції похилих дорівнюють 7 см і 32 см.

402*. З точки до площини проведено дві рівні похилі. Знайдіть кут між кожною похилою і її проекцією, якщо кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями — прямий.

403*. З даної точки до площини проведено три рівні похилі довжиною 74 см. Відстані між кінцями похилих дорівнюють 15 см, 21 см і 24 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

404*. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD, BC і висота відповідно дорівнюють 24 см, 10 см і 17 см. Точка M знаходиться на відстані 85 см від вершин трапеції. Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції.

405*. Точка M рівновіддалена від усіх вершин многокутника. Доведіть, що основа перпендикуляра MO, проведеного до площини многокутника, є центром кола, описаного навколо многокутника.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

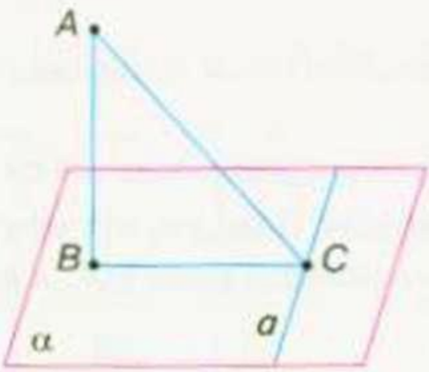
406. Щогла закріплена трьома однаковими тросами так, що нижні кінці тросів віддалені від щогли на 20 м, а верхні кінці закріплені на висоті 32 м. Які довжини тросів?

407. У підвалі, що має форму півциліндра (мал. 208), треба поставити два стояки, основи яких повинні бути однаково віддалені за підлогою від найближчої стінки і знаходитись на відстані 2 м один від одного. Визначте висоту стояків, коли відомо, що ширина підвалу 4,6 м.

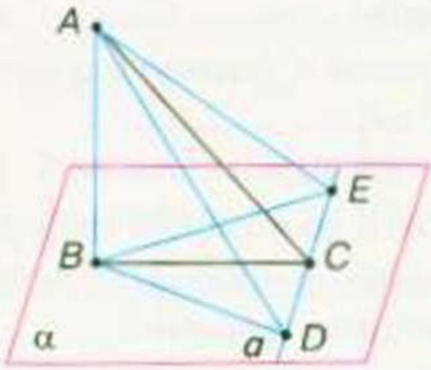
Мал. 208

§ 11. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

Нехай AB – перпендикуляр до площини α, AC – похила, BC – проекція похилої і a – пряма в площині α, проведена через основу C похилої (мал. 209).



Мал. 209



Мал. 210

Має місце таке твердження.

Теорема (про три перпендикуляри).
Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до самої похилої.

Дано: $AB \perp \alpha$ (мал. 210),
AC – похила,
BC – проекція похилої,
$C \in a$, $a \perp BC$.

Довести: $a \perp AC$.

Доведення. Відкладемо на прямій a довільні, але рівні відрізки CD і CE та сполучимо відрізками точки A і B з точками D і E.
Тоді матимемо:
$BD = BE$ як похилі до прямої DE з рівними проекціями CD і CE,
$AD = AE$ як похилі до площини α, що мають рівні проекції BD і BE.
Внаслідок цього трикутник ADE – рівнобедрений, тому його медіана AC перпендикулярна до основи DE.

? Чому теорема має назву теореми про три перпендикуляри?

У ній говориться про зв'язок між такими трьома перпендикулярами: $AB \perp \alpha$, $a \perp BC$, $a \perp AC$.

Справджується й обернена теорема.

Теорема (обернена до теореми про три перпендикуляри).
Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

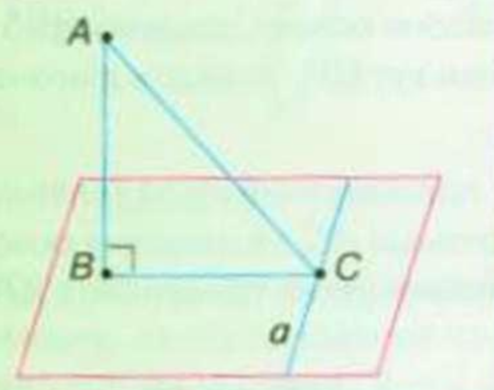
Дано: $AB \perp \alpha$ (мал. 210), AC – похила,
BC – проекція похилої,
$C \in a$, $a \perp AC$.

Довести: $a \perp BC$.

Доведення. Зробимо ті ж побудови, що і в доведенні прямої теореми. Відкладемо довільні, але рівні відрізки CD і CE та сполучимо відрізками точки A і B з точками D і E. Матимемо: $AD = AE$ як похилі до прямої DE з рівними проекціями CD і CE, $BD = BE$ як проекції рівних похилих AD і AE. Через це трикутник BDE – рівнобедрений, тому його медіана BC перпендикулярна до основи DE.

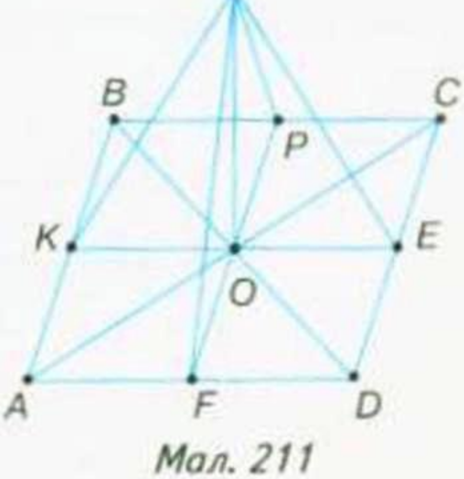
Теорему про три перпендикуляри та обернену до неї подано в таблиці 13.

Таблиця 13

	Якщо $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, то $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$

Задача. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює 10 см, а до площини ромба – 8 см.
Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 211),
$MK = MP = ME = MF = 10$ см, $MO = 8$ см.
За означенням, відстані $MK \perp AB$, $MP \perp BC$, $ME \perp CD$, $MF \perp AD$.
Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $OK \perp AB$, $OP \perp BC$, $OE \perp CD$, $OF \perp AD$.



Мал. 211

Оскільки відстані від точки M до сторін ромба рівні, то відрізки OK, OP, OE, OF також рівні як проекції рівних похилих. Звідси точка O – основа перпендикуляра MO – є центром кола, вписаного в ромб. Із прямокутного трикутника MOK знайдемо радіус цього кола:

$R = OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Застосовуючи теорему про три перпендикуляри, пам'ятайте: якщо точка A однаково віддалена від усіх сторін многокутника, то основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини многокутника, також однаково віддалена від його сторін, тобто є центром вписаного в многокутник кола.

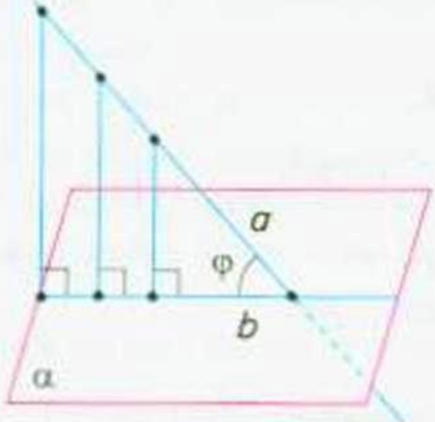
Дамо означення кута між прямою і площиною. Нехай дано площину α і пряму a, яка її перетинає і не перпендикулярна до площини α (мал. 212). Основи перпендикулярів, проведених з точок прямої a до площини α, лежать на прямій b. Ця пряма називається *проекцією прямої a* на площину α. *Кутом між прямою і площиною* називається кут між цією прямою і її проекцією на площину. На малюнку 212 – це кут φ.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважається таким, що дорівнює $90°$, а між паралельними прямою і площиною – $0°$.

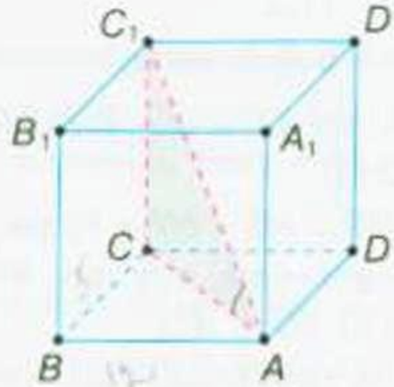
Задача. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 213), $AB = 12$ см, $BC = 5$ см. Проекція діагоналі AC_1 на площину основи $ABCD$ – відрізок AC. Тому $\angle CAC_1 = 60°$. З прямокутних трикутників ABC і ACC_1 матимемо:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ (см), $AC_1 = \dfrac{AC}{\cos 60°} = \dfrac{13}{\frac{1}{2}} = 26$ (см).



Мал. 212



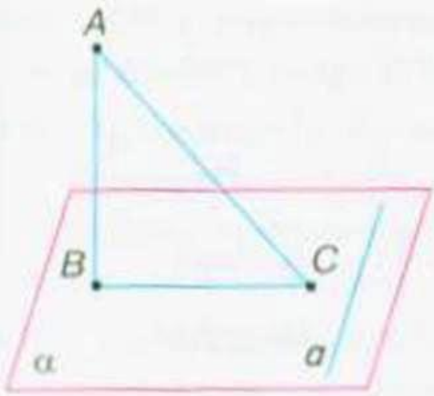
Мал. 213

Розв'язування задачі, де дано кут між прямою і площиною, нерідко зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, гострий кут якого дорівнює даному, а сторонами є похила, її проекція і перпендикуляр.

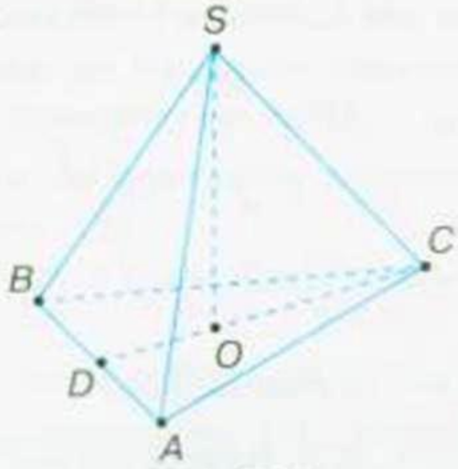
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Теорему про три перпендикуляри можна узагальнити, використавши означення кута між мимобіжними прямими. Вона буде справедливою і тоді, коли пряма a, яка лежить у площині, не проходить через основу похилої AC (мал. 214). Таке узагальнення розширює межі застосування теореми.

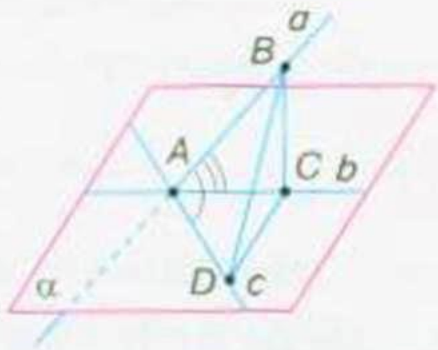
Наприклад, задача. Основа висоти SO трикутної піраміди лежатиме на висоті CD основи тоді і тільки тоді, коли бічне ребро SC перпендикулярне до сторони основи AB (мал. 215). Це твердження є лише іншим формулюванням теореми про три перпендикуляри: SO і SC — перпендикуляр і похила до площини основи, а AB — пряма, яка лежить у цій площині.



Мал. 214



Мал. 215



Мал. 216

2. *Кут між прямою і площиною найменший з усіх кутів, які пряма утворює з прямими, проведеними на площині.*

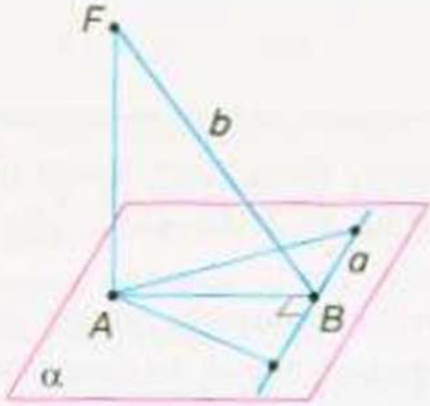
Нехай a — дана пряма, b — її проекція на площину, c — довільна пряма на площині α (мал. 216). З довільної точки B прямої a проведемо перпендикуляр BC на пряму b. Відкладемо на прямій c відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки D і C. У трикутників ABC і ABD сторона AB спільна, $AC = AD$, але $BD > BC$ (за теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри). Тоді й протилежний кут DAB у ΔABD більший за відповідний кут CAB у ΔABC.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

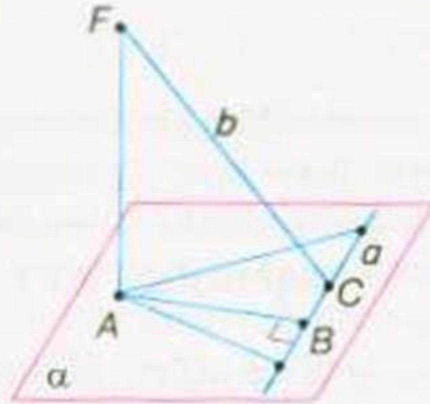
1. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
2. Що таке проекція прямої на площину?
3. Дайте означення кута між прямою і площиною.
4. Яка градусна міра кута між прямою і площиною, якщо пряма перпендикулярна до площини? Пряма паралельна площині?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

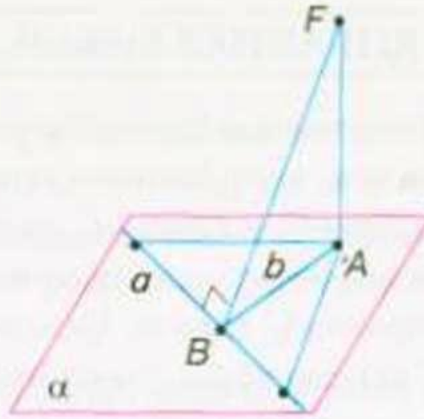
408'. На малюнках 217 – 219 $AF \perp \alpha$. Визначте взаємне розміщення прямих a і b на кожному з малюнків.



Мал. 217

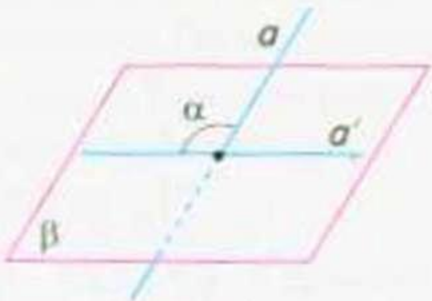


Мал. 218

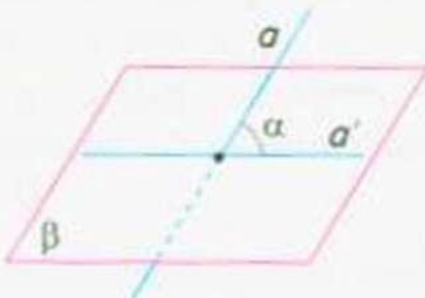


Мал. 219

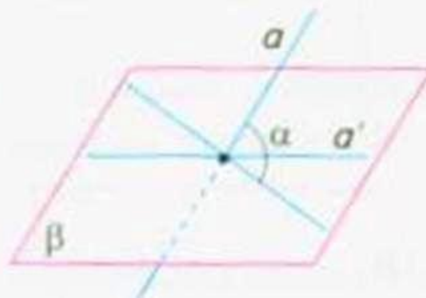
409'. На малюнках 220 – 222 пряма a' – проекція прямої a на площину β. На якому з малюнків кут α є кутом між прямою a і площиною β?



Мал. 220



Мал. 221



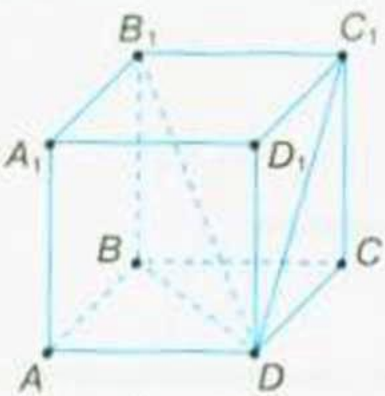
Мал. 222

410'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 223). Назвіть кут між:

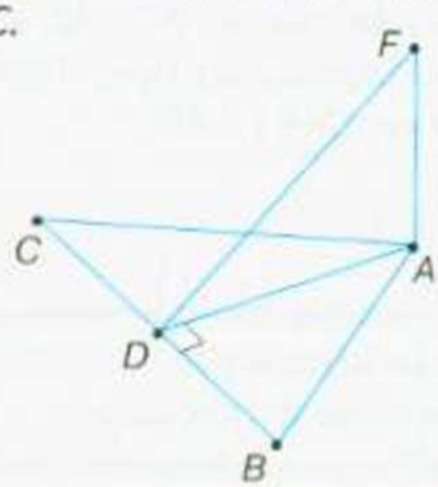
1) діагоналлю DC_1 грані DD_1C_1C і площиною основи $ABCD$;
2) діагоналлю B_1D куба і площиною основи $ABCD$;
3) діагоналлю B_1D і площиною грані DD_1C_1C.

411''. AF – перпендикуляр до площини трикутника ABC; AD – його висота (мал. 224). Доведіть, що $DF \perp BC$.

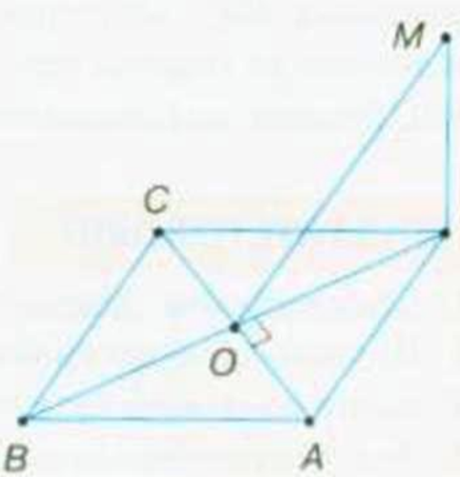
412°. DM – перпендикуляр до площини квадрата (мал. 225). Доведіть, що $OM \perp AC$.



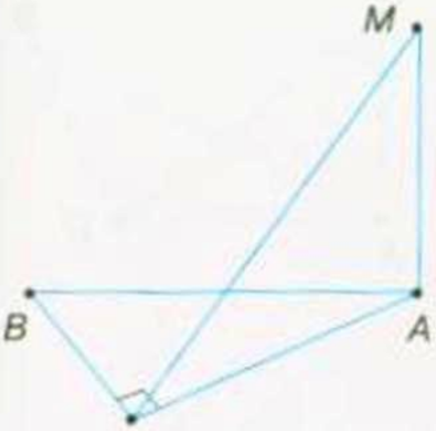
Мал. 223



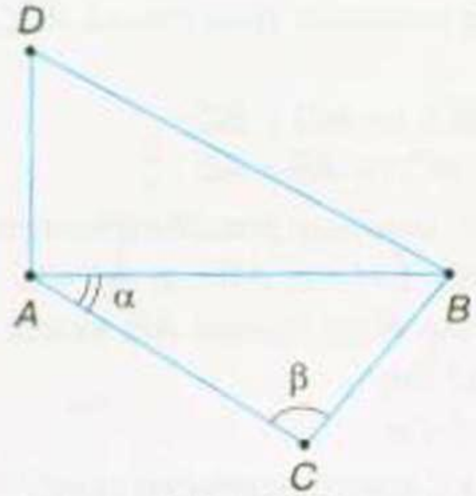
Мал. 224



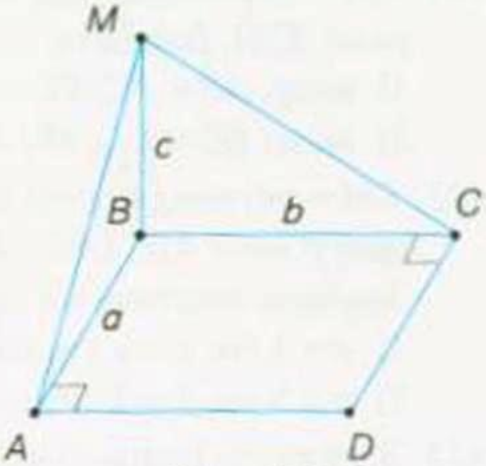
Мал. 225



Мал. 226



Мал. 227



Мал. 228

413°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O — точка перетину діагоналей. $AB = a$, $OM = b$.
Знайдіть відстань від точки M до сторони CD, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 15$ см.

