А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

11

АЛГЕБРА

Підручник для класів з поглибленим вивченням математики

Частина 2

ГІМНАЗІЯ

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(лист від 04.08.2011 № 1/11-7176)

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 2. — 272 с. : іл.
ISBN 978-966-474-165-8.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6

ISBN 978-966-474-165-8

21. Логарифм і його властивості

Легко розв'язати рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$. Їх коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 21.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці A $(x_0; 5)$. Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0.

Проте графічний метод не дозволяє встановити точне значення x_0.

З подібною ситуацією ми зустрічалися, розв'язуючи в 10-му класі рівняння $x^3 = 5$. Графічна інтерпретація також показує, що це рівняння має єдиний корінь (рис. 21.2). Потреба називати і записувати цей корінь свого часу призвела до нового поняття «кубічний корінь» і позначення $\sqrt[3]{5}$.

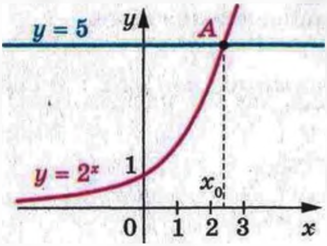


Рис. 21.1

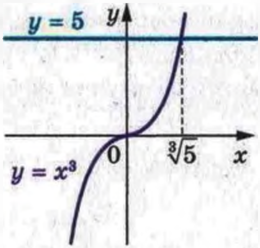


Рис. 21.2

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа 5 з основою 2** і позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Розглянемо рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ це рівняння не має розв'язків. Якщо $b > 0$, то це рівняння має єдиний корінь (рис. 21.3). Його називають логарифмом числа b з основою a і позначають $\log_a b$.

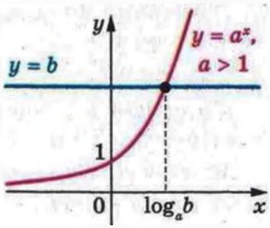


Рис. 21.3

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ оскільки } 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}, \text{ оскільки } 25^{\frac{1}{2}} = 5;$$

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ оскільки } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ оскільки } 100^0 = 1.$$

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Розглянемо рівність $a^c = b$.

Ви знаєте, що дію знаходження числа b за даними числами a і c називають піднесенням числа a до степеня c.

Дію знаходження числа c за даними числами a і b, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням числа b за основою a**. Справді, $c = \log_a b$.

Зазначимо, що при $a > 0$ ліва частина рівності $a^c = b$ є додатною. Отже, $b > 0$.

Тому при $b \leqslant 0$ вираз $\log_a b$ не має змісту.

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ пишуть $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 21.1 (логарифм добутку). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів*.

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 19.1 отримуємо, що $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ▲

Теорема 21.2 (логарифм частки). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів*.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 21.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 21.3. ***Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a x^\beta}$ і $a^{\beta \log_a x}$. Доведемо, що вони рівні.

Маємо: $a^{\log_a x^\beta} = x^\beta$;

$$a^{\beta \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = x^\beta.$$

Отже, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Звідси за теоремою 19.1 отримуємо: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$. ▲

Теорема 21.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доведення. Розглянемо вираз $\log_a b \cdot \log_c a$. Перетворимо його, скориставшись теоремою 21.3 при $\beta = \log_a b$. Маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Отже, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Оскільки $a \neq 1$, то легко показати, що $\log_c a \neq 0$. Тепер можна записати: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ▲

Наслідок 1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Доведіть цей наслідок самостійно.

Наслідок 2. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Доведення. У виразі $\log_{a^\beta} b$ перейдемо до основи a:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \ ▲$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

ПРИКЛАД 2 Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо:

$$9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \ ●$$

ПРИКЛАД 3 При якому значенні x виконується рівність:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Розв'язання. Вираз $\log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $\log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$. ●

ПРИКЛАД 4 Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8$.

Розв'язання. 1) Використовуючи теореми про логарифм добутку і логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2(20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Маємо:

$$\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_{36} 3^2 + \frac{1}{3}\log_{36} 2^3 = \frac{1}{2} \cdot 2\log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log_{36} 2 =$$

$$= \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}. \ ●$$

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції

$$f(x) = 5^{\log_5 (x-3)}.$$

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$. Оскільки $5^{\log_5 (x-3)} = x - 3$ для всіх значень $x \in D(f)$, то доходимо висновку, що графіком функції f є частина прямої $y = x - 3$ (рис. 21.4). ●

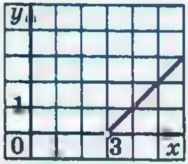


Рис. 21.4

ПРИКЛАД 6 Відомо, що $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайдіть $\lg 56$.

Розв'язання. Маємо:

$$\lg 56 = \lg(8 \cdot 7) = \lg 8 + \lg 7 = \lg 2^3 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} =$$

$$= 3\lg 2 + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba. \ ●$$

Вправи

21.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 3) $\log_{0,01} 10 = 2$; 5) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$;

2) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 4) $\lg 0,0001 = -4$; 6) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$?

21.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

21.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

21.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

21.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

21.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 100; 2) 1000; 3) 0,1; 4) 0,01; 5) 0,00001; 6) 0,000001.

21.7.° Чому дорівнює логарифм числа 10 000 з основою:

1) $\sqrt{10}$; 2) 0,1; 3) 1000; 4) 0,0001?

21.8.° Знайдіть логарифм числа 729 з основою:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

21.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 3) $\log_2 x = 0$; 5) $\log_x 0,25 = -2$;

2) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 4) $\log_x 9 = 2$; 6) $\log_x 5 = \sqrt{2}$.

21.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

21.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^x = 10$; 2) $2^{x-3} = 5$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$; 4) $0,3^{3x+2} = 7$.

21.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0,6^{5x-2} = 20$.

21.13.° Обчисліть:

1) $7^{2\log_7 2}$;
2) $64^{0,5\log_2 12}$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;
4) $6^{1+\log_6 5}$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;
6) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

21.14.° Обчисліть:

1) $4^{\log_2 9}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 3) $10^{2+\lg 8}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

21.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$;
2) $\log_5 100 - \log_5 4$;
3) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;
4) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$.

21.16.° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8 + \lg 12,5$;
2) $\log_3 162 - \log_3 2$;
3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$;
4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

21.17.° Подайте:

1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;
2) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;
3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;
4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

21.18.° Подайте:

1) число 4 у вигляді логарифма з основою $\frac{1}{3}$;
2) число -2 у вигляді логарифма з основою $\sqrt{2}$.

21.19.° Обчисліть:

1) $2^{3\log_2 5+4}$; 2) $8^{1-\log_2 3}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;

4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;

5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;

6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;

7) $\lg\left(25^{\log_5 0{,}8}+9^{\log_3 0{,}6}\right)$;

8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

21.20.° Обчисліть:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;

3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;

4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 8}$;

5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;

6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;

7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;

8) $5^{\log_5 4\cdot\log_2 8}$.

21.21.° Обчисліть:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;

2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49} 343$;

3) $\log_9\log_2 8$;

4) $\log_2\sin 135°$;

5) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 315°$;

7) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}$;

8) $\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}(-120°)$.

21.22.° Обчисліть:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;

3) $\log$[illegible] $\operatorname{tg} 225°$;

4) $\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

21.23.° Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\log_7 27-2\log_7 3}{\log_7 45+\log_7 0{,}2}$;

2) $\frac{\log_9 125+3\log_9 2}{\log_9 1{,}2-\log_9 12}$.

21.24.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3\lg 4+\lg 0{,}5}{\lg 9-\lg 18}$;

2) $\frac{\lg 625-8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256-2\lg 5}$.

21.25.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_7\sin\frac{\pi}{5}\cdot\log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;

2) $\log_3\cos^2\frac{\pi}{9}\cdot\log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

21.26.° Спростіть вираз:

1) $\log_{\sqrt{5}} a\cdot\log_a b^3$;

2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5\cdot\log_5 8$.

21.27.° Доведіть рівність:

1) $\log_b a \cdot \log_d c = \log_b c \cdot \log_d a$; 2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

21.28.° Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{2}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4}+36\log_2\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

21.29.° Обчисліть значення виразу $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{3}} 6}+\frac{1}{3}\log_6 27}-12\log_7\sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.

21.30.° Спростіть вираз $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \frac{a}{b}}$.

21.31.° Спростіть вираз $\dfrac{\log_a ab\,(\log_b a-1+\log_a b)}{1+\log_a^3 b}$.

21.32.° Доведіть, що значення виразу $\log_{7+4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})$ є цілим числом.

21.33.° Доведіть, що значення виразу $\log_{9-4\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5})$ є цілим числом.

21.34.° Члени геометричної прогресії є додатними числами. Доведіть, що логарифми послідовних членів цієї прогресії з будь-якою основою утворюють арифметичну прогресію.

21.35.° Побудуйте графік функції:

1) $y=3^{\log_3(x+3)}$; 2) $y=5^{-\log_5 x}$; 3) $y=2^{\log_2 x^2}$; 4) $y=\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{3}} x}$; 5) $y=\log_{\frac{1}{3}}\log_{3-x}(3-x)^4$; 6) $y=2^{\log_4 x^2}$.

21.36.° Побудуйте графік функції:

1) $y=7^{\log_7(x+2)}$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$; 3) $y=\log_3\log_{x+1}(x+1)^{27}$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\cdot\log_{x-2}\frac{1}{3}$; 5) $y=\log_x x$; 6) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$.

21.37.° Доведіть, що $\log_2 3$ — ірраціональне число.

21.38.° Доведіть, що $\log_3 5$ — ірраціональне число.

21.39.°° Наведіть приклад таких ірраціональних чисел a і b, що число a^b — ціле.

21.40.** Наведіть приклад такого раціонального числа a та ірраціонального числа b, що число a^b — ціле.

21.41.** Обчисліть $\frac{1}{\log_2 20!}+\frac{1}{\log_3 20!}+\ldots+\frac{1}{\log_{20} 20!}$.

21.42.** При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $\log_2(1-x^2)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$;

2) $\lg\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lg(x^2-2x+1)-\lg(x^2+1)$;

3) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5(2-x)$;

4) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5|x-2|$?

21.43.** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\lg\sin 1°\cdot\lg\sin 2°\cdot\lg\sin 3°\cdot\ldots\cdot\lg\sin 89°\cdot\lg\sin 90°$;

2) $\lg\operatorname{tg}10°\cdot\lg\operatorname{tg}15°\cdot\lg\operatorname{tg}20°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}75°\cdot\lg\operatorname{tg}80°$;

3) $\lg(\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}32°\cdot\operatorname{tg}34°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}58°\cdot\operatorname{tg}60°)$;

4) $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\lg\operatorname{tg}3°+\ldots+\lg\operatorname{tg}88°+\lg\operatorname{tg}89°$?

21.44.** Спростіть вираз $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$.

21.45.** Обчисліть значення виразу $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32$.

21.46.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\lg\operatorname{tg}x+\lg\operatorname{ctg}x$;

2) $y=\log_x 1$;

3) $y=10^{\frac{1}{\log_x 10}}$.

21.47.** Побудуйте графік функції:

1) $y=x^{\log_x 2x}$;

2) $y=\frac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$.

21.48.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg xy=\lg x+\lg y$;

2) $\lg xy=\lg(-x)+\lg(-y)$;

3) $\lg x^2+\lg y^2=2\lg|x|+2\lg|y|$;

4) $\log_{x^2} y^2=\log_x(-y)$.

21.49.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg\frac{x}{y}=\lg(-x)-\lg(-y)$;

2) $\lg x^2+\lg y^2=2\lg x+2\lg(-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2=\log_x y$.

21.50.•• Нехай $1 < a < b$. Доведіть, що графік функції $y = b^x$ можна отримати з графіка функції $y = a^x$ шляхом стиску до осі ординат.

21.51.•• Виразіть $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ і $\log_b x$.

21.52.•• Доведіть, що $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

21.53.•• Знайдіть $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$.

21.54.•• Знайдіть $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

21.55.•• Знайдіть:
1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;
2) $\log_5 6$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$;
3) $\log_{150} 200$, якщо $\log_{20} 50 = a$, $\log_3 20 = b$.

21.56.•• Знайдіть:
1) $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$;
2) $\log_{60} 27$, якщо $\log_{60} 2 = a$, $\log_{60} 5 = b$;
3) $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_5 14 = b$.

22. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число $\log_a x$. Тим самим задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}).

Це означає, що *областю значень логарифмічної функції є множина* $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;
$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової

функції $y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ (рис. 22.1).

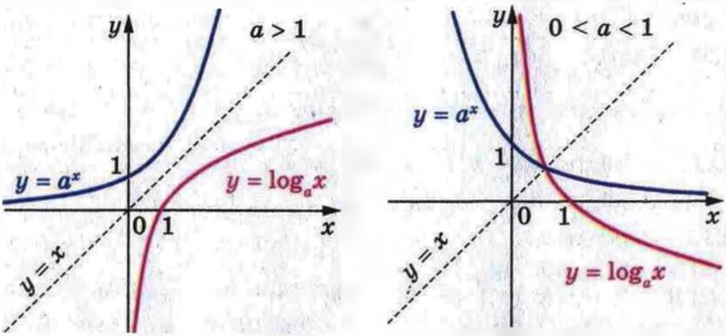


Рис. 22.1

Графік функції $y = a^x$ має з віссю ординат одну спільну точку. Це означає, що графік оберненої функції $y = \log_a x$ має єдину спільну точку з віссю абсцис.

- **Тому *функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$.**

Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція є також зростаючою (спадною). Показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та є спадною при $0 < a < 1$.

- **Тому *функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *та є спадною при* $0 < a < 1$.**
- **Оскільки функція $y = \log_a x$ має єдиний нуль і є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то *функція* $y = \log_a x$ *має два проміжки знакосталості.***
  Якщо **$a > 1$, *то* $y < 0$ *при* $x \in (0; 1)$, $y > 0$ *при* $x \in (1; +\infty)$;**
  якщо **$0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *при* $x \in (1; +\infty)$, $y > 0$ *при* $x \in (0; 1)$.**
- **Оскільки логарифмічна функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.**

Коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною і неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною.

- **Тому *функція* $y = \log_a x$ *є неперервною.***
- ***Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 25.**
- ***Графік функції* $y = \log_a x$ *має вертикальну асимптоту* $x = 0$, *коли* x *прямує до нуля справа.***

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

ПРИКЛАД 1 Порівняйте з одиницею основу a логарифма, коли відомо, що $\log_a 5 < \log_a 4$.

Розв'язання. Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ є зростаючою. Тому $\log_a 5 > \log_a 4$. Але за умовою це не так. Отже, $a < 1$. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_{0,8}(x^2 + 3x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x+2)}$;

3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$. Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати

нулю, тому $\lg(x+2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звернувшись до рисунка 22.2, доходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array} \right.$

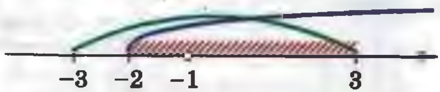


Рис. 22.2

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей:

$$\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases} \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array} \right.$$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ●

ПРИКЛАД 3 Порівняйте:

1) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$;

2) $\log_6 7$ і $\log_7 6$;

3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0;

4) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ і -2.

Розв'язання. 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

2) Маємо: $\log_6 7 > \log_6 6$, тобто $\log_6 7 > 1$. Разом з тим $\log_7 7 > \log_7 6$, тобто $1 > \log_7 6$. Отже, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

3) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

4) Маємо: $-2=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{6}}36$. Оскільки $\log_{\frac{1}{6}}38<\log_{\frac{1}{6}}36$, то $\log_{\frac{1}{6}}38<-2$. ●

ПРИКЛАД 4 Порівняйте $\log_2 3$ і $\log_3 5$.

Розв'язання. Доведемо, що $\log_2 3>\frac{3}{2}$. Оскільки $\frac{3}{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\log_2\sqrt{8}$ і $3>\sqrt{8}$, то $\log_2 3>\frac{3}{2}$. Аналогічно доводимо, що $\log_3 5<\frac{3}{2}$. Отже, $\log_2 3>\log_3 5$. ●

Ви знаєте, що функції можна означати, описуючи їх характеристичні властивості. Наприклад, усі логарифмічні функції $f(x)=\log_a x$ мають таку властивість:

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\text{ де } x>0,\quad y>0,$$

тобто задовольняють такому рівнянню Коші:

$$f(xy)=f(x)+f(y),\text{ де } x>0,\quad y>0.$$

Можна довести (див. задачі 22.37, 22.38), що серед визначених на $(0;+\infty)$ функцій, неперервних і відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x)=\log_a x$. Тому рівняння Коші можна використовувати при означенні логарифмічної функції.

Логарифмічна функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Звернемося до прикладів, які ми наводили в кінці п. 18 (частина 1 цього підручника, с. 197).

Якщо колонія бактерій за рівні проміжки часу збільшує свою масу m в одну й ту саму кількість разів, то за допомогою функції $t=\log_a m$ можна визначити час, коли маса колонії досягне певної величини.

Логарифмічна функція дозволяє визначити час, за який кількість грошей на банківському рахунку збільшиться удвічі, якщо банк кожного дня збільшує суму вкладу на p відсотків. Цей час дорівнює $\log_{\left(1+\frac{p}{100}\right)}2$ (доведіть це самостійно).

Аналогічним чином логарифмічна функція дозволяє визначити період півроспаду радіоактивної речовини.

Вправи

22.1.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

22.2.° Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_\pi 3$?

22.3.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

22.4.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

22.5.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює -1?

22.6.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює -1, а найменше дорівнює -2?

22.7.° Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і -2;
3) $\log_{\sqrt{5}} 26$ і 6;
4) $\log_{16} 0,1$ і $-\frac{3}{4}$.

22.8.° Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1;
2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$;
3) $\frac{2}{3}$ і $\log_{125} 30$.

22.9.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;
2) $y = \log_2 x + 3$;
3) $y = -\log_2 x$;
4) $y = \log_2 (-x)$.

22.10.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;
2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;
3) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

22.11.° Нехай $1<a<b$. Доведіть, що графік функції $y=\log_b x$ можна отримати з графіка функції $y=\log_a x$ шляхом стиску до осі абсцис.

22.12.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x-1$; 3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$.

22.13.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x+\frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

22.14.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

22.15.° Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

22.16.° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

22.17.° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

22.18.° Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$; 2) $\log_{0,2} 0{,}1$ і $\log_{0,1} 0{,}2$.

22.19.° Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ і $\log_{1,8} 1{,}7$; 2) $\log_{0,2} 0{,}3$ і $\log_{0,3} 0{,}2$.

22.20.° Порівняйте $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2.

22.21.° Доведіть, що $\log_{\cos 1} 4 + \log_4 \cos 1 < -2$.

22.22.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg x^2$;

2) $y = \lg (1 - \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$;

4) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;

5) $y = \frac{1}{\log_6 (x-3)} + \sqrt{6-x}$;

6) $y = \frac{4}{\lg (x+2)} + \lg (3-x)$;

7) $y = \sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg (x^2+1)}}$;

8) $y = \log_5 (x^2-4x+3) + \frac{1}{\log_5 (7-x)}$;

9) $y=\lg(6x-x^2)+\dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

10) $y=\log_{x+3}(x^2+x)$;

11) $y=\log_2\cos x$;

12) $y=\log_3 \operatorname{tg} x$.

22.23.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y=\lg(1+\sin x)$;

3) $y=\sqrt{\lg(1+x^2)}$;

4) $y=\sqrt{\lg\sin x}$;

5) $y=\lg(x+8)-\dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

6) $y=\lg(10x-x^2)-\dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

7) $y=\dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

8) $y=\lg(9x-x^2)-\dfrac{1}{\lg(5-x)}$;

9) $y=\log_{2-x}(8+7x-x^2)$;

10) $y=\sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$;

11) $y=\lg\sin x$.

22.24.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\log_3(4+\sin x)$;

2) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-x^2)$.

22.25.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\log_2(5+3\cos x)$;

2) $y=\log_4(4x-x^2)$.

22.26.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$;

3) $y=\dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y=\sqrt{\log_3^2 x}\,\log_x 3$.

22.27.° Побудуйте графік функції:

1) $y=|\log_2 x|$;

2) $y=\log_3|x|$;

3) $y=\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

22.28.** Знайдіть найбільше значення функції:

1) $y=\log_{0,1}(x^2+100)$;

2) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+14)$.

22.29.•• Знайдіть найменше значення функції:

1) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x^2+8}$;

2) $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2-4x+7}$.

22.30.•• Дослідіть на парність функцію $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

22.31.•• Дослідіть на парність функцію $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

22.32.•• При яких значеннях параметра a найменше значення функції $f(x)=9\log_2^2 x-30\log_2 x+61-9a^2$ на відрізку $[1;4]$ є додатним числом?

22.33.•• При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x)=-4\log_3^2 x+20\log_3 x-9a^2$ на відрізку $[3;27]$ є від'ємним числом?

22.34.•• Знайдіть першу цифру після коми в десятковому записі числа $\lg 2$.

22.35.•• Порівняйте числа $\log_2 3$ і $\log_3 7$.

22.36.•• Відомо, що $\lg 3=0{,}4771\ldots$. Скільки цифр містить десятковий запис числа 3^{1000}?

22.37.* Про визначену на $(0;+\infty)$ функцію f відомо, що $f(2)=1$ і для всіх $x>0$, $y>0$ виконується рівність $f(xy)=f(x)+f(y)$. Знайдіть 1) $f(1)$; 2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; 3) $f(4)$; 4) $f(1024)$; 5) $f\left(\sqrt[8]{2}\right)$.

22.38.* Про визначену на $(0;+\infty)$ і неперервну функцію f відомо, що $f(2)=1$ і для всіх $x>0$, $y>0$ виконується рівність $f(xy)=f(x)+f(y)$. Доведіть, що $f(x)=\log_2 x$.

22.39.* Для всіх $n\in\mathbb{N}$ обчисліть суму

$$S=[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\ldots+[\log_2 2^n].$$

22.40.* Для всіх $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, доведіть, що

$$\left[\sqrt{n}\right]+\left[\sqrt[3]{n}\right]+\left[\sqrt[4]{n}\right]+\ldots+\left[\sqrt[n]{n}\right]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+[\log_4 n]+\ldots+[\log_n n].$$

23. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають найпростішим логарифмічним рівнянням.

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 23.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b. Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

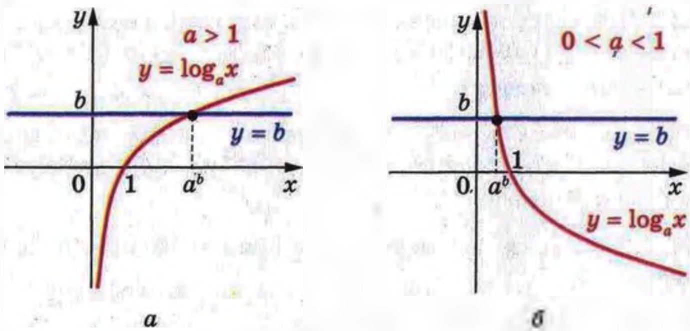


Рис. 23.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\log_3 (3x - 1) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма можна записати $3x - 1 = 3^2$. Звідси $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Відповідь: $\frac{10}{3}$.

Розв'язане рівняння є окремим випадком рівняння виду $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Міркуючи, як у прикладі 1, можна показати, що це рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = a^b$.

При розв'язуванні багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 23.1. ***Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.***

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою або спадною, то для доведення цієї теореми можна скористатися ідеєю доведення теореми 19.1. Переконайтеся в цьому самостійно.

Наслідок. ***Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$, розв'язати легше.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 19.1, доведіть наслідок з теореми 23.1 самостійно.

Тепер розв'язання рівняння прикладу 1 можна оформити і так:

$$\log_3(3x - 1) = 2\log_3 3;$$
$$\log_3(3x - 1) = \log_3 3^2;$$
$$3x - 1 = 3^2;\ \ x = \frac{10}{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\lg(x^2 - 4x + 2) = \lg(2x - 3)$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Звідси $x = 5$.

Відповідь: 5.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Розв'язання. Природно перетворити це рівняння так:

$$\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

Звідси $(2x - 1)(x - 2) = 3^3$; $2x^2 - 5x - 25 = 0$; $x = 5$ або $x = -\frac{5}{2}$.

Легко переконатися, що число $-\frac{5}{2}$ не є коренем даного рівняння (не входить до його області визначення), а число 5 є коренем даного рівняння.

Таким чином, дане рівняння розв'язане методом наслідків.

Відповідь: 5.

Звернемо увагу, що зроблений під час розв'язування прикладу 3 перехід від рівняння $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ до рівняння $\log_3((2x-1)(x-2))=3$ не був рівносильним і призвів до появи стороннього кореня.

Справді, область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases}2x-1>0,\\x-2>0,\end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $(2;\ +\infty)$. Замінивши вираз $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)$ на вираз $\log_3((2x-1)(x-2))$, ми розширили область визначення початкового рівняння, оскільки область визначення виразу $\log_3((2x-1)(x-2))$ задається нерівністю $(2x-1)(x-2)>0$, множиною розв'язків якої є $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $(2;\ +\infty)$ до множини $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$ і стало причиною появи стороннього кореня $-\frac{5}{2}$.

Насправді рівняння $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ рівносильне системі

$$\begin{cases}\log_3((2x-1)(x-2))=3,\\2x-1>0,\\x-2>0.\end{cases}$$

Тому рівняння прикладу 3 можна було розв'язати методом рівносильних переходів.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.

Розв'язання. Перейдемо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2}+\frac{\log_2 64}{\log_2 2x}=3.$$

Оскільки з умови випливає, що $x>0$, то $\log_2 x^2=2\log_2 x$. Далі маємо:

$$\frac{4}{2\log_2 x}+\frac{6}{\log_2 2+\log_2 x}=3.$$

Нехай $\log_2 x=t$, тоді отримаємо $\frac{2}{t}+\frac{6}{1+t}=3$.

Звідси $t=2$ або $t=-\frac{1}{3}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = 2,\\ \log_2 x = -\dfrac{1}{3};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 2^2,\\ x = 2^{-\frac{1}{3}}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{\lg x+2}{3}} = 10^{2+\lg x}$.

Розв'язання. Оскільки на області визначення рівняння, тобто на множині $(0; +\infty)$, обидві його частини набувають додатних значень, то можемо записати рівняння, рівносильне даному:

$$\lg x^{\frac{\lg x+2}{3}} = \lg 10^{2+\lg x}.$$

Далі маємо: $\dfrac{\lg x+2}{3}\cdot \lg x = 2+\lg x$.

Нехай $\lg x = t$. Тоді $\dfrac{(t+2)\,t}{3} = 2+t$. Звідси $\left[\begin{array}{l}t=-2,\\ t=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lg x=-2,\\ \lg x=3;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=10^{-2},\\ x=10^{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0{,}01,\\ x=1000.\end{array}\right.$

Відповідь: 0,01; 1000.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$2\log_3 (x-2) + \log_3 (x-4)^2 = 0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що перехід від рівняння (1) до рівняння

$$2\log_3 (x-2) + 2\log_3 (x-4) = 0 \qquad (2)$$

може призвести до втрати розв'язків.