414°. AM — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) (мал. 226). Доведіть, що ΔBMC — прямокутний.

415°. З середини O гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр OM.
Проведіть перпендикуляри з точки M до катетів AC і BC.
Поясніть побудову.

416°. У трикутнику ABC кут CAB дорівнює α, а кут ACB — β (мал. 227). AD — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть, що $DB \perp BC$, якщо:
1) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$; 2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

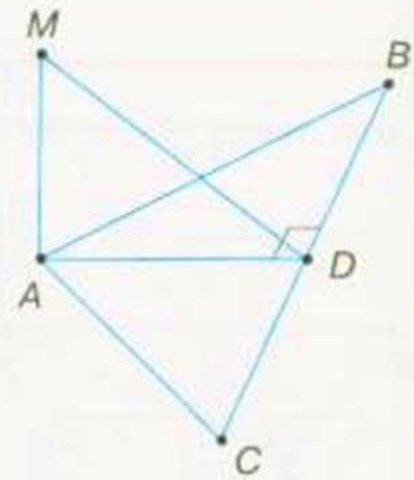
417°. З вершини B прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр BM до його площини (мал. 228). $AB = a$, $BC = b$, $BM = c$.
Знайдіть відстані від точки M до сторін CD і AD, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 16$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $c = 24$ см.

418°. AM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Доведіть, що похилі MB і MC утворюють рівні кути з площиною даного трикутника.

419°. Точка віддалена від площини на відстань h.
Знайдіть довжини похилих, проведених з цієї точки під такими кутами до площини: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

420°. Похила дорівнює a.
Чому дорівнює проекція цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°?

421. AM — перпендикуляр до площини трикутника ABC (мал. 229). Доведіть:
1) якщо $AB = AC$, $CD = BD$, то $MD \perp BC$;
2) якщо $BD = CD$, $MD \perp BC$, то $AB = AC$.



Мал. 229

422. CM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$). $CM = a$, $AB = b$, $AC = c$. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB, якщо:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 2$ см, $c = 5$ см.

423. З вершини прямого кута C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CD до його площини. $AC = a$, $CD = b$. Знайдіть відстань від точки D до гіпотенузи AB, якщо: 1) $a = 6\sqrt{2}$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 12\sqrt{2}$ см, $b = 5$ см.

424. Доведіть, що коли існує точка, рівновіддалена від усіх сторін паралелограма, то цей паралелограм — ромб. Розгляньте два випадки.

425. Точка F рівновіддалена від усіх сторін многокутника.
Доведіть, що основа перпендикуляра FO, проведеного до площини многокутника, є центром кола, вписаного в многокутник.

426. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює a, а до площини ромба — b. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $a = 25$ см, $b = 7$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 12$ см.

427. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка M, яка лежить поза площиною ромба, віддалена від його сторін на 8 см.
Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

428. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 144 см. Точка M віддалена від кожної сторони цього трикутника на 19 см.
Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

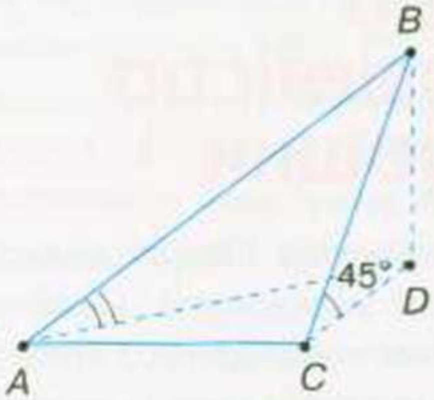
429. AM — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$.
Знайдіть AM, якщо $MB = 15$ см, $MC = 24$ см і $MD = 20$ см.

430. Виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 1 см, 2 см і 8 см. Знайдіть площу трикутника A_1BD.

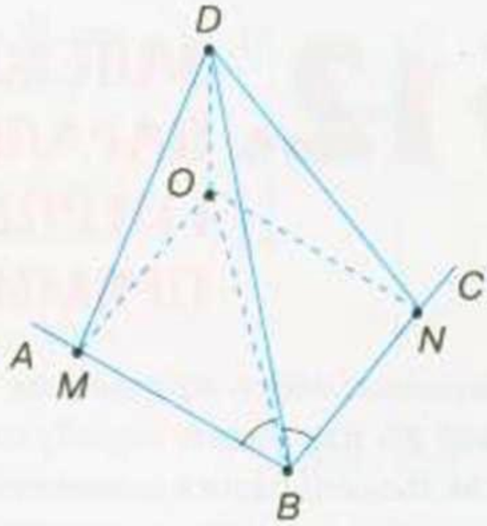
431. Під яким кутом до площини потрібно провести похилу, щоб її проекція була в 2 рази менша від похилої?

432. З точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі під кутом 30° до площини. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо кут між їх проекціями дорівнює 120°.

433. З точки, віддаленої від площини на a, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути 45° і 30°, а між собою — прямий кут.
Знайдіть відстань між основами похилих, якщо: 1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см.



Мал. 230



Мал. 231

434*. Діагоналі ромба $ABCD$ дорівнюють 30 см і 40 см. З вершини A ромба проведено перпендикуляр AM до його площини.
Знайдіть відстань від точки M до протилежної сторони ромба, якщо $AM = 10$ см.

435*. Точка M знаходиться на відстані 27 см від сторін рівнобічної трапеції.
Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 16 см і 30 см.

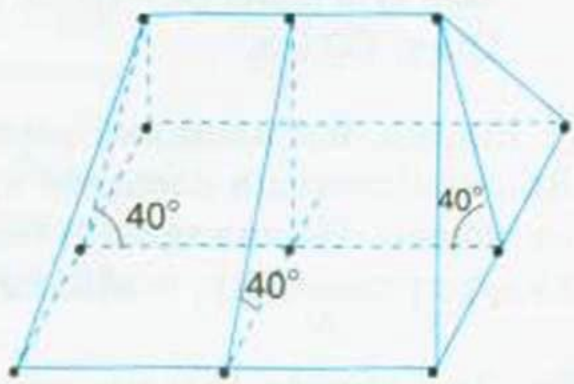
436*. У рівнобедреному прямокутному трикутнику один катет лежить у площині α, а другий утворює з нею кут 45° (мал. 230).
Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною.

437*. Похила BD утворює рівні кути зі сторонами кута ABC (мал. 231).
Доведіть, що проекція цієї похилої лежить на бісектрисі кута ABC.

438*. У трикутнику ABC $AC = 6$ см, $AB = BC = 5$ см. З центра O кола, вписаного в трикутник, проведено перпендикуляр $OK = 2$ см до площини трикутника.
Знайдіть відстань від точки K до сторін трикутника.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

439. Чотирисхилий дах будинку, довжиною 12,5 м і шириною 7,2 м, має схил в 40° (мал. 232).
Скільки квадратних метрів дахового заліза піде на покриття, якщо витрати на згин і обрізки становлять 6 %?



Мал. 232

§ 12. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНІСТЮ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЮ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН

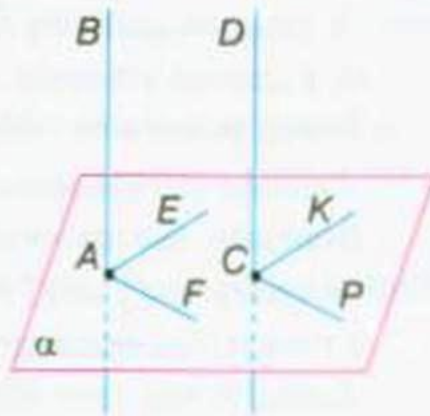
Паралельність прямих та площин у просторі і перпендикулярність прямої до площини перебувають у певній залежності. Саме наявність паралельності одних елементів веде за собою перпендикулярність інших, і навпаки, з перпендикулярності одних елементів можна зробити висновок про паралельність інших.

Цей зв'язок між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин у просторі виражається теоремою.

Теорема
(про паралельні прямі та перпендикулярну площину).
Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

Дано: $AB \parallel CD$, $\alpha \perp AB$ (мал. 233).

Довести: $\alpha \perp CD$.



Мал. 233

Доведення. Проведемо у площині α через точку A довільні прямі AE і AF, а через точку C прямі CK і CP, відповідно паралельні прямим AE і AF. Тоді $\angle BAE = \angle DCK$, $\angle BAF = \angle DCP$ як кути з паралельними і однаково напрямленими сторонами. Оскільки $AB \perp \alpha$, то кути BAE і BAF прямі. Тоді кути DCK і DCP також будуть прямими. Отже, $CD \perp \alpha$.

? Відомо, що площина перпендикулярна до однієї з основ трапеції. Як розміщена ця площина відносно другої основи? Перпендикулярно до основи. Це випливає з теореми про паралельні прямі та перпендикулярну площину, оскільки основи трапеції паралельні.

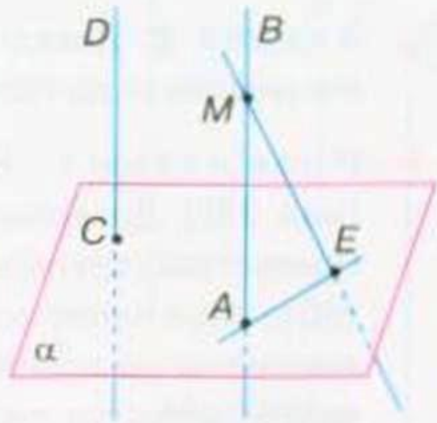
Задача 1. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Розв'язання. Нехай прямі AB і CD перпендикулярні до площини α (мал. 234). Припустимо, що прямі AB і CD не паралельні.

Візьмемо на прямій AB яку-небудь точку M, що не лежить у площині α. Проведемо через точку M пряму ME, паралельну прямій CD.

Оскільки $CD \perp \alpha$, а $ME \parallel CD$, то, за теоремою про паралельні прямі та перпендикулярну площину, $ME \perp \alpha$. A і E — точки перетину прямих AB і ME з площиною α. Тоді пряма AE перпендикулярна до прямих AB і ME, які перетинаються. А це неможливо.

Тому прямі CD і AB паралельні.



Мал. 234

1. Щоб установити перпендикулярність прямої та площини, перевірте, чи буде ця площина перпендикулярною до прямої, яка паралельна даній прямій.

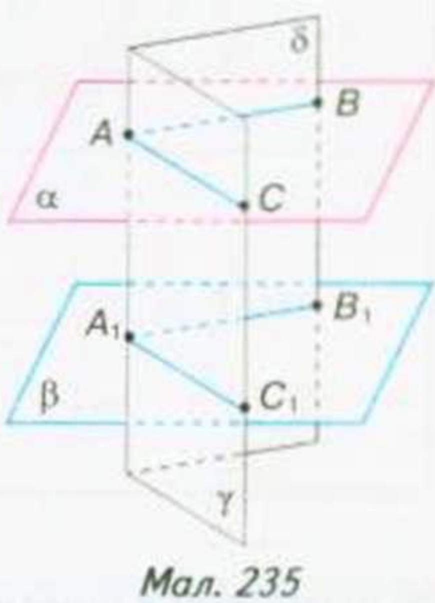
2. Щоб обґрунтувати паралельність двох прямих, спробуйте знайти площину, перпендикулярну до кожної з даних прямих.

Теорема
(про паралельні площини та перпендикулярну пряму).
Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.

Дано: $\alpha \parallel \beta$ (мал. 235), $AA_1 \perp \alpha$.

Довести: $AA_1 \perp \beta$.

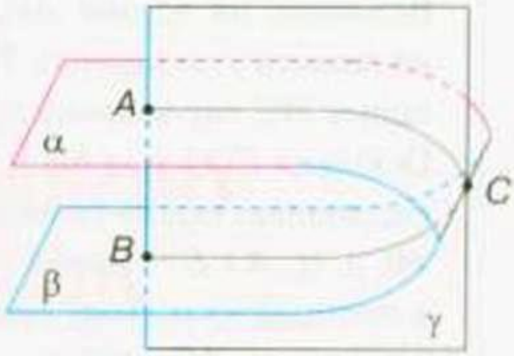
Доведення. Проведемо через пряму AA_1 будь-які площини γ і δ. За теоремою про паралельні площини і січну площину, кожна з них перетне площини α і β по паралельним прямим: перша — по паралельним прямим AC і A_1C_1, друга — по паралельним прямим AB і A_1B_1. Оскільки за умовою пряма AA_1 перпендикулярна до площини α, то вона перпендикулярна до прямих AB і AC. Отже, вона перпендикулярна і до паралельних їм прямих A_1B_1 і A_1C_1. Тому пряма AA_1 перпендикулярна і до площини β, у якій лежать прямі A_1B_1 і A_1C_1.



Мал. 235

? Чому висота піраміди перпендикулярна до перерізу, паралельного основі піраміди? Оскільки висота піраміди перпендикулярна до площини основи, то, за теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму, висота перпендикулярна до площини перерізу.

Задача 2. Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до прямої, паралельні.



Мал. 236

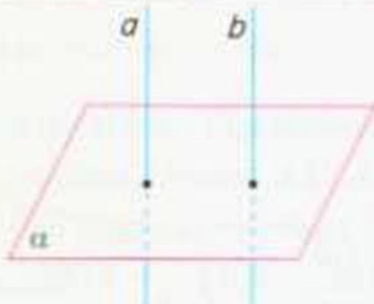
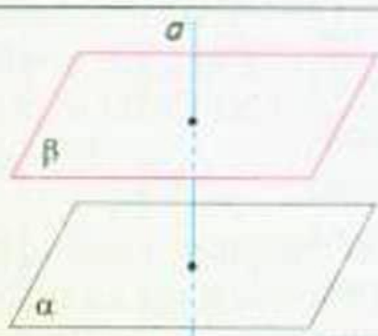
Розв'язання. Нехай $\alpha \perp AB$, $\beta \perp AB$ (мал. 236). Доведемо, що $\alpha \parallel \beta$.
Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по деякій прямій. Візьмемо на цій прямій будь-яку точку C і проведемо площину γ через точку C і пряму AB. Площина γ перетне площини α і β відповідно по прямих AC і BC. Оскільки $AB \perp \alpha$, то $AB \perp AC$, і оскільки $AB \perp \beta$, то $AB \perp BC$. Дістали, що у площині γ з точки C проведено два перпендикуляри AC і BC до прямої AB, що неможливо. Тому припущення, що площини α і β перетинаються, неправильне. Отже, $\alpha \parallel \beta$.

1. Щоб установити перпендикулярність прямої і площини, обґрунтуйте, що ця пряма перпендикулярна до площини, паралельної даній.

2. Щоб обґрунтувати паралельність двох площин, знайдіть пряму, перпендикулярну до кожної з даних площин.

Теорему і задачі наведено у таблиці 14.

Таблиця 14

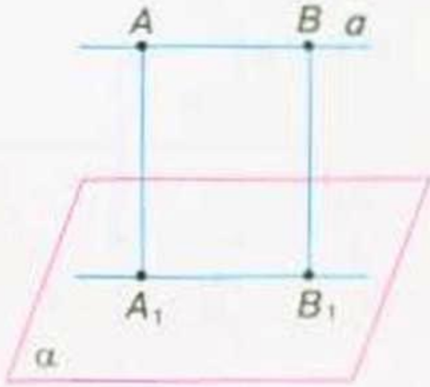
	Якщо $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$
	Якщо $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$
	Якщо $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$
	Якщо $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Покажемо, що *відстань від прямої до паралельної їй площини не залежить від вибору точки на прямій*, тобто всі точки прямої лежать на однаковій відстані від площини. Нехай $a \parallel \alpha$ (мал. 237). Проведемо з двох довільних точок A і B прямої a перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини α.

Доведемо, що $AA_1 = BB_1$. Оскільки $AA_1 \perp \alpha$ і $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$ (задача 1 § 12). Проведемо через прямі AA_1 і BB_1 площину. Ця площина перетне площину α по прямій A_1B_1, паралельній AB. Отже, у чотирикутнику ABB_1A_1 протилежні сторони попарно паралельні. Тому він — паралелограм, а це означає, що $AA_1 = BB_1$.

Доведіть, що відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки на одній з площин.



Мал. 237

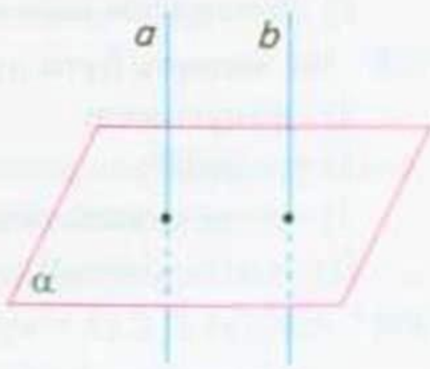
2. Вагомий внесок у геометрію зробив Павло Самуїлович Урисон (1898 — 1924) — відомий математик, який народився в м. Одеса. Життя вченого трагічно обірвалося, коли йому було всього 26 років, але він встиг зробити визначні відкриття з топології (розділ геометрії). Довів чудову теорему опуклої геометрії про те, що куля є тілом максимального об'єму при фіксованій середній ширині.


П. С. Урисон

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Доведіть, що коли площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.
2. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.
3. Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.
4. Доведіть, що дві площини, які перпендикулярні до прямої, паралельні між собою.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ



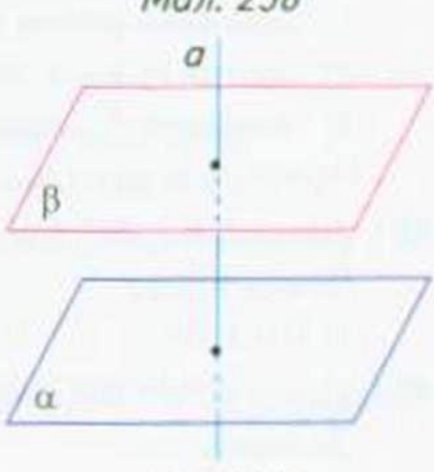
Мал. 238

440'. Прямі a і b паралельні (мал. 238). Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи можна стверджувати, що пряма b перпендикулярна до площини α? так

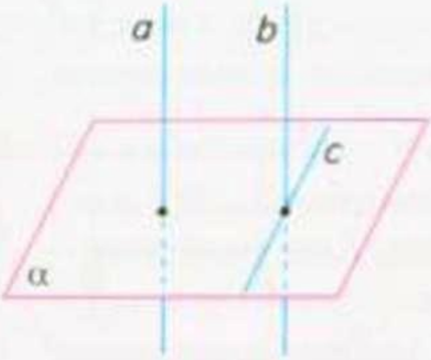
441'. Прямі a і b перпендикулярні до площини α (мал. 238). Яке взаємне розміщення прямих a і b? //

442'. Площини α і β паралельні (мал. 239). Пряма a перпендикулярна до площини β. Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини α? так

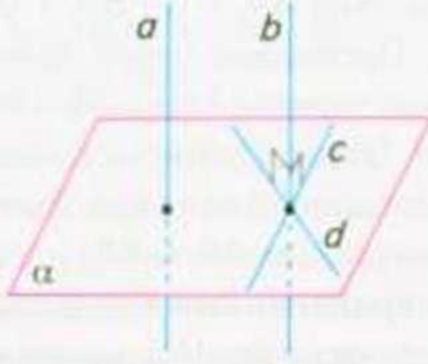
443'. Площини α і β перпендикулярні до прямої a (мал. 239).