Справді, областю визначення початкового рівняння є множина $(2; 4) \cup (4; +\infty)$, а область визначення рівняння (2) — це множина $(4; +\infty)$. Отже, такий перехід вилучає з області визначення початкового рівняння множину $(2; 4)$, яка може містити корені рівняння (1).

Насправді рівняння (1) рівносильне такому рівнянню:

$$2\log_3 (x-2) + 2\log_3 |x-4| = 0.$$

Звідси $\log_3 (x-2) + \log_3 |x-4| = 0$.

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3 (x-2)+\log_3 (4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3 (x-2)+\log_3 (x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далі маємо: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 3; $3+\sqrt{2}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

Розв'язання. З ключової задачі 21.27 випливає, що $5^{\lg x}=x^{\lg 5}$. Тоді можна записати:

$$2\cdot 5^{\lg x}=50;\ 5^{\lg x}=25;$$
$$\lg x=2;\ x=100.$$

Відповідь: 100.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\log_3(x-2)=0$.

Розв'язання. Помилковим є вважати, що рівняння виду $f(x)\cdot g(x)=0$ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{array}\right.$ При такому переході існує небезпека отримати у відповіді сторонні корені. Наприклад, немає гарантії, що всі корені рівняння $f(x)=0$ належать області визначення функції g.

Насправді рівняння $f(x)\cdot g(x)=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\ g(x)=0,\end{array}\right.\\ x\in D(f),\\ x\in D(g).\end{cases}$$

Скориставшись цим, запишемо систему, рівносильну рівнянню $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\log_3(x-2)=0$:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 (x-2)=0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x>2, \\ \sin x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

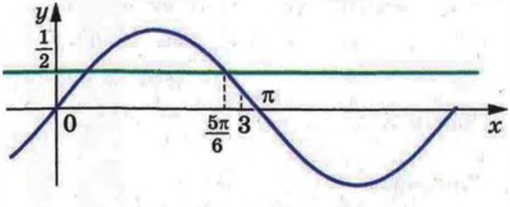


Рис. 23.2

Єдиним коренем першого рівняння сукупності є число 3. Оскільки $\sin 3 < \sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ (рис. 23.2), то $x = 3$ не є коренем початкового рівняння.

Усі числа виду $(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, є коренями другого рівняння сукупності. Серед них слід вибрати лише ті, які задовольняють умову $x > 2$. Для цього достатньо вимагати, щоб $n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: $(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{N}$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0$.

Розв'язання. Розглянемо це рівняння як квадратне відносно $\log_3 x$. Тоді отримаємо: $\left[\begin{array}{l}\log_3 x=-4, \\ \log_3 x=\dfrac{4}{x+1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{81}, \\ \log_3 x=\dfrac{4}{x+1}.\end{array}\right.$

Очевидно, що $x = 3$ — корінь другого рівняння сукупності. Оскільки функція $y=\log_3 x$ є зростаючою, а функція $y=\dfrac{4}{x+1}$ є спадною на множині $(0;+\infty)$, то рівняння, що розглядається, більше коренів не має.

Відповідь: $\dfrac{1}{81}$; 3.

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння

$$(1-4x^2+4x)\log_3(\sin^2\pi x+2)=2.$$

Розв'язання. Маємо: $(2-(2x-1)^2)\log_3(\sin^2\pi x+2)=2$.

Очевидно, що $2-(2x-1)^2\leqslant 2$, $0<\log_3(\sin^2\pi x+2)\leqslant 1$. Тому $(2-(2x-1)^2)\log_3(\sin^2\pi x+2)\leqslant 2$.

У цій нерівності рівність досягається лише за умови

$$\begin{cases} 2-(2x-1)^2=2, \\ \log_3(\sin^2\pi x+2)=1. \end{cases}$$

Звідси $x=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Вправи

23.1.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\log_5(3x-5)=\log_5(x-3)$;
2) $\lg(x^2+2)=\lg(3x+6)$.

23.2.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\log_9(4x-6)=\log_9(x-2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}}(x+7)=\log_{\frac{1}{4}}(x^2+5)$.

23.3.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\frac{1}{x}=6$;
2) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$;
3) $\log_7\log_4(x-2)=0$;
4) $\log_4\log_3\log_2 x=\frac{1}{2}$.

23.4.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\log_3\frac{1}{x}+\log_3\sqrt[3]{x}=\frac{4}{3}$;
2) $\log_5 x-\log_{25}x+\log_{625}x=\frac{3}{4}$;
3) $\lg\lg\lg x=0$.

23.5.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\log_2(3^{5x-3}+1)=2$;
2) $\log_3(3^{x-1}+6)=x$;
3) $\log_2(2^x+7)=3-x$;
4) $\log_6(6^{-x}-5)=x+1$.

23.6.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\log_6(6^{x+1}-30)=x$;
2) $\log_5(6-5^x)=1-x$.

23.7.° **Розв'яжіть рівняння:**

1) $\lg(x^2-2x)=\lg(2x+12)$;
2) $\log_{0,5}(x^2+3x-10)=\log_{0,5}(x-2)$;
3) $2\log_7(-x)=\log_7(x+2)$;
4) $2\log_8(1-x)=\log_8(2,5x+1)$.

23.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;

2) $\lg (x^2 + 2x - 3) = \lg (2x^2 - 2)$;

3) $\log_{0,7} (2x^2 - 9x + 4) = 2 \log_{0,7} (x + 2)$;

4) $2\log_2 (-x) - \log_2 (3x + 8) = 1$.

23.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_5 (25^x - 2 \cdot 5^x) = 2 \log_{25} 15$;

2) $\log_{\sqrt{5}} (16^x - 6) = 2 + \log_{\sqrt{5}} (4^x - 2)$;

3) $x \lg 3 - 1 = 2 \lg 3 - \lg (3^x + 1)$.

23.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 (2^{2x} + 2^x) = 2 \log_9 12$;

2) $x - \lg 5 = x \lg 5 + 2 \lg 2 - \lg (1 + 2^x)$.

23.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{0,5} (4 - x) + \log_{0,5} (x - 1) = -1$;

2) $\lg (x - 2) + \lg (x - 3) = 1 - \lg 5$;

3) $\lg \sqrt{5x - 4} + \lg \sqrt{x + 1} = 2 + \lg 0{,}18$;

4) $\lg (x - 1) + \lg (x - 3) = \lg (1{,}5x - 3)$;

5) $\log_2 (5 - x) - \log_2 (x - 1) = 1 - \log_2 (x + 2)$;

6) $2 \log_5 (x + 1) - \log_5 (x + 9) = \log_5 (3x - 17)$.

23.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 (5 - x) + \log_3 (3 - x) = 1$;

2) $\log_{0,6} (x + 2) + \log_{0,6} (6 - x) = \log_{0,6} (x + 8)$;

3) $\log_2 (2x - 1) - \log_2 (x + 2) = 2 - \log_2 (x + 1)$;

4) $2 \lg (x + 1) - \lg (4x - 5) = \lg (x - 5)$.

23.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 (5^x + 2) + \log_3 (5^x - 1) = 2 + \log_3 2$;

2) $\log_2 (2^x + 3) + \log_2 (5 - 2^x) = 4$.

23.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\sqrt{3}} (2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}} (2^x - 1) = 2$;

2) $\lg (3^x - 4) + \lg (3^x - 2) = 1$.

23.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

2) $\lg^2 x - 2 \lg x^2 + 3 = 0$;

3) $\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5$;

4) $2 \log_{\frac{1}{6}} x + 3 \sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x} - 5 = 0$.

23.16.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3\log_8^2(-x)-2\log_8(-x)-1=0$;
2) $2\log_7\sqrt{x}=\log_7^2 x-6$;
3) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$;
4) $\dfrac{\lg x}{\lg x+2}-\dfrac{2}{\lg x-1}=1$.

23.17.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x-7)}=1$;
2) $\dfrac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)}=0$;
3) $\log_x(2x^2-7x+12)=2$;
4) $\log_{x+1}(x+3)=2$;
5) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16)=2$.

23.18.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)}=1$;
2) $\dfrac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)}=0$;
3) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$;
4) $\log_x(x+6)=2$;
5) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3)=2$.

23.19.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(x-5)^2-2\log_2(x+2)=2$;
2) $\dfrac{1}{2}\lg x^2+\lg(x+7)=1$.

23.20.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{4}\log_2 x^4+\log_2(x+10)=3+\log_2 3$;
2) $\dfrac{1}{2}\log_6 x^2+\log_6(5-x)=1$.

23.21.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x^3+4\log_3 x-5=0$;
2) $\lg(10x^2)\cdot\lg x=1$;
3) $\log_4 x^2\cdot\log_4\dfrac{16}{x}=2$;
4) $\log_2(4x)\cdot\log_2(0{,}25x)=5$;
5) $\lg^2(100x)+2\lg x=20$;
6) $\log_5^2(5x)+\log_5\dfrac{x}{25}=3$;
7) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^2-1)=0$;
8) $2\lg(\lg x)=\lg(2\lg x+8)$.

23.22.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3\lg^2 x^2-\lg x-1=0$;
2) $\log_3 x^2\cdot\log_3\dfrac{x}{27}+4=0$;
3) $\log_7(7x)\cdot\log_7\dfrac{x}{7}=\log_7 x^2-1$;
4) $\lg^2(10x)+\lg(10x)=6+3\lg x$;

5) $\log_6^2 (36x) + \log_6 \frac{x^2}{216} = 8;$

6) $\log_5 (\log_2 x) + \log_5 (\log_2 x^3 - 14) = 1.$

23.23.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_5 x} = 5;$

2) $x^{\lg x + 2} = 1000;$

3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9};$

4) $x^{\log_6 x} = 216x^2.$

23.24.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_3 x} = 81;$

2) $x^{\lg x} = 100x;$

3) $x^{\log_2 x - 2} = 256;$

4) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x} = 10^{6 + \lg x}.$

23.25.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5;$

2) $3 \log_x 16 - 4 \log_{16} x = 2 \log_2 x;$

3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2;$

4) $3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2;$

5) $2 \log_{4x} x^3 = 5 \log_{2x} x;$

6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0.$

23.26.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x (9x^2) \log_3^2 x = 4;$

2) $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2;$

3) $\frac{2 - 4 \log_{12} 2}{\log_{12} (x+2)} - 1 = \frac{\log_6 (8 - x)}{\log_6 (x+2)};$

4) $\log_{x+1} (x^3 - 9x + 8) \log_{x-1} (x+1) = 3.$

23.27.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10;$

2) $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1;$

3) $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 = 0.$

23.28.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{6-y} + 27 = 0, \\ \lg (2y - 3x) = \lg (4 - 4x + y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \frac{1}{2} y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

23.29.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x - 2y) = \lg(5 + x - 3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x + y)3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x + y) = x - y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y). \end{cases}$

23.30.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 162$;

2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18$.

23.31.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200$;

2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

23.32.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7(x + 8) = -x$;

2) $\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x = 6 - 2x$;

3) $\log_5 \operatorname{tg}^2 x = \cos 2x$;

4) $x^4 = \log_x 4$.

23.33.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 5) = x - 9$;

2) $\log_3^2 x + (x - 1)\log_3 x = 12 - 3x$;

3) $\log_2 \cos^2 x = \sin^8 x$;

4) $2x^6 = \log_x 3$.

23.34.** Розв'яжіть рівняння

$$\lg^2(x + 1) = \lg(x + 1)\lg(x - 1) + 2\lg^2(x - 1).$$

23.35.** Розв'яжіть рівняння

$$2\lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1) \cdot \lg(2x + 1).$$

23.36.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$;

2) $\lg\sqrt{1 + x} + 3\lg\sqrt{1 - x} - 2 = \lg\sqrt{1 - x^2}$.

23.37.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x\log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x + 1) = \dfrac{x - 4}{x}$;

2) $\log_{1+x+\sin x}(x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x}(3x + 2)$.

23.38.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3 - x) = 0$.

23.39.** Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x + 1) - 3)\sqrt{x - a} = 0$ залежно від значення параметра a?

23.40.•• Скільки розв'язків має рівняння $\left(\log_3(x-2)-2\right)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

23.41.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x-a)\log_2(3x-7)=0$$

має єдиний розв'язок?

23.42.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x+a)\log_3(2x-5)=0$$

має єдиний розв'язок?

23.43.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x \cos(2\pi x)=0$;

2) $\log_9 \sin 2x=\log_3\sqrt{\frac{\sin x}{5}}$;

3) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2$.

23.44.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$;

2) $\log_{\sin 3x}(\cos x-\cos 2x)=1$;

3) $\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\sin 3x+\sin x)=\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}\sin 2x$.

23.45.•• Розв'яжіть рівняння $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)=1$.

23.46.•• Розв'яжіть рівняння $\log_2(5+3\cos 4x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

23.47.•• Розв'яжіть рівняння $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)=1$.

23.48.•• Розв'яжіть рівняння $-\log_5\left(2-|x-b|\right)=\log_{0,2}(5-x)$ при всіх значеннях параметра b.

23.49.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\log_{x^2-1}(x+a)=1$ не має розв'язків?

23.50.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=\log_3\frac{y}{x},\\ 2^{x+2}+8^x=5\cdot 4^y.\end{cases}$

23.51.•• Розв'яжіть рівняння $\log_2\frac{x}{\sqrt{4x-3}}=\sqrt{4x-3}-x$.

23.52.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2-x+3)=2\log_{2ax+4}(x^2+2x+1)$$

має єдиний розв'язок?

23.53.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2-3x+2)=2\log_{ax-6}(x^2+2x-4)$$

має єдиний розв'язок?

23.54.** Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння $(a-1)\log_3^2(x-2)-2(a+1)\log_3(x-2)+a-3=0$ має корені і всі корені менші від 3.

23.55.* Знайдіть усі значення x, які при будь-якому a задовольняють рівняння $\log_{x+a^2+1}(a^2x+2)=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$.

23.56.* Знайдіть усі значення x, які при будь-якому a задовольняють рівняння $\log_2\left(a^2x^3-5a^2x^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{2+a^2}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$.

23.57.* Василь Заплутайко розв'язує рівняння $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x$ так:

1) оскільки при $x=\frac{1}{2}$ виконуються рівності $\left(\frac{1}{16}\right)^x=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$ і $\log_{\frac{1}{16}}x=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{2}=\log_{2^{-4}}2^{-1}=\frac{1}{4}$, то число $x=\frac{1}{2}$ — корінь даного рівняння;

2) побудувавши графіки функцій $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ і $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ (рис. 23.3),

Василь каже, що рівняння не має інших коренів, окрім $x=\frac{1}{2}$.

Чи правий Василь у своєму висновку?

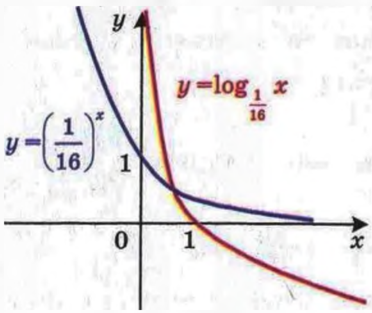


Рис. 23.3

24. Логарифмічні нерівності

При розв'язуванні багатьох логарифмічних нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 24.1. ***При $a > 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $0 < x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ є спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 19.1, доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\log_{\sqrt{2}-1}(3x-4) < \log_{\sqrt{2}-1}(x-2)$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{2^{-1}} (x-1) - 5 > 0.$$

Розв'язання. Оскільки областю визначення даної нерівності є проміжок $(1; +\infty)$, то виконується рівність

$$\log_2 (x-1)^2 = 2\log_2 (x-1).$$

Тоді дану нерівність можна переписати так:

$$4\log_2^2 (x-1) + \log_2 (x-1) - 5 > 0.$$

Нехай $\log_2(x-1)=t$. Отримуємо $4t^2+t-5>0$.

Звідси $\left[\begin{array}{l} t<-\dfrac{5}{4}, \\ t>1. \end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1)<-\dfrac{5}{4}, \\ \log_2(x-1)>1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1)<\log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2(x-1)>\log_2 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0<x-1<2^{-\frac{5}{4}}, \\ x-1>2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 1<x<1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x>3. \end{array}\right.$

Відповідь: $\left(1;1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}\right)\cup(3;+\infty)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\log_x 3-\dfrac{5}{2}-\log_{\frac{1}{3}} x>0$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1}{\log_3 x}-\dfrac{5}{2}+\log_3 x>0$.

Нехай $\log_3 x=t$. Тоді $\dfrac{1}{t}-\dfrac{5}{2}+t>0$. Звідси

$$\frac{2t^2-5t+2}{2t}>0; \quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t}>0.$$

Скориставшись методом інтервалів (рис. 24.1), отримуємо:

$\left[\begin{array}{l} 0<t<\dfrac{1}{2}, \\ t>2. \end{array}\right.$

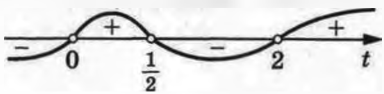


Рис. 24.1

Далі,

$\left[\begin{array}{l} 0<\log_3 x<\dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x>2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1<x<\sqrt{3}, \\ x>9. \end{array}\right.$

Відповідь: $(1;\sqrt{3})\cup(9;+\infty)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$\log_x \frac{3x-1}{x^2+1}>\log_x 1.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \dfrac{3x-1}{x^2+1}, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < 3x-1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\dfrac{1}{3} < x < 1.$

2) $\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases}$ $1 < x < 2.$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\log_3 (x + 7) < 4 - x$.

Розв'язання. Маємо: $\log_3 (x + 7) + x - 4 < 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = \log_3 (x + 7) + x - 4$. Вона зростає на $D(f) = (-7; +\infty)$. Зауважимо, що $f(2) = 0$. Отже, при $x > 2$ отримуємо, що $f(x) > f(2) = 0$, а при $-7 < x < 2$ отримуємо, що $f(x) < f(2) = 0$.

Відповідь: $(-7; 2)$.

Вправи

24.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{3}{7}} (x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
2) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
3) $\log_{\frac{2}{9}} (x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
4) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$.

24.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
2) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;
3) $\log_{\frac{8}{11}} (2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;
4) $\log_{0,9} (2x + 1) > \log_{0,9} 5$.

24.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x > 2$;
2) $\log_5 x \leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;
5) $\log_2 (5x + 1) > 4$;
6) $\log_{0,6} (x - 2) < 2$;
7) $\log_3 (2x - 1) \leqslant 3$;
8) $\log_{0,5} (2x + 1) \geqslant -2$.

24.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;
2) $\log_4 x > 2$;
3) $\lg x < 5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 3) \geqslant -2$;
6) $\log_9 (5x + 6) \leqslant 2$.

24.5.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg (2x + 3) > \lg (x - 1)$;
2) $\log_5 2x < \log_5 (x + 1)$;
3) $\log_{0,2} (2x - 1) > \log_{0,2} (3x - 4)$;
4) $\log_{0,4} (x^2 - 3) < \log_{0,4} (x + 3)$;
5) $\log_{0,7} (x^2 - 2x - 3) \leqslant \log_{0,7} (9 - x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + x + 31) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} (10x + 11)$.

24.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 (2x - 3) < \log_2 (x + 1)$;
2) $\log_{0,6} (3 - 2x) > \log_{0,6} (5x - 2)$;
3) $\lg (x^2 - 2) \geqslant \lg (4x + 3)$;
4) $\log_{0,1} (10 - 2x) \geqslant \log_{0,1} (x^2 - x - 2)$.

24.7.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8 (x^2 - 4x + 3) \leqslant 1$;
2) $\log_{0,5} (x^2 + x) > -1$;
3) $\log_{0,7} (x^2 + 10x + 25) > 0$;
4) $\log_2 (x^2 - 3x) \leqslant 2$;
5) $\log_2 \frac{4x - 5}{4x + 7} > 0$;
6) $\lg \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2} > 0$;
7) $\log_3 \frac{2x + 5}{x + 1} \leqslant 1$;
8) $\log_4 \frac{3x - 1}{x} \leqslant 0,5$.

24.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 5x + 7) > 0$;
2) $\log_9 (x^2 - 6x + 8) \leqslant 0,5$;
3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x) \geqslant -2$;
4) $\log_{0,3} (x^2 - 2x + 1) \geqslant 0$;
5) $\log_4 \frac{3x - 1}{x - 1} \leqslant 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{3x + 1} > 1$.

24.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,3} (x^2 + x - 12) \geqslant \log_{0,3} (6x - 6)$;
2) $\lg (x^2 - x) \leqslant \lg (3x - 3)$;
3) $\log_{0,8} (1 - x^2) > \log_{0,8} (x^2 + 5x - 2)$;
4) $2 \log_2 (2x + 7) \geqslant 5 + \log_2 (x + 2)$;
5) $\log_3 (x^2 + 2x - 3) \leqslant \log_3 (x + 9)$;
6) $\log_{\frac{1}{7}} (2x^2 + 3x + 1) \geqslant 2 \log_{\frac{1}{7}} (1 - x)$.

24.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;
2) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant\log_{0,1}(x+1)$;
3) $2\log_2(x+5)\leqslant 3+\log_2(11+x)$;
4) $\lg(2x^2-9x+4)\leqslant 2\lg(x+2)$.

24.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x+\lg(x-3)>1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x<-1$;
3) $\log_2 x+\log_2(x+4)<5$;
4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2)\geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;
6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2\log_3 2+1$.

24.12.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;
4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$.

24.13.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_{0,7}x+\log_{0,7}(x-1)\leqslant\log_{0,7}(8-x)$;
2) $\log_6(x-3)-\log_6(x-5)\leqslant 1-\log_6(x-4)$.

24.14.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg(2x-1)+\lg(2x-3)\geqslant\lg(3x-3)$;
2) $\log_{\frac{2}{3}}(x-1)+\log_{\frac{2}{3}}(x-5)\leqslant\log_{\frac{2}{3}}(11-x)$.

24.15.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,2}^2 x\leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x\geqslant 4$;
3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;
4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}}x-8\leqslant 0$;
5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;
6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}}x+2\geqslant 0$.

24.16.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}^2 x\geqslant 9$;
2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x-\log_4 x-1<0$;
4) $\log_{0,2}^2 x-\log_{0,2}x-2\leqslant 0$.

24.17.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_2^2(4x)+2\log_2 x-11<0$;
2) $\log_3^2(27x)+3\log_3 x-19\geqslant 0$;
3) $\dfrac{\lg^2 x+\lg x-6}{\lg x}\geqslant 0$;
4) $2\log_5 x-\log_x 5\leqslant 1$.

24.18.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7^2(7x)-\log_7 x\geqslant 3$;
2) $\log_6^2\dfrac{x}{216}+8\log_6 x-12\leqslant 0$;
3) $\dfrac{\log_3^2 x-6\log_3 x+8}{\log_3 x-1}\geqslant 0$;
4) $\log_{0,5} x-2\log_x 0{,}5\leqslant 1$.

24.19.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{1,6}\log_{0,5}(x^2-x-6)\geqslant 0$;
2) $\log_{0,5}\log_4(2x^2+x-1)<1$;
3) $\log_{\frac{1}{9}}\log_3\dfrac{x}{x-1}\geqslant 0$;
4) $\log_{1,5}\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leqslant 0$.

24.20.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{7}{4}}\log_5(x^2-2x-3)\leqslant 0$;
2) $\log_{0,8}\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}>0$.

24.21.°° Розв'яжіть нерівність $x^{\log_3 x+2}\geqslant 27$.

24.22.°° Розв'яжіть нерівність $x^{\log_5 x+3}\leqslant 625$.

24.23.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3(x+8)\geqslant 3-x$;
2) $x^{\sqrt{x}}\leqslant 16$.

24.24.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3(4-x)<x$;
2) $x^{\sqrt{x+1}}\geqslant 25$.

24.25.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{2x-3} x>1$;
2) $\log_{x-2}(2x-9)<0$;
3) $\log_{x+1}(5-x)>1$;
4) $\log_{x-2}(2x-7)<1$;
5) $\log_x(x+2)\leqslant 2$;
6) $\log_x(2x^2-3x)\leqslant 1$;
7) $\log_{x-3}(x^2-4x)^2\leqslant 4$.

24.26.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{3x-2} x<1$;
2) $\log_x(x^2-7x+13)>0$;
3) $\log_{x-1}(4-x)<1$;
4) $\log_x(6-x)\geqslant 2$;
5) $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2\geqslant 4$.

24.27.°° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2\cdot 5^x-1}>5^x-2$;
2) $\sqrt{\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}}<1$.

24.28." Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{20 \cdot 3^x - 11} > 3^x - 4$; 2) $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x+1}{3-x}} < 1$.

24.29." Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2 + 7x - 10}\,\log_2(x-3) \leqslant 0$;

2) $\sqrt{4 - x^2}\left(\log_3 \dfrac{x+1}{x} + 2\right) \leqslant 0$;

3) $(x^2 - 2{,}8x + 1{,}8)\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} |x-2|} \geqslant 0$.

24.30." Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5}\,\log_3(x-2) \leqslant 0$;

2) $\dfrac{\log^2_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0$.

24.31." Побудуйте графік нерівності $\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x \geqslant 1$.

24.32." Побудуйте графік нерівності $\log_x (x^2 + y^2) \leqslant 1$.

24.33." Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(2^x - a)\sqrt{x-3} \geqslant 0$.

24.34." Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(3^x - a)\sqrt{x-2} \leqslant 0$.

24.35." Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \log_x (2\sin x + 1) \leqslant 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

24.36." Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \log_x (2\cos x + 1) \leqslant 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

24.37." Розв'яжіть нерівність $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

24.38." Розв'яжіть нерівність $(3^{x+2} + 3^{-x})^{3\lg x - \lg(2x^2+3x)} < 1$.

24.39." Розв'яжіть нерівність $\log_x (10x + 3) \cdot \log_{10x} (3x + 10) \geqslant 0$.

24.40." Розв'яжіть нерівність $\log_{2-x}(2 + x) \cdot \log_{x+3}(3 - x) \leqslant 0$.

24.41." Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\sqrt{x+2} + 1\right)\log_3(x^2 + 4x + 13) \geqslant 2$;

2) $\log_2\left(\sqrt{x-2} + 4\right) \cdot \log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 6$.

24.42." Розв'яжіть нерівність $\log_3\left(\sqrt{x-1} + 3\right) \cdot \log_5(x^2 + x + 3) \geqslant 1$.

24.43.* Числа a, b, c такі, що $1<a<b<c$. Доведіть, що
$$\log_a b+\log_b c+\log_c a<\log_b a+\log_c b+\log_a c.$$

24.44.* Числа a, b, c такі, що $1<a<b<c$. Доведіть, що
$$\log_a \log_a b+\log_b \log_b c+\log_c \log_c a>0.$$

25. Похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій

Чи існує функція, похідна якої дорівнює самій функції? Відповісти на це запитання нескладно. Наприклад, функція, яка є нульовою константою, має цю властивість.

А чи можна вказати таку визначену на $\mathbb{R}$ функцію f, відмінну від нульової константи, що $f'(x)=f(x)$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}$? Відповідь на це запитання не є очевидною.

З оповідання «Число e» (див. «Алгебра-10») ви могли ознайомитися з фундаментальною константою — числом $e=2{,}718...$, що відіграє особливу роль не тільки в математиці, а й у фізиці, хімії, біології, економіці тощо.

Цю сталу було введено як спільну границю двох послідовностей із загальними членами $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ і $y_n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$, $n>1$. Зокрема, було доведено, що для всіх $n>1$ виконуються нерівності
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Ці нерівності можна переписати так:
$$\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{n-1},\quad 1<\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}}.$$

Якщо покласти $\frac{1}{n}=x$, то отримаємо таке:
$$1<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{1-x}.$$

Виявляється, що останні нерівності мають місце не лише для чисел x виду $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, а й для всіх чисел x таких, що $0<x<1$ (цей факт ви зможете довести, навчаючись у вищому навчальному закладі).

Тепер можна записати

$$1=\lim_{x\to 0+} 1 \leqslant \lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}\leqslant \lim_{x\to 0+}\frac{1}{1-x}=1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1.$

Разом з тим

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x}-1}{-x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}\cdot e^{-x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}\cdot \lim_{x\to 0+} e^{-x}.$$

Оскільки функція $y=e^{-x}$ неперервна, то $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-x}=1$. Тому

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Таким чином, виконується рівність

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Ця рівність виражає одну з багатьох чудових властивостей числа e. Зокрема, вона означає, що при малих значеннях x має місце наближена рівність $e^x\approx 1+x$.

Теорема 25.1. ***Функція $f(x)=e^x$ є диференційовною, і її похідну можна обчислити за формулою $(e^x)'=e^x$.***

Доведення. Маємо $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$

$=e^{x_0}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}.$ ▲

Тепер можна записати:

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

Отже, знайдено відповідь на запитання, поставлене на початку пункту. Функція $f(x)=e^x$ задовольняє рівність $f'(x)=f(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Функцію $f(x)=e^x$ називають **експонентою.**

Виведемо формулу для знаходження похідної показникової функції $f(x)=a^x$.

Маємо: $a=e^{\log_e a}$. Тоді $a^x=e^{x\log_e a}$.

Користуючись правилом обчислення похідної складеної функції, запишемо: $(a^x)'=(e^{x\log_e a})'=e^{x\log_e a}\cdot(x\log_e a)'=a^x\log_e a$.

Логарифм з основою e називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln a$, тобто $\log_e a=\ln a$.

Тоді при $a > 0$, $a \neq 1$ можна записати:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Розглянемо логарифмічну функцію $f(x) = \log_a x$. Обернена до неї функція $g(x) = a^x$ є диференційовною на $\mathbb{R}$, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Це означає, що до графіка функції g в кожній точці можна провести негоризонтальну дотичну. Тому і до графіка функції f у кожній точці можна провести невертикальну дотичну (рис. 25.1). Отже, логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною.

Знайдемо формулу для обчислення похідної логарифмічної функції.

Для будь-якого $x > 0$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Знайдемо похідну лівої і правої частин останньої рівності.

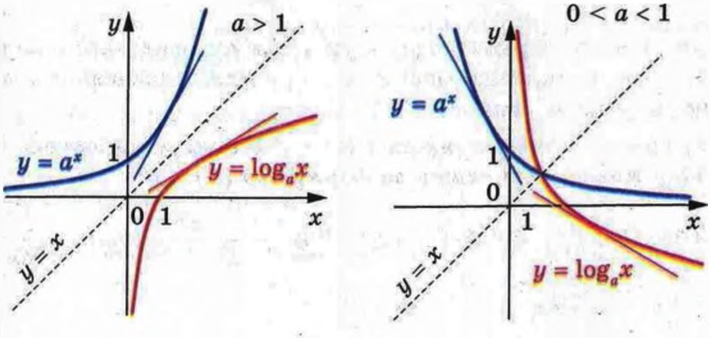


Рис. 25.1

Маємо

$$\left(a^{\log_a x}\right)' = (x)';$$

$$a^{\log_a x} \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1;$$

$$x \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1.$$

Звідси

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

При $a = e$ отримуємо:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Перейдемо до розгляду похідної степеневої функції $f(x)=x^{\alpha}$, $D(f)=(0;+\infty)$. У пункті 9 ви дізналися, що $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ для всіх раціональних значень α. Цю формулу можна узагальнити для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 25.2. ***Функція $f(x)=x^{\alpha}$, $D(f)=(0;+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, є диференційовною, і її похідну можна обчислити за формулою $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.***

Доведення. Подамо функцію $f(x)=x^{\alpha}$ у вигляді складеної функції $f(x)=e^{\alpha\ln x}$. Оскільки функції $y=e^{x}$ і $y=\alpha\ln x$ є диференційовними, то функція f також є диференційовною.

Обчислимо похідну функції f. Маємо:

$$(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}. \ ▲$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції:

1) $y=e^{x}(x^2-4x)$;
2) $y=x^3\cdot 3^x$;
3) $y=e^{-7x}$;
4) $y=\dfrac{x^4}{\ln x}$;
5) $y=\log_6^2 x$;
6) $y=\log_2(3x-4)$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи теорему про похідну добутку двох функцій, отримуємо:

$$y'=(e^x)'\cdot(x^2-4x)+(x^2-4x)'\cdot e^x=$$
$$=e^x(x^2-4x)+(2x-4)e^x=e^x(x^2-2x-4).$$

2) Маємо: $y'=(x^3)'\cdot 3^x+(3^x)'\cdot x^3=3x^2\cdot 3^x+3^x\ln 3\cdot x^3=$
$=3^x x^2(3+x\ln 3)$.

3) Використовуючи теорему про похідну складеної функції, запишемо: $y'=(e^{-7x})'=e^{-7x}\cdot(-7x)'=-7e^{-7x}$.

4) Маємо:

$$y'=\frac{(x^4)'\cdot\ln x-(\ln x)'\cdot x^4}{\ln^2 x}=\frac{4x^3\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot x^4}{\ln^2 x}=\frac{4x^3\ln x-x^3}{\ln^2 x}=\frac{x^3(4\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

5) Застосувавши теорему про похідну складеної функції, отримуємо:

$$y'=\left(\log_6^2 x\right)'=2\log_6 x\cdot(\log_6 x)'=\frac{2\log_6 x}{x\ln 6}.$$

6) Маємо:

$$y'=(\log_2(3x-4))'=\frac{1}{(3x-4)\ln 2}\cdot(3x-4)'=\frac{3}{(3x-4)\ln 2}. \ ●$$

ПРИКЛАД 2 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x} + x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 4x - 9$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт прямої $y = 4x - 9$ дорівнює 4, то кутовий коефіцієнт шуканої дотичної $k = 4$. Знайдемо абсцису x_0 точки дотику. Маємо:

$f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Оскільки $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4$; $3e^{3x_0} = 3$; $e^{3x_0} = 1$; $x_0 = 0$. Звідси $f(x_0) = 1$.

Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 4x + 1$.

Відповідь: $y = 4x + 1$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$; 2) $f(x) = x \ln x$; 3) $f(x) = \lg^3 x - 3 \lg x + 2$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = (e^{6x - x^2 + 5})' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6x - x^2 + 5)' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6 - 2x).$$

Дослідивши знак похідної функції f (рис. 25.2), отримуємо, що функція f зростає на проміжку $(-\infty; 3]$, спадає на проміжку $[3; +\infty)$, $x_{max} = 3$.

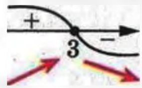


Рис. 25.2

2) Маємо:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Дослідимо знак f' на $D(f) = (0; +\infty)$.

Маємо: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Звідси $x > \frac{1}{e}$. Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Отримуємо, що функція f зростає на проміжку $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{min} = \frac{1}{e}$ (рис. 25.3).

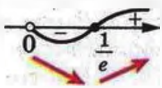


Рис. 25.3

3) Маємо:

$$f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \frac{3\lg^2 x}{x \ln 10} - \frac{3}{x \ln 10} =$$

$$= \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x \ln 10} = \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x \ln 10}.$$

Тоді $f'(x) = 0$ при $\lg x = -1$ або $\lg x = 1$. Отже, дана функція f має дві критичні точки: $x = \frac{1}{10}$ і $x = 10$. Дослідивши знак похідної функції f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 25.4), доходимо висновку, що функція f зростає на кожному з проміжків $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і $[10; +\infty)$, спадає на проміжку $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{max} = \frac{1}{10}$, $x_{min} = 10$. ●

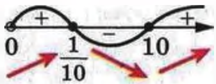


Рис. 25.4

ЗАДАЧА Доведіть, що:

1) показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз;

2) при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору, а при $0 < a < 1$ — опуклою вниз;

3) при $\alpha \geqslant 1$ і при $\alpha \leqslant 0$ степенева функція $y = x^\alpha$ є опуклою вниз на проміжку $(0; +\infty)$, а при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ — опуклою вгору на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$.

Оскільки $y'' \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз.

2) Запишемо:

$$y' = \frac{1}{x \ln a}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Якщо $a > 1$, то $\ln a > 0$. Тому $y'' \leqslant 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$. Отже, при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору.

При $0 < a < 1$ аналогічно доводимо, що $y'' \geqslant 0$ і логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вниз.

3) Запишемо: $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}$. Оскільки $x^{\alpha - 2} > 0$ при всіх $x \in (0; +\infty)$, то $y'' \geqslant 0$ при $\alpha(\alpha - 1) \geqslant 0$. Отже, при $\alpha \geqslant 1$ або при $\alpha \leqslant 0$ функція $y = x^\alpha$ є опуклою вниз на проміжку $(0; +\infty)$.

При $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ аналогічно доводимо, що $y'' \leqslant 0$ і функція $y = x^\alpha$ є опуклою вгору на проміжку $(0; +\infty)$. ●

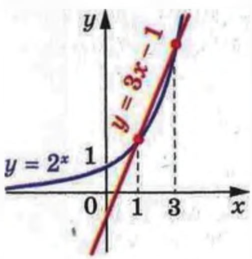


Рис. 25.5

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$2^x = 3x - 1.$$

Розв'язання. Легко побачити, що числа $x = 1$ і $x = 3$ є коренями даного рівняння.

Дане рівняння інших коренів не має (рис. 25.5). Справді, пряма $y = 3x - 1$ перетинає графік опуклої вниз функції $y=2^x$ не більше ніж у двох точках (див. ключову задачу 16.30).

Аналогічний висновок про кількість коренів рівняння $2^x-(3x-1)=0$ можна було отримати, скориставшись ключовою задачею пункту 12. Справді, функція $f(x)=2^x-(3x-1)$ не може мати більше двох нулів, оскільки її похідна $f'(x)==2^x\ln 2-3$ має лише один нуль.

Відповідь: 1; 3.

ПРИКЛАД 5 Доведіть нерівність (нерівність Коші[1])

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\text{ де } x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0.$$

Розв'язання. Якщо одне з чисел x_1, x_2, ..., x_n дорівнює нулю, то нерівність, яка доводиться, є очевидною.

Звернемося до випадку, коли $x_1>0$, $x_2>0$, ..., $x_n>0$. Розглянемо функцію $f(x)=\ln x$. Згідно з ключовою задачею цього пункту функція $f(x)=\ln x$ є опуклою вгору. Отже, для неї виконується нерівність Єнсена:

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n}{n}.$$

Звідси $\ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}\ln(x_1x_2\ldots x_n)$;

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\geqslant\ln(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}};$$

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$ ●

У цьому пункті ви дізналися, що експонента $f(x)=e^x$ задовольняє рівняння

$$f'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Це рівняння можна використати для означення експоненти. Доведемо, що $f(x)=e^x$ — єдина функція, яка задовольняє дві умови:

1) $f'(x)=f(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$;

2) $f(0)=1$.

[1] Розв'язання цього прикладу спирається на матеріал розповіді «Нерівність Єнсена» (частина 1 цього підручника, с. 178). З іншим способом доведення цієї нерівності ви ознайомилися в 9 класі (див. «Алгебра-9», с. 228).

Справді, якщо розглянути допоміжну функцію $g(x)=e^{-x}f(x)$, то

$$g'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))=0$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Отже, $g(x)=C$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, де C — деяка стала. Таким чином, доведено, що $f(x)=g(x)e^x=Ce^x$. Оскільки функція f задовольняє умову $f(0)=1$, то $C=1$.

Вправи

25.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y=x^{\sqrt{5}}$; 4) $y=e^x\sin x$; 7) $y=5^x$; 10) $y=x^e\cdot 3^x$;

2) $y=e^{5x}$; 5) $y=\dfrac{e^x}{x-2}$; 8) $y=2^{x^2}$; 11) $y=\dfrac{2^x-3}{2^x+1}$;

3) $y=x^{\sqrt{3}}e^x$; 6) $y=e^x+e^{-x}$; 9) $y=7^{2x-3}$; 12) $y=0{,}3^{\operatorname{tg}x}$.

25.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y=x^{\pi}$; 4) $y=\dfrac{x+1}{e^x}$; 7) $y=10^{-x}$;

2) $y=x^6e^x$; 5) $y=6^x$; 8) $y=\dfrac{5^x+2}{5^x-1}$;

3) $y=e^x\cos x$; 6) $y=(2x+1)^{\sqrt{10}}$; 9) $y=0{,}7^{\operatorname{ctg}x}$.

25.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y=\log_9 x$; 4) $y=\ln^2 x$; 7) $y=\log_{0,2}(2x^2+x-4)$;

2) $y=\ln 2x$; 5) $y=\ln\sin x$; 8) $y=\ln\left(x^{\sqrt{5}}-1\right)$;

3) $y=\lg(3^x-1)$; 6) $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$; 9) $y=x^5\ln x$.

25.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y=\lg x$; 3) $y=\ln^3 x$; 5) $y=\dfrac{x^5}{\ln x}$;

2) $y=\ln(5^x+7^x)$; 4) $y=\lg\cos x$; 6) $y=\log_2\left(x^{\sqrt{2}}+x\right)$.

25.5.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x)=e^{2x+1}$, $x_0=-1$; 3) $f(x)=\left(4x^{\sqrt{3}}-3\right)^{\sqrt{12}}$, $x_0=1$.

2) $f(x)=x-\ln x$, $x_0=3$;

25.6.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \log_5 (x + 2)$, $x_0 = -1$.

25.7.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$;
5) $f(x) = \ln (5 + 4x)$, $x_0 = -1$;
6) $f(x) = \log_3 (2x + 1)$, $x_0 = 1$.

25.8.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = 3^{2x-3}$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = 4x - \ln 4$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \ln (3x - 5)$, $x_0 = 2$.

25.9.° Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$;
2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

25.10.° Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

25.11.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^{5x+2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 5x + 7$;
2) $f(x) = \ln (3x - 2)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x - 2$.

25.12.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x - e^{-x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x - 3$;
2) $f(x) = 6x - \ln x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$;
3) $f(x) = \ln (1 - x)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 1 - x$.

25.13.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;
7) $f(x) = e^{4x-x^2+1}$;
8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$;
9) $f(x) = \dfrac{4x}{e^x}$;
10) $f(x) = x^3 \ln x$;
11) $f(x) = \ln x - x$;
12) $f(x) = x^2 \lg x$;
13) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$;
14) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
15) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;
17) $f(x) = 2\ln^3 x - 3\ln^2 x$;
18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

25.14.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=xe^{\frac{x}{2}}$;
2) $f(x)=e^{x^4-2x^2}$;
3) $f(x)=5^{-x^3+3x+1}$;
4) $f(x)=(4x-1)e^{2x}$;
5) $f(x)=x^3\cdot 3^{-x}$;
6) $f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$;
7) $f(x)=0{,}5x^2-\ln x$;
8) $f(x)=x\ln^2 x$;
9) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;
10) $f(x)=\ln x^2+\dfrac{2}{x}$;
11) $f(x)=\ln^3 x-12\ln x$;
12) $f(x)=\lg^4 x-2\lg^2 x$.

25.15.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
1) $f(x)=e^x+x$ на проміжку $[-1; 1]$;
2) $f(x)=x^2e^{2x}$ на проміжку $[-2; 1]$;
3) $f(x)=7^{x^2-2x}$ на проміжку $[0; 2]$;
4) $f(x)=2^x+2^{-x}$ на проміжку $[-1; 1]$.

25.16.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
1) $f(x)=(x-1)e^{-x}$ на проміжку $[1; 3]$;
2) $f(x)=5^{x^2+2x}$ на проміжку $[-2; 1]$.

25.17.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y=e^x-e^{-x}$;
2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;
3) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

25.18.•• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y=e^x+e^{-x}$;
2) $y=\dfrac{x}{e^x}$;
3) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

25.19.•• Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $f(x)=xe^x$;
2) $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$;
3) $f(x)=e^{-x^2}$;
4) $f(x)=x^2-2\ln x$;
5) $f(x)=\ln(9-x^2)$.

25.20.•• Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$;
2) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
3) $f(x)=\log_2(x^2+x)$.

25.21.•• Доведіть нерівності $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

25.22.•• Доведіть, що при $x>0$ виконуються нерівності

$$\frac{x-1}{x}\leqslant\ln x\leqslant x-1.$$

25.23.** Доведіть нерівність $e^x - 1 \geqslant x$.

25.24.** Для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

25.25.** Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

25.26.** Для всіх $\alpha \geqslant 1$ і $x > -1$ доведіть нерівність Бернуллі $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.

25.27.** Для всіх $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ і $x > -1$ доведіть нерівність Бернуллі $(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x$.

25.28.** Скільки коренів має рівняння $e^x = x + a$ залежно від значення параметра a?

25.29.** Скільки коренів має рівняння $\ln x = ax$ залежно від значення параметра a?

25.30.** При яких значеннях параметра a функція $y = 4\ln x - ax - 7$ є зростаючою?

25.31.** При яких значеннях параметра a функція $y = 2 - 3e^x - ax$ є спадною?

25.32.** При яких значеннях a і b рівність $e^{ax+b} = ae^x + b$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$?

25.33.** При яких значеннях параметра m функція

$$f(x) = 2e^x - me^{-x} + (1 + 2m)x - 3$$

є зростаючою?

25.34.** При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 1 - 2e^x + (1 - a)e^{-x} - e^{2x} + (a - 1)x$$

є спадною?

25.35.** Знайдіть похідну функції $f(x) = x^x$, $D(f) = (0; +\infty)$.

25.36.** Знайдіть додатні корені рівняння $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

25.37.** Знайдіть похідну функції $f(x) = x^{x^2}$ $D(f) = (0; +\infty)$.

25.38.** Доведіть нерівність $y \ln \frac{x}{y} \leqslant x - y \leqslant x \ln \frac{x}{y}$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

25.39.** Доведіть нерівність $e^x - e^y \leqslant e^x (x - y)$, якщо $x \geqslant y$.

25.40.** Розв'яжіть рівняння $3^x = 4x + 1$.

25.41.** Розв'яжіть рівняння $4^{x-1} = 3x - 2$.

25.42.** Розв'яжіть рівняння $3^x + 11^x = 2 \cdot 7^x$.

25.43.** Розв'яжіть рівняння $5^x + 2 \cdot 11^x = 3 \cdot 9^x$.

25.44.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} = 1$; 2) $3^x - 2x^2 = 1$.

25.45.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x+1} - 3^x = 1$; 2) $2^x = x^2 - x + 2$.

25.46.** При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x (x - a - 2) - ax^2 + 2ax + 1$$

має два екстремуми?

25.47.** При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = e^{2x} + e^x (x - 3 - 4a) - ax^2 + 4ax - 5$$

має один екстремум?

25.48.* Розв'яжіть рівняння $(x - y)^2 + (y - e^{x+1})^2 = 2$.

25.49.* Доведіть нерівність $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

25.50.* Доведіть нерівність $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n+1} < \ln\sqrt{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

25.51.* Порівняйте: 1) e^π і π^e; 2) $6^{\sqrt{7}}$ і $7^{\sqrt{6}}$.

25.52.* Порівняйте значення виразів $\ln^2 100$ і $\ln 99 \cdot \ln 101$.

25.53.* Розв'яжіть рівняння $e^x - 1 = \ln(x + 1)$.

25.54.* Функція f диференційовна на $[0; 1]$, $f(0) = 0$ і $f(1) > 0$. Доведіть існування такого $x \in (0; 1)$, що $f(x) < f'(x)$.

25.55.* Функції f і g диференційовні на $[0; 1]$, $f(0) = f(1) = 0$. Доведіть, що рівняння $f'(x) = f(x)g'(x)$ має принаймні один розв'язок.

Моя любов — Україна і математика

Цей патріотичний вислів видатного українського математика, академіка Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

Михайло Кравчук народився в с. Човниці на Волині. Закінчивши із золотою медаллю Луцьку гімназію і потім математичне відділення Київського університету, Михайло Кравчук залишився працювати в Києві.

Висока наукова продуктивність і працездатність, оригінальність і гнучкість мислення М. П. Кравчука дозволили йому отримати важливі наукові результати в алгебрі та теорії чисел, теорії функцій і математичному аналізі, диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії ймовірностей та статистиці тощо. Відомо, що його науковий доробок був використаний американськими вченими при створенні першого комп'ютера.

М. П. Кравчук брав активну участь у створенні української наукової термінології, одним з перших почав писати наукові праці українською мовою, хоча вільно володів російською, французькою, німецькою, італійською, польською та іншими мовами.

Великого значення надавав М. П. Кравчук роботі з молоддю, зокрема, за його ініціативою в 1935 році була проведена перша Київська математична олімпіада для школярів. Спробуйте свої сили у розв'язанні задач цієї олімпіади.

Завдання
першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

1. Обчисліть значення виразу $\frac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$ при $a=-\frac{1}{2}$, $b=0{,}19$, $c=0{,}18$, $d=0{,}04$.
2. Розв'яжіть рівняння $4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20{,}75}=\sqrt{2}$.
3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=4, \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280. \end{cases}$
4. Додатні числа u_1, u_2, ..., u_n утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що
$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}.$$
5. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Доведіть, що
$$\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a.$$
6. При яких значеннях a, b, c многочлен x^4+ax^2+bx+c націло ділиться на $(x-1)^3$?

§ 4. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

26 Первісна

Ви вмієте за заданою функцією знаходити її похідну, знаєте, що похідна має різноманітні застосування. Зокрема, уміючи диференціювати, за заданим законом $y = s\ (t)$ руху матеріальної точки по координатній прямій можна знайти закон $y = v\ (t)$ зміни її швидкості, а саме:

$$v\ (t) = s'\ (t).$$

Нерідко в механіці доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити закон руху за відомим законом зміни швидкості.

Наприклад, з курсу фізики вам відомий такий факт: коли швидкість змінюється за законом $v\ (t) = gt$ і $s\ (0) = 0$, то закон руху задається формулою $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням**.

Означення. Функцію F називають **первісною функцією** (або коротко **первісною**) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність

$$F'\ (x) = f\ (x).$$

Наприклад, функція $F\ (x) = x^2$ є первісною функції $f\ (x) = 2x$ на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок I не наводять. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функція $F\ (x) = \cos x$ є первісною функції $f\ (x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Розглянемо ще один приклад. Функція $F(x)=\sqrt{x}$ є первісною функції $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Проте на проміжку $[0; +\infty)$ функція $F(x)=\sqrt{x}$ не є первісною функції $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, оскільки в точці $x_0 = 0$ не виконується рівність $F'(x_0)=f(x_0)$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y=x^2-\sqrt{2}$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Тому обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y=x^2-\sqrt{2}$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

Теорема 26.1 (основна властивість первісної). ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Доведення. Оскільки функція F — первісна функції f на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Нехай C — довільне число. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + C$ є первісною функції f на проміжку I.

Нехай функція G — одна з первісних функції f на проміжку I. Тоді $G'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Маємо:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Згідно з ознакою сталості функції (теорема 13.1) отримуємо, що функція $y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I, тобто $G(x) - F(x) = C$, де C — деяке число.

Звідси $G(x) = F(x) + C$. ▲

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 26.1).

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції f на проміжку I.

Якщо хочуть підкреслити, що запис $F(x) + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних саме функції f, то пишуть

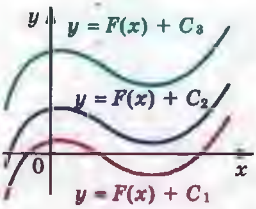


Рис. 26.1

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

де C — довільне число.

Запис $\int f(x)\,dx$ називають **невизначеним інтегралом** функції f (читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$. З теореми 26.1 випливає, що запис $x^3 + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції $f(x) = 3x^2$. Тому

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$.

Розв'язання. Оскільки $\left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$. Тоді згідно з теоремою 26.1 запис $\dfrac{x^6}{6} + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних. ●

З розв'язання прикладу 1 випливає, що

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C, \text{ де } C \text{ — довільне число.}$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. На проміжку $(0; +\infty)$ має місце рівність $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; на проміжку $(-\infty; 0)$ мають місце рівності

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

Отже, функція $y = \ln x$ є первісною функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$, а функція $y = \ln(-x)$ є первісною функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.

Оскільки $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (0; +\infty), \\ \ln(-x), & \text{якщо } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ то на будь-якому проміжку, який не містить точку 0, запис

$$\ln|x| + C, \text{ де } C \text{ — довільне число,}$$

є загальним виглядом первісних функції $f(x)=\frac{1}{x}$. ●

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = 2\cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Розв'язання. Оскільки $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функція $y = 2\sin x$ є однією з первісних функції $f(x) = 2\cos x$. Отже, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + C$, де C — деяке число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3$. Тоді $2\sin\frac{5\pi}{6}+C=3$. Звідси $C = 2$.

Таким чином, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + 2$. ●

Первісні функцій, що використовуються найчастіше, наведено в таблиці.

Функція f	Первісна функції f
k (стала)	kx
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$

Функція f	Первісна [redacted] f
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
e^x	e^x
$a^x,\ a>0,\ a\neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

Звернемо увагу, що в таблиці вказано первісні функцій f на таких проміжках I, що $I \subset D(f)$.

Правильність заповнення цієї таблиці перевірте самостійно за допомогою операції диференціювання.

Зауваження. Функція $F(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq -1$, є первісною функції $f(x)=x^{\alpha}$ на проміжку $(0;+\infty)$. Користуючись цим, можна знайти, наприклад, первісну функції $f(x)=\sqrt[n]{x}$ на проміжку $(0;+\infty)$. Оскільки $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, то функція $F(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ є первісною функції f на проміжку $(0;+\infty)$. Ураховуючи рівності

$$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}}=\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}},$$

можна записати: $F(x)=\dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

Вправи

26.1.° Установіть, чи є функція F первісною функції f:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;

2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$;

3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;

4) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$;

5) $F(x)=\sqrt{2x+1}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на проміжку $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;

6) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

26.2.° Доведіть, що функція F є первісною функції f на проміжку I:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $f(x)=-\dfrac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;

3) $F(x)=5-3\sqrt{x}$, $f(x)=-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;

4) $F(x)=3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+6$, $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{3}}$, $I=\left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

26.3.° Чи є функція $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(0; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-6; 0)$?