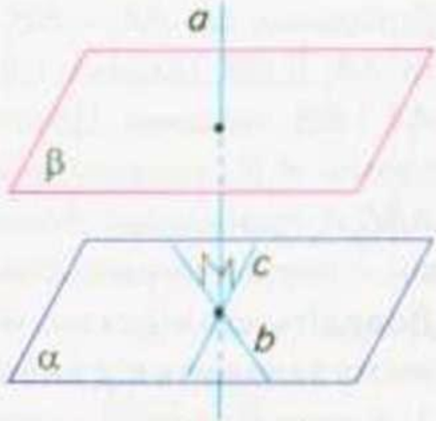
Мал. 239



Мал. 240



Мал. 241



Мал. 242

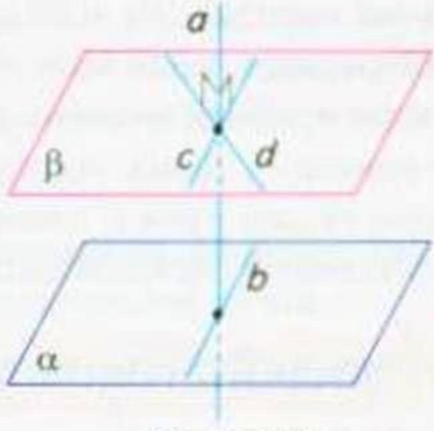
Поясніть, чому площини α і β паралельні.

444°. Дано: $a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (мал. 240).
Поясніть, чому $b \perp c$.

445°. Дано: $a \parallel b$, $b \perp c$ і $b \perp d$ (мал. 241).
Доведіть, що $a \perp \alpha$.

446°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp b$ і $a \perp c$ (мал. 242).
Доведіть, що $a \perp \beta$.

447°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp c$ і $a \perp d$ (мал. 243).
Доведіть, що $a \perp b$.



Мал. 243

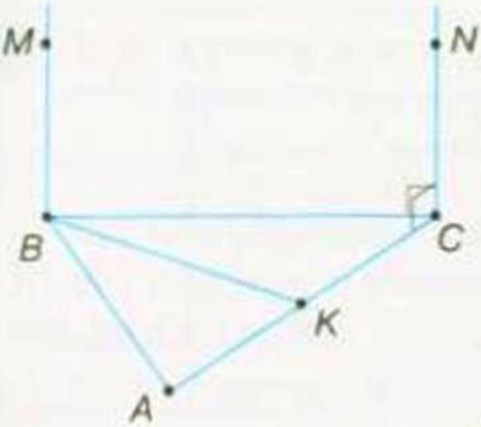
448°. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через середини бічних ребер. Доведіть, що:
1) площина перерізу паралельна площині основи паралелепіпеда;
2) бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площини перерізу.

449°. **Чи можуть бути перпендикулярними до площини дві сторони:**
1) трикутника; —
2) трапеції; +
3) правильного шестикутника? +
Поясніть відповідь.

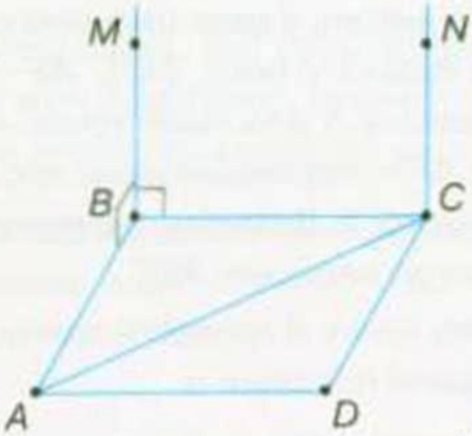
450°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Чи перпендикулярна до площини основи $ABCD$ пряма, що проходить через:
1) середини ребер DC і D_1C_1; +
2) центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$; —
3) вершину B_1 і середину ребра AB? —
Поясніть відповідь.

451. Дано: $CN \perp BC$, $CN \perp AC$, $CN \parallel BM$ (мал. 244).
Доведіть, що:
1) $BM \perp BK$; 2) $BM \perp AB$.

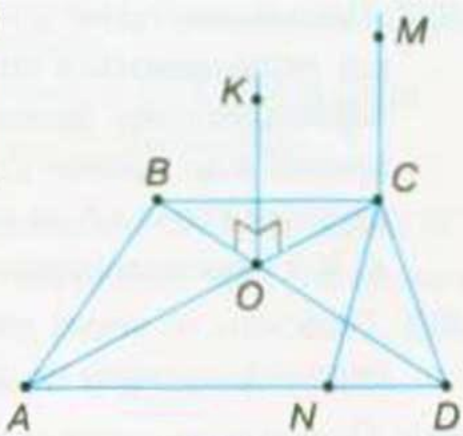
452. Дано: $CN \parallel BM$, $BM \perp BC$, $BM \perp AB$ (мал. 245).
Доведіть, що:
1) $CN \perp AC$; 2) $CN \perp CD$.



Мал. 244



Мал. 245



Мал. 246

453. Дано: $OK \perp AC$, $OK \perp BD$, $OK \parallel CM$ (мал. 246).
Доведіть, що:
1) $CM \perp BC$; 2) $CM \perp CN$.

454. Через вершину A ромба $ABCD$ і точку O перетину його діагоналей проведено паралельні прямі AM і ON, причому $AM \perp AB$ і $AM \perp AD$.
Доведіть, що:
1) $ON \perp BD$; 2) $ON \perp AC$.

455. Відрізок AB паралельний площині α. Із точки A до площини α проведено перпендикуляр AD. Через точку B проведено пряму, паралельну AD, до перетину з площиною α в точці C. Якого виду чотирикутник $ABCD$? Поясніть відповідь. прямокутник

456. З точок A і B проведено до площини α перпендикуляри AD і BC. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є прямокутником, якщо:
1) $AD = BC$;
2) прямі AB і DC паралельні.

457. Діагональ AC ромба $ABCD$ перпендикулярна до площини α. Яке взаємне розміщення діагоналі BD ромба і площини α? Поясніть відповідь.

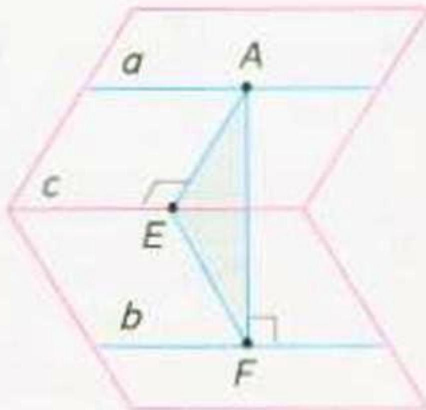
458. Площина α і пряма b, яка не лежить у площині α, перпендикулярні до прямої a. Доведіть, що $b \parallel \alpha$.

459. Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, що проходить через середини бічних ребер.
Доведіть, що:
1) площина перерізу паралельна площині основи піраміди;
2) висота піраміди перпендикулярна до площини перерізу.

460. Через вершини A і C трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до її площини.
Доведіть, що площини DAM і BCN паралельні.

461. Через вершини A і C ромба $ABCD$ проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до його площини.
Доведіть паралельність площин: 1) MAB і NCD; 2) MAD і NCB.

462*. Паралельні прямі a і b лежать у двох площинах, що перетинаються по прямій c (мал. 247). AE — перпендикуляр, проведений з довільної точки A прямої a до прямої c; AF — перпендикуляр, проведений з точки A до прямої b. Доведіть, що прямі a, b, c перпендикулярні до площини AEF.



Мал. 247

463*. Поясніть, як через дану точку A провести пряму, перпендикулярну до даної площини α.

464*. Поясніть, як через дану точку A прямої a провести перпендикулярну до неї площину.

465*. Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини, яка не перетинає його, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

466*. Доведіть, що відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки на одній з них.

467*. З точок A і B, які розміщені по один бік від площини, проведені перпендикуляри AD і BC до площини.
Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $AD = 21$ см, $BC = 15$ см, $DC = 6$ см.

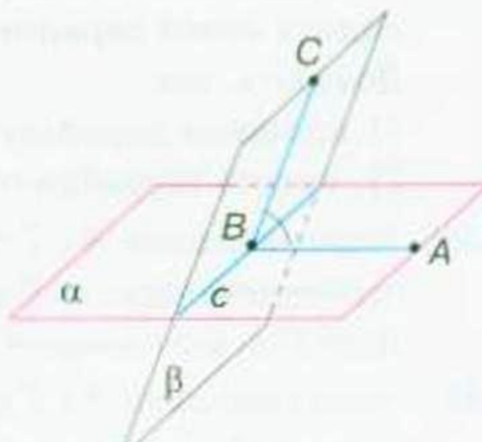
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

468. Як перевірити паралельність стелі й підлоги кімнати? Скільки кутів треба виміряти при цьому?

469. Запропонуйте, використавши означення відстані між паралельними площинами, спосіб перевірки паралельності площин.

§ 13. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ

Спочатку дамо означення кута між площинами. Нехай α і β – площини, які перетинаються по прямій c (мал. 248). Проведемо в цих площинах через довільну точку B прямої c прямі AB і BC, перпендикулярні до c. Тоді кут між площинами α і β дорівнюватиме куту між прямими AB і BC.



Мал. 248

Записуємо: $\angle(\alpha\beta) = \angle ABC$.

? Чи залежить градусна міра кута ABC від вибору точки на прямій c? Не залежить, бо дістанемо два кути з паралельними й однаково напрямленими сторонами. А такі кути рівні.

Кутом між площинами, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах зі спільної точки перпендикулярно до лінії їх перетину.

Кут між паралельними площинами вважається таким, що дорівнює 0°. Якщо кут між площинами дорівнює 90°, то говорять, що площини перпендикулярні.

Записуємо: $\alpha \perp \beta$.

Дві площини називаються ***перпендикулярними***, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Теорема (ознака перпендикулярності площин). Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

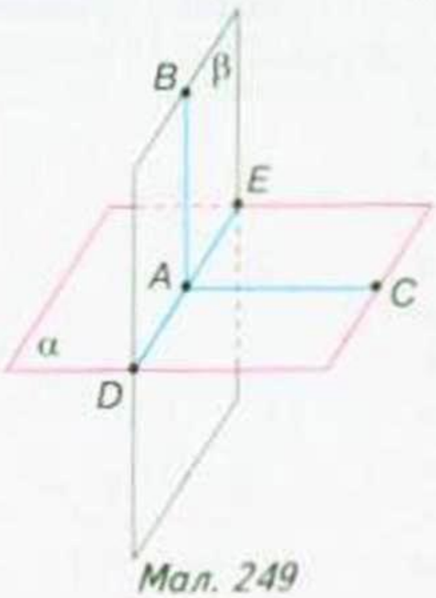
Дано: площини α і β (мал. 249), β проходить через AB, $AB \perp \alpha$.

Довести: $\beta \perp \alpha$.

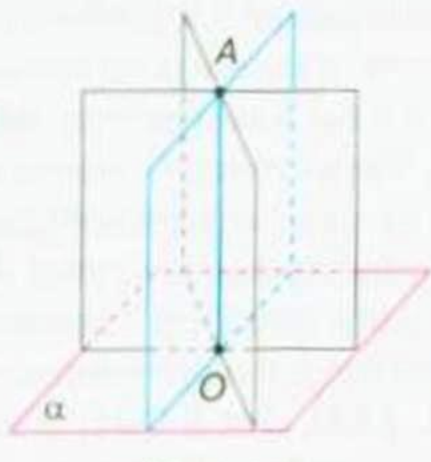
Доведення. Площини α і β мають спільну точку A. Тому вони перетинаються по прямій DE, яка проходить через цю точку. У площині α проведемо пряму AC, перпендикулярну до прямої DE. Оскільки $AB \perp \alpha$, а прямі AC і DE лежать у площині α, то $AB \perp AC$ і $AB \perp DE$. Крім того, $AC \perp DE$.
Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle CAB = 90^\circ$, тобто $\beta \perp \alpha$.

? Скільки площин, перпендикулярних до даної площини α, можна провести через точку A, яка не лежить у даній площині? Безліч. Проведемо пряму $AO \perp \alpha$ (мал. 250). За ознакою перпендикулярності площин, будь-яка площина, яка проходить через пряму AO, перпендикулярна до площини α.

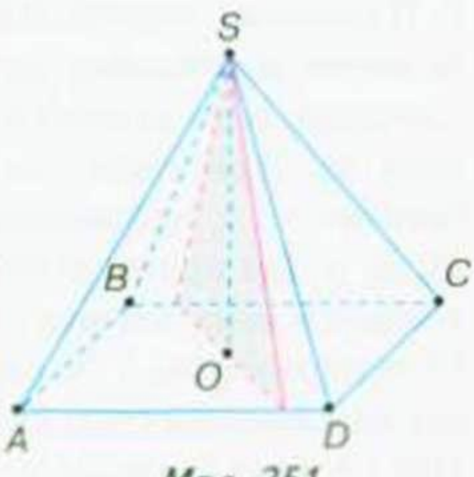
За ознакою перпендикулярності площин, переріз піраміди площиною, яка проходить через висоту піраміди, перпендикулярний до її основи (мал. 251).



Мал. 249



Мал. 250



Мал. 251

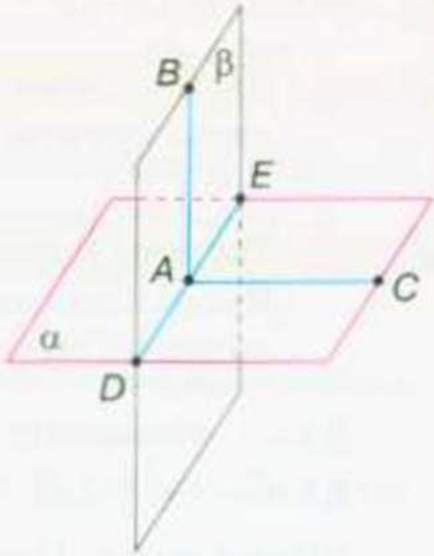
Коли будують стіни, огорожі та інші споруди, то стовпи (палі) встановлюють вертикально і цим забезпечують вертикальність стін чи огорож.

Теорема (властивість перпендикулярних площин). Якщо дві площини перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

Дано: площини $\alpha \perp \beta$ (мал. 252), AB лежить у β, $AB \perp DE$.

Довести: $AB \perp \alpha$.

Доведення. Проведемо у площині α пряму AC, перпендикулярну до DE — прямої перетину площин α і β. Тоді кожна з прямих AC і AB перпендикулярна до DE. Тому кут між прямими AC і AB дорівнює куту між площинами α і β. Оскільки за умовою $\alpha \perp \beta$, то $\angle CAB = 90°$ і $AB \perp AC$. Отже, пряма AB перпендикулярна до прямих DE і AC, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої і площини, $AB \perp \alpha$.



Мал. 252

Щоб обґрунтувати перпендикулярність двох площин, знайдіть в одній з цих площин пряму, перпендикулярну до другої площини або до лінії їх перетину.

Введемо поняття відстані між мимобіжними прямими. Ви знаєте, що відстанню між паралельними прямими є довжина їх спільного перпендикуляра. Покажемо, що дві мимобіжні прямі також мають спільний перпендикуляр.

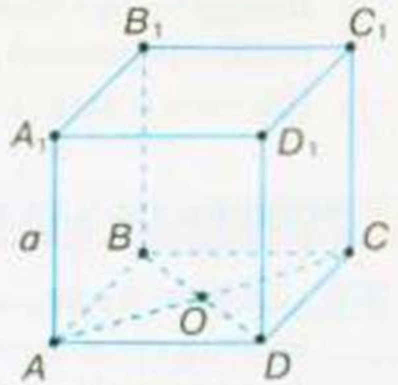
Нехай a і b – мимобіжні прямі (мал. 253). Проведемо через пряму a площину α, паралельну прямій b. З довільної точки C прямої b проведемо перпендикуляр CD на площину α і проведемо через прямі CD і b площину β. Площина β перпендикулярна до площини α (за ознакою перпендикулярності площин) і перетинає площину α по прямій $b_1 \parallel b$ (за властивістю площин, що перетинаються). Через точку O перетину прямих a і b_1 проведемо пряму, перпендикулярну до α. Ця пряма перетинає пряму b у точці M, оскільки вона лежить в одній площині з прямою b і не паралельна b. За властивістю перпендикулярів до площини (задача 1, §12), $OM \parallel CD$ і, отже, $OM \perp b$. Оскільки $OM \perp \alpha$, то $OM \perp a$. Отже, пряма

Мал. 253

OM перпендикулярна до мимобіжних прямих a і b. Відрізок OM – спільний перпендикуляр до прямих a і b.

Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.

Задача. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a (мал. 254). Знайдіть відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BD.



Мал. 254

Розв'язання. Грані куба квадрати. Тоді пряма AA_1 перпендикулярна до площини основи, а отже, і до прямої AO. $AO \perp BD$, оскільки діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні. Тоді відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BD дорівнюватиме довжині їх спільного перпендикуляра AO.

Матимемо: $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, а $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

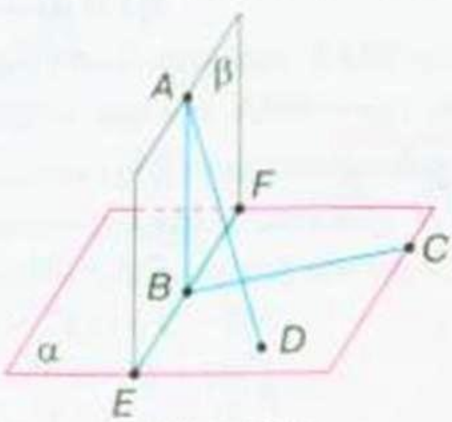
При розв'язуванні задач використовуються також наслідки з теореми про властивість перпендикулярних площин.

Наслідок 1. Якщо дві площини α і β перпендикулярні і до площини α проведена перпендикулярна пряма, що має спільну точку з площиною β, то ця пряма лежатиме у площині β.

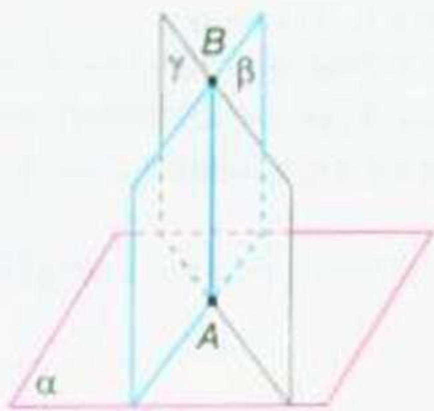
Припустимо, що пряма $AD \perp \alpha$ і не лежить у площині β (мал. 255). Проведемо у площині β пряму $AB \perp EF$, де EF – пряма перетину площин α і β. За властивістю перпендикулярних прямих, $AB \perp \alpha$. Матимемо дві прямі AB і AD, які перпендикулярні до площини α і перетинаються. Але це суперечить задачі 1, § 12. Отже, пряма AD лежатиме у площині β.

Наслідок 2. Якщо дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої площини, то і пряма їх перетину перпендикулярна до тієї ж площини.

Обґрунтуйте це твердження, скориставшись малюнком 256.



Мал. 255



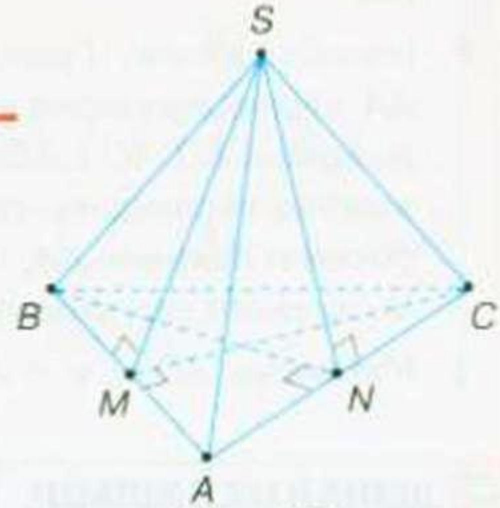
Мал. 256

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення куту між площинами.
2. Яка градусна міра кута між паралельними площинами?
3. Які площини називаються перпендикулярними?
4. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
5. Доведіть, що пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.
6. Що таке відстань між мимобіжними прямими?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

470'. *SABC* – піраміда (мал. 257).
Назвіть кут між площинами граней:
1) *SAB* і *ABC*; 2) *SAC* і *ABC*.