26.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 5$;

2) $f(x) = x$;

3) $f(x) = x^6$;

4) $f(x) = 2^x$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^7}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;

6) $f(x)=\sqrt{x}$ на проміжку $[1; +\infty)$;

7) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ на проміжку $(-\infty; -3)$;

8) $f(x) = x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

26.5.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 0$;

2) $f(x) = x^8$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^{20}}$ на проміжку $(0; +\infty)$;

5) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ на проміжку $(4; +\infty)$;

6) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на проміжку $[0,5; +\infty)$.

26.6.° Перевірте, що:

1) $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C$;

2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \sqrt{x^2+4} + C$,

де C — довільне число.

26.7.° Перевірте, що функція $F(x) = \frac{x-2}{3x-1}$ є первісною функції $f(x) = \frac{5}{(3x-1)^2}$ на кожному з проміжків $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, та запишіть загальний вигляд первісних функції f на кожному з указаних проміжків.

26.8.° Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$;

2) $f(x) = \sin x$, $F(\pi; -1)$;

3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$.

26.9.° Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;

2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;

3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

26.10.° Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

26.11.° Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $I=(0;\ +\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-2$;

4) $f(x)=2^x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(5)=1$.

26.12.° Укажіть на рисунку 26.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)=\cos 3$.

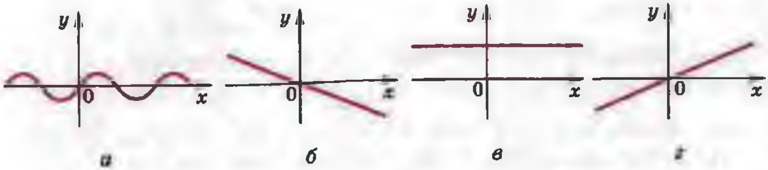


Рис. 26.2

26.13.° Укажіть на рисунку 26.3 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)=\ln 2$.

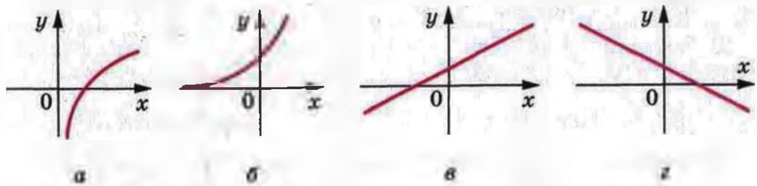


Рис. 26.3

26.14.° Для функції $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}$ знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

26.15.° Доведіть, що функції $F_1(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ і $F_2(x)=-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ є первісними функції $f(x)=\cos 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_1(x)=F_2(x)+C$?

26.16.° Доведіть, що функції $F_1(x)=\sin^2 x$ і $F_2(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ є первісними функції $f(x)=\sin 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_2(x)=F_1(x)+C$?

26.17.°° Знайдіть загальний вигляд первісних функції

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо } x<0,\\ \sin x, & \text{якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$$

26.18.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$$

26.19.** Знайдіть $\int x^3 \sin x^4\, dx$.

26.20.** Знайдіть $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$.

26.21.** Визначена на $\mathbb{R}$ і непарна функція має первісну. Доведіть, що ця первісна є парною функцією.

26.22.** Визначена на $\mathbb{R}$ і парна функція f має первісну. Доведіть, що серед первісних функції f є непарна функція.

26.23.** Визначена на $\mathbb{R}$ і періодична з періодом T функція f має первісну. Василь Заплутайко міркує так:

1) нехай F — одна з первісних функції f; тоді $\int f(x)\,dx=F(x)+C_1$, де C_1 — довільне число;
2) оскільки $(F(x+T))'=f(x+T)\cdot(x+T)'=f(x+T)$, то функція $y=F(x+T)$ — одна з первісних функції $y=f(x+T)$; звідси $\int f(x+T)\,dx=F(x+T)+C_2$, де C_2 — довільне число;
3) оскільки $f(x)=f(x+T)$, то $\int f(x)\,dx=\int f(x+T)\,dx$; звідси $F(x)+C_1=F(x+T)+C_2$, де C_1, C_2 — довільні числа; тому у випадку $C_1=C_2$ виконується рівність $F(x)=F(x+T)$;
4) оскільки рівність $F(x)=F(x+T)$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$, то F — періодична функція.

Чи погоджуєтеся ви з міркуваннями Василя?

27. Правила знаходження первісної

При знаходженні похідних функцій ви користувалися не лише формулами, записаними в таблиці (див. форзац 1), але й правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо три правила знаходження первісних (три правила інтегрування).

Теорема 27.1. *Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y=F(x)+G(x)$ є первісною функції $y=f(x)+g(x)$.*

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх x з проміжку I маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacktriangle$$

З теореми 27.1 випливає, що

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C,$$

де C — довільне число.

Теорема 27.2. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Доведіть теорему 27.2 самостійно.

З теореми 27.2 випливає, що

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x) + C,$$

де C — довільне число.

Теорема 27.3. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$.***

Доведення. Використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, запишемо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b). \blacktriangle$$

З теореми 27.3 випливає, що

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

де C — довільне число.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то функція $y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, тобто функція $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, є первісною для функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Оскільки $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, то функція $y=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}$, тобто функція $y=-\frac{1}{x}$, є первісною функції $y=\frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$. Тоді за теоремою 27.2 функція $y=-\frac{2}{x}$ є первісною функції $y=\frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Скориставшись теоремою 27.1, отримуємо, що функція $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}$ є первісною заданої в умові функції f на проміжку $(0;\ +\infty)$. Тоді запис $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції f на проміжку $(0;\ +\infty)$. ●

Розв'язання прикладу 1 можна записати й так:

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{2}{x^2}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+2\int x^{-2}\,dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C,$$

де C — довільне число.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть одну з первісних функції:

1) $y=\cos(2x+1)$; 2) $y=\frac{1}{(5x-3)^3}$ на проміжку $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $F(x)=\sin x$ є первісною функції $f(x)=\cos x$, то за теоремою 27.3 функція $y=\frac{1}{k}F(kx+b)$, тобто функція $y=\frac{1}{2}\sin(2x+1)$, є первісною функції $y=\cos(2x+1)$.

2) Оскільки $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, то на будь-якому проміжку, який не містить точку 0, первісною функції $f(x)=\frac{1}{x^3}$ є функція $F(x)=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}$, тобто $F(x)=-\frac{1}{2x^2}$. Тоді на проміжку $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$ первісна функції $y=\frac{1}{(5x-3)^3}$ має вигляд $y=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, тобто $y=-\frac{1}{10(5x-3)^2}$.

●

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x)=\frac{1}{4x-3}$ знайдіть первісну на проміжку $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 27.3 запис $\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції f на заданому проміжку.

На проміжку $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$ шукана первісна має вигляд $F(x)=$ $=\frac{1}{4}\ln(3-4x)+C$, де C — деяке число. З умови випливає, що $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Тоді $\frac{1}{4}\ln\left(3-4\cdot\frac{1}{2}\right)+C=2$, звідси C = 2.

Отже, $F(x)=\frac{1}{4}\ln(3-4x)+2$. ●

ПРИКЛАД 4 Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t)=\frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Знайдіть закон руху $y = s(t)$, якщо $s(0) = 3$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах).

Розв'язання. Функція $y = s(t)$ є первісною функції $y = v(t)$ на проміжку $[0; +\infty)$. Тоді можна записати $s(t)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2t+1}+C$, тобто $s(t)=3\sqrt{2t+1}+C$, де C — деяке число. Знайдемо C з умови $s(0) = 3$. Маємо: $3\sqrt{2\cdot0+1}+C=3$, звідси $C = 0$.

Тоді шуканий закон руху задається формулою $s(t)=3\sqrt{2t+1}$. ●

У пункті 10 ви дізналися, як знайти похідні добутку функцій, частки функцій та похідну складеної функції. Можливо, після ознайомлення з матеріалом цього пункту у вас виникло запитання, як знайти первісні функцій $y=f(x)g(x)$, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ або $y=f(g(x))$, якщо відомі первісні функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$. На жаль, загальних правил знаходження первісних таких функцій не існує.

Також зауважимо, що не кожна функція f, визначена на проміжку I, має первісну на цьому проміжку. Можна показати, що, наприклад, функція $y = \operatorname{sgn} x$ не має первісної (див. вправу 27.26). Продовжуючи навчання у вищому навчальному закладі, ви зможете довести, що *кожна неперервна на проміжку функція має первісну на цьому проміжку*.

Вправи

27.1.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5\sin x + \cos x$;
4) $f(x) = x^3(2 - x^2)$;
5) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
6) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
7) $f(x) = \frac{9}{\sin^2 x} + \frac{x^4}{4}$ на проміжку $(0; \pi)$;
8) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на проміжку $(0; +\infty)$;
9) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
10) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^3}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

27.2.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;
5) $f(x) = \frac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
6) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
8) $f(x) = \frac{9}{x^{10}} + \frac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.

27.3.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = \sin 5x$;

2) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$;

3) $f(x) = \left(6x + \frac{1}{2}\right)^3$;

4) $f(x) = \left(\frac{x}{7} - 2\right)^4$;

5) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$;

6) $f(x) = 7^{3x}$;

7) $f(x) = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$;

8) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x) = \frac{8}{\sin^2 4x}$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на проміжку $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

11) $f(x) = \sqrt{x+4}$ на проміжку $[-4; +\infty)$;

12) $f(x) = \frac{6}{3x+2}$ на проміжку $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

13) $f(x) = \frac{4}{(4x-3)^2}$ на проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$;

14) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ на проміжку $(-\infty; 2]$.

27.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = \sin\frac{x}{4}$;

2) $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

3) $f(x) = e^{5-\frac{x}{2}}$;

4) $f(x) = \frac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x) = (2x-3)^5$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x)=\dfrac{3}{(3x-1)^3}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ на проміжку $(-\infty;\ 3)$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{5}}$ на проміжку $(0;\ 5\pi)$;

10) $f(x)=\sqrt[4]{4x+7}$ на проміжку $\left(-\dfrac{7}{4};+\infty\right)$.

27.5.° Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, яка задовольняє дану умову:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(3) = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(1) = 4$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(\pi) = 7$;

4) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$;

5) $f(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$, $I = (0;\ +\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$;

6) $f(x)=\dfrac{7}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$, $I = (4;\ +\infty)$, $F(5) = 6$;

7) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{6x+1}}$, $I=\left(-\dfrac{1}{6};+\infty\right)$, $F(4) = 7$;

8) $f(x) = e^{3x}$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(0) = 1$;

9) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(1) = 0$;

10) $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2\left(6x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $I=\left(-\dfrac{\pi}{18};\dfrac{\pi}{9}\right)$, $F(x)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

27.6.° Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x) = 3 - 6x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $A(-1;\ 0)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $B(1;\ 5)$;

3) $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0;\ +\infty)$, $C(4;\ 10)$;

4) $f(x) = 2\sin 3x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $D\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$;

5) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{2}-2}}$, $I = (4; +\infty)$, $E(6; 12)$;

6) $f(x) = e^{2x+1}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$;

7) $f(x) = \frac{1}{4x-3e^2}$, $I = \left(\frac{3e^2}{4}; +\infty\right)$, $K(e^2; 6)$;

8) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{8}}$, $I = (0; 8\pi)$, $N(2\pi; -3)$.

27.7.° Для функції $f(x) = 4x^3 + 4x$ знайдіть первісну F, один з нулів якої дорівнює -1. Знайдіть решту нулів цієї первісної.

27.8.° Для функції $f(x) = x^2 - 12$ знайдіть первісну F, один з нулів якої дорівнює 3.

27.9.° Функції F_1 і F_2 є первісними функції f на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Графік функції F_1 проходить через точку A, а функції F_2 — через точку B. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище, якщо:

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, $A(1; 2)$, $B(0; 5)$;

2) $f(x) = (2x-1)^2$, $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$?

27.10.° Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на проміжку $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$. Графік функції F_1 проходить через точку $M(1; 9)$, а функції F_2 — через точку $N(10; 8)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище?

27.11.° Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат.

27.12.° Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка визначається в будь-який момент часу t за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюється в метрах за секунду).

27.13.* Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(-\infty; +\infty)$, графік якої проходить через точку A $(-1; 6)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $6x^2 - 5x^4$.

27.14.* Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(0; +\infty)$, графік якої проходить через точку B $(4; -5)$, а кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $\frac{3}{\sqrt{x}}+1$.

27.15.** Знайдіть:

1) $\int \sin^2 x\,dx$; 2) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$; 3) $\int \sin\frac{7x}{3}\sin\frac{5x}{3}\,dx$.

27.16.** Знайдіть:

1) $\int \cos^2 2x\,dx$; 2) $\int \cos x \cos 8x\,dx$.

27.17.** Знайдіть на проміжку $(1; +\infty)$ загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$; 2) $f(x)=\frac{x^3+x+1}{x-1}$.

27.18.** Знайдіть на проміжку $(-\infty; -3)$ загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x}$; 2) $f(x)=\frac{x^3+2x^2+6}{3+x}$.

27.19.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y=\mathrm{tg}^2\,x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

27.20.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y=\mathrm{ctg}^2\,x$ на проміжку $(0; \pi)$.

27.21.** Для функції $f(x) = 2x^2 + 3x$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = 5x - 2$ є дотичною до її графіка.

27.22.** Для функції $f(x) = x^2 - 4$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = -3$ є дотичною до її графіка.

27.23.** Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайдіть таку первісну, що її графік має тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

27.24.** Для функції $f(x) = x + 1$ знайдіть таку первісну, що її графік має тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

27.25." Василь Заплутайко шукає первісну функції $y = \cos x^2$ так:

1) робить заміну $x^2 = t$ і отримує функцію $y = \cos t$;
2) далі шукає первісну функції $y = \cos t$ і отримує $y = \sin t$;
3) потім замість t підставляє значення $t = x^2$ і робить висновок, що кожна первісна має вигляд $y = \sin x^2 + C$, де C — деяке число.

У чому полягає помилка Василя?

27.26.* Чи має функція $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ первісну?

27.27.* Чи може функція, яка розривна в деякій точці, мати первісну на проміжку $(-\infty; +\infty)$?

28. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

Розглянемо функцію f, яка є неперервною на відрізку $[a; b]$ і набуває на цьому проміжку невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 28.1 наведено приклади криволінійних трапецій.

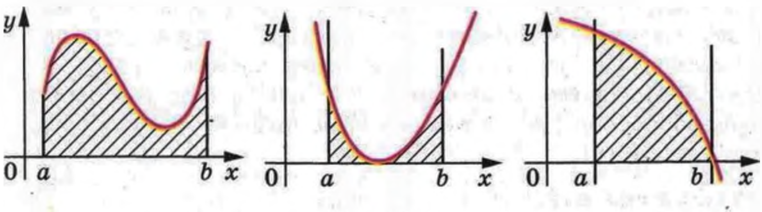


Рис. 28.1

У курсі геометрії ви познайомилися з поняттям площі многокутника. Строге означення площі криволінійної трапеції виходить за межі шкільного курсу. Надалі будемо користуватися властивостями площі криволінійної трапеції, звертаючись до інтуїтивного уявлення про площу фігури.

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

Теорема 28.1. ***Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою***

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на відрізку [a; b].

Доведення. Розглянемо функцію $y = S(x)$, де $x \in [a; b]$, яку визначено таким правилом.

Якщо $x = a$, то $S(a) = 0$; якщо $x \in (a; b]$, то $S(x)$ — це площа криволінійної трапеції, показаної штриховкою на рисунку 28.2.

Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$.

Нехай x_0 — довільна точка відрізка $[a; b]$ і Δx — приріст аргументу функції $y = S(x)$ у точці x_0. Обмежимося розглядом випадку, коли $\Delta x > 0$ (випадок, коли $\Delta x < 0$, розглядається аналогічно).

Маємо: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$.

Отримуємо, що ΔS — це площа криволінійної трапеції, заштрихованої на рисунку 28.3.

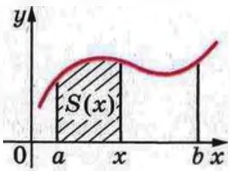


Рис. 28.2

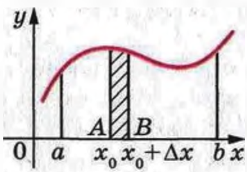


Рис. 28.3

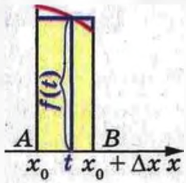


Рис. 28.4

На відрізку AB як на стороні побудуємо прямокутник, площа якого дорівнює ΔS. Довжини сторін цього прямокутника дорівнюють Δx і $f(t)$, де t — деяка точка проміжку $[x_0; x_0 + \Delta x]$ (рис. 28.4). Існування такої точки t можна довести, використовуючи для функції f другу теорему Вейєрштрасса та другу теорему Больцано–Коші.

Таким чином, $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Звідси $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Оскільки функція f є неперервною в точці x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Звідси, якщо $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$.

Маємо $S'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0)$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $y = S(x)$, то для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується рівність $S'(x) = f(x)$.

Отримали, що функція $y = S(x)$ є однією з первісних функції f на відрізку $[a; b]$.

Нехай F — деяка первісна функції f на відрізку $[a; b]$. Тоді згідно з основною властивістю первісної можна записати

$$F(x) = S(x) + C,$$

де C — деяке число.

Маємо:

$$F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b).$$

За означенням функції $y = S(x)$ шукана площа S криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$. Отже,

$$S = F(b) - F(a). \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 28.5 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

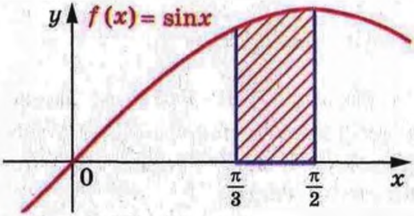


Рис. 28.5

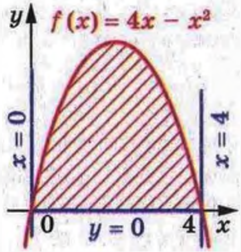


Рис. 28.6

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$. Тоді $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 28.6). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, яка обмежена графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Однією з первісних функції f на відрізку [0; 4] є функція $F(x)=2x^2-\frac{x^3}{3}$. Тоді

$$S=F(4)-F(0)=2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}=\frac{32}{3}. \bullet$$

Означення. **Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$.**

Визначений інтеграл функції f на відрізку $[a; b]$ позначають $\int_a^b f(x)\,dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)} \qquad (1)$$

Тут F — довільна первісна функції f на проміжку I.

Наприклад, функція $F(x)=x^3$ є первісною функції $f(x)=3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b, де $a < b$, можна записати:

$$\int_a^b 3x^2\,dx=F(b)-F(a)=b^3-a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b)-F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f обрано. Справді, кожну первісну G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x)=F(x)+C$, де C — деяка стала. Тоді

$$G(b)-G(a)=(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a).$$

Під час доведення теореми 28.1 встановлено, що функція $y=S(x)$ (рис. 28.2) є первісною неперервної на відрізку функції f, яка набуває на ньому лише невід'ємних значень. Це твердження ілюструє той факт, що *кожна неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку*. У свою чергу це означає, що для кожної неперервної на відрізку $[a;b]$ функції існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$.

Рівність (1) називають **формулою Ньютона–Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ за формулою Ньютона–Лейбніца потрібно:

1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a;b]$;

2) обчислити значення первісної F у точках $x=b$ та $x=a$;

3) знайти різницю $F(b)-F(a)$.

При обчисленні визначених інтегралів різницю $F(b)-F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$. Маємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0=\frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\int\limits_1^2(x^4+x^2-2)\,dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int\limits_1^2(x^4+x^2-2)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(\frac{2^5}{5}+\frac{2^3}{3}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{1^5}{5}+\frac{1^3}{3}-2\cdot 1\right)=6\frac{8}{15}. \bullet$$

Якщо функція f має первісну F на відрізку $[a; b]$ і $c \in (a; b)$, то з формули Ньютона–Лейбніца випливає така властивість визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Справді,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=\big(F(b)-F(c)\big)+\big(F(c)-F(a)\big)=$$

$$=\int\limits_c^b f(x)\,dx+\int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Якщо кожна з функцій f і g має первісну на відрізку $[a; b]$, то, використовуючи теореми 27.1 і 27.2, можна довести (зробіть це самостійно) такі властивості визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^b(f(x)+g(x))\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

2) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx=k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, де k — деяке число.

Формула Ньютона–Лейбніца дозволяє встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$.

Використовуючи теорему 28.1, можна записати:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Зауважимо, що в наведеній формулі розглядаються неперервні функції f, які на відрізку $[a; b]$ набувають тільки невід'ємних значень. Проте визначений інтеграл можна використати для обчислення площ більш складних фігур.

Розглянемо неперервні на відрізку $[a; b]$ функції f і g такі, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$.

Покажемо, як знайти площу S фігури Ф, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 28.7).

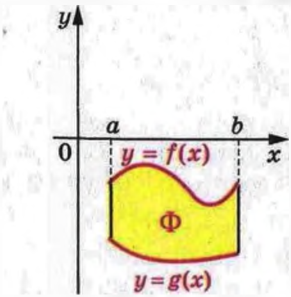


Рис. 28.7

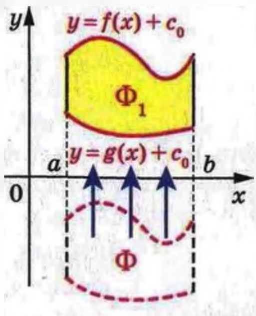


Рис. 28.8

Перенесемо фігуру Ф вгору на c_0 одиниць так, щоб отримана фігура $Ф_1$ знаходилася вище від осі абсцис (рис. 28.8). Фігура $Ф_1$ обмежена графіками функцій $y = f(x) + c_0$ і $y = g(x) + c_0$ та прямими $x = a$, $x = b$.

Оскільки фігури Ф і $Ф_1$ мають рівні площі, то шукана площа S дорівнює різниці $S_f - S_g$, де:

S_f — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 28.9, *а*);

S_g — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = g(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 28.9, *б*).

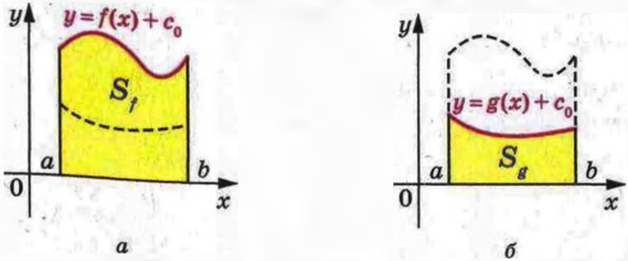


Рис. 28.9

Таким чином, використовуючи властивості визначеного інтеграла, можемо записати:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b (f(x) + c_0)\,dx - \int_a^b (g(x) + c_0)\,dx =$$

$$= \int_a^b \big((f(x) + c_0) - (g(x) + c_0)\big)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Отже, *якщо функції f і g є неперервними на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

ПРИКЛАД Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіками функцій
$f(x) = -x^2 + 6x - 6$ і $g(x) = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $f(x) = g(x)$, установлюємо, що графіки функцій f і g перетинаються у двох точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$. На рисунку 28.10 зображено фігуру (вона зафарбована жовтим кольором), площу якої потрібно знайти.

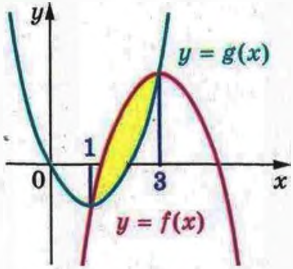


Рис. 28.10

Тоді

$$S = \int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\,dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3}.$$ ●

Вправи

28.1.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 28.11.

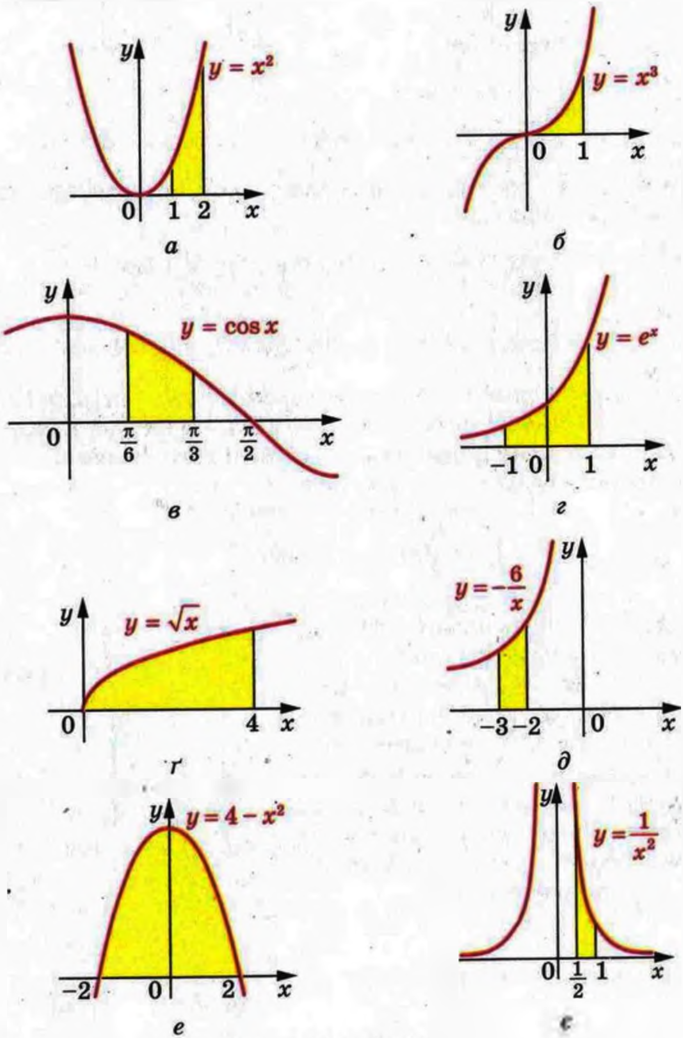


Рис. 28.11

28.2.° **Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 28.12.**

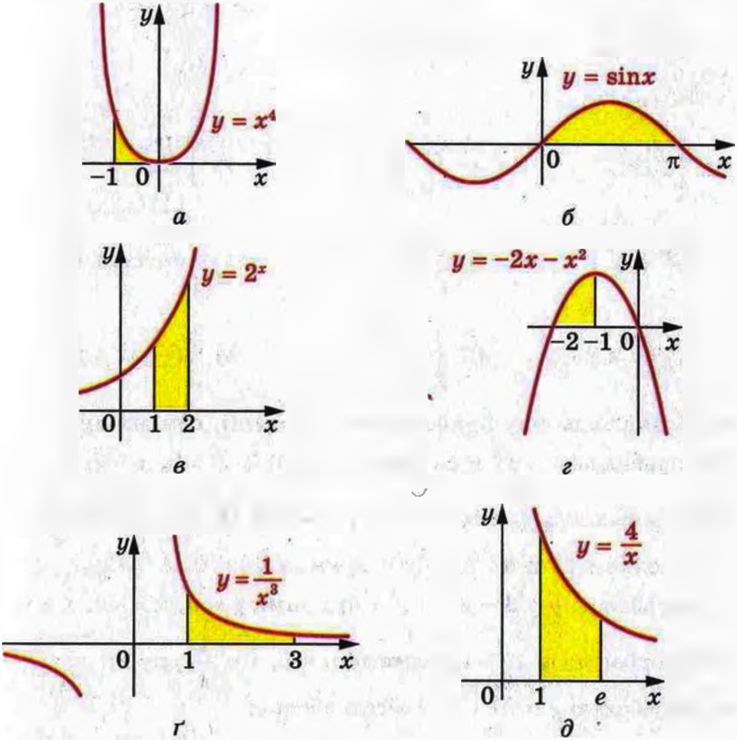


Рис. 28.12

28.3.° Обчисліть:

1) $\int_5^7 x\,dx$;
2) $\int_3^8 dx$;
3) $\int_{-3}^0 x^2\,dx$;
4) $\int_{-1}^2 x^4\,dx$;
5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;
6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
7) $\int_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
8) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;
9) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int\limits_{-2}^{3} 3^x\,dx$; 12) $\int\limits_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$; 14) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$.

11) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; 13) $\int\limits_{0}^{6} (3x^2 - x)\,dx$;

28.4.° Обчисліть:

1) $\int\limits_{-4}^{-2} 2\,dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

2) $\int\limits_{1}^{2} x^3\,dx$; 5) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$; 8) $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{4} e^x\,dx$; 9) $\int\limits_{-1}^{1} (1-5x^4)\,dx$.

28.5.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

1) параболою $y = x^2 + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) косинусоїдою $y = \cos x$ і прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) графіком функції $y = -x^3$ і прямими $y = 0$, $x = -2$;

4) параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

5) гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

6) параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис;

7) синусоїдою $y = \sin 2x$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

8) графіком функції $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;

9) графіком функції $y = e^x + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;

10) графіком функції $y = \sqrt{5-x}$ і прямими $y = 0$, $x = -4$.

28.6.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;

4) $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

5) $y=\sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;

6) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

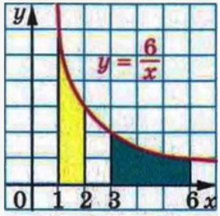


Рис. 28.13

28.7.° **Доведіть, що криволінійні трапеції, зафарбовані на рисунку 28.13, рівновеликі.**

28.8.° Обчисліть:

1) $\displaystyle\int_1^3 (4x^3-4x+3)\,dx$;

2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\,dx}{\sin^2 2x}$;

4) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x-3)^2\,dx$;

5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5\,dx$;

6) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;

7) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$;

8) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{6}+\cos 5x\right)dx$;

9) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx$;

10) $\displaystyle\int_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}}\,dx$;

11) $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}$;

12) $\displaystyle\int_{-24}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4}-2}\,dx$.

28.9.° Обчисліть:

1) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{4}{x^2}+2x-3x^2\right)dx$;

2) $\displaystyle\int_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^4\,dx$;

5) $\displaystyle\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

6) $\displaystyle\int_{\ln 8}^{\ln 4} e^{-2x}\,dx$;

7) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{3x+1}$;

8) $\displaystyle\int_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

9) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{7x-3}\,dx$.

28.10.° Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;
15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

28.11.° Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = x^3$ і прямими $y = 8$, $x = 1$;
2) параболою $y = 0{,}5x^2$ і прямою $y = -x$;
3) параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 3$;
4) параболою $y = 6 + x - x^2$ і прямою $y = 6 - 2x$;
5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = 4 - x^2$;
6) гіперболою $y = \frac{3}{x}$ і прямими $y = 3$, $x = 3$;
7) графіком функції $y = e^{-x}$ і прямими $y = e$, $x = 0$;
8) гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$.

28.12.° Знайдіть площу фігури, обмеженої віссю ординат і графіками функцій $y = \cos 2x$, $y = \sin x$, заданих на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

28.13.° При якому додатному значенні параметра a визначений інтеграл $\int_0^a (6 - 2x)\,dx$ набуває найбільшого значення?

28.14.° При яких значеннях параметра a площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 9?

28.15.° При яких значеннях параметра a площа фігури, обмеженої лініями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 8?

28.16.° При якому значенні параметра a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{2}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на дві рівновеликі фігури?

28.17.• При якому значенні параметра a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = -x^3$ та прямими $y = 0$, $x = -2$, на дві рівновеликі фігури?

28.18.• При яких значеннях параметра a виконується нерівність:

1) $\int\limits_0^a (4-2x)\,dx < 3$, де $a > 0$;

2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^{a} 0{,}2^x\,dx > \dfrac{19}{\ln 0{,}2}$, де $a > \log_{0,2} 6$?

28.19.• При яких значеннях параметра a виконується нерівність

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{a}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx > 1{,}5,\ \text{де}\ a > \frac{1}{2}?$$

28.20.• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{tg}^2\, 3x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2\sin^2 \frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 \dfrac{e^x + x^3}{x^3 e^x}\,dx$.

28.21.• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \mathrm{ctg}^2 \frac{x}{5}\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x \cos 3x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \dfrac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}\,dx$.

28.22.• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

2) $y = -x^2$, $y = x - 2$;

3) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;

4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;

5) $y = 3\sin x$, $y = -2\sin x$, $x = 0$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$;

6) $y = \dfrac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

28.23.* Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 4x$, $y = x - 4$;
2) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;
3) $y = \cos x$, $y = -2\cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

28.24.** Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ якщо } x < 1, \\ 2x - 1, \text{ якщо } x \geqslant 1, \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

28.25.** Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} x + 3, \text{ якщо } x < -1, \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x \geqslant -1, \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} x + 2, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\cos 2x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}, \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

28.26.** Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, прямою, яка дотикається до цієї параболи у точці з абсцисою $x_0 = 2$, та осями координат.

28.27.** Знайдіть площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y = 2x^3$ та прямою, яка дотикається до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

28.28.** Областю визначення неперервної функції f є проміжок $[0; +\infty)$. Знайдіть похідну функції $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

28.29.** Областю визначення неперервної функції f є проміжок $(-\infty; 0]$. Знайдіть похідну функції $F(x) = \int\limits_x^0 f(t)\,dt$.

28.30.** Функція f неперервна на відрізку $[a; b]$. Доведіть існування такого $c \in (a; b)$, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$.

28.31.** Функції f і g неперервні на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$. Доведіть, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

28.32.** Функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \leqslant 0$. Нехай S — площа фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і графіком функції f. Доведіть, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -S$.

28.33.** Доведіть, що коли неперервна на $\mathbb{R}$ функція $y = f(x)$ є парною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$, де $a > 0$.

28.34.** Доведіть, що коли неперервна на $\mathbb{R}$ функція $y = f(x)$ є непарною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, де $a > 0$.

28.35.** Обчисліть:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{4}^{8} \sqrt{8x-x^2}\,dx$;
4) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$;
5) $\int\limits_{-4}^{1} |x|\,dx$;
6) $\int\limits_{0}^{5} |x-2|\,dx$.

28.36.** Обчисліть:

1) $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{6x-x^2-5}\,dx$;
4) $\int\limits_{-2}^{2} |x+1|\,dx$.

28.37.** Знайдіть $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2^{\sqrt[3]{x}}-1}{2^{\sqrt[3]{x}}+1}\,dx$.

28.38.** Знайдіть $\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$.

28.39.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

28.40.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$.

28.41.* Знайдіть одну з первісних функції $y=\sqrt{4-x^2}$ на проміжку $[-2; 2]$.

28.42.* Доведіть нерівність $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}>\int\limits_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$.

28.43.* Доведіть збіжність послідовності із загальним членом $x_n=\frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

29 Обчислення об'ємів тіл

У попередньому пункті ви дізналися, як за допомогою інтегрування можна обчислювати площу криволінійної трапеції. Нагадаємо, що коли фігура обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 29.1), то її площу можна обчислити за формулою

$$S=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

Розглянемо функцію $l(x)=f(x)-g(x)$. Величина $l(x_0)=f(x_0)-g(x_0)$ дорівнює довжині відрізка, по якому вертикальна пряма $x = x_0$ перетинає дану фігуру (рис. 29.2). Отже, можна записати:

$$S=\int\limits_a^b l(x)\,dx. \quad (1)$$

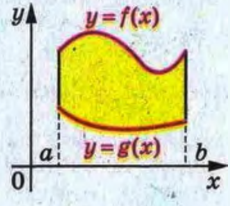


Рис. 29.1

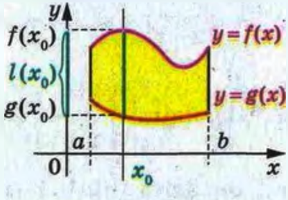


Рис. 29.2

Виявляється, що останню формулу можна узагальнити для розв'язування задач на обчислення об'ємів просторових тіл.

У просторовій прямокутній декартовій системі координат розглянемо тіло Ф, об'єм якого дорівнює V. Нехай площина $x = x_0$

перетинає тіло Φ по фігурі з площею $S(x_0)$, а проекцією тіла Φ на вісь абсцис є відрізок $[a; b]$ (рис. 29.3). Якщо $y = S(x)$ — неперервна на відрізку $[a;b]$ функція, то об'єм тіла Φ можна обчислити за формулою

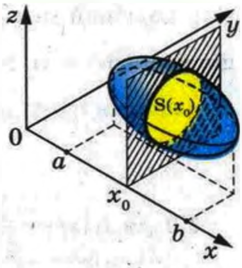


Рис. 29.3

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx} \qquad (2)$$

Цю формулу можна довести, використовуючи ідею доведення теореми 28.1.

Покажемо, як за допомогою отриманої формули вивести формулу об'єму піраміди.

Нехай дано піраміду з висотою OM, рівною h, і основою, площа якої дорівнює S (рис. 29.4). Доведемо, що об'єм піраміди дорівнює $V = \frac{1}{3}Sh$. Уведемо систему координат так, щоб вершина піраміди O збіглася з початком координат, а висота піраміди OM належала додатній півосі осі абсцис (рис. 29.5). Тоді основа піраміди лежить у площині $x = h$. Тому проекцією піраміди на вісь абсцис є відрізок $[0; h]$.

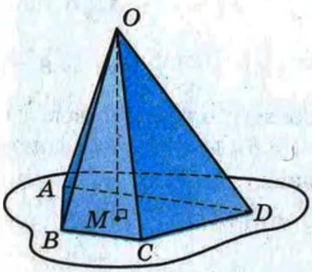


Рис. 29.4

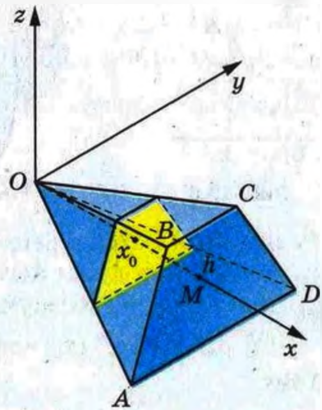


Рис. 29.5

Нехай площина $x = x_0$ перетинає піраміду по многокутнику з площею $S(x_0)$. Зрозуміло, що площина перерізу паралельна площині основи піраміди. Тому многокутник, утворений у пере-

різі, подібний многокутнику основи піраміди. При цьому коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{x_0}{h}$. Скориставшись теоремою про відношення площ подібних фігур, можна записати:

$$\frac{S(x_0)}{S}=\frac{x_0^2}{h^2}.$$

Звідси $S(x_0)=\frac{x_0^2}{h^2}S$. Тепер можна записати:

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{x^2}{h^2}S\,dx=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Sh.$$

ПРИКЛАД **Фігура, обмежена графіком функції $f(x)=x^2+1$ і прямими $x=0$, $x=1$, $y=0$ (рис. 29.6), обертається навколо осі абсцис, утворюючи тіло об'єму V (рис. 29.7). Знайдіть V.**

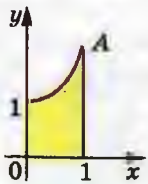


Рис. 29.6

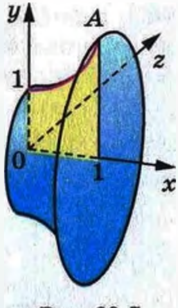


Рис. 29.7

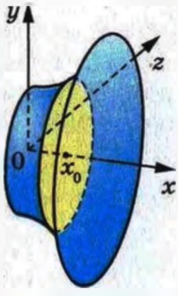


Рис. 29.8

Розв'язання. **При перетині утвореного тіла площиною $x=x_0$, де $x_0\in[0;1]$, утворюється круг (рис. 29.8), радіус якого дорівнює $f(x_0)$. Тоді площа цього круга дорівнює**

$$S(x_0)=\pi f^2(x_0)=\pi\left(x_0^2+1\right)^2=\pi\left(x_0^4+2x_0^2+1\right).$$

Тому

$$V=\int_0^1 S(x)\,dx=\int_0^1 \pi(x^4+2x^2+1)\,dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{28\pi}{15}.$$

Узагалі, має місце таке твердження.

Коли при обертанні фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції f і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, навколо осі абсцис утворюється тіло об'єму V, то

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Вправи

29.1.• Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
2) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
4) $y = x^2$, $y = x$;
5) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = x$.

29.2.• Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
2) $y = x - x^2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 2$.

29.3.• У кулі радіуса R на відстані $\frac{R}{2}$ від центра кулі проведено площину, яка розбиває кулю на дві частини. Знайдіть об'єми цих частин.

29.4.• Доведіть, що об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

29.5.• Виведіть формулу для обчислення об'єму конуса.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

«Розумом він перевершив рід людський»

Ці величні слова написані нащадками про видатного англійського науковця — фізика і математика Ісаака Ньютона. В історії науки поряд з І. Ньютоном стоїть ще одна велика постать — німецького науковця Ґотфріда Вільгельма Лейбніца, який залишив після себе немеркнучий слід у філософії, математиці, юриспруденції, логіці, дипломатії, історії, політології. Серед великої наукової спадщини цих геніальних учених особливе місце належить досягненням, пов'язаним зі створенням диференціального та інтегрального числення — науки про похідні та первісні.

Слід підкреслити, що Ньютон і Лейбніц створювали свої теорії в часи, коли звичні для нас поняття і терміни або взагалі не існували, або не мали точного змісту. Спробуйте уявити собі підручник з алгебри, у якому немає термінів «множина», «функція», «дійсне число», «границя» тощо. Більш того, багато зручних сучасних позначень тоді ще не набули загальноприйнятого вжитку. Деякі з них Ньютону та Лейбніцу довелося самим винаходити, узагальнювати і пристосовувати до потреб. Наприклад, Лейбніц почав позначати операцію множення крапкою (раніше використовували символи: $\square$, ×, *, M тощо), операцію ділення — двокрапкою (раніше часто використовували літеру D); Ньютон поширив позначення для степеня a^n на випадок цілих та дробових значень n, а позначення $\sqrt{x}$ узагальнив до $\sqrt[n]{x}$. Термін «функція» і символ інтеграла «$\int$» вперше зустрічаються в роботах Лейбніца.

Узагалі, історію розвитку математики можна сміливо розділити на епохи до і після появи похідної та інтеграла. Відкриття Ньютона та Лейбніца дозволили науковцям швидко і просто

Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Ґотфрід Вільгельм
Лейбніц
(1646–1716)

розв'язувати задачі, які раніше вважалися абсолютно неприступними.

Наведемо показовий приклад. У першій половині XVII століття видатний італійський математик Бонавентура Кавальєрі запропонував новий метод для обчислення площ. Користуючись цим методом, Кавальєрі зміг обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^n$, віссю абсцис і вертикальною прямою $x = 1$, при деяких значеннях n (рис. 29.9). Наполегливо працюючи протягом більш ніж 10 років, шляхом надзвичайно складних та громіздких міркувань Кавальєрі зміг розв'язати задачу лише для натуральних значень n, менших від 10.

Годі й казати, що, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, шукану площу можна знайти в один рядок не тільки для натуральних, а й для всіх додатних значень n:

$$S = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Проте в ті часи метод, запропонований Кавальєрі, мав надзвичайно важливе значення, оскільки до XVII століття протягом кількох тисяч років усі намагання науковців розв'язати таку або подібну задачі були взагалі безрезультатними.

Для своїх розрахунків Кавальєрі сформулював такий принцип: *якщо всі прямі, паралельні між собою, перетинають фігури* F_1 *і* F_2 *по відрізках однакової довжини* (рис. 29.10), *то такі фігури мають рівні площі.*

Ознайомившись із цим принципом, у 1644 році видатний італійський математик і фізик Еванджеліста Торрічеллі писав: «Без сумнівів, геометричний принцип Кавальєрі є дивовижним за своєю економією засобом для знаходження теорем... Це — справді царська дорога серед хащ математичного тернику».

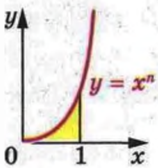


Рис. 29.9

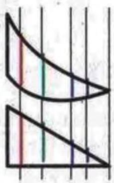


Рис. 29.10

Рис. 29.11

Наприклад, з принципу Кавальєрі випливає, що прямокутник і паралелограм з однаковими стороною і висотою мають рівні площі (рис. 29.11). Але принцип Кавальєрі працює і для більш складних фігур. Наприклад, обчислимо площу «криволінійного чотирикутника» $ABCD$, обмеженого лініями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=0$, $x=1$.

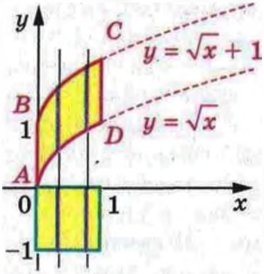


Рис. 29.12

Поряд з «криволінійним чотирикутником» розглянемо одиничний квадрат (рис. 29.12). Кожна вертикальна пряма перетинає обидві фігури по відрізках одиничної довжини. Тоді з принципу Кавальєрі випливає, що площа «криволінійного чотирикутника» $ABCD$ дорівнює площі одиничного квадрата, тобто одиниці.

Просторовий аналог принципу Кавальєрі дозволяє обчислити, наприклад, об'єм півкулі через об'єми циліндра і конуса.

На рисунку 29.13 зображено півкулю радіуса R і циліндр, з якого «вирізано» конус. Радіуси основ, а також висоти циліндра і конуса дорівнюють R. Можна показати (зробіть це самостійно), що кожна горизонтальна площина перетинає півкулю по кругу, площа якого дорівнює площі кільця (рис. 29.14).

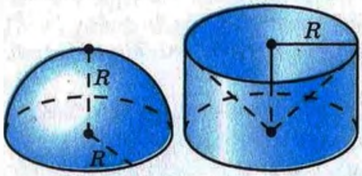


Рис. 29.13

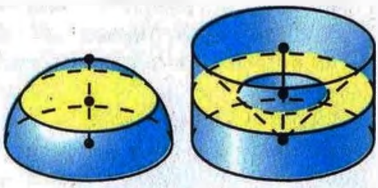


Рис. 29.14

Тоді з просторового принципу Кавальєрі випливає, що об'єм півкулі дорівнює

$$V = V_{\text{циліндра}} - V_{\text{конуса}} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ідеї, близькі до принципу Кавальєрі, наштовхнули Ньютона і Лейбніца до створення зручної загальної теорії (див. формули (1) і (2) на с. 88, 89), яка дозволяє просто і швидко обчислювати площі та об'єми різноманітних фігур.

§ 5. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

30 Елементи комбінаторики та біном Ньютона

У 9 класі ви ознайомилися з основними правилами комбінаторики, дізналися, що таке перестановки, розміщення та сполуки (комбінації), і вивчили формули для їх обчислення. Нагадаємо основні означення та формули.

Означення. Перестановкою скінченної множини M називають будь-який упорядкований набір, утворений з усіх елементів множини M.

Наприклад, існує 6 перестановок множини $M = \{a, b, c\}$:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Кількість перестановок n-елементної множини позначають P_n.

Для будь-якого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедлива формула

$$\boxed{P_n = n!}$$

Означення. Будь-який k-елементний упорядкований набір елементів даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.

Наприклад, якщо $M = \{a, b, c\}$, то існує 6 розміщень з 3 елементів по 2 елементи:

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Кількість розміщень з n елементів по k елементів позначають A_n^k.

Для будь-яких чисел $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Означення. **Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.**

Наприклад, якщо $M = \{a, b, c, d\}$, то існує 6 комбінацій з 4 елементів по 2 елементи:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

Кількість комбінацій з n елементів по k елементів позначають C_n^k.

Для будь-яких чисел $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $k \leq n$, справедлива формула

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Перестановки, розміщення і комбінації застосовують при розв'язуванні багатьох задач. Одним з таких прикладів є задача знаходження формули скороченого множення для виразу $(a+b)^n$.

Формули скороченого множення для випадків, коли показник степеня n набуває значень 1, 2, 3, вам добре відомі. Знайдемо формулу для загального випадку $n \in \mathbb{N}$.

Вираз $(a+b)^n$ є добутком n однакових множників $(a+b)$.

У добутку

$$\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n\text{ множників}} \qquad (1)$$

розкриємо всі дужки одразу. Для цього в кожній з n дужок $(a+b)$ необхідно обрати змінну a або b, перемножити обрані змінні і додати всі такі добутки.

Наприклад, якщо у всіх дужках обрати змінну a:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b),$$

то дістанемо вираз a^n, що є одним з доданків суми, яку отримаємо після розкриття дужок в добутку (1). Якщо в першому множнику $(a+b)$ добутку (1) обрати змінну b, а в усіх інших — змінну a:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b),$$

то отримаємо доданок $a^{n-1}b$. Зауважимо, що доданок $a^{n-1}b$ можна отримати й іншими способами, наприклад, обираючи з другого множника змінну b і з решти — змінну a:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b).$$

Узагалі, якщо в k множниках $(a+b)$ добутку (1) обрати змінну b, а в решті $(n-k)$ множниках обрати змінну a, то отримаємо доданок виду $a^{n-k}b^k$, де $0 \leqslant k \leqslant n$. Серед n множників $(a+b)$ обрати k множників (для вибору в них змінної b) можна C_n^k способами. Тому в результуючій сумі кількість доданків виду $a^{n-k}b^k$ дорівнюватиме C_n^k.

Таким чином, після розкриття дужок вираз $(a+b)^n$ можна подати у вигляді суми

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n}$$

Отриману формулу називають **формулою бінома Ньютона**, а коефіцієнти C_n^k — **біноміальними коефіцієнтами**.

Зауважимо, що у формулі бінома Ньютона вираз $(a+b)^n$ подано як суму $n+1$ доданка, де $(k+1)$-й доданок має вигляд

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Якщо у формулі бінома Ньютона знак змінної b поміняти на протилежний, то отримаємо формулу

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^n b^n.$$

ПРИКЛАД 1 Розкрийте дужки у виразі $(a+b)^5$.

Розв'язання. Оскільки $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, то можна записати

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Вираз $\left(\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + 2x^3\right)^{40}$ розклали за формулою бінома Ньютона. Який член розкладу не залежить від x?

Розв'язання. Запишемо $(k+1)$-й член розкладу

$$T_{k+1} = C_{40}^k \left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{40-k} (2x^3)^k = C_{40}^k 5^{40-k} 2^k x^{-\frac{3}{4}(40-k)+3k}.$$

Доданок T_{k+1} не буде залежати від x, якщо $-\dfrac{3}{4}(40-k)+3k=0$.

Звідси $k=8$ і $T_9 = C_{40}^8 5^{32} 2^8$.

Відповідь: $T_9 = C_{40}^8 5^{32} 2^8$.

Використовуючи формулу бінома Ньютона, запишемо розклади виразів $(a+b)^n$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, у такій формі:

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0: & 1 \\
(a+b)^1: & 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 \\
(a+b)^2: & 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a^1b^1 + 1 \cdot b^2 \\
(a+b)^3: & 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot b^3 \\
(a+b)^4: & 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b^1 + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot a^1b^3 + 1 \cdot b^4 \\
(a+b)^5: & 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b^1 + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot a^1b^4 + 1 \cdot b^5
\end{array}
$$

... ...

Було помічено, що записані в трикутну таблицю біноміальні коефіцієнти (їх виділено червоним кольором) мають багато цікавих властивостей. Наприклад, можна побачити, що, додавши два сусідніх червоних числа, отримаємо інше червоне число, записане в наступному рядку між двома даними числами (рис. 30.1).

Рис. 30.1

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французький математик, фізик, літератор і філософ. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей і проективної геометрії. Створив перші зразки обчислювальної техніки.

Ця властивість випливає з рівності $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, яку ви розглядали в 9 класі.

Таким чином, сума двох сусідніх біноміальних коефіцієнтів C_n^k і C_n^{k+1} дорівнює біноміальному коефіцієнту C_{n+1}^{k+1}, який записано в наступному рядку таблиці між C_n^k і C_n^{k+1}.

На форзаці 4 можна побачити більшу кількість рядків трикутної таблиці біноміальних коефіцієнтів. Її називають **трикутником Паскаля** на честь французького математика Блеза Паскаля, який написав детальний трактат про цю трикутну таблицю чисел.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що сума чисел у кожному рядку трикутника Паскаля є степенем двійки[1].

Розв'язання. У формулу бінома Ньютона

$$1 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1 b^{n-1} + 1 \cdot b^n = (a+b)^n$$

підставимо значення $a = b = 1$. Маємо

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n.$$

Залишилося лише зауважити, що 1, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, 1 є числами одного рядка трикутника Паскаля. ●

У трикутнику Паскаля приховано багато цікавих закономірностей. Наприклад, якщо замість непарних чисел трикутника Паскаля поставити чорну точку •, а замість парних нічого не ставити взагалі (біла точка), то можна отримати рисунок 30.2. Цей рисунок[2] можна побудувати, керуючись таким правилом: між точками однакового кольору в наступному рядку треба ставити білу точку, а між точками різного кольору — чорну точку.

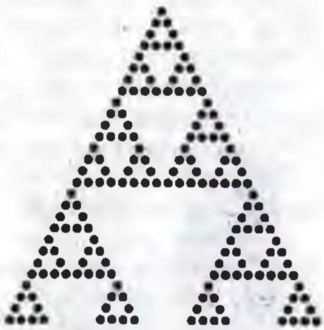


Рис. 30.2

[1] З іншим доведенням цієї властивості ви ознайомилися в підручнику «Алгебра-9», с. 246.

[2] Такі фігури в математиці називають *фракталами* (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий).

Вправи

30.1.° Запишіть усі двоцифрові числа, утворені з цифр 1, 2, 3 або 4. Підрахуйте кількість таких чисел.