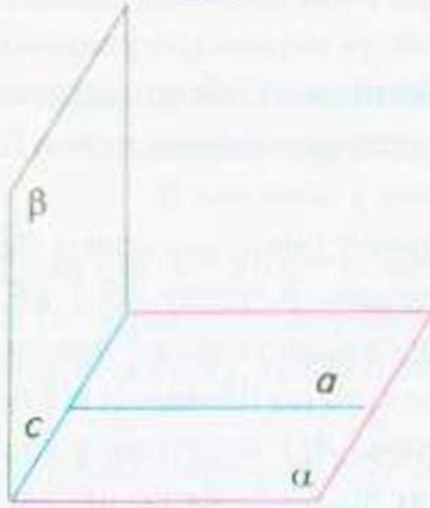


Мал. 257

471'. Пряма a лежить у площині α і $a \perp \beta$ (мал. 258).
Чи випливає з цього, що $\alpha \perp \beta$?

472'. $\alpha \perp \beta$ (мал. 258). Пряма a лежить у площині α і $a \perp c$.
Чи можна стверджувати, що $a \perp \beta$?

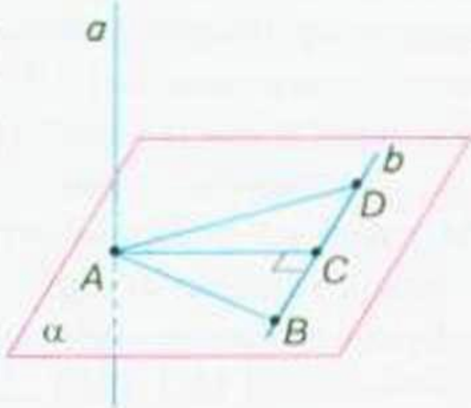
473'. На малюнку 259 $a \perp \alpha$, b лежить у площині α.
Як називаються прямі a і b?
Довжина якого з відрізків AB, AC, AD є відстанню між прямими a і b?



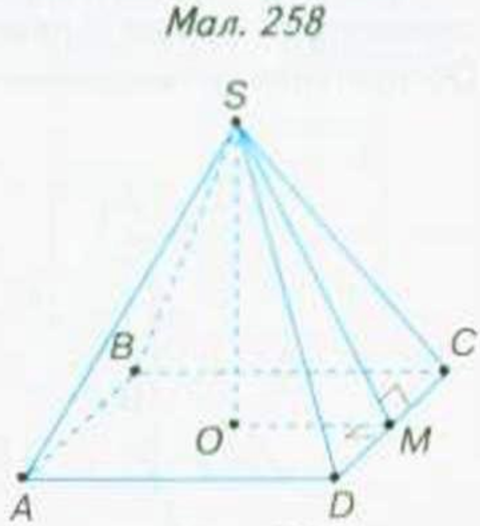
Мал. 258

474°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
Знайдіть кут між площинами:
1) основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD;
2) грані CC_1D_1D і перерізу AA_1C_1C;
3) перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D.

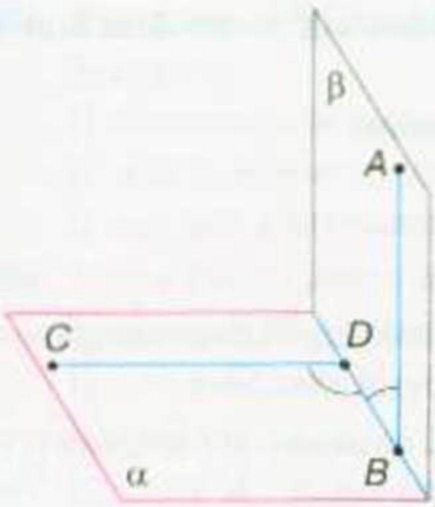
475°. $SABCD$ – чотирикутна піраміда (мал. 260), SO – висота піраміди, φ – кут між площинами граней $ABCD$ і SCD, $SM = a$.
Знайдіть SO, якщо:
1) $a = 2$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$.



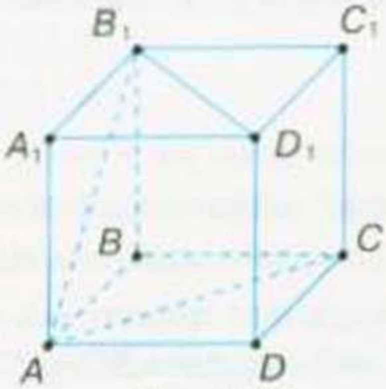
Мал. 259



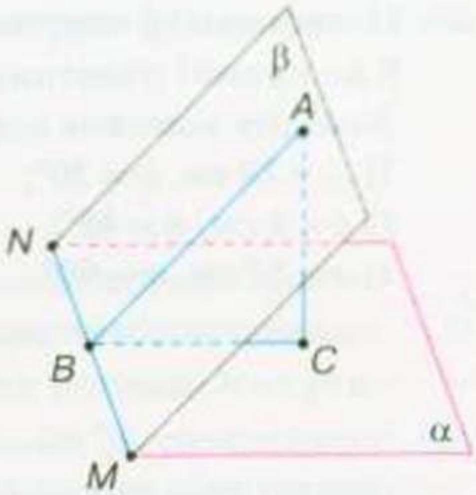
Мал. 260



Мал. 261



Мал. 262



Мал. 263

476°. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через ребра BB_1 і DD_1. Обґрунтуйте, що площина перерізу перпендикулярна до площини основи.

477°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a. Знайдіть площу перерізу куба площиною, яка проходить через:
1) ребро AA_1 і перпендикулярна до площини перерізу ABC_1D_1;
2) ребро CC_1 і перпендикулярна до площини перерізу BB_1D_1D.

478°. Скільки можна провести через дану точку площин, перпендикулярних до даної площини?

479°. Пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину. Як розміщена ця пряма відносно другої площини? Поясніть відповідь.

480°. Дано: $\angle ABD = \angle CDB$, $AB \perp \alpha$ (мал. 261).
Доведіть: 1) $CD \perp \beta$; 2) $\alpha \perp \beta$.

481°. CD – перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що площини трикутників BCD і ACD перпендикулярні.

482°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a (мал. 262). Знайдіть відстань між прямими:
1) AA_1 і BC; 2) CC_1 і AB_1; 3) AC і B_1D_1.

483. На малюнку 263 $AB \perp MN$, $AC \perp \alpha$. Доведіть, що кут ABC – кут між площинами α і β.

484. У трикутній піраміді $SABC$ усі ребра рівні, точка M – середина ребра SC. Доведіть, що кут AMB – кут між площинами граней SAC і SBC.

485. Площини α і β перетинаються під кутом φ. Точка A площини β віддалена від площини α на відстань a.
Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо:
1) $a = 10$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$;
3) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$.

486. **Площини α і β перетинаються під кутом φ. Відстань від точки A площини β до прямої перетину площин дорівнює a.**
Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо:
1) $a = 24$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 8$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 14$ см, $\varphi = 60°$.

487. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить в одній з них, віддалена від прямої перетину площин удвічі далі, ніж від другої площини.

488. Через основу AC рівнобедреного трикутника ABC проведено площину α на відстані a від вершини B. $AC = b$, $AB = BC = c$.
Знайдіть кут між площиною α і площиною трикутника, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 24$ см, $c = 20$ см.

489. Через катет AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α під кутом φ до площини трикутника. $AB = c$, $AC = b$.
Знайдіть відстань від вершини B до площини α, якщо:
1) $c = 20$ см, $b = 16$ см, $\varphi = 30°$;
2) $c = 10$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 45°$;
3) $c = 13$ см, $b = 5$ см, $\varphi = 60°$.

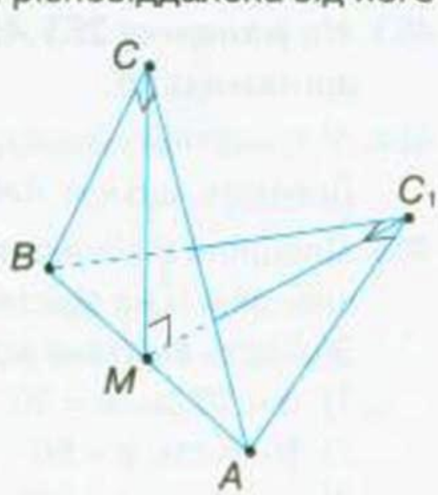
490. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через її висоту і бічне ребро.
Доведіть, що площина перерізу перпендикулярна до площини основи.

491. Побудуйте переріз правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через середини M і N ребер SD і SC перпендикулярно до основи піраміди. Поясніть побудову.

492. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$.
Доведіть перпендикулярність площин:
1) BCM і DCM;
2) ADM і DCM.

493. Точка M, яка не лежить у площині квадрата $ABCD$, рівновіддалена від його вершин. Доведіть перпендикулярність площин:
1) AMC і ABC;
2) AMC і BMD.

494. **Площини двох прямокутних рівнобедрених трикутників з спільною гіпотенузою $AB = a$ перпендикулярні (мал. 264). Знайдіть відстань між вершинами прямих кутів, якщо:**
1) $a = 10$ см;
2) $a = 18$ см;
3) $a = 22$ см.



Мал. 264

495. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах. $AB = a$. Знайдіть:

1) відстань між точками D і D_1;
2) відстань між точками C і D_1;
3) кут між діагоналями AC і AC_1.

496. Точка знаходиться на відстані a від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин, якщо:

1) $a = 4\sqrt{2}$ см;
2) $a = 5$ см.

497. Із точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин (мал. 265). $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$.

Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:

1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 24$ см, $b = 8$ см, $c = 6$ см.

498. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a.

Знайдіть відстань між прямими:

1) BB_1 і AC;
2) AA_1 і B_1D.

499. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) з катетами a і b.

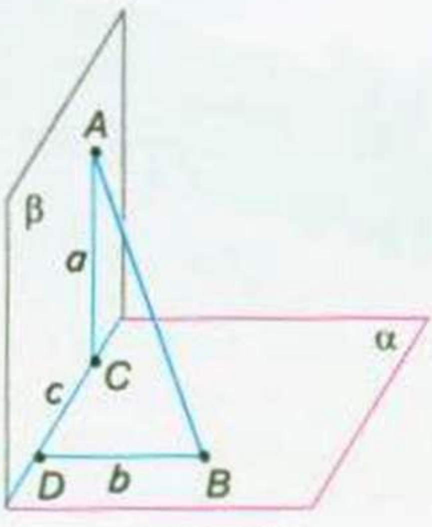
Знайдіть відстань між прямими CM і AB, якщо:

1) $a = 20$ см, $b = 15$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см.

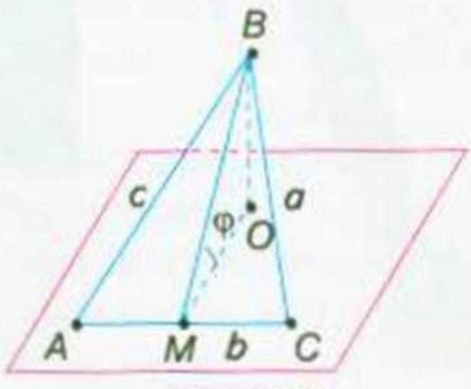
500*. У трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (мал. 266). Через сторону AC проведено площину під кутом φ до площини трикутника.

Знайдіть відстань від вершини B до площини, якщо:

1) $a = 25$ см, $b = 36$ см, $c = 29$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 25$ см, $b = 12$ см, $c = 17$ см, $\varphi = 60°$.



Мал. 265



Мал. 266

501*. Висота правильної піраміди дорівнює половині сторони основи.
Знайдіть кут між площинами основи і бічної грані, якщо основа піраміди:
1) трикутник; 2) квадрат; 3) шестикутник.

502*. Точка A знаходиться на відстанях a і b від двох площин, що перетинаються. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює:
1) 90°; 2) 60°; 3) 30°.

503*. Кінці відрізка довжиною a лежать у двох перпендикулярних площинах. Відрізок утворює з однією площиною кут 45°, а з другою — кут 30°.
Знайдіть довжину відрізка прямої перетину площин, що знаходиться між основами перпендикулярів, проведених до неї з кінців даного відрізка.

504*. Кінці відрізка лежать у перпендикулярних площинах і віддалені від прямої їх перетину на 7 см і 24 см.
Знайдіть відстань від даного відрізка до прямої перетину площин.

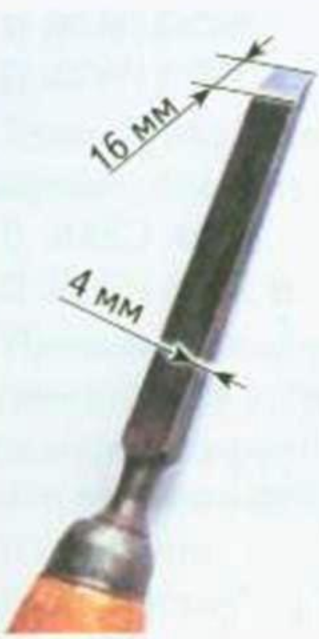
505*. Сторони основ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 6 см і 8 см.
Знайдіть відстань між ребром AA_1 і діагоналлю B_1D паралелепіпеда.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

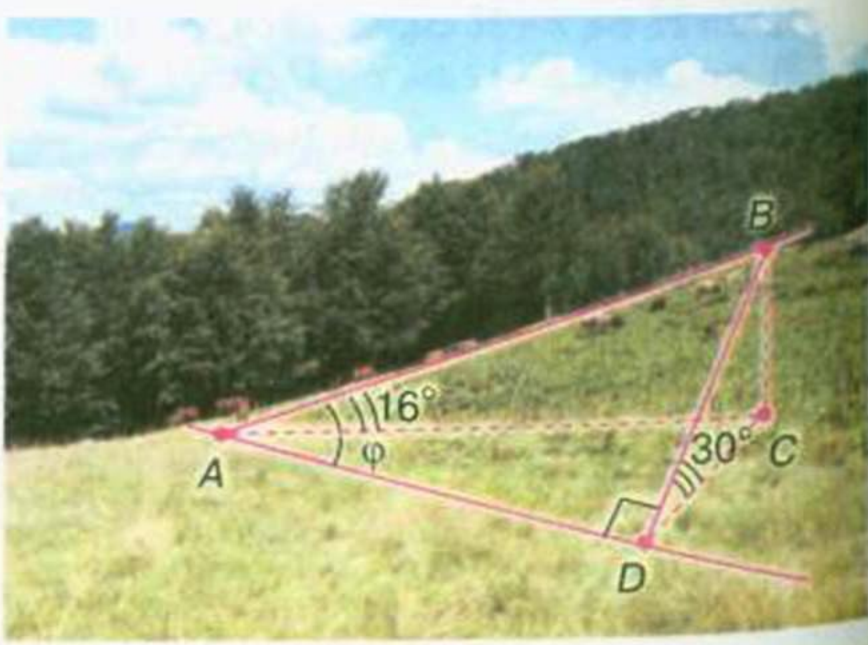
506. Знайдіть кут загострення стамески за розмірами, даними на малюнку 267.

507. Вертикальність встановленої плоскої поверхні (стіни, паркану тощо) можна перевірити за допомогою виска — мотузки з тягарцем.
Поясніть, як це зробити. На чому ґрунтується така перевірка?

508. Кут між площинами іноді називають кутом найбільшого нахилу або підйому. Кут найбільшого підйому гори дорівнює 30° (мал. 268).
Під яким кутом φ до підошви гори треба прокласти прямолінійну дорогу AB, щоб кут її нахилу до площини горизонту дорівнював 16°?



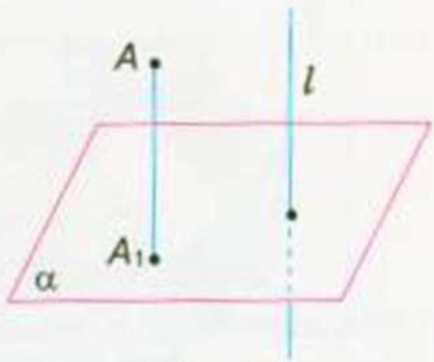
Мал. 267



Мал. 268

§ 14. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Ви вже знаєте, як зображати просторові фігури на площині, використовуючи паралельне проектування. Розглянемо окремий його вид. Нехай проектування задано площиною проекцій α і напрямом проектування – прямою l (мал. 269). Якщо пряма l перпендикулярна до площини α, то таке проектування називають *ортогональним або прямокутним*. При ортогональному проектуванні усі проектувальні прямі перпендикулярні до площини проекцій.



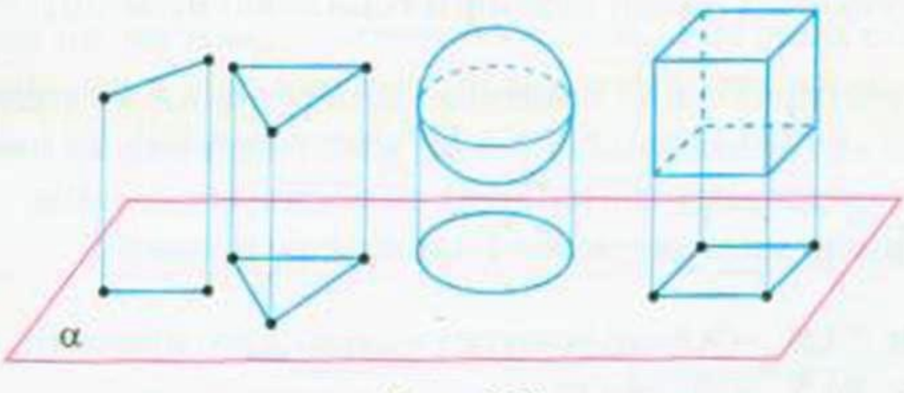
Мал. 269

Проекцією точки A при ортогональному проектуванні є основа перпендикуляра A_1, проведеного з даної точки до площини.

Проекцією фігури F на площину називають фігуру F_1, яка складається з проекцій усіх точок фігури F.

Ортогональне проектування має всі властивості паралельного проектування, оскільки є окремим його видом.

На малюнку 270 зображені деякі фігури та їх проекції при ортогональному проектуванні.



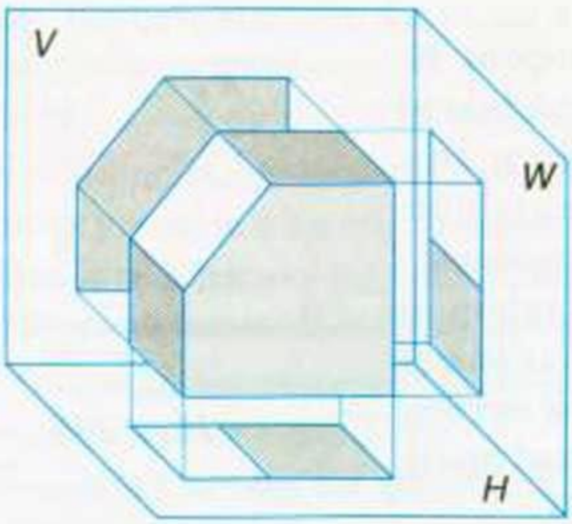
Мал. 270

Чи може ортогональна проекція трикутника бути відрізком?