30.2.° Запишіть усі трицифрові числа, утворені з цифр 1, 2, 3 або 4, якщо цифри в числі не можуть повторюватися. Підрахуйте кількість таких чисел.

30.3.° Запишіть усі чотирицифрові числа, утворені з цифр 1 або 2. Підрахуйте кількість таких чисел.

30.4.° Запишіть усі трицифрові числа, утворені з цифр 1, 2, 3, 4 або 5, якщо цифри у числі не можуть повторюватися і мають бути розміщені в порядку зростання. Підрахуйте кількість таких чисел.

30.5.° Запишіть формулу бінома Ньютона для $(a+b)^6$.

30.6.° Запишіть формулу бінома Ньютона для $(a+b)^7$.

30.7.° Обчисліть кількість доданків після розкриття дужок у виразі $(a_1+a_2+\ldots+a_{10})(b_1+b_2+\ldots+b_{20})$.

30.8.° Обчисліть кількість доданків після розкриття дужок у виразі $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2)$.

30.9.° Скількома способами в таблиці розміром $n \times n$ можна обрати n клітинок так, щоб у кожному рядку і в кожному стовпчику була одна обрана клітинка?

30.10.° На площині позначено 10 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки різних ламаних з вершинами в даних точках можна побудувати, якщо ламана має проходити через кожну з десяти точок по одному разу?

30.11.° Скількома способами 30 учнів можуть розсістися за 15 партами?

30.12.° Керівництво фірми придбало для своїх співробітників 6 туристичних путівок до різних країн. Скількома способами ці путівки можна розподілити між 25 співробітниками, якщо один співробітник не може отримати більше однієї путівки?

30.13.° У коробці лежить n карток з числами від 1 до n. З коробки треба послідовно вибрати п'ять карток. Скількома способами можна зробити такий вибір?

30.14.° На колі позначено 25 точок. Скільки існує шестикутників з вершинами в цих точках?

30.15.° Серед усіх стоцифрових послідовностей, складених з нулів і одиниць, знайдіть кількість тих, у яких 40 одиниць і 60 нулів.

30.16.° Обчисліть суму $3^n + C_n^1 3^{n-1} 2^1 + C_n^2 3^{n-2} 2^2 + \ldots + C_n^{n-1} 3^1 2^{n-1} + 2^n$.

30.17.° Обчисліть суму $C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - C_{100}^3 + \ldots + C_{100}^{100}$.

30.18.° Обчисліть суму

$$2^{300} - C_{300}^1 2^{299} + C_{300}^2 2^{298} - C_{300}^3 2^{297} + \ldots - C_{300}^{299} 2 + 1.$$

30.19.° Доведіть, що

$$1 + C_{100}^1 3 + C_{100}^2 3^2 + \ldots + C_{100}^{99} 3^{99} + 3^{100} = 5^{100} - C_{100}^1 5^{99} + $$
$$+ C_{100}^2 5^{98} - \ldots - C_{100}^{99} 5 + 1.$$

30.20.° Доведіть, що

$$1 + C_{100}^1 3 + C_{100}^2 3^2 + \ldots + C_{100}^{99} 3^{99} + 3^{100} =$$

$$= 1 - C_{200}^1 3 + C_{200}^2 3^2 - \ldots - C_{200}^{199} 3^{199} + 3^{200}.$$

30.21.° Знайдіть відношення суми чисел у 20-му рядку трикутника Паскаля до суми чисел у 19-му рядку.

30.22.° Знайдіть відношення суми чисел у 100-му рядку трикутника Паскаля до суми чисел у 200-му рядку.

30.23.° У виразі $\left(\sqrt{5} + \sqrt[3]{3}\right)^{100}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Скільки з отриманих доданків є раціональними?

30.24.° У виразі $\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{2}\right)^{600}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Скільки раціональних доданків було отримано?

30.25.° При якому значенні n восьмий член розкладу виразу $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ за формулою бінома Ньютона не залежить від x?

30.26.° У виразі $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{22}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Який член розкладу можна подати у вигляді cx^2, де c — деяка стала?

30.27.° У виразі $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)^n$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Відомо, що шостий член розкладу має вигляд $56x^7$. Знайдіть n.

30.28.° Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох різних ящиках (деякі ящики можуть залишитися порожніми)?

30.29.° Кожну клітинку прямокутника 3×5 можна пофарбувати в синій, жовтий або червоний колір. Скількома способами можна розфарбувати прямокутник?

30.30.° Скількома способами можна розкласти 6 монет різного номіналу по 4 відділеннях гаманця?

30.31.•• Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох різних ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

30.32.•• Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох однакових ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

30.33.•• Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох однакових ящиках (деякі ящики можуть залишитися порожніми)?

30.34.•• Скількома способами можна розкласти n однакових куль по трьох різних ящиках (деякі ящики можуть залишитися порожніми)?

30.35.•• Скількома способами можна розкласти n однакових куль по трьох різних ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

30.36.•• Доведіть, що суми чисел трикутника Паскаля, які стоять на червоних прямих (рис. 30.3), збігаються з числами Фібоначчі, тобто з числами послідовності (u_n), заданої рекурентно: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

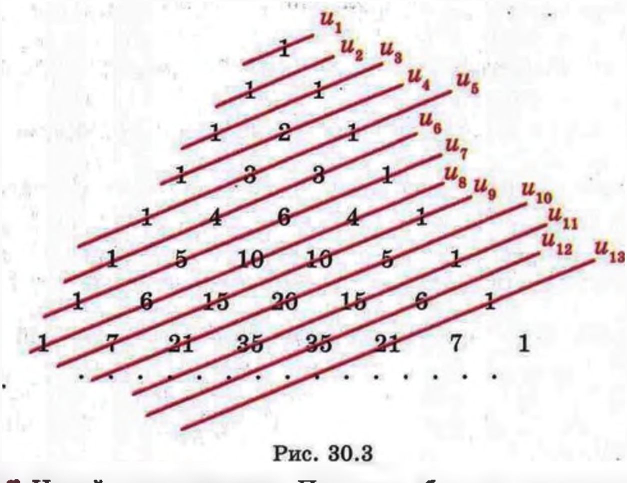


Рис. 30.3

30.37.•• Нехай в трикутнику Паскаля обрано деяке число. Доведіть, що сума чисел трикутника Паскаля, розташованих паралельно стороні трикутника від обраного числа до одиниці (наприклад, на рисунку 30.4 обраним є число 10), дорівнює числу, що стоїть праворуч від даного в наступному рядку (на рисунку 30.4 сума червоних чисел дорівнює зеленому числу).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Рис. 30.4

30.38.•• Поясніть, чому значення виразів $11^2=121$, $11^3=1331$ схожі на рядки трикутника Паскаля. Обчисліть 11^4.

30.39.•• Знайдіть кількість нулів у кінці десяткового запису числа $1001^{1000}-1$.

30.40.•• Знайдіть кількість нулів у кінці десяткового запису числа $999^{1001}+1$.

30.41.•• Використовуючи формулу бінома Ньютона, для всіх $x \geqslant 0$ і $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність Бернуллі $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

30.42.•• Як вигідніше покласти гроші в банк на рік: під 12 % на рік чи під 1 % на місяць?

30.43.•• Для всіх $x>0$ і $n \in \mathbb{N}$, $n>1$ доведіть нерівність $\sqrt[n]{1+x}<1+\frac{x}{n}$.

30.44.•• Для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність $(1+x)^n+(1-x)^n \geqslant 2$.

30.45.•• Для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність $\sin^{2n} x+\cos^{2n} x \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

30.46.•• У виразі $\left(1+\sqrt{2}\right)^{200}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Який з отриманих доданків найбільший?

30.47.•• У виразі $(a+b)^{50}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона при $a=2$, $b=-\sqrt{3}$. Який з отриманих доданків найменший?

30.48.•• Обчисліть суми

$$A=C_{101}^1+C_{101}^3+C_{101}^5+\ldots+C_{101}^{101} \text{ і } B=C_{101}^0+C_{101}^2+C_{101}^4+\ldots+C_{101}^{100}.$$

30.49.* Обчисліть суму $1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

30.50.* Обчисліть суму $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$.

30.51.* Доведіть, що $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

30.52.* Знайдіть перші 1000 цифр після коми в десятковому записі числа $\left(\sqrt{50} + 7\right)^{1000}$.

30.53.* Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = 9$, $a_{k+1} = 19a_k^{20} + 20a_k^{19}$. Доведіть, що десятковий запис числа a_{21} закінчується не менше ніж на 1 000 000 дев'яток.

31. Частота та ймовірність випадкової події

Нагадаємо й уточнимо основні відомості про частоту та ймовірність випадкової події, з якими ви ознайомилися в 9 класі.

Нам нерідко доводиться проводити спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто подібні дослідження завершуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо. Розділ математики, який вивчає закономірності випадкових явищ, називають **теорією ймовірностей**.

Розглянемо кілька прикладів.

- Стріляючи по мішені, неможливо знати заздалегідь, скільки очок ви виб'єте.
- Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким рахунком закінчиться гра.
- Немає гарантії, що з курячого яйця, покладеного до інкубатору, виведеться курча.
- Неможливо точно передбачити час, який наступного дня займе у Василя Заплутайка дорога до школи.

У наведених прикладах експеримент визначається якимось комплексом умов. Наприклад, футбольний матч повинен проходити за правилами; курячі яйця мають знаходитися в інкубаторі не менше ніж 21 день з дотриманням визначеної методики зміни температури і вологості повітря.

Також важливою рисою розглянутих дослідів є те, що їх можна відтворювати багато разів. Наприклад, футбольні матчі проходять практично щоденно.

Будь-який результат експерименту називають **елементарним наслідком**. Множину всіх елементарних наслідків називають **простором елементарних наслідків** даного експерименту і позначають U[1].

Наприклад, коли ми купуємо лотерейний білет, нас цікавить, виграємо ми чи ні, тому маємо два елементарних наслідки: u_1 = «білет виграв» та u_2 = «білет не виграв». У цьому досліді простір елементарних наслідків — це множина U = {«білет виграв», «білет не виграв»}.

Інший приклад. Якщо навмання відкрити цю книгу і записати номер відповідної сторінки, то в такому досліді елементарним наслідком є будь-яке натуральне число від 1 до 272, тому $U = \{1, 2, ..., 272\}$.

Наголосимо, що простір елементарних наслідків повністю визначає всі можливі результати даного експерименту.

Якщо U — простір елементарних наслідків досліду, то **випадковою подією** називають будь-яку підмножину множини U.

Наведемо приклад. Множина $X = \{95, 96, ..., 172\}$ є підмножиною множини $U = \{1, 2, ..., 272\}$ тому ця множина є випадковою подією в описаному вище досліді з підручником. Така випадкова подія X означає, що, відкриваючи навмання цю книгу, ви потрапите до п'ятого параграфа, адже він починається на с. 95 і закінчується на с. 172.

Якщо елементарний наслідок x з простору елементарних наслідків U є елементом випадкової події A, де $A \subset U$, то кажуть, що *елементарний наслідок x сприяє випадковій події A*. Якщо результатом досліду є елементарний наслідок x, який сприяє випадковій події A, то кажуть, що в результаті досліду *відбулася випадкова подія A*.

Так, якщо в досліді з підручником книгу відкрито, наприклад, на сторінці 105, тобто $x = 105$, то книгу відкрито в п'ятому параграфі, тобто відбулася випадкова подія $X = \{95, 96, ..., 172\}$.

Зазначимо також, що оскільки $U \subset U$ і $\varnothing \subset U$, то множини U і $\varnothing$ також вважають випадковими подіями. Порожня множина $\varnothing$ не містить жодного елемента, тому випадкова подія $\varnothing$ ніколи не може відбутися. Таку випадкову подію називають **неможливою**. Водночас, оскільки множина U містить усі елементарні наслідки,

[1] Для простору елементарних наслідків використовують й інші позначення, наприклад Ω.

то випадкова подія U відбуватиметься завжди. Таку випадкову подію називають **достовірною (вірогідною)**.

Наведемо ще один приклад. Учитель навмання викликає учня до дошки. У цьому експерименті простір елементарних наслідків U складається з усіх учнів класу, оскільки викликати можуть будь-кого. Тому довільна підмножина множини учнів класу є випадковою подією. Наприклад, множина A всіх дівчат — це випадкова подія A — «викличуть дівчинку», множина B всіх хлопців — це випадкова подія B — «викличуть хлопчика», одноелементна множина C, до якої входить староста класу, — це випадкова подія C — «викличуть старосту класу» тощо.

Якщо в класі навчається більше дівчат, ніж хлопців, то в описаному досліді шанси того, що вчитель викличе до дошки дівчинку, будуть більшими, ніж шанси того, що вчитель викличе до дошки хлопчика. Кажуть, що **ймовірність випадкової події A** більша, ніж ймовірність випадкової події B.

Отже, у цьому досліді випадковим подіям A і B можна поставити у відповідність числа — ймовірності настання цих подій. Таким чином, йдеться про функцію, яка випадковій події ставить у відповідність число. Таку функцію в теорії ймовірностей прийнято позначати буквою p (першою буквою французького слова *probabilité* — ймовірність).

Для даної випадкової події X значення функції $p(X)$ називають **ймовірністю випадкової події X**. Число $p(X)$ виражає шанси потрапити у множину X при виборі (з дотриманням комплексу умов проведення досліду) елемента множини U (рис. 31.1).

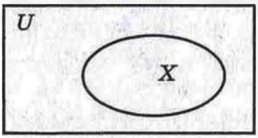


Рис. 31.1

Обчислення ймовірностей випадкових події є однією з головних задач теорії ймовірностей.[1]

Один із методів для знаходження числової оцінки ймовірності випадкової події базується на результатах численних спостережень або експериментів. Так, люди давно помітили, що багато

[1] Питання, пов'язані з областю визначення функції p, виходять за межі шкільної програми і в підручнику не розглядаються. Надалі будемо розглядати тільки випадкові події, що належать області визначення функції p.

подій відбувається з тією чи іншою, на подив постійною, **частотою.**

Нагадаємо, що коли один і той самий дослід проведено n разів і при цьому випадкова подія A відбулася n_A разів, то **частотою випадкової події** A називають величину:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість появ випадкової події } A}{\text{кількість проведених випробувань (дослідів)}} = \frac{n_A}{n}.$$

Наприклад, якщо у випробуванні спостерігають за статтю новонароджених, то простором елементарних наслідків є двоелементна множина U = {«народився хлопчик», «народилася дівчинка»}. Статистичні дані, отримані в різні часи і в різних країнах, свідчать про те, що на кожну 1000 новонароджених припадає в середньому 512 хлопчиків. Отже, число

$$\frac{\text{кількість новонароджених хлопчиків}}{\text{кількість усіх новонароджених}} \approx 0{,}512$$

називають **частотою випадкової події** «народження хлопчика». Наголосимо, що це число отримано в результаті аналізу багатьох спостережень. У таких випадках кажуть, що ймовірність випадкової події «народження хлопчика» приблизно дорівнює 0,512.

Ви знаєте, що куріння шкідливе для здоров'я. За даними організацій з охорони здоров'я курці складають приблизно 90 % від усіх хворих на рак легенів. Число 0,9 — це частота випадкової події «той, хто захворів на рак легенів, — курить», яка визначається таким відношенням:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість курців серед тих, хто захворів на рак легенів}}{\text{кількість усіх людей, які захворіли на рак легенів}}.$$

У таких випадках кажуть, що ймовірність натрапити на курця серед тих, хто захворів на рак легенів, приблизно дорівнює 0,9 (або 90 %).

Щоб детальніше ознайомитися з поняттям ймовірності випадкової події, звернемося до класичного прикладу з киданням монети.

Розглянемо випробування, яке полягає в тому, що кидають монету і спостерігають за тим, на яку сторону вона впаде. Маємо U = {«випав герб», «випало число»}. Припустимо, що цей дослід повторили двічі і двічі випав герб. Тоді в даній серії, яка складається з двох випробувань, частота випадіння герба дорівнює:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість випадінь герба}}{\text{кількість кидань}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Чи це означає, що ймовірність випадіння герба дорівнює 1? Звісно, ні.

Для того щоб за частотою випадкової події варто було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою.

Починаючи з XVIII ст., багато дослідників проводили серії випробувань з киданням монети.

У таблиці наведено результати деяких таких випробувань (частоту випадіння герба обчислено з точністю до десятитисячних).

Дослідник	Кількість кидань монети	Кількість випадінь герба	Частота випадіння герба
Жорж Бюффон	4040	2048	0,5069
Огастес де Морган	4092	2048	0,5005
Вільям Джевонс	20 480	10 379	0,5068
Всеволод Романовський	80 640	39 699	0,4923
Карл Пірсон	24 000	12 012	0,5005
Вільям Феллер	10 000	4979	0,4979

За наведеними даними простежується закономірність: при багаторазовому киданні монети частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,5. Отже, можна вважати, що ймовірність випадкової події «випадіння герба» приблизно дорівнює 0,5.

А чи можна за наведеними даними дослідників гарантовано стверджувати, що ймовірність випадкової події «випадіння герба» точно дорівнює числу 0,5? Відповідь на це запитання негативна. Справді, за наведеними даними можна сказати, що частота появи герба незначно відхиляється, наприклад, від числа 0,502 або від числа 0,4997, тобто число 0,5, як і числа 0,502 і 0,4997, можна розглядати лише як наближену оцінку ймовірності випадкової події. ***Чим більшу кількість випробувань провести, тим більші шанси отримати точнішу оцінку ймовірності випадкової події за її частотою.***

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають **статистичною**. Її використовують у різних галузях діяльності людини: фізиці, хімії, біології, страховому бізнесі, соціології, економіці, охороні здоров'я, спорті тощо.

Якщо в першому прикладі випадкову подію «народження хлопчика» позначити буквою A, то отриманий результат записують так:

$$p(A) \approx 0{,}512.$$

З огляду на наближений характер статистичної оцінки отримані значення дозволяється округлювати. Наприклад, коли частота випадкової події A дорівнює 0,512, то можна написати, що

$$p(A) \approx 0{,}51 \text{ або } p(A) \approx 0{,}5.$$

ПРИКЛАД 1 З коробки, яка містить 33 різних предмети — 10 олівців, 15 ручок та 8 фломастерів, навмання беруть 4 олівці, 2 ручки та 3 фломастери. Скільки елементарних наслідків існує в такому досліді?

Розв'язання. З 10 різних олівців обрати 4 можна C_{10}^4 способами. Так само 2 ручки можна обрати C_{15}^2 способами, а 3 фломастери — C_8^3. Використовуючи комбінаторне правило множення, маємо, що 4 олівці, 2 ручки та 3 фломастери можна обрати $C_{10}^4 \cdot C_{15}^2 \cdot C_8^3$ способами.

Таким чином, у даному досліді існує $C_{10}^4 C_{15}^2 C_8^3$ елементарних наслідків. ●

ПРИКЛАД 2 Гральний кубик підкидають один раз і спостерігають за числом, яке випаде на верхній грані кубика. Скільки випадкових подій існує в такому досліді?

Розв'язання. Простором елементарних наслідків даного досліду є множина $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Кожна випадкова подія A є підмножиною шестиелементної множини U. Наприклад, підмножина $A = \{1, 2, 5\}$ — це випадкова подія «випаде або 1, або 2, або 5».

Кількість усіх підмножин[1] множини U дорівнює 2^6. Це число дорівнює кількості випадкових подій у даному експерименті. ●

[1] Див. «Алгебра-9», ключова задача на с. 235.

ПРИКЛАД 3 Під час екзамену студенти отримують оцінки: «відмінно», «добре», «задовільно» та «незадовільно». Аналізуючи рівень знань студентів першого курсу, викладач зафіксував, що з 90 студентів 15 отримали оцінку «відмінно», 23 — оцінку «добре», 35 — «задовільно» і «17» — незадовільно. Обчисліть частоту випадкової події «студент отримає оцінку «добре». Оцініть ймовірність того, що студент отримає позитивну оцінку («відмінно», «добре» або «задовільно»).

Розв'язання. Частота того, що студент отримає оцінку «добре», дорівнює $\frac{23}{90}$.

Якщо випадкову подію отримання позитивної оцінки позначити A, то частота події A дорівнює $\frac{15+23+35}{90}=\frac{73}{90}$. Тому $p(A)\approx\frac{73}{90}$ або $p(A)\approx 0{,}81$. ●

Вправи

31.1.° На птахофермі з 1000 яєць вилупилося 847 курчат. Чому у цьому досліді дорівнює частота народження курча з яйця?

31.2.° Частота деякої випадкової події A дорівнює 0,48. Скільки разів відбувалася подія A, якщо було проведено: 1) 50 дослідів; 2) 150 дослідів; 3) 575 дослідів?

31.3.° У чемпіонаті України з футболу 2009-10 років було зіграно 240 матчів. Скільки матчів завершилися з рахунком 3 : 0 на користь однієї з команд, якщо частота цієї випадкової події дорівнює 0,0625?

31.4.° При проведенні деякого досліду було встановлено, що частота випадкової події A дорівнює 0,9. Чи можна гарантувати, що при проведенні 10 таких дослідів випадкова подія A відбудеться 9 разів? при проведенні 100 дослідів подія A відбудеться принаймні один раз?

31.5.° Відомо, що частота події купити бракований електроприлад дорівнює 0,007. Чи правильно, що в будь-якій партії з 1000 електроприладів є 7 бракованих?

31.6.° Обчисливши частоту, встановили, що ймовірність влучити в мішень складає приблизно 25 %. Чи може бути так, що в серії з 100 пострілів буде 98 влучень у мішень?

31.7.° У коробці лежать 7 синіх та 10 червоних ручок. Яку найменшу кількість ручок треба вийняти навмання, щоб гарантовано дістати принаймні: 1) одну синю ручку; 2) дві червоні ручки; 3) дві ручки різного кольору?

31.8.° У коробці лежать 8 синіх і 5 зелених олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб гарантовано отримати принаймні один комплект: 1) із синього та зеленого олівців; 2) із двох синіх і одного зеленого олівців; 3) із двох зелених і одного синього олівців?

31.9.° У слові «ЗОШИТ» навмання вибирають одну букву. Опишіть елементарні наслідки цього випробування.

31.10.° Дослід полягає в одночасному підкиданні п'яти монет. Результатом досліду є кількість гербів, що випадуть при цьому. Опишіть елементарні наслідки такого випробування.

31.11.° На заводі випускають деталі партіями по 100 штук. Контролер проводить дослід, у якому перевіряє якість однієї партії деталей і записує кількість бракованих деталей у партії. Запишіть простір елементарних наслідків цього випробування.

31.12.° Стрілець один раз стріляє в мішень, зображену на рисунку 31.2, і спостерігає за результатом пострілу (набраними очками). Опишіть елементарні наслідки цього випробування.

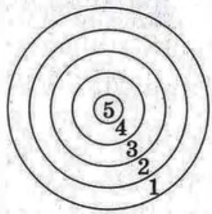


Рис. 31.2

31.13.° Уболівальник спостерігає за футбольним матчем і фіксує його кінцевий результат. Опишіть простір елементарних наслідків у цьому спостереженні.

31.14.° Тренер спостерігає за результатом забігу спортсмена на певну дістанцію, фіксуючи час забігу. Опишіть простір елементарних наслідків у цьому спостереженні.

31.15.° Гральний кубик підкидають двічі поспіль і записують у відповідній послідовності кількості очок, які випали на кубику при першому і другому підкиданнях. Опишіть елементарні наслідки цього експерименту. Скільки елементів містить простір елементарних наслідків?

31.16.° До шкільного парламенту входять 30 учнів, серед яких таємним голосуванням мають обрати спікера, віце-спікера та секретаря. Скільки елементарних наслідків має цей випадковий дослід?

31.17.° Для складання нормативів з фізкультури з 25 учнів класу випадковим чином формують першу групу з 8 учнів. Скільки елементарних наслідків може при цьому утворитися?

31.18.° Монету підкидають один раз і спостерігають за тим, на який бік вона впаде. Запишіть усі випадкові події у цьому досліді.

31.19.° Шість волейбольних команд ділять на дві групи A і B, по 3 команди в кожній. Скільки випадкових подій існує у цьому досліді?

31.20.° У коробці лежить декілька синіх, червоних і жовтих куль. Дослід полягає в тому, що навмання беруть одну кулю і визначають її колір. Скільки випадкових подій існує у цьому досліді?

31.21.° Експеримент полягає в одночасному киданні двох монет. Проведіть цей експеримент: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів, 4) 100 разів. Результати, отримані в кожній з чотирьох серій експериментів, занесіть у таблицю.

Номер серії	1	2	3	4
Кількість експериментів (кидань) у серії	10	20	50	100
Кількість експериментів, у яких випало два герби				
Кількість експериментів, у яких випав лише один герб				
Кількість експериментів, у яких не випало жодного герба				

У кожній з чотирьох серій експериментів підрахуйте частоту випадкової події:

1) випадіння двох гербів;
2) випадіння лише одного герба;
3) випадіння двох чисел.

Чи можна на основі зроблених спостережень припустити, що випадкова подія «випаде лише один герб» більш ймовірна, ніж випадкова подія «не випаде жодного герба»? Що обґрунтовує таке припущення? Чи можна на основі цих спостережень гарантувати, що перша названа подія більш ймовірна, ніж друга?

31.22.• Проведіть серію, яка складається із 200 експериментів, у яких підкидають кришку від напою (рис. 31.3). Знайдіть частоту події «кришка впаде емблемою напою вниз». За отриманими результатами оцініть ймовірність події «кришка впаде емблемою напою догори».

Рис. 31.3

31.23.• Експеримент полягає в киданні монети доти, доки не випаде герб. Результатом експерименту є кількість зроблених підкидань монети. Знайдіть простір елементарних наслідків. Проведіть такий експеримент 50 разів. Результати занесіть у таблицю. Знайдіть частоту випадкової події «кількість підкидань у досліді є непарним числом».

	Кількість дослідів
Кількість дослідів з результатом «1»	
Кількість дослідів з результатом «2»	
Кількість дослідів з результатом «3»	
Кількість дослідів з результатом «4»	
...	

31.24.• Експеримент полягає в одночасному киданні 5 однакових монет. Результатом експерименту є кількість гербів, які випали на цих 5 монетах. Знайдіть простір елементарних наслідків. Проведіть такий експеримент 100 разів. Результати занесіть у таблицю і знайдіть частоту випадкової події «випаде більше трьох гербів».

	Кількість дослідів
Кількість дослідів, у яких випало 0 гербів	
Кількість дослідів, у яких випав 1 герб	
Кількість дослідів, у яких випало 2 герби	
Кількість дослідів, у яких випало 3 герби	
Кількість дослідів, у яких випало 4 герби	
Кількість дослідів, у яких випало 5 гербів	

31.25.° Під час епідемії грипу було обстежено 80 000 жителів. Виявилося, що серед них частота випадків захворювання на грип складає 12,3 %. Крім цього, було з'ясовано, що серед захворілих 2245 людей робили щеплення проти грипу. Оцініть ймовірність події «навмання обрана людина серед тих, хто хворіє на грип, робила щеплення проти грипу».