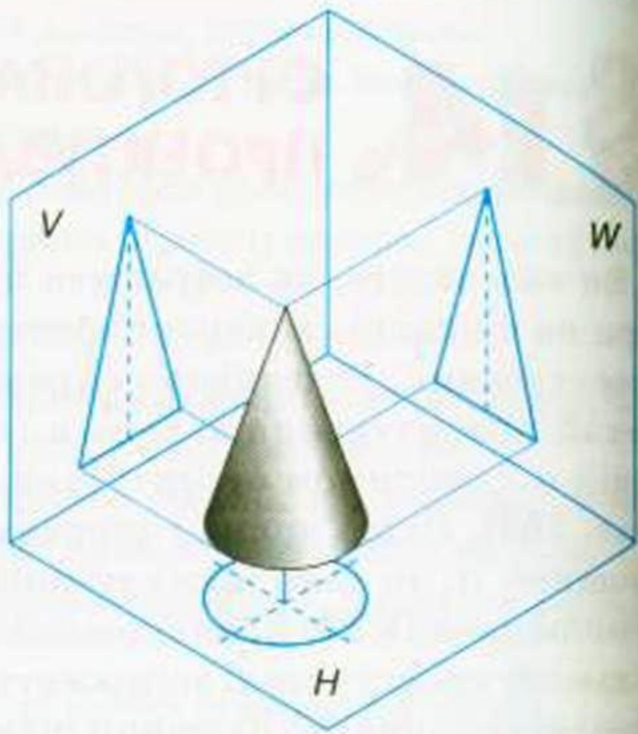
Так, якщо площина трикутника перпендикулярна до площини проекцій.

Ортогональне проектування застосовується у кресленні.

Воно може здійснюватись на дві або три перпендикулярні площини. Якщо таких площин три, то вони називаються фронтальною (V), горизонтальною (H) і профільною (W). Через характерні точки (найчастіше це вершини) фігури проводять проектувальні прямі до перетину з площинами проекцій. Точки перетину сполучають прямими або кривими



Мал. 271



Мал. 272

лініями. Утворені фігури будуть проекціями даної фігури на площини V, H і W (мал. 271).

На малюнку 272 зображені проекції конуса, основа якого паралельна горизонтальній площині H. Тоді його проекція на цю площину – круг. Фронтальна і профільна проекції конуса – рівнобедрені трикутники.

Надалі розглядатимемо ортогональне проектування лише плоских геометричних фігур на одну площину. Тому корисною є теорема про зв'язок площі многокутника і площі його ортогональної проекції.

Теорема (про площу ортогональної проекції многокутника). Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.

Тобто, якщо S і $S_{пр}$ – площі многокутника і його проекції, а φ – кут між їх площинами, то $S_{пр} = S \cdot \cos \varphi$.

? Чи може площа ортогональної проекції многокутника бути більшою за площу самого многокутника? Не може. Оскільки $0 \le \cos\varphi \le 1$, то з формули $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$ дістанемо: $S_{пр} \le S$.

Задача. Знайдіть площу многокутника, якщо площа його ортогональної проекції дорівнює 15 см², а кут між площинами многокутника і його проекції дорівнює 60°.

Розв'язання.
З формули $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$ матимемо: $S = \dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi} = \dfrac{15}{\cos 60^\circ} = \dfrac{15}{\frac{1}{2}} = 30$ (см²).

З формули $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$ дістанемо такі формули: $S = \dfrac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, $\cos\varphi = \dfrac{S_{пр}}{S}$.

За цими формулами можна знайти площу многокутника або площу його ортогональної проекції, або кут між площинами многокутника і проекції.

Надалі замість «ортогональна проекція» коротко говоритимемо: проекція.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Доведемо теорему про площу ортогональної проекції многокутника.

Розглянемо спочатку випадок, коли даним многокутником є трикутник ABC, сторона AB якого паралельна площині проекцій α (мал. 273). Проекцією ΔABC на площину α є $\Delta A_1B_1C_1$. Проведемо через AB площину $\beta \parallel \alpha$. Проекція ΔABC на площину β — ΔABC_2, який дорівнює $\Delta A_1B_1C_1$. Проведемо у ΔABC висоту CM і сполучимо точки M і C_2.

За теоремою про три перпендикуляри, C_2M — висота ΔABC_2. Тоді $\angle CMC_2 = \varphi$ є кутом між площиною β і площиною ΔABC, а отже, між α і площиною ΔABC, оскільки $\beta \parallel \alpha$.

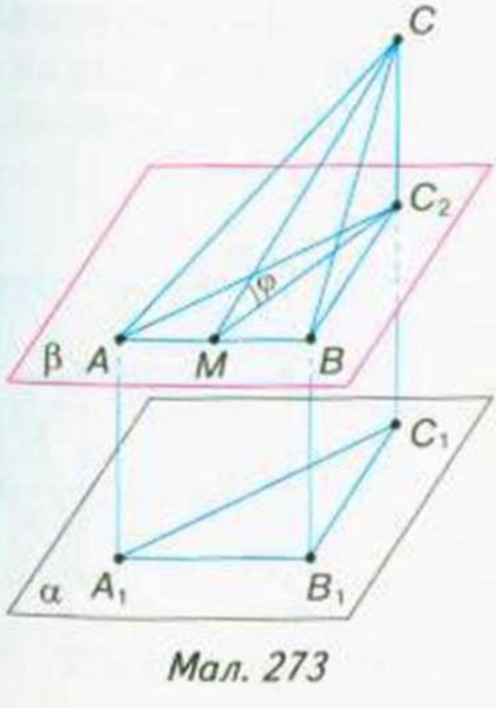
Маємо: $C_2M = CM \cdot \cos\varphi$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CM$, $S_{\Delta ABC_2} = \frac{1}{2}AB \cdot CM_2$.

Звідси $S_{\Delta ABC_2} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$.

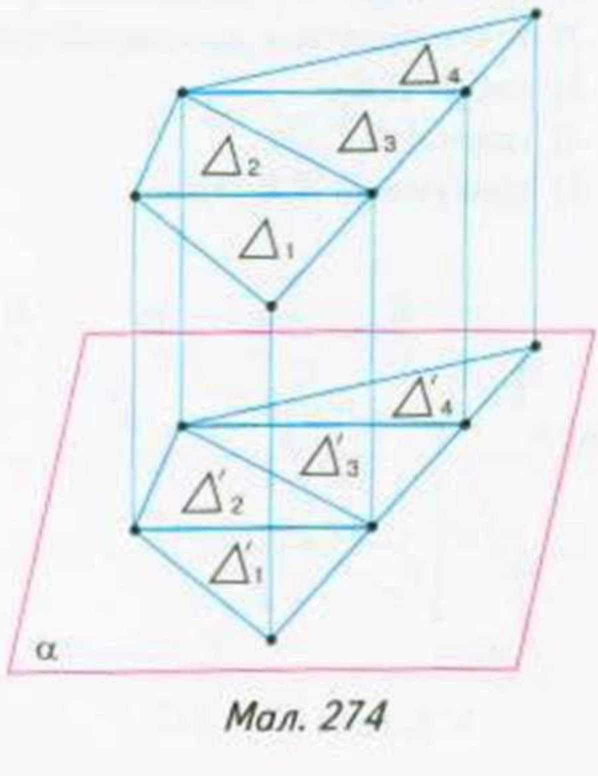
Оскільки $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$, то і площі їх рівні.

Дістанемо: $S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$.

Якщо фігура, яку проектуємо, многокутник, то спочатку розіб'ємо його на трикутники так, щоб одна зі сторін кожного трикутника була паралельною площині проекцій α (мал. 274). Потім для кожного з таких трикутників Δ і його проекції Δ'



Мал. 273



Мал. 274

запишемо рівність: $S_{\Delta'} = S_{\Delta} \cdot \cos\varphi$. Усі ці рівності додамо почленно. Тоді у лівій частині дістанемо площу проекції многокутника, а у правій — площу даного многокутника, помножену на cosφ:

$$S_{пр} = S \cdot \cos\varphi.$$

2. Спосіб прямокутного проектування на взаємно перпендикулярні площини розробив французький вчений-геометр Гаспар Монж наприкінці XVIII ст. Тому цей спосіб часто називають способом Монжа. Г. Монж поклав початок розвитку науки про зображення предметів — нарисної геометрії.

Г. Монж

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке ортогональне або прямокутне проектування?
2. Чим відрізняється ортогональне проектування від паралельного проектування?
3. Сформулюйте теорему про площу ортогональної проекції многокутника.

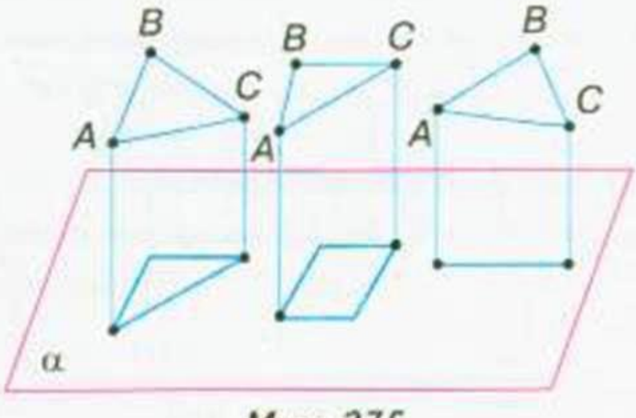
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

509'. Які з фігур, зображених на малюнку 275, можуть бути проекціями трикутника ABC на площину α?

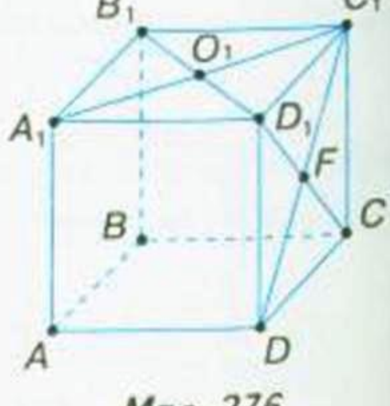
510'. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за площину проекцій взято площину грані $ABCD$ (мал. 276).

Назвіть проекцію:

1) точки перетину діагоналей грані DD_1C_1C;
2) точки перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$;
3) ребра B_1C_1;
4) грані $A_1B_1C_1D_1$;
5) трикутника $A_1C_1D_1$.



Мал. 275



Мал. 276

511'. Чи може проекцією кола бути:
1) коло;
2) відрізок;
3) еліпс?

512°. Кінець A відрізка AB довжиною a лежить у площині α, а кінець B віддалений від площини на b.
Знайдіть:
1) проекцію відрізка AB;
2) відстань від середини відрізка до площини.

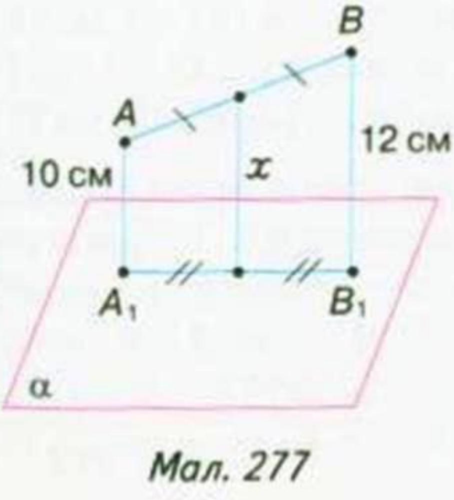
513°. Кінець A відрізка AB лежить у площині α, а середина відрізка віддалена від площини на a.
Знайдіть відстань від кінця B відрізка до площини α, якщо:
1) $a = 7$ см; 2) $a = 5$ см; 3) $a = 11$ см.

514°. На малюнках 277, 278 відрізок A_1B_1 — проекція відрізка AB на площину α. За даними на малюнках знайдіть невідомий відрізок x.

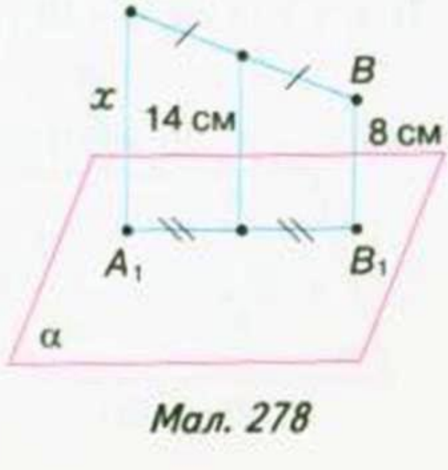
515°. Чи може проекція відрізка на площину бути:
1) меншою за відрізок;
2) рівною відрізкові;
3) більшою за відрізок?

516°. Сторона $AC = a$ рівностороннього трикутника лежить у площині α, а вершина B віддалена від площини на b.
Знайдіть проекції сторін AB і BC на площину α, якщо:
1) $a = 20$ см, $b = 12$ см;
2) $a = 25$ см, $b = 15$ см.

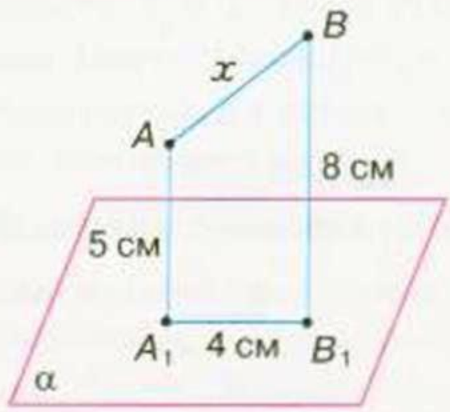
517°. Площа трикутника дорівнює S, а кут між площиною проекцій і площиною трикутника дорівнює φ.
Знайдіть площу проекції трикутника, якщо:
1) $S = 36$ см^2, $\varphi = 60°$;
2) $S = 24\sqrt{3}$ см^2, $\varphi = 30°$;
3) $S = 20$ см^2, $\varphi = 45°$.



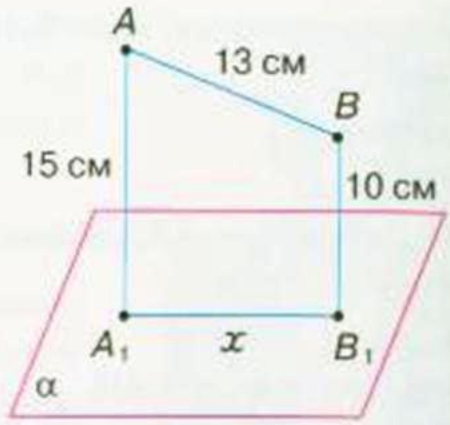
Мал. 277



Мал. 278



Мал. 279



Мал. 280

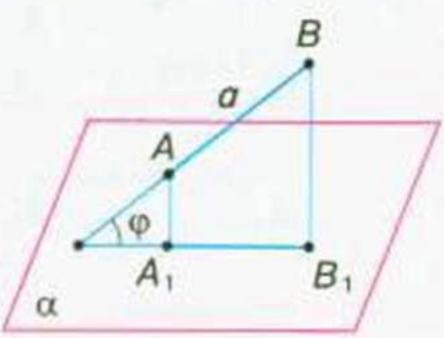
518. На малюнках 279, 280 відрізок A_1B_1 — проекція відрізка AB на площину α. За даними на малюнках знайдіть невідомий відрізок x.

519. Відрізок AB перетинає площину α.
Знайдіть відстань від середини відрізка до площини α, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють:
1) 10 см і 6 см;
2) 14 см і 8 см.

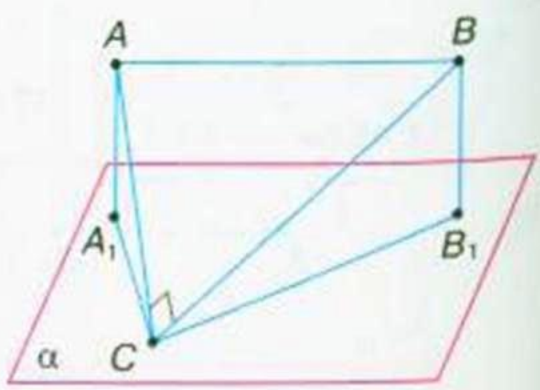
520. Відрізок AB перетинає площину α.
Знайдіть проекцію A_1B_1 відрізка AB на площину α, якщо:
1) $AB = 26$ см, $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 2$ см;
2) $AB = 20$ см, $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 6$ см.

521. Відрізок $AB = a$ лежить поза площиною α, а пряма AB нахилена до площини α під кутом φ (мал. 281).
Знайдіть проекцію відрізка AB на площину α, якщо:
1) $a = 12$ см, $\varphi = 60°$;
2) $a = 8$ см, $\varphi = 30°$;
3) $a = 16$ см, $\varphi = 45°$.

522. Відрізок $AB = a$ лежить поза площиною α, $A_1B_1 = b$ — проекція відрізка AB на площину α, φ — кут між прямою AB і площиною.
Знайдіть відрізок AB, якщо:
1) $b = 4$ см, $\varphi = 60°$;
2) $b = 2\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;
3) $b = 3\sqrt{3}$ см, $\varphi = 30°$.



Мал. 281



Мал. 282

523. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено площину α, віддалену від гіпотенузи на відстань a (мал. 282). Катети трикутника дорівнюють b і c.
Знайдіть проекції катетів і гіпотенузи на площину α, якщо:
1) $b = 15$ см, $c = 20$ см, $a = 12$ см;
2) $b = 10$ см, $c = 24$ см, $a = 6$ см.

524. Площа трикутника дорівнює S, а його проекції — S_1.
Знайдіть кут між площиною проекції і площиною даного трикутника, якщо:
1) $S = 36$ см^2, $S_1 = 18$ см^2;
2) $S = 24$ см^2, $S_1 = 12\sqrt{2}$ см^2;
3) $S = 28$ см^2, $S_1 = 14\sqrt{3}$ см^2.

525. S — площа многокутника, S_1 — площа його проекції, φ — кут між площинами многокутника і його проекції. Заповніть таблицю 15.

Таблиця 15

S	128 см^2	$64\sqrt{3}$ см^2		$32\sqrt{2}$ см^2	96 см^2
S_1	64 см^2		24 см^2		48 см^2
φ		30°	60°	45°	

526. Проекцією трикутника ABC на площину α є прямокутний рівнобедрений трикутник $A_1B_1C_1$ з гіпотенузою a. Кут між площинами трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнює φ.
Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:
1) $c = 8$ см, $\varphi = 45°$;
2) $c = 6$ см, $\varphi = 30°$.

527. Проекцією трикутника ABC зі сторонами a, b, c на площину α є трикутник $A_1B_1C_1$. Кут між площинами трикутників дорівнює φ.
Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $\varphi = 60°$;
2) $a = 7$ см, $b = 17$ см, $c = 18$ см, $\varphi = 45°$;
3) $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см, $\varphi = 30°$.

528. Через одну зі сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють d_1 і d_2, проведено площину α під кутом φ до площини ромба.
Знайдіть площу проекції ромба на площину α, якщо:
1) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 6$ см, $\varphi = 60°$;
2) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 8\sqrt{2}$ см, $\varphi = 45°$;
3) $d_1 = 9\sqrt{3}$ см, $d_2 = 8$ см, $\varphi = 30°$.

529. Площа чотирикутника дорівнює S. Його проекцією на площину α є ромб з діагоналями d_1 і d_2.
Знайдіть кут між площинами чотирикутника і ромба, якщо:
1) $S = 96$ см^2, $d_1 = 8$ см, $d_2 = 12$ см;
2) $S = 60$ см^2, $d_1 = 6$ см, $d_2 = 10\sqrt{2}$ см;
3) $S = 20$ см^2, $d_1 = 5\sqrt{3}$ см, $d_2 = 4$ см.

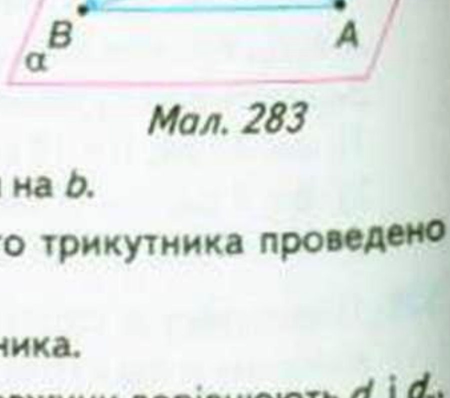
530. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює a, гострий кут — α. Кут між площинами прямокутного трикутника і його проекції дорівнює φ.
Знайдіть площу проекції прямокутного трикутника, якщо:
1) $a = 4$ см, $\alpha = 60°$, $\varphi = 30°$;
2) $a = 6$ см, $\alpha = 45°$, $\varphi = 60°$;
3) $a = 8$ см, $\alpha = 30°$, $\varphi = 45°$.

531*. Кінці даного відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на a і b. Точка M ділить даний відрізок у відношенні $m : n$.
Як віддалена від площини точка M, якщо:
1) $a = 10$ см, $b = 25$ см, $m : n = 2 : 3$;
2) $a = 4$ см, $b = 20$ см, $m : n = 3 : 5$.

532*. Сторона ромба дорівнює a, а кут — $60°$. Через одну зі сторін ромба проведено площину. Проекція другої сторони на площину дорівнює b.
Знайдіть проекції діагоналей ромба.

533*. Через сторону AD паралелограма $ABCD$ проведено площину α. $AD = 10$ см, $AB = 15$ см, а проекції діагоналей AC і BD на площину α відповідно дорівнюють 13,5 см і 10,5 см.
Знайдіть діагоналі паралелограма.

534*. Через основу AB трапеції $ABCD$ проведено площину α (мал. 283). Основи трапеції відносяться, як $m : n$ (m відповідає основі AB).
Знайдіть:
1) відстань від точки M перетину діагоналей трапеції до площини α, якщо основа CD віддалена від площини на a;
2) відстань від основи CD до площини α, якщо точка перетину діагоналей віддалена від площини на b.



Мал. 283

535*. Через гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину α під кутом $30°$ до його катета.
Знайдіть кут між площиною α і площиною трикутника.

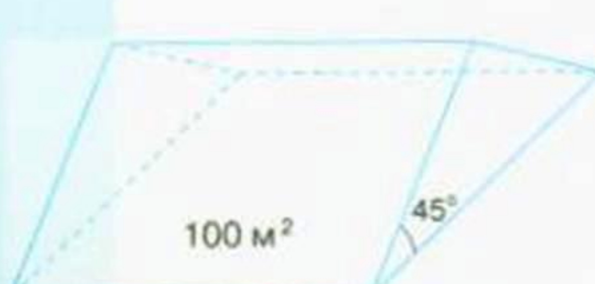
536*. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють d_1 і d_2. Проекцією цього чотирикутника є ромб із стороною a і кутом α.
Знайдіть кут між площинами чотирикутника і ромба, якщо:
1) $d_1 = 8$ см, $d_2 = 9$ см, $a = 6$ см, $\alpha = 30°$;
2) $d_1 = 16$ см, $d_2 = 8$ см, $a = 8$ см, $\alpha = 60°$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

537. Потрібно протягнути два електричних дроти від стовпа до будинку (мал. 284). На стовпі вони кріпляться на висоті 9 м, а на стіні будинку — на висоті 4 м.
Скільки потрібно дроту, якщо відстань від стовпа до будинку 20 м, а на кріплення і провисання потрібно додати 6% знайденої довжини?

538. Двосхилий дах будівлі має ухил 45° і площу основи 100 м² (мал. 285). Знайдіть, користуючись цими даними, скільки квадратних метрів дахового заліза піде на покриття, якщо витрати на згин і обрізки становлять 6%.

Мал. 284



Мал. 285

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
3. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.
5. Дайте означення кута між прямою і площиною.
6. Доведіть, що коли площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.
7. Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.
8. Дайте означення кута між площинами. Які площини називаються перпендикулярними?
9. Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.
10. Що таке ортогональне проектування?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Пряма CD перпендикулярна до сторони AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

А. Пряма CD і площина ABC. **Б.** Пряма BC і площина ACD.
В. Пряма AB і площина BCD. **Г.** Пряма AC і площина BCD.

2° З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які дорівнюють 12 см і 15 см. Знайдіть проекцію похилої.

А. 8 см. **Б.** 81 см. **В.** 9 см. **Г.** 3 см.

3° Точка віддалена від площини на 8 см. Знайдіть довжину похилої, проведеної з цієї точки під кутом 30° до площини.

А. 4 см. **Б.** 16 см. **В.** 12 см. **Г.** 24 см.

4 Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ зі стороною 2 см, $CM = 1$ см. Знайдіть відстань від точки M до вершини A квадрата.

А. 3 см. **Б.** 9 см. **В.** $2\sqrt{2}$ см. **Г.** 5 см.

5* З вершини прямого кута C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CM до його площини. Знайдіть відстань від точки M до гіпотенузи AB, якщо $AC = 2$ см, $CM = 1$ см.

А. 3 см. **Б.** $\sqrt{3}$ см. **В.** 4 см. **Г.** 1 см.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

№ 2

1° Відрізок AB паралельний площині α. Із точки A до площини α проведено перпендикуляр AD. Через точку B проведено пряму, паралельну AD, яка перетинає площину α в точці C. Якого виду чотирикутник $ABCD$?

А. Довільний чотирикутник. **Б.** Трапеція. **В.** Ромб. **Г.** Прямокутник.

2° $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD.

А. 60°. **Б.** 90° **В.** 45°. **Г.** 30°.

3° Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань між точками D і D_1, якщо $AB = 9$ см.

А. $9\sqrt{2}$ см. **Б.** 9 см. **В.** 8 см. **Г.** $8\sqrt{2}$ см.

4 Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть відстань між прямими CM і AB.

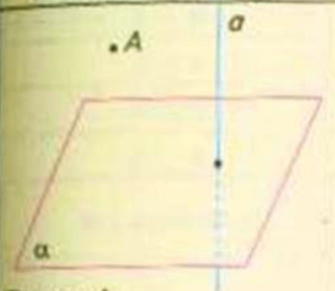
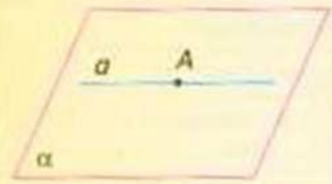
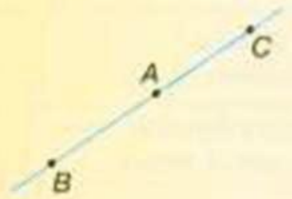
А. 4,8 см. **Б.** 7 см. **В.** 5,8 см. **Г.** 10 см.

5* Площини двох прямокутних рівнобедрених трикутників зі спільною гіпотенузою перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами прямих кутів, якщо гіпотенуза дорівнює $12\sqrt{2}$ см.

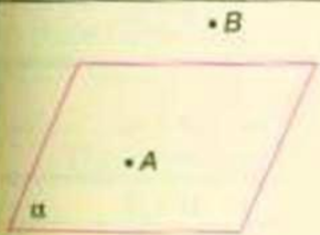
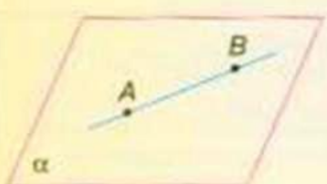
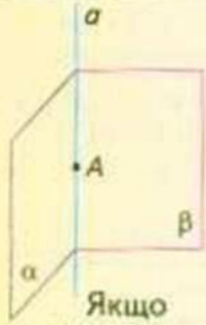
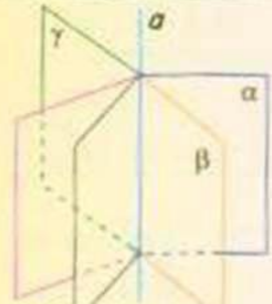
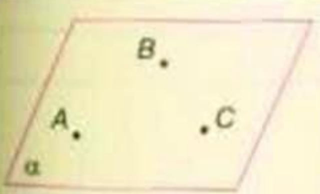
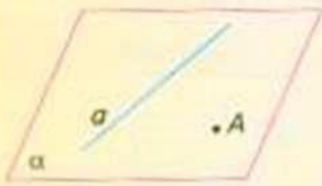
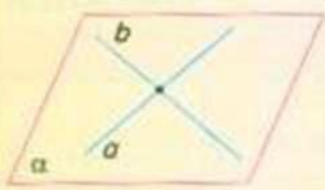
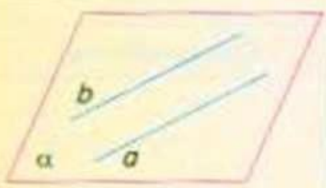
А. 10 см. **Б.** 12 см. **В.** 24 см. **Г.** $6\sqrt{2}$ см.

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

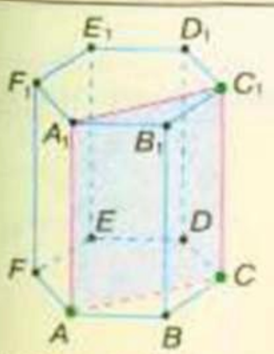
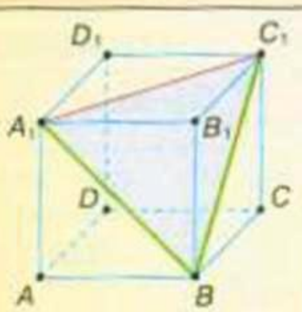
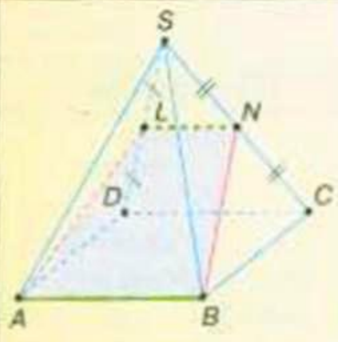
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Основні фігури	Основні відношення		
 Точка A, пряма a, площина α	 $A \in a$, $A \in \alpha$, a лежить в α	 Точка A лежить між точками B і C	 Фігури F і F_1 суміщаються накладанням

Аксіоми стереометрії та наслідки з них

 $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$	 Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то AB лежить в α	 Якщо $A \in \alpha$ і $A \in \beta$, то $\alpha \times \beta$	 a лежить в α, β, γ...
 Площина ABC — єдина	 $A \notin a$ Площина α — єдина	 $a \times b$ Площина α — єдина	 $a \parallel b$ Площина α — єдина

МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ПЕРЕРІЗИ

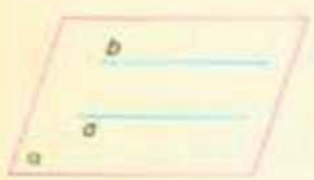
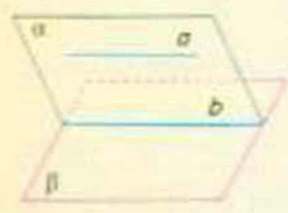
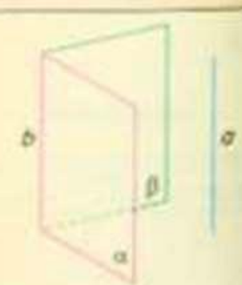
Пряма призма			Піраміда
n-кутна	Прямокутний паралелепіпед	Куб	
 Основа — n-кутник, бічні грані — прямокутники, ACC_1 — січна площина, що проходить через точки A, C і C_1, ACC_1A_1 — переріз	 Основа — прямокутник, бічні грані — прямокутники, CBK — січна площина, що проходить через пряму CB і точку K, $CBKM$ — переріз	 Основа — квадрат, бічні грані — квадрати, A_1BC_1 — січна площина, що проходить через прямі BC_1 і BA_1, BC_1A_1 — переріз	 Основа — n-кутник, бічні грані — трикутники, ABN — січна площина, що проходить через паралельні прямі AB і LN, $ABNL$ — переріз

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

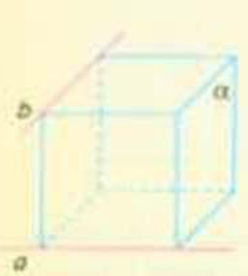
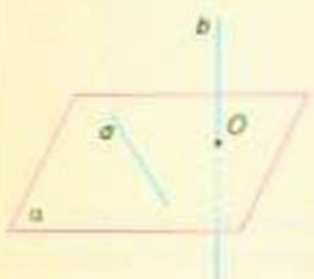
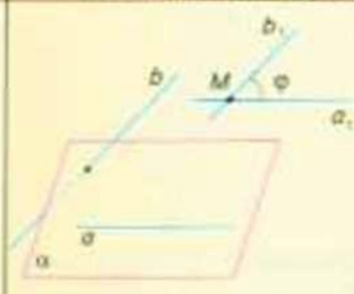
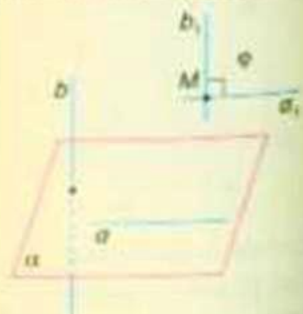
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві прямі a і b	мають одну спільну точку	перпендикулярні	$a \perp b$
		не перпендикулярні	$a \times b$
	не мають спільних точок	паралельні	$a \parallel b$
		мимобіжні	$a \,\dot{-}\, b$
Пряма a і площина α	мають безліч спільних точок	пряма лежить у площині	a лежить в α
	мають одну спільну точку	пряма перпендикулярна до площини	$a \perp \alpha$
		пряма не перпендикулярна до площини	$a \times \alpha$
	не мають спільних точок	пряма паралельна площині	$a \parallel \alpha$
Дві площини α і β	мають спільну точку	перпендикулярні	$\alpha \perp \beta$
		не перпендикулярні	$\alpha \times \beta$
	не мають спільних точок	паралельні	$\alpha \parallel \beta$

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

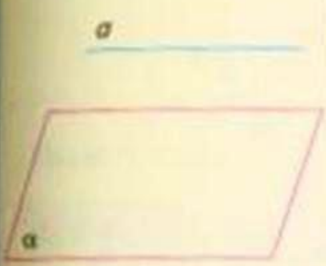
Означення	Ознаки		
			
$a \parallel b$, якщо a і b лежать в α, і a і b не перетинаються	Якщо $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$	Якщо $\alpha \times \beta$ по прямій b, a лежить в α і $a \parallel \beta$, то $b \parallel a$	Якщо $\alpha \times \beta$ по прямій b, $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$, то $a \parallel b$

МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

Означення	Ознака	Кут між мимобіжними прямими	
			
$a \,\dot{-}\, b$, якщо a і b не лежать в α або a і b не перетинаються і не паралельні	Якщо a лежить в α, $b \times \alpha$, $O \notin a$, то $a \,\dot{-}\, b$	$a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $\varphi < 90°$	$a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $\varphi = 90°$

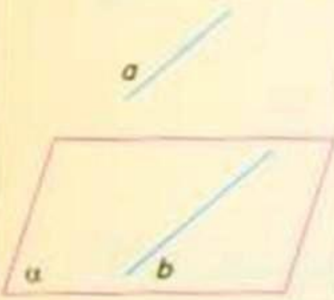
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Означення



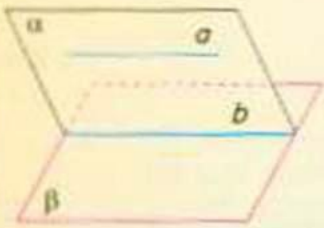
$a \parallel \alpha$, якщо a і α не перетинаються

Ознака

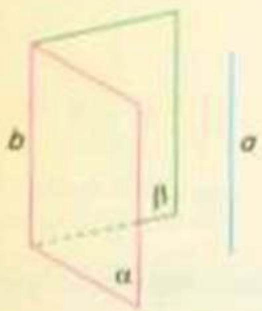


Якщо a не лежить в α, b лежить в α і $a \parallel b$, то $a \parallel \alpha$

ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩИН, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ



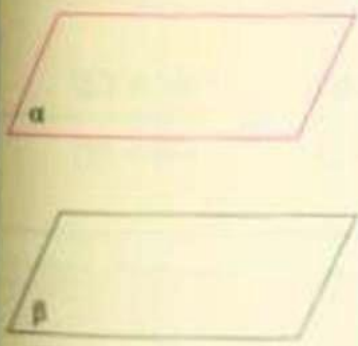
Якщо $\alpha \times \beta$ по прямій b, a лежить в α і $a \parallel \beta$, то $b \parallel a$



Якщо $\alpha \times \beta$ по прямій b, $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$, то $a \parallel b$

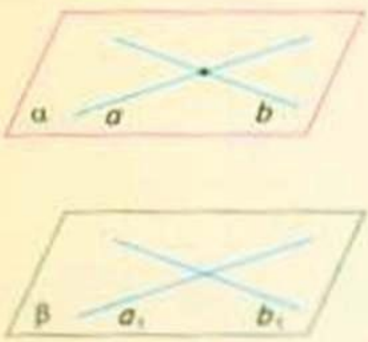
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

Означення



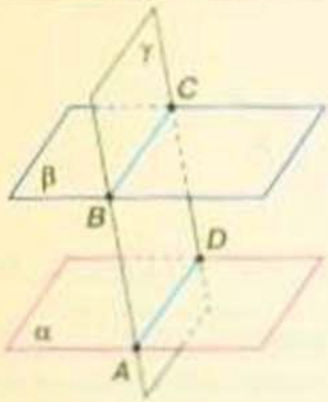
$\alpha \parallel \beta$, якщо α і β не перетинаються

Ознака



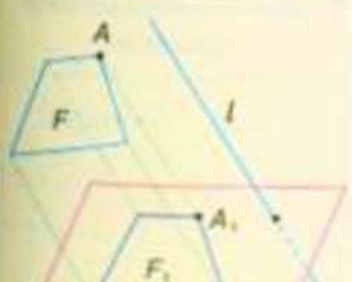
Якщо a і b лежать в α, $a \times b$, a_1 і b_1 лежать у β і $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$

Властивість



Якщо $\alpha \parallel \beta$, γ — січна площина, AD — пряма перетину α і γ, BC — пряма перетину β і γ, то $AD \parallel BC$

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ



F — фігура-оригінал,
α — площина проекцій,
l — напрям проектування,
F_1 — проекція фігури F

Властивості фігур, що ЗБЕРІГАЮТЬСЯ під час проектування

1) Належність фігури своєму класу фігур (точку зображають точкою, пряму — прямою, відрізок — відрізком, трикутник — трикутником тощо);
2) належність точок прямій;
3) порядок розміщення точок на прямій (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції);
4) паралельність прямих;
5) рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій

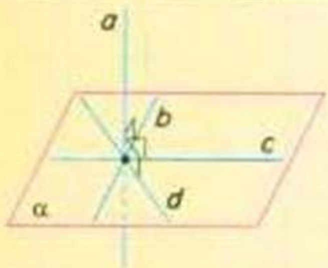
Властивості фігур, що НЕ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ під час проектування

1) Довжина відрізка;
2) міра кута (зокрема, прямий кут зображають довільним кутом);
3) перпендикулярність прямих;
4) рівність (пропорційність) кутів;
5) рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

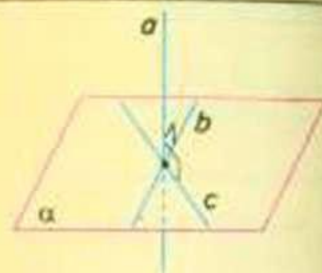
Означення



$a \perp \alpha$, якщо
$a \perp b$, $a \perp c$, $a \perp d$, ...