31.26.° Учитель математики спостерігав за учнем Петром Спатилюбом протягом 175 навчальних днів. Виявилося, що частота спізнень до школи Петра складає 20 %. Крім цього, учитель помітив, що частота отримання негативної оцінки Петром у дні спізнень складає 40 %. Знайдіть кількість негативних оцінок, які отримав Петро через спізнення.

31.27.° У 2010 році 9788 учнів м. Києва брали участь у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, дані про яке наведено в таблиці (див. с. 115).

Оцініть ймовірність випадкової події:

1) отримати результат від 136 до 150 балів серед учнів Голосіївського району;
2) отримати результат більший за 183 бали серед учнів Печерського району;
3) появи учнів Солом'янського району серед тих учнів міста Києва, які набрали результат від 195,5 до 200 балів;
4) появи учнів Шевченківського району серед тих учнів міста Києва, які брали участь у тестуванні;
5) отримати результат більший за 150 балів серед учнів м. Києва.

31.28.° У таблиці (див. с. 116) наведено дані про кількість днів 2009 року, у яких у м. Харкові на 12:00 було зафіксовано дану температуру та даний рівень вологості повітря.

Підрахуйте частоту спостереження в 2009 році:

1) температури повітря в діапазоні від 11 °C до 20 °C серед тих днів, коли зафіксована вологість була не більше за 40 %;
2) вологості повітря в діапазоні від 71 % до 80 % серед тих днів, коли зафіксована температура була меншою від 0 °C;
3) температури повітря в діапазоні від 11 °C до 30 °C та одночасно вологості повітря в діапазоні від 41 % до 70 %.

31.29.°° Виробничий пристрій складається з двох автоматів. Автомати виробляють деталі, які поступають на спільний конвеєр. З досвіду роботи відомо, що частота отримання бракованої

Дані про учасників зовнішнього незалежного оцінювання з математики в м. Києві за 2010 рік

Діапазон балів, отриманих на тестуванні	Район м. Києва										Разом учнів
	Голосіївський	Дарницький	Деснянський	Дніпровський	Оболонський	Печерський	Подільський	Святошинський	Солом'янський	Шевченківський	
від 100 до 135,5 балів	95	98	158	165	81	29	61	120	75	74	956
від 136 до 150 балів	126	156	230	291	151	89	95	181	137	124	1580
від 150,5 до 183 балів	468	557	653	736	527	597	302	525	769	602	5736
від 183,5 до 195 балів	102	122	70	151	91	160	58	64	241	106	1165
від 195,5 до 200 балів	25	23	15	50	23	86	10	14	70	35	351
Разом учнів:	816	956	1126	1393	873	961	526	904	1292	941	9788

Дані про температуру і вологість повітря на 12.00 у м. Харкові за 2009 рік

Діапазон температури повітря	Діапазон вологості повітря						Разом днів
	від 0 % до 40 %	від 41 % до 60 %	від 61 % до 70 %	від 71 % до 80 %	від 81 % до 90 %	від 91 % до 100 %	
менше −11 °С	0	1	1	3	2	0	7
від −10° до −1 °С	0	0	11	15	13	5	44
від 0° до 10 °С	10	19	12	13	19	47	120
від 11° до 20 °С	23	27	15	6	10	2	83
від 21° до 30 °С	57	32	6	2	1	0	98
більше 31 °С	9	4	0	0	0	0	13
Разом днів:	99	83	45	39	45	54	365

деталі серед вироблених на першому автоматі складає 0,06, на другому автоматі — 0,02. Крім цього, автомати налаштовані працювати так, що на конвеєр деталі з першого автомата поступають у середньому втричі частіше, ніж з другого автомата. Оцініть ймовірність того, що навмання взята деталь з конвеєра є бракованою.

31.30.•• Є кілька коробок двох типів, у кожній з яких лежать білі та чорні кулі. На підставі великої кількості випробувань (навмання обирали коробку і кулю в ній) було встановлено, що частота випадкової події «взято білу кулю з коробки першого типу» дорівнює 0,3, а частота випадкової події «взято білу кулю з коробки другого типу» — 0,8. Крім цього, було з'ясовано, що частота випадкової події «кулю взято з коробки першого типу» дорівнює 0,4. Оцініть ймовірність того, що взята навмання куля виявиться білою.

32. Класичне визначення ймовірностей

На початку створення науки про закономірності випадкових явищ (так само, як і на початку створення, наприклад, геометрії) джерелом пізнання є лише людський досвід. На цьому етапі науковці намагаються описати характерні ознаки випадкових явищ так, щоб вони відповідали здоровому глузду і експериментальним спостереженням.

Так, спостерігаючи за частотою випадкової події, дослідники зрозуміли, що цю величину можна використовувати для оцінки ймовірності випадкової події і для знаходження властивостей функції p, що визначає ймовірність випадкових подій.

Розглянемо дослід з простором елементарних наслідків U. Нехай $A \subset U$, тобто A — випадкова подія. Тоді частота $\frac{n_A}{n}$ випадкової події A задовольняє нерівності $0 \leqslant \frac{n_A}{n} \leqslant 1$. Оскільки для чисельної оцінки ймовірності випадкової події використовують частоту цієї події, то вважають, що ймовірність випадкової події A задовольняє властивість:

1. $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Підрахуємо частоту неможливої події $\varnothing$ і частоту достовірної події U. Оскільки неможлива подія не відбувається в жодному досліді, то її частота дорівнює нулю. Навпаки, достовірна подія відбувається в кожному випробуванні, тому її частота дорівнює одиниці. Це дає підстави домовитись про таке:

2. $p(\varnothing)=0$, $p(U)=1$.

Розглянемо два довільних елементарних наслідки u_1, u_2 з простору елементарних наслідків U та випадкові події $A=\{u_1\}$, $B=\{u_2\}$, $C=\{u_1,u_2\}$. Якщо випробування було проведено n разів і при цьому випадкова подія C відбулася n_C разів, то частота випадкової події C дорівнює $\frac{n_C}{n}$. Випадкова подія $C=\{u_1,u_2\}$ відбувається тоді, коли результатом випробування є або елементарний наслідок u_1 (нехай це відбулося n_A разів), або елементарний наслідок u_2 (нехай це відбулося n_B разів), тобто $n_C=n_A+n_B$. Але частота події $A=\{u_1\}$ дорівнює $\frac{n_A}{n}$, а частота події $B=\{u_2\}$ дорівнює $\frac{n_B}{n}$. Отже, має місце рівність

$$\frac{n_C}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}.$$

Таким чином, частота випадкової події $C=\{u_1,u_2\}$ дорівнює сумі частот випадкових подій $A=\{u_1\}$ і $B=\{u_2\}$. Це дозволяє вважати, що аналогічну властивість мають і ймовірності випадкових подій A, B і C:

3. Якщо u_1,u_2 — довільні елементарні наслідки з простору елементарних наслідків U, то

$$p\left(\{u_1,u_2\}\right)=p\left(\{u_1\}\right)+p\left(\{u_2\}\right). \tag{1}$$

Використовуючи метод математичної індукції, рівність (1) можна узагальнити для k різних елементарних наслідків u_1, $u_2,\ldots,u_k$:

$$p\left(\{u_1,u_2,\ \ldots,u_k\}\right)=p\left(\{u_1\}\right)+p\left(\{u_2\}\right)+\ldots+p\left(\{u_k\}\right). \tag{2}$$

Якщо простір U елементарних наслідків складається з n елементів $U=\{u_1,u_2,\ \ldots,u_n\}$, то, використовуючи формулу (2), можна записати:

$$p\left(\{u_1\}\right)+p\left(\{u_2\}\right)+\ldots+p\left(\{u_n\}\right)=p\left(\{u_1,u_2,\ \ldots,u_n\}\right)=p(U)=1.$$

Отже, має місце рівність

$$p\left(\{u_1\}\right)+p\left(\{u_2\}\right)+\ldots+p\left(\{u_n\}\right)=1. \tag{3}$$

Сформульовані властивості функції p описують характерні властивості ймовірності в довільних випробуваннях. Більш змістовні висновки можна зробити для експериментів з рівноможливими елементарними наслідками.

Означення. **Якщо елементарні наслідки $u_1 \in U$, $u_2 \in U$ мають однакові шанси настання, тобто $p(\{u_1\}) = p(\{u_2\})$ то їх називають рівноможливими.**

Наприклад, при підкиданні грального кубика (рис. 32.1) простір елементарних наслідків складається з шести елементів $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ відповідно до того, яке число буде на верхній грані грального кубика, коли він упаде. Оскільки гральний кубик є симетричним і зроблений з однорідного матеріалу, то шанси випадіння кожної грані є рівними (у жодної грані немає ніяких переваг перед іншими гранями). Тому

Рис. 32.1

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = \ldots = p(\{6\}).$$

Крім цього, використовуючи формулу (3), маємо, що

$$p(\{1\}) + p(\{2\}) + \ldots + p(\{6\}) = 1.$$

Тому кожна з ймовірностей $p(\{1\}), \ldots, p(\{6\})$ дорівнює $\frac{1}{6}$.

Якщо у цьому досліді розглянути, наприклад, випадкову подію $A = \{1, 3, 5\}$ — «при підкиданні грального кубика випаде непарна кількість очок» — і скористатися формулою (2), то можна знайти ймовірність події A:

$$p(A) = p(\{1, 3, 5\}) = p(\{1\}) + p(\{3\}) + p(\{5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Узагалі, *якщо випробування має скінченний простір U з n рівноможливими елементарними наслідками, то ймовірність настання кожного елементарного наслідку дорівнює $\frac{1}{n}$. Якщо у цьому випробуванні випадкова подія A складається з k елементарних наслідків, то*

$$\boxed{p(A) = \frac{k}{n}.}$$

Визначення ймовірностей випадкових подій у випробуванні зі скінченною множиною рівноможливих елементарних наслідків називають **класичним визначенням ймовірностей.**

ПРИКЛАД Нехай у коробці лежать 10 червоних кульок. Яка ймовірність того, що взята навмання кулька буде червоного кольору? жовтого кольору?

Розв'язання. Очевидно, що при випробуванні за даних умов будь-яка взята навмання кулька буде червоного кольору. Тому простір елементарних наслідків складається з одного елемента U = {«взята кулька червоного кольору»}. З властивостей ймовірності маємо, що $p(U)=1$.

Також очевидно, що взята кулька не може бути жовтого кольору, адже в коробці їх немає. Тому випадковій події «взята кулька жовтого кольору» відповідає неможлива подія $\varnothing$. З властивості ймовірності маємо, що $p(\varnothing)=0$. ●

ПРИКЛАД Розглянемо експеримент, який полягає в тому, що однорідну монету підкидають один раз. Знайдіть ймовірність випадіння герба.

Розв'язання. У цьому експерименті простір елементарних наслідків складається з двох елементів: Г — «випаде герб» і Ч — «випаде число», тобто U = {Г, Ч}. Оскільки монета є однорідною і симетричною, то елементарні наслідки Г і Ч є рівноможливими. Тому, використовуючи класичне визначення ймовірностей, отримуємо $p(\{\text{Г}\})=\frac{1}{2}$. ●

ПРИКЛАД Нехай випущено 1 000 000 лотерейних білетів, 10 з яких є виграшними. Випробування полягає в тому, що купують один білет і з'ясовують, виграшний він чи ні. Яка ймовірність виграшу?

Розв'язання. У цьому експерименті простір елементарних наслідків складається з двох елементів: В — «білет виграшний» і П — «білет програшний», тобто U = {В, П}. Проте немає підстав вважати ці елементарні наслідки рівноможливими.

Для того щоб розв'язати задачу, опишемо її умову іншою ймовірнісною моделлю. Уявімо, що всі 1 000 000 лотерейних білетів пронумеровані числами від 1 до 1 000 000 (можливо, вони і справді мають такі серійні номери). Процес купівлі білета полягає у випадковому виборі одного з лотерейних білетів, причому в жодного з білетів немає переваги щодо того, бути чи не бути купленим. Отже, у такій моделі експеримент полягає у випадковому виборі одного числа з 1 000 000 варіантів, тобто простір елементарних наслідків має вигляд $U = \{1, 2, 3, ..., 1\,000\,000\}$. Тепер усі елементарні наслідки є рівноможливими. Подія, яка нас цікавить, складається з 10 елементарних наслідків. Тому за класичним визначенням ймовірностей ймовірність виграшу при купівлі одного білета дорівнює $\frac{10}{1\,000\,000}=\frac{1}{100\,000}$. ●

ПРИКЛАД 4 Кидають одночасно два гральних кубики: синій і жовтий. Яка ймовірність того, що сума чисел на двох кубиках дорівнюватиме 11?

Розв'язання. За допомогою таблиці, зображеної на рисунку 32.2, ми можемо встановити, що в даному експерименті можна отримати 36 елементарних наслідків. Кожний наслідок задається впорядкованою парою чисел $(a; b)$, де натуральні числа a і b набувають значень від 1 до 6. Випадкова подія «сума чисел, що випадуть, дорівнює 11» задається двоелементною множиною $A = \{(5; 6), (6; 5)\}$.

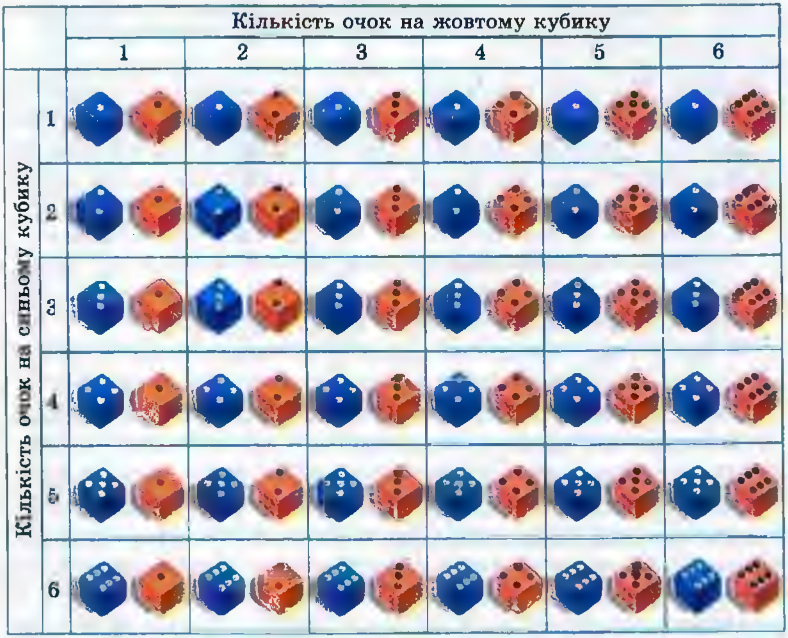


Рис. 32.2

Життєвий досвід підказує, що всі 36 елементарних наслідків є рівноможливими. Наше припущення можна підкріпити такими міркуваннями. Розглянемо, наприклад, два елементарних наслідки $(1; 2)$ і $(3; 5)$. Ймовірність випадіння комбінації $(1; 2)$ така сама, як і ймовірність випадіння комбінації $(1; 5)$. Справді, пари $(1; 2)$ і $(1; 5)$ відрізняються лише числом, яке випало на жовтому кубику, а жовтий гральний кубик є симетричним. Тому жодна з пар $(1; 2)$

і $(1;5)$ не має переваг перед іншою. Аналогічно, однакові шанси випадіння мають пари $(1;5)$ і $(3;5)$. Це означає, що

$$p(\{(1;2)\}) = p(\{(1;5)\}) = p(\{(3;5)\}).$$

Так само встановлюємо, що всі 36 елементарних наслідків є рівноможливими. Тому за класичним визначенням ймовірностей

$$p(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}. \bullet$$

Зазначимо, що при записі розв'язувань ймовірнісних задач у простих випадках (задачі з монетами, гральними кубиками тощо) обґрунтування рівноможливості елементарних наслідків, як правило, опускають.

ПРИКЛАД У двох урнах лежать кулі, які відрізняються тільки кольором. У першій урні лежить n куль: дві білі, а решта чорні, а в другій — m куль: три білі, а решта чорні. З кожної урни навмання дістають по одній кулі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з двох куль виявиться білою?

Розв'язання. Цей дослід має такі елементарні наслідки:

1) обидві кулі, які витягли, є білими;

2) обидві кулі, які витягли, є чорними;

3) куля з першої урни — біла, а з другої — чорна;

4) куля з першої урни — чорна, а з другої — біла.

Проте немає підстав вважати ці наслідки рівноможливими.

Для того щоб мати змогу в даному досліді розглядати рівноможливі результати, пронумеруємо всі $n + m$ куль. Тоді елементарним наслідком даного випробування буде будь-яка пара чисел $(a;b)$, де число a вказує на номер кулі, яку взято з першої урни, а число b — на номер кулі з другої урни. Кулі з урн беруть навмання. Тому в даному експерименті елементарні наслідки є рівноможливими.

Оскільки в першій урні лежить n куль, а в другій m куль, то з них можна утворити $n \cdot m$ указаних пар $(a;b)$. Оскільки в першій урні лежать $(n - 2)$ чорні кулі, а в другій — $(m - 3)$ чорні, то існує $(n - 2) \cdot (m - 3)$ пар куль чорного кольору. Тому кількість пар куль, серед яких є щонайменше одна біла, дорівнює $nm - (n - 2) \cdot (m - 3) = 3n + 2m - 6$. Отже, кількість результатів, сприятливих для події «хоча б одна з куль виявиться білою» (подія A), дорівнює $3n + 2m - 6$.

Таким чином, $p(A) = \dfrac{3n + 2m - 6}{nm}$. ●

ПРИКЛАД У партії з 200 цеглин є 5 бракованих. Яка ймовірність того, що з 8 вибраних навмання цеглин цієї партії 2 будуть браковані, а 6 — не браковані?

Розв'язання. Перенумеруємо цеглини числами від 1 до 200. Тоді елементарним наслідком даного випробування можна вважати будь-яку 8-елементну підмножину множини $\{1, 2, \ldots, 200\}$. Тому простір елементарних наслідків складається з C_{200}^8 елементів. Оскільки цеглини обирають навмання, то всі елементарні наслідки є рівноможливими.

Підрахуємо кількість таких 8-елементних підмножин, серед яких два числа відповідають бракованим цеглинам, а решта 6 — не бракованим. З 5 бракованих цеглин обрати 2 цеглини можна C_5^2 способами, а з 195 небракованих цеглин обрати 6 можна C_{195}^6 способами. Використовуючи правило множення, маємо, що існує $C_5^2 \cdot C_{195}^6$ способів обрати 8-елементну підмножину цеглин, серед яких рівно дві бракованих (подія A). Тому $p(A) = \frac{C_5^2 C_{195}^6}{C_{200}^8}$. ●

Вправи

32.1.° У шухляді лежать 8 синіх та 12 червоних олівців. Яка ймовірність взяти навмання з шухляди: 1) ручку; 2) олівець?

32.2.° Натуральне число a випадковим чином перетворюють або на число $2a + 4$, або на число $a(a + 1)$. Яка ймовірність того, що отримане число буде: 1) парним; 2) непарним?

32.3.° У пачці грошей 100 банкнот. Продавець магазину для розрахунку з покупцем обирає навмання одну купюру з пачки. Яка ймовірність того, що він обере банкноту з найбільшим серійним номером?

32.4.° Набираючи номер телефону свого товариша, Микола забув останню цифру. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

32.5.° З множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання обирають одне число. Яка ймовірність того, що це число дорівнює:

1) двом;
2) п'яти;
3) непарному числу;
4) числу, яке кратне 4;
5) числу, яке не ділиться націло на 3?

32.6.° У коробці лежать 17 карток, пронумерованих натуральними числами від 1 до 17. З коробки навмання беруть одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:
1) 12; 3) кратне 3; 5) двоцифрове;
2) парне; 4) не кратне 5; 6) просте?

32.7.° У коробці лежать a синіх, b жовтих та c червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою; 3) не червоною?

32.8.° У мішку Діда Мороза лежать n плюшевих ведмедиків, m цукерок і k мандаринів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання подарунок виявиться: 1) ведмедиком; 2) їстівним; 3) не цукеркою?

32.9.° Зі слова «ЛАСОЩІ» послідовно навмання обирають 4 букви. Яка ймовірність того, що, послідовно записавши вибрані чотири букви, отримають слово «САЛО»?

32.10.° Зі слова «ПІВДЕНЬ» послідовно навмання обирають 6 букв. Яка ймовірність того, що, послідовно записавши вибрані шість букв, отримають слово «ВІДЕНЬ»?

32.11.° Абонент забув дві останні цифри номера телефону і набирає їх навмання. Яка ймовірність правильно набрати номер з першої спроби, якщо абонент тільки пам'ятає, що дві останні цифри: 1) парні; 2) різні і непарні?

32.12.° З 60 кубиків розміром $1 \times 1 \times 1$ склали прямокутний паралелепіпед розміром $3 \times 4 \times 5$ і його поверхню пофарбували в синій колір. Після цього 60 кубиків ретельно перемішали. Яка ймовірність того, що у кубика $1 \times 1 \times 1$, який узято навмання: 1) три сині грані; 2) рівно дві сині грані; 3) рівно одна синя грань; 4) жодна грань не є синьою?

32.13.° У шухляді лежать олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 штук менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність того, що вибраний навмання предмет:

1) є ручкою, дорівнює $\frac{5}{8}$; 2) є олівцем, дорівнює $\frac{1}{6}$?

32.14.° Подарунковий комплект містить 12 зелених і декілька червоних надувних куль. Скільки червоних куль у комплекті, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля:

1) виявиться зеленою, дорівнює $\frac{3}{7}$;

2) виявиться червоною, дорівнює $\frac{2}{5}$?

32.15.° У класі навчаються 30 учнів — 18 хлопців і 12 дівчат. Для чергування в їдальні треба 4 учні, яких обирають випадково. Яка ймовірність того, що це будуть чотири дівчинки?

32.16.° У скарбничці Андрія 40 монет різних країн, серед яких 6 українських. Андрій бере навмання 3 монети. Яка ймовірність того, що всі ці монети будуть українськими?

32.17.° На торговельному лотку лежать яблука — 20 жовтих і 9 червоних. Покупець хоче придбати 4 яблука, які продавець обирає навмання. Яка ймовірність того, що всі яблука покупця виявляться одного кольору?

32.18.° Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 9 призових. Учень вибирає навмання 7 білетів. Яка ймовірність того, що серед вибраних буде 2 призових білети та 5 непризових білетів?

32.19.° На двох паралельних прямих позначено точки — 8 на одній прямій і 12 на іншій. З цих 20 точок навмання обирають три. Яка ймовірність того, що три обрані точки є вершинами трикутника?

32.20.° На двох паралельних прямих позначено точки — 16 на одній прямій і 10 на іншій. Із цих 26 точок навмання обирають чотири. Яка ймовірність того, що ці чотири обрані точки є вершинами чотирикутника?

32.21.° Дослід полягає в тому, що монету послідовно кидають три рази і записують, якою стороною впала монета при кожному з трьох підкидань. Яка ймовірність того, що:

1) випадуть три герби;
2) жодного разу не випаде число;
3) при другому киданні монети випаде герб;
4) перший раз герб випаде при другому киданні монети;
5) рівно двічі випаде герб;
6) принаймні двічі випаде герб;
7) герб і число випадуть принаймні по одному разу?

32.22.° Гральний кубик кидають 2 рази. Яка ймовірність того, що:

1) випадуть дві шістки;
2) випадуть числа, сума яких дорівнює 4;
3) другого разу випаде трійка;
4) першого разу випаде менше 5 очок, а другого — більше 2;
5) першого разу випаде більше очок, ніж другого?

32.23.° Одночасно підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що:
1) випадуть шістка і трійка;
2) випадуть числа, сума яких дорівнює 8;
3) першого разу випаде очок удвічі більше, ніж другого?

32.24.•• Гральний кубик підкидають доти, доки не з'явиться перша шістка. Знайдіть ймовірність появи першої шістки на k-му підкиданні кубика.

32.25.•• Знайдіть ймовірність того, що в серії з 10 підкидань монети герб перший раз з'явиться на четвертому підкиданні.

32.26.•• Знайдіть ймовірність появи 6 гербів при одночасному підкиданні 9 монет.

32.27.•• Кожне з 10 тестових запитань має 4 варіанти відповідей, з яких тільки одна правильна. Учень відповідає на тестові запитання навмання. Яка ймовірність того, що він дасть рівно 7 правильних відповідей?

32.28.•• У кожній з 8 коробок лежать по 3 кулі — одна зелена і дві червоні. З кожної коробки навмання беруть по одній кулі. Яка ймовірність того, що серед взятих 8 куль виявиться 3 зелені?

32.29.•• У ящику лежать 7 білих і 3 чорних кулі. З ящика навмання видаляють дві кулі, про колір яких нічого не відомо. Після цього з ящика виймають одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля чорна.

32.30.•• У коробці лежали 25 олівців — 15 синіх і 10 червоних. З часом один олівець загубився. Коли після цього з коробки навмання дістали один олівець, то він виявився синім. Яка ймовірність того, що загубився червоний олівець?

32.31.•• У зв'язці n ключів, серед яких лише один підходить до замка. Ключі послідовно обирають навмання і намагаються відкрити замок (якщо ключ не підійшов, то його більше не використовують). Яка ймовірність того, що замок буде відкрито на k-й спробі?

32.32.•• Для шкільної лотереї виготовили n білетів, серед яких лише один виграшний. Троє друзів вирішили взяти участь у лотереї, придбавши по черзі по одному білету. З'ясуйте, у кого більше шансів купити виграшний квиток — у того, хто купить першим, другим чи третім?

32.33.** Клас з 28 учнів зайшов до кабінету, у якому 15 парт (по 2 учні за партою). Учні розсаджуються випадковим чином. Яка ймовірність того, що одна парта залишиться вільною?

32.34.** Сімнадцять карток пронумеровано натуральними числами від 7 до 21. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток буде непарним числом?

32.35.** Дослід полягає в одночасному киданні чотирьох гральних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що випадуть:

1) дві п'ятірки і дві трійки;
2) чотири різні цифри;
3) рівно три одиниці;
4) лише цифри, що більші за четвірку.

32.36.** Гральний кубик кидають тричі поспіль. Знайдіть ймовірність того, що:

1) випадуть одиниця, двійка і п'ятірка в довільному порядку;
2) не випаде жодної шістки;
3) випадуть лише трійки або двійки;
4) перша шістка випаде при другому підкиданні кубика.

32.37.** На кожній з 10 тарілок лежать по одному яблуку, персику, апельсину, груші та сливі. З кожної тарілки навмання беруть по одному плоду. Яка ймовірність того, що серед взятих плодів не буде ні яблука, ні груші?

32.38.** Знайдіть ймовірність того, що жоден з 5 навмання вибраних людей не народився в неділю.