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перетинає площину і перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину

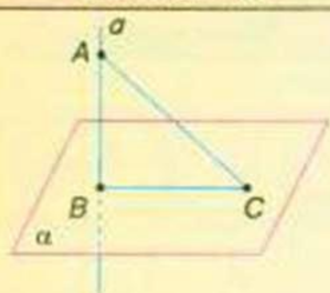
Ознака



Якщо $a \perp b$ і $a \perp c$, то $a \perp \alpha$

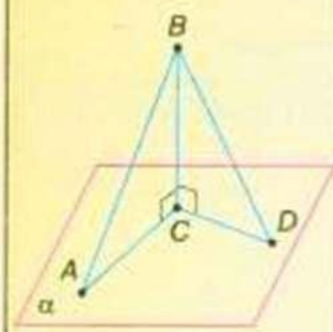
ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА ДО ПЛОЩИНИ

Означення



Якщо $a \perp \alpha$ і відрізок AB лежить на a, то AB — перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, AC — похила, BC — проекція похилої на площину α

Властивості



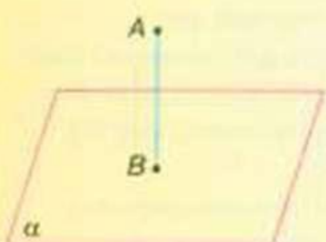
$BC < AB$, $BC < BD$

Якщо $\dfrac{AB = BD}{AC = CD}$, то $\dfrac{AC = CD}{AB = BD}$

Якщо $AC > CD$, то $AB > BD$

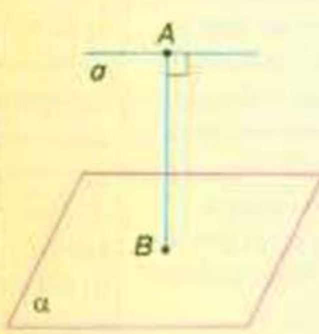
ВІДСТАНЬ — ДОВЖИНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА *AB*

від точки до площини



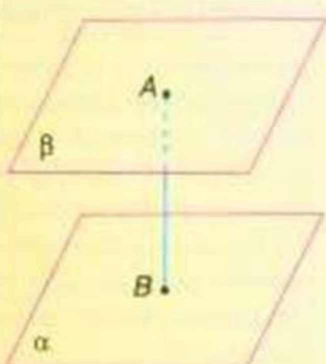
$AB \perp \alpha$

від прямої до паралельної їй площини



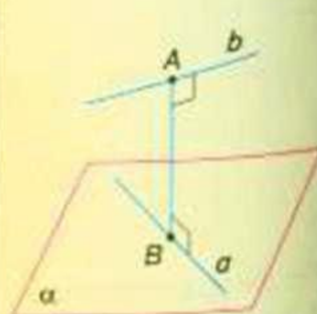
$AB \perp \alpha$,
A — довільна точка прямої a

між паралельними площинами



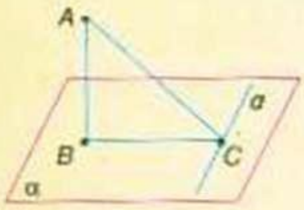
$AB \perp \alpha$,
A — довільна точка площини β

між мимобіжними прямими



AB — спільний перпендикуляр a і b

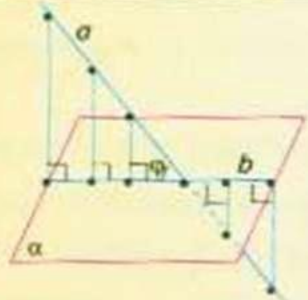
ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ



$AB \perp \alpha$

Якщо $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, то $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$

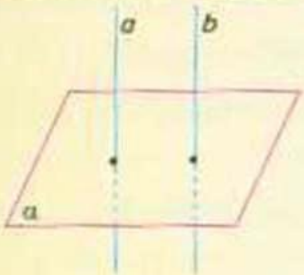
КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ



b — проекція прямої a на площину α

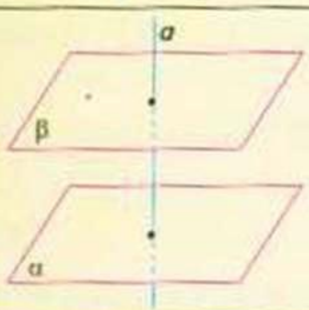
φ — кут між прямою a і площиною α

ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНІСТЮ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЮ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН



Якщо $a \parallel b$, $\alpha \perp a$, то $\alpha \perp b$

Якщо $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

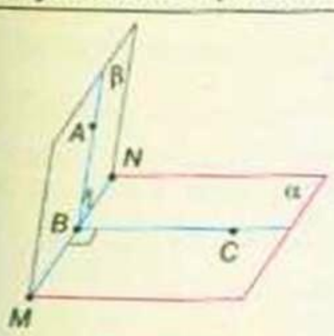


Якщо $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$

Якщо $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

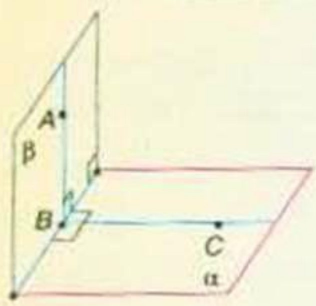
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ

Кут між площинами



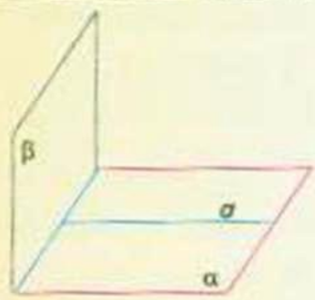
Якщо $AB \perp MN$ і $CB \perp MN$, то $\angle ABC$ — кут між α і β

Перпендикулярні площини



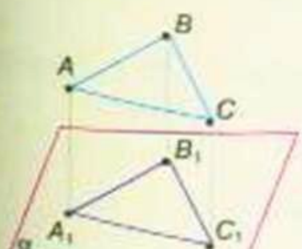
Якщо $\angle ABC = 90°$, то $\alpha \perp \beta$

Ознака перпендикулярності

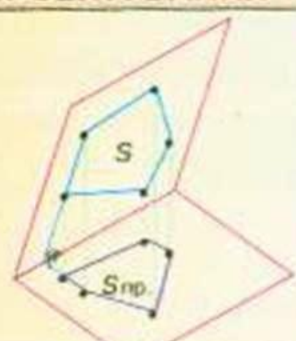


Якщо a лежить в α і $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$

ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ



Якщо проектувальні прямі перпендикулярні до площини проекцій α, то проектування називають ортогональним



Якщо S і $S_{пр}$ — площі многокутника і його проекції, а φ — кут між їх площинами, то $S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

539. Наведіть приклади з довкілля, які ілюструють поняття:
1) точки; 2) прямої; 3) площини.

540. Укажіть три виміри:
1) лінійки; 2) олівця; 3) мотузочка.
Яку форму мають ці предмети? Який їх вимір найбільший?

541. Укажіть три виміри:
1) книжки; 2) зошита; 3) аркуша паперу.
Яку форму мають ці предмети? Який їх вимір найменший?

542. Чи лежать в одній площині середини трьох ребер трикутної піраміди, якщо ці ребра:
1) мають спільну вершину; 2) не мають спільної вершини?
Відповідь поясніть.

543. Через середини трьох бічних ребер чотирикутної піраміди проведено площину. Чи лежить у цій площині:
1) середина четвертого бічного ребра піраміди; 2) середина ребра основи піраміди; 3) вершина піраміди?
Відповідь поясніть.

544. Чому незамкнені двері відчиняються (рухаються), а замкнені — ні?

545. Щоб виявити недоліки в обробці дошки, тесля дивиться вздовж її краю, який обробляє. На чому ґрунтується така перевірка?

546. Дано правильну призму:
1) трикутну; 2) чотирикутну; 3) шестикутну.
Назвіть рівні многокутники, що є гранями призми.

547. У кубі проведено січну площину через протилежні його ребра. Скільки таких площин можна провести? Які многокутники утворюються в перерізі?
Як відноситься площа кожного перерізу до площі грані куба?

548. У правильної трикутної піраміди всі ребра мають довжину a. Проведіть січну площину через бічне ребро піраміди та:
1) медіану основи, проведену до протилежного її ребра; 2) бісектрису кута при вершині у протилежній бічній грані піраміди; 3) точку на протилежному ребрі основи, що ділить її у відношенні 2 : 1.
Який многокутник дістали в перерізі? Як відноситься площа цього перерізу до площі грані піраміди?

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

549. Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих у просторі, спираючись на зображення:

1) куба; 2) прямої трикутної призми; 3) правильної чотирикутної піраміди.

550. Два літаки летять на різних висотах: 1) один з Києва до Парижа, другий з Осло до Афін; 2) один з Києва до Праги, другий з Праги до Києва. Яке розміщення прямих, за якими прокладено курс літаків?

551. У футбольному матчі суддя призначив пенальті – штрафний удар по воротах команди-порушника з відстані 11 м від воріт. За допомогою прямих накресліть напрямки руху м'яча і воротаря, якщо:

1) м'яч потрапив у ворота; 2) воротар перехопив м'яч.

Запропонуйте кілька варіантів розвитку подій.

552. Туго натягнутою ниткою послідовно обмотано три стержні *MA*, *MB* і *MC*. На стержні *MA* нитку закріпили у двох точках (K_1 і K_4), на стержні *MB* – теж у двох точках (K_2 і K_5), а на стержні *MC* – в одній точці (K_3). Побудуйте зображення та з'ясуйте:

1) якщо дві прямі перетинаються, то в якій точці;

2) чи є серед прямих паралельні;

3) які з прямих мимобіжні.

553. Туго натягнутою ниткою послідовно обмотано три паралельні стержні *MA*, *DB* і *OC*, що не лежать в одній площині. На кожному із стержнів нитку закріпили у двох точках: на *MA* – у точках K_1 і K_4, на *DB* – у точках K_3 і K_6, на *OC* – у точках K_2 і K_5. Побудуйте зображення та з'ясуйте:

1) якщо дві прямі перетинаються, то в якій точці;

2) чи є серед прямих паралельні;

3) які з прямих мимобіжні.

554. Скільки можна провести площин, паралельних двом даним паралельним прямим і таких, що проходять через точку, яка не лежить на даних прямих?

555. Площини α і β перетинаються по прямій *DF*. Пряма *a* лежить у площині α. Доведіть:

1) якщо пряма *a* перетинає площину β у точці *A*, то точка *A* лежить на прямій *DF*;

2) якщо пряма *a* паралельна площині β у точці *A*, то вона паралельна прямій *DF*.

556. Площини α і β перетинаються. Точка *A* лежить у площині α, точка *B* – у площині β. Побудуйте:

1) пряму *a*, що лежить у площині α, проходить через точку *A* паралельно площині β;

2) пряму *b*, що лежить у площині β, проходить через точку *B* паралельно площині α.

Що можна сказати про побудовані прямі?

557. Пряма *a* паралельна площині α. Прямі *b* і *c* перетинають пряму *a* і перетинають площину α. Дослідіть взаємне розміщення прямих *b* і *c*.

558. Пряма a лежить у площині α. Площина β перетинає площину α. Дослідіть взаємне розміщення прямої a і площини β.

559. Прямі a і b лежать відповідно у площинах α і β. Дослідіть взаємне розміщення прямих a і b.

560. Що можна сказати про взаємне розміщення прямої і площини, якщо дана пряма лежить у площині, паралельній даній площині?

561. Що можна сказати про взаємне розміщення двох прямих, які лежать відповідно у двох паралельних площинах?

562. Чи завжди можна через дану пряму провести площину, паралельну даній площині?

563. Скільки пар відповідно паралельних площин можна провести через дві прямі, що:
1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні?

564. Що є проекцією двох прямих, які:
1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні.
Розгляньте можливі випадки взаємного розміщення даних і проектувальних прямих.

565. За яких умов паралельна проекція відрізка:
1) дорівнює даному відрізку; 2) менша від даного відрізка;
3) більша за даний відрізок?

566. Які властивості сторін, кутів, медіан, бісектрис, висот, середніх ліній трикутника зберігаються при паралельному проектуванні? А які не зберігаються?

567. Які властивості трапеції, паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата зберігаються при паралельному проектуванні? А які не зберігаються?

568. Які властивості правильних многокутників зберігаються при паралельному проектуванні? А які не зберігаються? Розгляньте відомі вам види правильних многокутників.

569. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з кутом $60°$, в якому проведено бісектрису даного кута і зовнішнього кута трикутника при цій вершині.

570. Побудуйте проекцію квадрата $ABCD$, в якому із середини M сторони BC проведено перпендикуляри до прямих: 1) BD; 2) AC; 3) DM.

571. Побудуйте зображення куба і проведіть січну площину так, щоб у перерізі дістати:
1) трикутник; 2) квадрат; 3) прямокутник;
4) паралелограм; 5) п'ятикутник; 6) шестикутник.

572. Побудуйте зображення правильної чотирикутної піраміди, в якої бічне ребро дорівнює ребру основи. Чи можна провести січну площину так, щоб у перерізі дістати:
1) трикутник; 2) квадрат; 3) прямокутник;
4) паралелограм; 5) п'ятикутник; 6) шестикутник?

573. Побудуйте зображення правильної трикутної призми, у якої бічне ребро має довжину a, а ребро основи — b. Знайдіть периметр і площу перерізу, що проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 24$ см, $b = 18$ см;
3) $a = 2b$; 4) $a : b = 3 : 2$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

574. З точки O перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр OM. $AB = a$, $AD = b$, $\angle MCO = \alpha$. Знайдіть довжину перпендикуляра MO, якщо:
1) $a = 16$ см, $b = 12$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 30°$.

575. Катети AC і BC прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 12 см. Із середини O меншого катета проведено перпендикуляр OF до площини трикутника довжиною 3 см. Знайдіть відстань від точки F до вершин трикутника.

576. З точки O перетину діагоналей трапеції проведено перпендикуляр OF до її площини. Точку F сполучено з вершинами трапеції.
1) Чи можуть усі проведені похилі бути рівними?
2) Чи можуть серед проведених похилих бути рівні?

577. Відрізки AB і CD, які лежать в площині α, в точці O перетину діляться навпіл. Поза площиною позначено точку M так, що $MA = MB$ і $MC = MD$. Доведіть, що пряма OM перпендикулярна до площини α.

578. З точки A проведено до площини α перпендикуляр і похилу. Похила довша за перпендикуляр на a, а її проекція на площину α дорівнює b. Знайдіть довжину похилої, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 10$ см.

579. З точки M до площини α проведено перпендикуляр $MO = 4$ см і похилі MA, MD, MC під кутами 30°, 45°, 60° до перпендикуляра MO. Знайдіть довжини похилих.

580. З точки до площини проведено дві похилі, кожна з яких дорівнює a. Кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями на площину — прямий. Знайдіть:
1) відстань від даної точки до площини; 2) відстань між основами похилих.

581. Сторона ромба дорівнює a, а кут — α. З точки O перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляр $OF = b$ до його площини. Знайдіть відстань від точки F до сторін ромба, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 16$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 60°$.

582. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P. Точка M віддалена від кожної сторони трикутника на b. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо:
1) $P = 18$ см, $b = 13$ см; 2) $P = 9\sqrt{3}$ см, $b = 3$ см.

583. Відстань між паралельними прямими a і b площини α дорівнює 28 см. Пряма c, що лежить поза площиною, паралельна прямій a і віддалена від неї на 17 см, а від площини α — на 15 см. Знайдіть відстань між прямими b і c.

584. Похила утворює зі сторонами прямого кута кути по 60°. Знайдіть кут, який утворює ця похила з площиною прямого кута.

585. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють a і b, точка F віддалена від кожної з його вершин на c. Знайдіть кути між кожною з прямих FA, FB, FC і площиною даного трикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 10\sqrt{2}$ см.

586. Через катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено площину α. $BC = a$, $AC = b$, а вершина A віддалена від площини α на c. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 12$ см, $c = 26$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 10$ см.

587. Доведіть, що площина α і пряма a, що не лежить у площині α, і які перпендикулярні до прямої b, паралельні.

588. Через основу BC трикутника ABC проведено площину α під кутом φ до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини A до площини α, якщо:
1) $\angle A = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $AB = 20$ см, $AC = 15$ см;
2) $AB = 7$ см, $AC = 13$ см, $BC = 10$ см, $\varphi = 60^\circ$.

589. Через сторону ромба проведено площину α на відстані 4 см від протилежної сторони. Знайдіть проекції сторін ромба на площину α, якщо проекції його діагоналей дорівнюють 2 см і 8 см.

590. Доведіть, що суми відстаней протилежних вершин паралелограма від площини рівні між собою.

591. Відстані трьох вершин паралелограма $ABCD$ від площини α дорівнюють $AA_1 = 17$ см, $BB_1 = 22$ см, $CC_1 = 12$ см. Знайдіть відстань четвертої вершини від площини α.

592. Через вершину A прямого кута трикутника проведено площину паралельно гіпотенузі BC. Ортогональною проекцією трикутника ABC на цю площину є трикутник $A_1B_1C_1$, у якого $A_1B_1 = 3$ см, $A_1C_1 = 24$ см, а кут між ними 120°. Знайдіть відстань від гіпотенузи до проведеної площини.

593. Площа многокутника дорівнює 112 см^2, а його проекції — 56 см^2. Знайдіть кут між площиною ортогональної проекції і площиною даного многокутника.

594. Знайдіть площу ортогональної проекції ромба на площину α, яка з площиною ромба утворює кут 60°, якщо діагоналі ромба дорівнюють:
1) 12 см і 18 см; 2) 48 см і 50 см.

Повторення курсу планіметрії

1. 4 см, $4\sqrt{3}$ см (мал. 21). **2.** $\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (мал. 24). **3.** $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$ (за двома сторонами та кутом між ними) (мал. 27). **4.** 1) 27 см, 36 см; 2) 26 см, 30 см. **5.** 1) $\approx 23°$; 3) $\approx 28°$. **7.** 1) 7 см; 2) 72°. **8.** 1) 24 см; 2) 27 см. **9.** 1) 24 см. **10.** *Вказівка*: з вершини тупого кута трапеції проведіть пряму, паралельну діагоналі. **11.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 48 см. **12.** 2) 10 см, 10 см. **14.** 2) 12 см. **15.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta\ MAD \sim \Delta\ MCB$ (за двома кутами). **17.** *Вказівка*: проведіть через вершину тупого кута трапеції пряму, паралельну бічній стороні, та обґрунтуйте, що утворений трикутник — прямокутний. **18.** *Вказівка*: добудуйте $\Delta\ ABC$ до паралелограма. **19.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (за двома кутами). **32.** *Вказівка*: побудуйте спочатку коло радіуса R та його хорду a. У рівнобедреному трикутнику центр описаного кола лежить на висоті, яка проведена до основи. **34.** 1) 10; 2) 5. **35.** 1) $\sqrt{85}$ см; 2) $3\sqrt{2}$ см. **36.** *Вказівка*: систему координат введіть так, щоб вершини ΔABC ($\angle C = 90°$) мали координати $A(0;\ b)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;\ 0)$. **39.** *Вказівка*: систему координат введіть так, щоб вершини трапеції $ABCD$ з основами AD і BC мали координати $A\ (0;\ 0)$, $B\ (c;\ b)$, $C\ (a;\ b)$, $D\ (d;0)$. **40.** 40°, 60°, 80°. **41.** 1) 10 см, 20 см; 2) 12 см, 24 см. **42.** 1) $\sqrt{\frac{mS}{n}}, \sqrt{\frac{nS}{m}}$; 2) $\frac{mP}{2(m+n)}, \frac{nP}{2(m+n)}$. **43.** 7 см, 15 см, 21 см, 23 см. **44.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **45.** 1) 2 см, 8 см; 2) 8 см, 18 см. **46.** 35 м. **47.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A_1BC_1$ (за двома кутами). **48.** $\approx 3{,}2$ км. **49.** $\approx 53{,}6$ м.

Розділ 1

§ 1

62. Ні. **63.** 1) Так; 2) так. **73.** 2) Чотири. **76.** 1) Три; 2) шість; 3) $\frac{n(n-1)}{2}$. **79.** *Вказівка*: для обґрунтування скористайтеся фактом: прямі, які перетинаються, лежать в одній площині.

§ 2

85. 1) Так; 2) ні; 3) ні. **86.** 1) Ні; 2) не завжди; 3) ні; 4) так. **89.** 1) Трикутник; 2) чотирикутник; 3) шестикутник. **90.** 1) 5 граней, 9 ребер, 6 вершин. **91.** 1) $2n$; 2) $n+1$. **92.** 1) $3n$; 2) $2n$. **93.** 1) $n+2$; 2) $n+1$. **95.** Ні. **101.** 11.

Розділ 2

§ 3

115. 1) 60°; 2) 60°; 3) 70°; 4) 20°. **116.** 1) 3 см, або 4 см, або 5 см; 2) 5 см, або 2 см; 3) 8 см. **118.** 1) Перетинаються або мимобіжні; 2) перетинаються або мимобіжні; 3) перетинаються або мимобіжні. **121.** 1) Ні; 2) ні. **122.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **123.** 1) Наприклад, AA_1 і AD, AA_1 і AB; 2) наприклад, AA_1 і BC, AA_1 і CD. **124.** 1) 4 см, 6 см, 9 см, $2\sqrt{13}$ см, $3\sqrt{13}$ см, $\sqrt{97}$ см; 2) 5 см, $5\sqrt{2}$ см; 3) 5 см, 12 см, 13 см, $12\sqrt{2}$ см. **126.** 1) $\frac{168}{13}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **127.** Якщо $A \notin a$, то: 1) безліч; 2) одну; 3) безліч. Якщо $A \in a$, то: 1) безліч; 2) жодної; 3) жодної. **130.** 1) 12 пар; 2) 24 пари. **131.** 1) 3 пари; 2) 8 пар. **132.** 1) 45°; 2) 60°; 3) 90°. **133.** 1) 15; 2) $\frac{168}{13}$. **138.** 1) 3 пари; 2) 15 пар; 3) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$. **140.** 5 см, або $5\sqrt{3}$ см, або 10 см.

§ 4

145. 1) Одну; 2) одну. **148.** Одну. **149.** 1) CC_1; 2) DD_1; 3) C_1D_1; 4) A_1D_1. **151.** 1) Одне; 2) одне; 3) одне. **153.** Так. 1) 6 см; 2) 4,5 см; 3) 16 см. **154.** Так. 1) 11 см; 2) 12 см; 3) 25 см. **156.** Не завжди. **160.** 1) Паралельні; 2) паралельні; 3) паралельні; 4) паралельні. **163.** 1) Ні; 2) не завжди. **164.** Ні. **166.** 1) Рівносторонній трикутник. $P = 6$ см, $S = \sqrt{3}$ см²; 2) квадрат. $P = 12$ см, $S = 9$ см². **168.** 1) Паралельні; 2) паралельні. **169.** Паралелограм. **174.** 1) $P = \frac{96}{3}$ см, $S = 16$ см²; 2) $P = 4(1+\sqrt{3})$ см, $S = 4\sqrt{3}$ см². **178.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих. **179.** Ні.

§ 5

182. 1) Паралельні; 2) перетинаються; 3) паралельні. **185.** Так. **186.** Ні. **187.** Ні. **188.** Так. **190.** 1) 2 см або 3 см; 2) 1,5 см або 3,5 см; 3) 1 см або 2,5 см. **191.** 1) Пряма CD паралельна площині α; прямі AD і BC перетинають площину α. **193.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трикутника та ознакою паралельності прямої і площини. **194.** 1) 18 см; 2) 16 см; 3) 22 см. **195.** Не завжди. **197.** Так. **198.** 1) Паралельні або сторона трикутника перетинає площину. **200.** Так. **201.** 1) Так; 2) так. **202.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **204.** Ні. **207.** 1) Так; 2) не завжди. **209.** 1) Так.

§ 6

217. 1) AB; 2) AA_1; 3) CC_1. **220.** Перетинаються або паралельні. **221.** Так. **225.** Не завжди. **226.** Не завжди. **227.** Так, якщо прямі мимобіжні. **228.** Перетинаються. **229.** Не можна. **230.** 1) Одну; 2) одну. **235.** Ні. **236.** Не завжди. **237.** *Вказівка*:

скористайтеся ознакою паралельності площин. **240.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **241.** 1) Так; 2) так; 3) так. **242.** Так. 1) Одну; 2) безліч; 4) одну. **244.** *Вказівка*: розгляньте два випадки. **245.** Паралельні. **246.** Безліч. **249.** 1) Не завжди; 2) ні. **253.** Паралельні. Можуть бути не паралельними.

§ 7

263. 1) $BM_1 = 10$, $BN_1 = 24$, $M_1N_1 = 26$; 3) $BM = 6$, $BN_1 = 10$, $M_1N_1 = 18$; 5) $BM = 1{,}5$, $BN = 2{,}5$, $MN = 2$. **264.** 1) Прямокутник; 2) квадрат. **265.** 1) Квадрат; 2) рівносторонній трикутник. **266.** Рівнобедрений трикутник. 1) 35°, 35°, 110°; 2) 50°, 50°, 80°; 3) 75°, 75°, 30°. **267.** Ромб. 1) 100°, 80°, 100°, 80°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **268.** Не завжди. **269.** Так. **272.** 1) $P = a\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}\right)$, $S = \frac{9a^2}{8}$. **273.** Ні. **275.** Так. **277.** 1) 36 см; 2) 72 см. **278.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 50°, 60°, 70°. **279.** 1) 120°, 25°, 35°; 2) 40°, 40°, 80°. **282.** Так. **284.** *Вказівка*: розгляньте три випадки розміщення точки і паралельних площин. Якщо $m > n$, то: 1) $\frac{c}{m}(m + n)$ або $\frac{c}{m}(m - n)$; 2) $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot S_{\Delta ABC}$ або $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 \cdot S_{\Delta ABC}$.

Якщо $m < n$, то: 1) $\frac{c}{m}(m + n)$ або $\frac{c}{m}(m - n)$; 2) $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot S_{\Delta ABC}$ або $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 \cdot S_{\Delta ABC}$.

Якщо $m = n$, то: 1) $\frac{c}{m}(m + n)$; 2) $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 \cdot S_{\Delta ABC}$.

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

285. 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 30°; 5) 30°; 6) 60°. **286.** 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 30°; 5) 30°; 6) 60°.

§ 8

292. Ні. **294.** 1) 3 : 4; 2) 7 : 1; 3) 4 : 9. **295.** 1) 2 : 3; 2) 2 : 1; 3) 2 : 1. **296.** 1) 3 : 4; 2) 7 : 1; 3) 4 : 9. **297.** 1) Ні; 2) ні; 3) точки B. **302.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **303.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **305.**) Ні; 2) ні; 3) так. **311.** Відрізок або многокутник. **314.** 1) Проекцією прямокутного трикутника ABC буде довільний трикутник $A_1B_1C_1$, у якого висота C_1H_1 ділить гіпотенузу A_1B_1 у відношенні 25 : 144, рахуючи від вершини A_1. **315.** 1) Проекцією рівнобедреного трикутника ABC з основою AC і висотою BH буде довільний трикутник $A_1B_1C_1$, у якого відрізок B_1H_1 є медіаною, а відрізок H_1D_1 ділить бічну сторону відношенні 144 : 25, рахуючи від вершини B_1. **317.** 1) Проекцією прямокутника $ABCD$, у якого перпендикуляр BH проведений до діагоналі BD, буде паралелограм $A_1B_1C_1D_1$, у якого відрізок B_1H_1, проведений до діагоналі B_1D_1, ділить її у відношенні 9 : 16, рахуючи від вершини B_1. **320.** *Вказівка*: при паралельному проектуванні зберігається паралельність прямих, але не зберігається рівність кутів. **321.** 1) Проекцією рівнобічної трапеції $ABCD$, у якої висота BH проведена до більшої основи AD, буде трапеція $A_1B_1C_1D_1$, у якої відрізок B_1H_1, проведений до більшої основи A_1D_1, ділить її у відношенні 1 : 3, рахуючи від вершини A_1. **326.** 1) Проекцією трикутника ABC з бісектрисою BK, буде трикутник $A_1B_1C_1$, в якому відрізок B_1K_1 ділить сторону A_1C_1 у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини A_1. **333.** 1) Проекцією квадрата, вписаного у коло, є паралелограм, вписаний в еліпс, з вершинами у кінцях проекцій двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола. **345.** 1) Прямокутний паралелепіпед або довільний паралелепіпед; 3) правильна чотирикутна піраміда або чотирикутна піраміда, в основі якої лежить паралелограм.

Розділ 3

§ 9

346. Так. **347.** Так. **348.** Так. **349.** Так. **350.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої і площини. **351.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої і площини. **352.** Прямокутний. **354.** Перпендикулярна. **355.** *Вказівка*: врахуйте, що грані куба — квадрати. **356.** 1) *Вказівка*: врахуйте, що $AD \perp AB$ і $AD \perp AA_1$; 2) *вказівка*: обґрунтуйте, що у чотирикутнику AB_1C_1D всі кути прямі. **358.** Пряма BC і площина ACD. **359.** Пряма BC і площина ABD. **360.** 1) $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{5}$ см, 3 см; 2) 5 см, 5 см, $\sqrt{34}$ см. **361.** 1) 13 см; 2) 26 см. **362.** 1) 13 см, $3\sqrt{17}$ см; 2) 25 см, $3\sqrt{41}$ см. **364.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що SO – медіана. **365.** 1) 80 см^2, 160 см^2; 2) 65 см^2, 130 см^2. **366.** 1) 12 см; 2) $\sqrt{41}$ см. **367.** *Вказівка*: покажіть, що пряма AB перпендикулярна до прямих DS і DC. **370.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що $BD \perp CM$ за властивістю діагоналей квадрата. **371.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$. **373.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **374.** 15 см.

§ 10

378. 1) AB; 2) B; 3) AC; 4) BC. **379.** 1) 15 см; 2) 8 см; 3) 13 см. **380.** 1) $AB < BC$; 2) $AD = DC$. **381.** 1) AD; 2) AA_1; 3) DC. **382.** 1) 20 см; 2) 9 см; 3) 12см. **383.** 1) 25 см; 2) 20 см; 3) 10 см. **384.** 1) 5 см, $5\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{2}$ см; 3) $4\sqrt{3}$ см, 4 см. **385.** 1) 12 см, $6\sqrt{3}$ см; 2) $5\sqrt{2}$ см, 5 см; 3) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ см. **386.** 1) Безліч; 2) коло. **387.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що рівні похилі мають рівні проекції.

388. $KB > KC$. **389.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **390.** 1) $MA = MC$; 2) $MC > MA$. **391.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 60°. **392.** 1) 3 см, $3\sqrt{3}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см, 30°; 3) 5 см, $5\sqrt{2}$ см; 4) $6\sqrt{3}$ см, 60°; 5) $7\sqrt{3}$ см, 14 см; 6) $14\sqrt{2}$ см, 45°. **493.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **496.** 1) 2 см; 2) $\sqrt{6}$ см. **397.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що точка *O* рівновіддалена від основ даних похилих. **398.** 1) 8 см; 2) 16 см. **399.** 4 см. **400.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **401.** 1) 39 см, 45 см; 2) 25 см, 40 см. **402.** 45°. **403.** 73 см. **404.** 84 см. **405.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що точка *O* рівновіддалена від вершин многокутника. **406.** 37,7 м. **407.** ≈ 2,1 м.

§ 11

410. 1) $\angle CDC_1$; 2) $\angle BDB_1$; 3) $\angle B_1DC_1$. **411.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **412.** *Вказівка*: врахуйте, що діагоналі квадрата перпендикулярні, та скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **413.** 1) 10 см; 2) 17 см. **416.** *Вказівка*: покажіть, що $\angle B$ – прямий, та скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **417.** 1) 13 см, 20 см; 2) 25 см, 26 см. **418.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що трикутники *ABM* і *ACM* рівні. **419.** 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$. **420.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$. **422.** 1) 3 см; 2) 7 см. **423.** 1) 10 см; 2) 13 см. **424.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини паралелограма, є центром вписаного кола. **425.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра *O* рівновіддалена від сторін многокутника. **426.** 1) 24 см; 2) $4\sqrt{7}$ см. **427.** 6,4 см. **428.** 13 см. **429.** 7 см. **430.** 9 см². **431.** 60°. **432.** $3a$. **433.** 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $6\sqrt{6}$ см. **434.** 26 см. **435.** 13 см. **436.** 30°. **437.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників *DBM* і *DBN* та трикутників *MBO* і *NBO*. **438.** 2,5 см.

§ 12

440. Так. **441.** Паралельні. **442.** Так. **449.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **450.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **455.** Прямокутник. **456.** 1) *Вказівка*: спочатку доведіть, що *ABCD* – паралелограм, у якого кут *ADC* (або *DCD*) прямий; 2) *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що кути *ADC* і *BCD* – прямі. **457.** Діагональ паралельна площині або лежить у ній. **458.** *Вказівка*: через прямі *a* і *b* проведіть площину β та доведіть, що пряма перетину площин α і β паралельна прямій *b*. **459.** 1) *Вказівка*: скористайтеся тим, що відрізки, по яким січна площина перетинає бічні грані піраміди, паралельні основі. **460.** *Вказівка*: обґрунтуйте паралельність *AM* і *CN* та скористайтеся теоремою про паралельні площини та перпендикулярну пряму. **461.** *Вказівка*: обґрунтуйте паралельність *AM* і *CN* та скористайтеся теоремою про паралельні площини та перпендикулярну пряму. **462.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що пряма *a* перпендикулярна до площини *AEF*, та скористайтеся теоремою про паралельні прямі та перпендикулярну площину. **465.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трапеції. **467.** 90°, 45°, 135°, 90°.

§ 13

470. 1) $\angle SMC$; 2) $\angle SNB$. **471.** Так. **472.** Так. **473.** 1) Мимобіжні; 2) *AC*. **474.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 90°. **475.** 1) 1 см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см. **476.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **478.** Безліч. **479.** Перпендикулярна до площини. **480.** 1) *Вказівка*: скористайтеся властивістю перпендикулярних площин; 2) *вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **481.** *Вказівка*: покажіть, що *BC* є перпендикуляром до площини трикутника, та скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **482.** 1) *a*; 2) *a*; 3) *a*. **483.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що *BC* і *MN* перпендикулярні. **485.** 1) 20 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) $4\sqrt{2}$ см. **486.** 1) 12 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $7\sqrt{3}$ см. **487.** 30°. **488.** 1) 30°; 2) 30°. **489.** 1) 6 см; 2) $3\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{3}$ см. **490.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **491.** *Вказівка*: у площинах *SAC* і *SBD* проведіть з точок *N* і *M* перпендикуляри до основи піраміди. **493.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра *MO* є точкою перетину діагоналей квадрата, та скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **494.** 1) $5\sqrt{2}$ см; 2) $9\sqrt{2}$ см; 3) $11\sqrt{2}$ см. **495.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{3}$; 3) 60°. **496.** 1) 8 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. **497.** 1) 13 см; 2) 26 см. **498.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **499.** 1) 12 см; 2) 9,6 см. **500.** 1) 10 см; 2) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см. **501.** 1) 60°; 2) 45°; 3) 30°. **502.** 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\frac{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}$; 3) $2\sqrt{a^2+ab\sqrt{3}+b^2}$. **503.** $\frac{a}{2}$. **504.** ≈ 6,7 см. **505.** 4,8 см. **506.** 14°29'. **508.** ≈ 33°.

§ 14

509. Трикутник, відрізок. **511.** 1) Так; 2) так; 3) так. **512.** 1) $\sqrt{a^2-b^2}$; 2) $\frac{b}{2}$. **513.** 1) 14 см; 2) 10 см; 3) 22 см. **514.** 1) 11 см; 2) 20 см. **515.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **516.** 1) 16 см; 2) 20 см. **517.** 1) 18 см²; 36 см²; 3) $10\sqrt{2}$ см². **518.** 1) 5 см; 2) 12 см. **519.** 1) 2 см; 2) 3 см. **520.** 1) 24 см; 2) 12 см. **521.** 1) 6 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) $8\sqrt{2}$ см. **522.** 1) 8 см; 2) 4 см; 3) 6 см. **523.** 1) 9 см, 16 см, 25 см; 2) 8 см, $6\sqrt{15}$ см, 26 см. **524.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **525.** 1) 60°; 2) 96 см²; 3) 48 см²; 4) 32 см²; 5) 60°. **526.** 1) 32 см²; 2) $4\sqrt{2}$ см²; 3) $6\sqrt{3}$ см². **527.** 1) 42 см²; 2) 42 см²; 3) $144\sqrt{3}$ см². **528.** 1) 40 см²;

2) 54 см^2; 3) $18\sqrt{3}$ см^2. **529.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **530.** 1) 3 см^2; 2) 4,5 см^2; 3) $4\sqrt{6}$ см^2. **531.** 1) 6 см або 9 см; 2) 6 см або 10 см. **532.** b, $\sqrt{b^2+2a}$. **533.** 19 см, 17 см. **534.** 1) $\frac{am}{m+n}$; 2) $\frac{b(m+n)}{m}$. **535.** 45°. **536.** 1) 60°; 2) 30°. **537.** 21,8 м. **538.** ≈ 300 м^2.

Повторення вивченого

542. 1) Так. **544.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що через пряму і точку можна провести площину і тільки одну. **547.** 6. Прямокутник. $\sqrt{2}:1$. **548.** 1) Трикутник. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **554.** Безліч. **557.** Перетинаються або паралельні. **558.** Пряма a або належить площині β, або перетинає її, або їй паралельна. **560.** Паралельні. **561.** Або паралельні, або мимобіжні. **562.** Так, якщо пряма не перетинає дану площину. **563.** 2) Безліч; 3) одну. **564.** 1) Дві прямі, що перетинаються, або одна пряма; 2) або дві паралельні прямі, або одна пряма, або дві точки. **565.** 1) Відрізок, паралельний площині, на яку він проектується. **573.** 1) 28 см, $8\sqrt{21}$см^2. **574.** 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см. **575.** 5 см, 5 см, 13 см. **576.** 1) Ні; 2) можна, якщо трапеція рівнобічна чи прямокутна. **577.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що OM — медіана ΔAMC. Тоді $OM \perp AB$. Аналогічно $OM \perp CD$, далі скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої і площини. **578.** 1) 17 см; 2) 7,5 см. **579.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $4\sqrt{2}$ см, 8 см. **580.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) a. **581.** 1) 5 см; 2) 8 см. **582.** 1) $\sqrt{166}$. **584.** 45°. **587.** *Вказівка*: проведіть площину через прямі a і b. **588.** 1) 6 см. **589.** 3 см, 5 см. **590.** *Вказівка*: проведіть з точки перетину діагоналей паралелограма перпендикуляр до площини; покажіть, що його довжина дорівнює півсумі довжин перпендикулярів, проведених з протилежних вершин паралелограма до цієї площини. **591.** 7 см. **592.** 6 см. **593.** 60°. **594.** 1) 54 см^2.

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович,
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. Попович*. Художній редактор *А. Віксенко*.
Коректор *О. Степанюк*
Комп'ютерне макетування, дизайн та підготовка до друку *Е. Авраменко*
Малюнки художників *Е. Авраменка, О. Дядика*
Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, О. Гордієвич*

Підписано до друку 19.06.2010. Формат 70×100 1/16.
Папір офсет. Гарнітура шкільна. Друк офсет. Умов. друк. арк. 14,3 + 0,33 форзац.
Обл.-вид. арк. 15,0 + 0,4 форзац. Наклад 94 000 пр. Зам. 26/09

Видавництво «Зодіак-ЕКО»
01004, Київ-4, вул. Басейна, 1/2
Свідоцтво про державну реєстрацію серія ДК №155 від 22.08.2000 р.

Видрукувано ТОВ «Побутелектротехніка»
м. Харків, вул. Ольмінського, 17

Відомості про стан підручника

№	Прізвище та ім'я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	наприкінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Бурда, М.І.
Б 91 Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : академічний рівень / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. – К. : Зодіак–ЕКО, 2010. – 176 с. : іл.

ISBN 978-966-7090-72-2.

ББК 22.151я721