32.39.** У ящику лежать 20 червоних, 10 жовтих і 5 зелених яблук. Навмання обирають 7 яблук. Яка ймовірність того, що серед вибраних яблук є 2 червоних, 4 жовтих і 1 зелене?

32.40.** Для гри заготовлено 24 картки — 12 штук із синього паперу, 8 із жовтого та 4 з червоного. Навмання вибирають 9 карток. Яка ймовірність того, що серед вибраних карток є 4 сині, 3 жовті і 2 червоні картки?

32.41.** Ряд кінотеатру містить 20 місць, на які випадковим чином сідають 20 учнів одного класу, у тому числі 3 відмінники. Знайдіть ймовірність того, що всі три відмінники сидітимуть поруч.

32.42.** У чергу випадковим чином стають n людей: $A_1, A_2, ..., A_n$. Визначте ймовірність таких подій:

1) A_1 буде першим у черзі;
2) A_n не буде останнім у черзі;
3) A_1, A_2, A_3 стоятимуть у черзі один за одним саме в такому порядку.

32.43.** Дослід полягає в підкиданні монети. Для оцінки ймовірності події A — «при підкиданні монети випаде герб» — дослід планується провести 10 разів і обчислити частоту події A. Яка ймовірність того, що обчислена при цьому частота події A виявиться меншою від 0,3?

32.44.** Для підготовки до залікової роботи запропоновано 45 задач. Учень підготував розв'язання тільки 35 задач. Робота складається з 5 завдань, які обирають випадковим чином, і вважається зарахованою, якщо правильно розв'язано принаймні 4 задачі. Яка ймовірність того, що учень складе залікову роботу?

32.45.** У конверті дівчинки лежать 50 світлин, серед яких є чотири однакові. Дівчинка збирається подарувати одну з однакових світлин подружці. Для цього вона навмання дістає з конверту 8 світлин. Яка ймовірність того, що серед них буде принаймні одна шукана світлина?

32.46.** Василь кидає гральний кубик. Якщо випадає менше ніж трійка, Василь кидає кубик ще раз і вважає результатом досліду суму чисел, що випали. У противному разі результатом досліду є число, що випало при першому підкиданні. Яка ймовірність того, що результат досліду більше ніж 5?

32.47.** Оксана і Марина грають у таку гру. Спочатку Оксана кидає гральний кубик один раз, а потім Марина — ще двічі. Марина виграє, якщо вона за два своїх підкидання кубика в сумі набере очок рівно стільки, скільки Оксана набрала за одне підкидання. Яка ймовірність виграшу Марини?

32.48.** Андрій та 19 його однокласників, серед яких 10 дівчат і 9 хлопців, випадковим чином сідають за круглий стіл. Яка ймовірність того, що поряд з Андрієм будуть сидіти дві дівчинки?

32.49.** У чергу випадковим чином стають 20 людей: A, B, C, ... Визначте ймовірність того, що A буде стояти раніше ніж B і одночасно B буде стояти раніше ніж C.

32.50.** Є 3 пронумерованих ящики та 20 куль. Усі 20 куль навмання послідовно розкладають по ящиках. Яка ймовірність того, що до першого ящика потраплять 10 куль, до другого — 6, а до третього — 4?

32.51.** На кінцевій зупинці до вагону метро увійшли n пасажирів. Кожний з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якій наступній станції метро (вітка метро складається з $k+1$ станції, включаючи дві кінцеві). Знайдіть ймовірність події:

1) усі n пасажирів вийдуть на другій станції;
2) усі n пасажирів вийдуть на одній станції;
3) усі n пасажирів вийдуть на різних станціях.

32.52.* У класі 22 хлопчики, яких випадковим чином ділять на дві команди по 11 чоловік для гри у футбол. Яка ймовірність того, що два найсильніших гравці потраплять до різних команд?

32.53.* Два гравці кидають монету. Перший гравець кидає монету 50 разів, а другий 51 раз. Позначимо через n кількість гербів, що випадуть у першого гравця, а через m — кількість гербів, що випадуть у другого гравця. Яка ймовірність того, що $n<m$?

32.54.* П'ять куль навмання розкладають по п'яти ящиках. Яка ймовірність того, що рівно один ящик залишиться вільним?

32.55.* Гравці A і B підкидають монету. Якщо випадає герб, то одне очко отримує гравець A, у противному разі — гравець B. У грі виграє той, хто першим набере 7 очок. Після 9 підкидань гравці загубили монету і гру довелося припинити з рахунком 6 : 3 на користь гравця A. Яка ймовірність того, що у цій грі переміг би гравець A, якби гру було закінчено?

32.56.* У комплекті 13 карток, 10 з яких підписано натуральними числами від одиниці до десяти, а 3 картки підписано літерами A, B, C. З комплекту навмання взяли 4 картки, серед яких виявилася картка з літерою. Яка ймовірність того, що серед цих 4 карток є ще принаймні одна картка з літерою? Чи зміниться відповідь на поставлене запитання, якщо відомо про наявність серед 4 обраних карток не просто картки з літерою, а картки з літерою A?

32.57.* З множини $\{1, 2, 3, ..., 20\}$ навмання обирають п'ятиелементну підмножину. Яка ймовірність того, що серед обраних п'яти чисел є два послідовних натуральних числа?

33. Операції з випадковими подіями

Розглянемо випробування з простором елементарних наслідків U. Нагадаємо, що випадковою подією називають довільну підмножину простору елементарних наслідків U. Отже, випадкові події — це множини, а з множинами можна виконувати певні операції: об'єднувати, перетинати тощо. Тому природно, що аналогічні операції розглядають і для випадкових подій, надаючи їм ймовірнісного змісту.

Також нагадаємо, що випадкова подія X відбувається лише тоді, коли дослід закінчився елементарним наслідком u, який є елементом множини X.

Нехай дослід полягає в підкиданні грального кубика, тобто $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Розглянемо дві випадкові події: $A=\{3, 4, 5, 6\}$ і $B=\{1, 2, 3, 4\}$, тобто подія A відбувається тоді, коли випало число, що не менше від 3, а подія B — тоді, коли випало число, що не більше за 4. Множина $A \cap B=\{3, 4\}$ — це випадкова подія, яка відбувається тоді, коли випало число, що не менше від 3 і не більше за 4. Таким чином, випадкова подія $A \cap B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли одночасно відбуваються випадкові події A і B.

Означення. Нехай A і B — випадкові події деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли відбуваються і випадкова подія A, і випадкова подія B, називають *перетином випадкових подій* A і B.

Отже, $A \cap B$ — це перетин випадкових подій A і B.

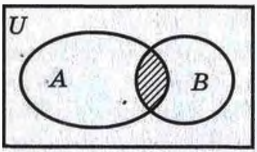


Рис. 33.1

Перетин випадкових подій A і B проілюстровано на рисунку 33.1.

Аналогічним чином означають перетин трьох та більшої кількості випадкових подій.

У досліді з гральним кубиком розглянемо випадкові події: $C=\{1, 2\}$ і $D=\{5, 6\}$, тобто подія C відбувається тоді, коли випало число, що не більше за 2, а подія D — тоді, коли випало число, що не менше за 5. Множина $C \cup D=\{1, 2, 5, 6\}$ — це випадкова подія, яка відбувається тоді, коли випало число, що або не більше за 2, або не менше від 5. Таким чином, випадкова подія $C \cup D$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з двох подій — або C, або D.

Означення. **Нехай A і B — випадкові події деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли відбувається принаймні одна з двох подій A або B, називають об'єднанням випадкових подій A і B.**

Отже, $A \cup B$ — це об'єднання випадкових подій A і B.

Об'єднання випадкових подій A і B проілюстровано на рисунку 33.2.

Так само означають об'єднання трьох та більшої кількості випадкових подій.

Якщо в досліді з гральним кубиком розглянути випадкові події $A = \{3, 4, 5, 6\}$ і $C = \{1, 2\}$, то в просторі елементарних наслідків $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ кожна з них є *доповненням* іншої, тобто $A \cap C = \varnothing$ і $A \cup C = U$. Доповнення множини A позначають $\overline{A}$. Отже, можна записати: $A = \overline{C}$ і $C = \overline{A}$.

Зрозуміло, що випадкова подія A відбувається лише тоді, коли не відбувається випадкова подія C. Так само випадкова подія C відбувається лише тоді, коли не відбувається випадкова подія A.

Означення. **Нехай A — випадкова подія деякого випробування. Випадкову подію, яка відбувається лише тоді, коли не відбувається подія A, називають доповненням події A.**

Отже, $\overline{A}$ — це доповнення випадкової події A.

Доповнення випадкової події A проілюстровано на рисунку 33.3.

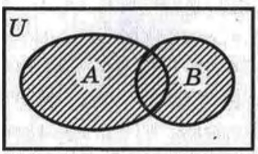


Рис. 33.2

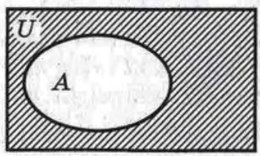


Рис. 33.3

Використовуючи операції перетину, об'єднання та доповнення, можна означати інші операції з випадковими подіями. Наприклад, операцію **різниці випадкових подій A і B** (позначають $A \setminus B$) означають рівністю $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Випадкова подія $A \setminus B$ відбувається лише тоді, коли відбувається подія A і одночасно не відбувається подія B.

Різницю випадкових подій A і B проілюстровано на рисунку 33.4.

Означення. **Якщо дві випадкові події A і B деякого випробування не перетинаються, тобто $A \cap B = \varnothing$, то їх називають несумісними.**

Іншими словами, випадкові події A і B називають несумісними, якщо вони не можуть відбутися одночасно.

Наприклад, у досліді з підкиданням грального кубика випадкові події $C = \{1, 2\}$ і $D = \{5, 6\}$ є несумісними. Випадкові події A і $B \setminus A$ завжди несумісні, зокрема, несумісними є події A і $\bar{A}$.

Несумісність випадкових подій A і B проілюстровано на рисунку 33.5.

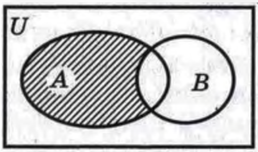


Рис. 33.4

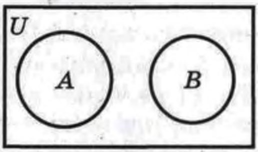


Рис. 33.5

Сформулюємо властивості функції ймовірності p, пов'язані з операціями над випадковими подіями.

1. ***Якщо випадкові події A і B деякого випробування є несумісними, то***

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B)} \qquad (1)$$

Рівність (1) можна підтвердити, використовуючи поняття частоти. Справді, нехай випробування було проведене n разів і при цьому випадкова подія A відбулася n_A разів, а подія B відбулася n_B разів. Оскільки події A і B є несумісними, то випадкова подія $C = A \cup B$ відбулася $n_C = n_A + n_B$ разів. Має місце рівність

$$\frac{n_C}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n}.$$

Відношення $\frac{n_A}{n}$ — це частота події A, а відношення $\frac{n_B}{n}$ — це частота події B.

Таким чином, частота випадкової події $C = A \cup B$ дорівнює сумі частот несумісних випадкових подій A і B, що й відповідає рівності (1).

Використовуючи метод математичної індукції, рівність (1) можна поширити на три або більшу кількість попарно несумісних випадкових подій:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n).$$

Таким чином, *ймовірність скінченного об'єднання попарно несумісних випадкових подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.*

З формули (1) можна отримати такі наслідки.

2. ***Якщо A — випадкова подія, то***

$$\boxed{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$$

Справді, випадкові події A та $\overline{A}$ є несумісними. Крім цього, $A \cup \overline{A} = U$. Тоді

$$p(A) + p(\overline{A}) = p(A \cup \overline{A}) = p(U) = 1.$$

3. ***Якщо A і B — випадкові події деякого випробування і $A \subset B$, то***

$$\boxed{p(A) \leqslant p(B)}$$

Справді, якщо $A \subset B$, то випадкову подію B можна подати у вигляді об'єднання двох несумісних випадкових подій A і $B \setminus A$ (рис. 33.6). Тоді $p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$. Оскільки $p(B \setminus A) \geqslant 0$, то $p(B) \geqslant p(A)$.

Рис. 33.6

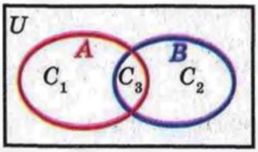


Рис. 33.7

Теорема 33.1. ***Якщо A і B — випадкові події деякого випробування, то***

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)} \qquad (2)$$

Доведення. Розглянемо такі випадкові події:

$$C_1 = A \setminus B, \quad C_2 = B \setminus A, \quad C_3 = A \cap B.$$

Неважко переконатися (див. рис. 33.7), що ці події попарно несумісні і виконується рівність

$$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

Тоді, використовуючи рівність (1), маємо:

$$p(A \cup B) = p(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = p(C_1) + p(C_2) + p(C_3).$$

Звідси

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(C_1) + p(C_2) + 2p(C_3). \qquad (3)$$

Водночас, оскільки $A = C_1 \cup C_3$ і $B = C_2 \cup C_3$, то можна записати, що

$$p(A) = p(C_1 \cup C_3) = p(C_1) + p(C_3),$$

$$p(B) = p(C_2 \cup C_3) = p(C_2) + p(C_3).$$

Додаючи дві останні рівності, отримуємо:

$$p(A) + p(B) = p(C_1) + p(C_2) + 2p(C_3). \qquad (4)$$

З рівностей (3) і (4) випливає справедливість рівності (2). ▲

ПРИКЛАД 1 З коробки, у якій лежать дитячі пірамідки та кубики, навмання беруть одну іграшку (кожна з іграшок жовтого або блакитного кольору). Відомо, що ймовірність взяти пірамідку дорівнює $\frac{2}{5}$, блакитну іграшку — $\frac{2}{3}$, а жовтий кубик — $\frac{1}{4}$. Яка ймовірність того, що витягнуть блакитну пірамідку?

Розв'язання. Для зручності будемо використовувати такі скорочення: «П» — пірамідка, «К» — кубик, «ж» — іграшка жовтого кольору та «б» — іграшка блакитного кольору. Тоді в даному випробуванні простір елементарних наслідків має вигляд U = {Пж, Пб, Кж, Кб}.

Нехай випадкова подія A полягає в тому, що витягнули пірамідку, тобто A = {Пж, Пб}; випадкова подія B полягає в тому, що витягнули іграшку блакитного кольору, тобто B = {Пб, Кб}; подія C — у тому, що витягнули жовтий кубик, тобто C = {Кж}; а подія X — у тому, що витягнули блакитну пірамідку, тобто X = {Пб}.

Неважко побачити, що випадкова подія X = {Пб} є перетином випадкових подій A = {Пж, Пб} і B = {Пб, Кб}. Отже, треба знайти ймовірність $p(X) = p(A \cap B)$.

Водночас випадкова подія $A \cup B$ = {Пж, Пб, Кб} є доповненням випадкової події C = {Кж}, тобто $p(A \cup B) = 1 - p(C) = \frac{3}{4}$.

Використовуючи формулу теореми 33.1, знаходимо

$$p(X) = p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{19}{60}. \bullet$$

Розглянемо дослід, у якому монету підкидають двічі поспіль. Тоді простір елементарних наслідків складається з 4 елементів:

$$U = \{ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ\},$$

де Г означає випадіння герба, а Ч — випадіння числа на монеті. Розглянемо дві випадкові події:

$A = \{ГГ, ЧГ\}$ (при другому підкиданні монети випав герб);

$B = \{ГГ, ГЧ\}$ (при першому підкиданні монети випав герб).

Оскільки цей дослід з рівноможливими елементарними наслідками, то ймовірності подій A і B можна обчислити, використовуючи класичне визначення ймовірностей:

$$p(A) = p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

А чи зміниться ймовірність випадіння герба при другому підкиданні (подія A), коли відомо, що при першому підкиданні вже випав герб (відбулася подія B)? Наш досвід підказує, що ймовірність не повинна змінитися, оскільки друге підкидання монети виконується незалежно від результату першого підкидання.

Означення. Нехай A і B — випадкові події деякого випробування. Якщо ймовірність події A не змінюється від того, що відбулася подія B, а ймовірність події B не змінюється від того, що відбувалася подія A, то випадкові події A і B називають незалежними.

Наприклад, нехай гральний кубик підкидають двічі і при першому підкиданні випала шістка (подія A). Повідомлення про те, що відбулася випадкова подія A, не змінює шанси випадіння, наприклад, трійки при другому підкиданні кубика (подія B). Так само інформація про те, що при другому підкиданні кубика випала трійка, не змінює ймовірність того, що при першому підкиданні кубика випала шістка. Отже, випадкові події A і B є незалежними.

Якщо в цьому досліді розглянути ще одну випадкову подію C — «сума чисел, що випали на кубику при першому і другому підкиданнях, дорівнює 12», то випадкові події A і C є залежними одна від одної. Справді, випадкова подія C відбувається лише тоді, коли обидва рази випадуть шістки, тому $p(C) = \frac{1}{36}$. Якщо ж відомо, що відбулася випадкова подія A, то випадкова подія C відбувається тоді, коли при другому підкиданні також випаде шістка. Ймовірність цього дорівнює $\frac{1}{6}$. Отже, ймовірність випадкової події C змінилася при повідомленні про те, що відбулася випадкова подія A, і стала рівною $\frac{1}{6}$. Цей факт записують так: $p_A(C)=\frac{1}{6}$.

Узагалі, коли йдеться про ймовірність випадкової події A за умови, що відбулася подія B, то таку ймовірність позначають $p_B(A)$ і називають *умовною ймовірністю*. Наприклад, для розглянутого досліду можна записати, що $p_B(A)=p(A)$ і $p_A(B)=p(B)$. Ці рівності означають, що випадкові події A і B є незалежними.

Якщо ймовірність випадкової події B не дорівнює нулю, то для обчислення $p_B(A)$ можна використати формулу

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}. \tag{5}$$

Підтвердимо рівність (5), спираючись на поняття частоти випадкової події.

Нехай випробування проведено n разів і при цьому випадкова подія B відбулася n_B разів, а подія $C=A\cap B$ — n_C разів. Тоді $\frac{n_B}{n}$, $\frac{n_C}{n}$ — частоти випадкових подій B і C відповідно.

Якщо відбулася випадкова подія B, то подія A відбувається тоді і лише тоді, коли відбувається подія $C=A\cap B$. Тому якщо серед n проведених випробувань розглянути лише ті, у яких відбулася випадкова подія B, то серед цих n_B випробувань випадкова подія A відбулася n_C разів. Отже, коли $n_B\in\mathbb{N}$, то частота випадкової події A за умови, що відбулася випадкова подія B, дорівнює $\frac{n_C}{n_B}$. Перепишемо це відношення так:

$$\frac{n_C}{n_B}=\frac{\frac{n_C}{n}}{\frac{n_B}{n}},$$

Остання рівність означає таке: частота випадкової події A за умови, що відбулася випадкова подія B, дорівнює відношенню частоти випадкової події $C=A\cap B$ до частоти випадкової події B, що відповідає рівності (5).

Теорема 33.2. ***Якщо випадкові події A і B деякого випробування є незалежними, то***

$$p(A \cap B) = p(A)\,p(B). \qquad (6)$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $p(B) = 0$.

Оскільки $A \cap B \subset B$, то $p(A \cap B) \leqslant p(B) = 0$. Звідси маємо, що $p(A \cap B) = 0$. Отже, рівність (6) виконується.

Розглянемо тепер випадок, коли $p(B) > 0$. Якщо A і B — незалежні випадкові події, то ймовірність події A не залежить від того, чи відбулася подія B, тобто

$$p_B(A) = p(A).$$

Але з формули (5) маємо, що $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. Тому $p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. Звідси випливає формула (6). ▲

Поняття незалежності випадкових подій може бути поширене на три та більшу кількість подій. У такому випадку також має місце твердження: ***якщо випадкові події деякого випробування є незалежними, то ймовірність перетину цих випадкових подій дорівнює добутку їх ймовірностей***[1].

ПРИКЛАД При обстрілі суміші ізотопів Урану пучком нейтронів ймовірність початку керованої ядерної ланцюгової реакції складає 40 %. Яка ймовірність того, що з трьох таких незалежних дослідів лише в першому розпочнеться керована ядерна ланцюгова реакція?

Розв'язання. Нехай випадкова подія A полягає в тому, що в першому досліді реакція розпочалася, а випадкові події B і C полягають у тому, що в другому і третьому дослідах відповідно реакція не розпочалася. Тоді $A \cap B \cap C$ — випадкова подія, ймовірність якої треба знайти.

Зрозуміло, що $p(A) = 0{,}4$, а $p(B) = p(C) = 0{,}6$.

З умови задачі випливає, що випадкові події A, B, C є незалежними. Тому

$$p(A \cap B \cap C) = p(A)\,p(B)\,p(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}144.$$

Відповідь: 14,4 %.

---

[1] Іноді цю властивість використовують як означення незалежних (незалежних у сукупності) випадкових подій.

ПРИКЛАД У партії з 20 000 електролампочок є 500 бракованих. Дослід полягає в тому, що послідовно навмання обирають 40 лампочок. Яка ймовірність того, що бракованою виявиться лише перша лампочка з 40 обраних?

Розв'язання. Використовуючи комбінаторні формули, розв'язати задачу неважко. Елементарним наслідком даного випробування вважатимемо будь-який 40-елементний упорядкований набір чисел з множини $\{1, 2, \ldots, 20\,000\}$. Тому простір рівноможливих елементарних наслідків складається з $A_{20\,000}^{40}$ елементів.

Водночас кількість таких 40-елементних наборів, серед яких лише перший елемент відповідає бракованій лампочці (подія X), дорівнює $A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}$ (подумайте чому). Тому

$$p(X)=\frac{A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}.$$

Відповідь отримано, і задачу розв'язано. Проте поставимо дещо несподіване запитання: як скористатися такою відповіддю на практиці? Отримане число велике чи мале? Як у десятковому записі числа $p(X)$ знайти бодай декілька знаків після коми? Марна справа сподіватися підрахувати відповідні числа на калькуляторі, оскільки навіть після скорочення всіх отриманих дробів доведеться працювати з більш ніж 100-цифровими числами[1].

У таких випадках у теорії ймовірностей допускається розв'язувати задачу з певною похибкою (так само, як, наприклад, у шкільному курсі фізики нехтують опором повітря при розрахунку руху предмета).

Наведемо відповідні міркування.

Зауважимо, що ймовірність, узявши одну лампочку, натрапити на браковану становить $x=\frac{500}{20\,000}=0{,}025.$ Оскільки число 40 є малим порівняно з 20 000 і 500, то вважатимемо, що на кожному із 40 кроків ймовірність натрапити на браковану лампочку дорівнює x і не залежить від результатів, які було отримано на попередніх кроках.

---

[1] За допомогою спеціалізованих обчислювальних програм, які підтримують роботу з багатоцифровими числами, було знайдено, що $p(X)=\frac{A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}=0{,}00932\ldots$.

Позначимо через A_k випадкову подію — «взяти не браковану лампочку на k-му кроці», де $2 \leqslant k \leqslant 40$, а через B_1 позначимо випадкову подію — «взяти браковану лампочку на першому кроці». Тоді $p(A_k) = 1 - x = 0{,}975$, $p(B_1) = x = 0{,}025$. Випадкову подію X — «бракованою є лише перша лампочка з 40 обраних» — можна подати у вигляді

$$X = B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots \cap A_{40}.$$

Згідно з нашими домовленостями випадкові події B_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{40} є незалежними. Отже,

$$p(X) = p(B_1)\, p(A_2)\, p(A_3) \ldots p(A_{40}) = x(1-x)^{39} \approx 0{,}00931.$$

Таким чином, шукана ймовірність приблизно дорівнює 1 %. ●

ПРИКЛАД 4 У деякому випробуванні випадкова подія A відбувається з ймовірністю p. Випробування повторюють 5 разів (кожне з 5 випробувань відбувається незалежно від результатів інших випробувань). Яка ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 2 рази?

Розв'язання. Позначимо через A_1, A_2, ..., A_5 випадкові події, які полягають у тому, що випадкова подія A відбулася відповідно у першому, другому, ..., п'ятому випробуванні. Тоді

$$p(A_1) = p(A_2) = \ldots = p(A_5) = p,$$
$$p\left(\overline{A_1}\right) = p\left(\overline{A_2}\right) = \ldots = p\left(\overline{A_5}\right) = 1 - p.$$

Подія A відбувається рівно 2 рази, якщо відбувається одна з таких випадкових подій:

$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$ (подія A відбулася в першому і другому випробуваннях),

$B_2 = A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$ (подія A відбулася в першому і третьому випробуваннях),

...

$B_k = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4 \cap A_5$ (подія A відбулася в четвертому і п'ятому випробуваннях).

Зрозуміло, що в наведеному переліку кількість випадкових подій B_1, B_2, ..., B_k дорівнює C_5^2.

Обчислимо ймовірність події B_1. Оскільки кожне з 5 випробувань відбувається незалежно від результатів інших випробувань, то

$$p(B_1) = p(A_1)\, p(A_2)\, p\left(\overline{A_3}\right) p\left(\overline{A_4}\right) p\left(\overline{A_5}\right) = p^2(1-p)^3.$$

Аналогічно знаходимо, що ймовірність кожної з подій B_2, ..., B_k дорівнює $p^2(1-p)^3$.

Крім цього, випадкові події B_1, B_2, ..., B_k попарно несумісні. Наприклад, події B_1 і B_2 не можуть відбутися одночасно, бо в другому випробуванні при настанні події B_1 подія A відбувається, а при настанні події B_2 подія A не відбувається.

Тому ймовірність того, що подія A відбулася рівно 2 рази, дорівнює

$$p(B_1)+p(B_2)+\ldots+p(B_k)=C_5^2 p^2(1-p)^3.$$

Відповідь: $C_5^2 p^2(1-p)^3$.

Вправи

33.1.° Чи є випадкові події A і B несумісними в досліді, якщо:

1) монету підкидають один раз, A — «випав герб», B — «випало число»;
2) гральний кубик підкидають два рази, A — «випала одиниця при першому підкиданні», B — «випала шістка при другому підкиданні»;
3) у мішень стріляють два рази, A — «у мішень влучили двічі», B — «у мішень влучили рівно один раз».

33.2.° У деякому випробуванні з простором елементарних наслідків $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ розглядають випадкові події: $A=\{u_1, u_2\}$, $B=\{u_1, u_3, u_5\}$, $C=\{u_4, u_5\}$. Знайдіть усі елементарні наслідки, які належать випадковій події:

1) $A\cap B$;
2) $B\cup C$;
3) $A\cap C$;
4) $\overline{B}$;
5) $B\setminus C$;
6) $\overline{A}\cap C$.

33.3.° У деякому випробуванні, де простором елементарних наслідків є множина дійсних чисел $U=\mathbb{R}$, розглядають випадкові події: $A=[0;1]$, $B=(0;+\infty)$, $C=[1;3)$. За допомогою числових проміжків запишіть випадкову подію:

1) $A\cup B$;
2) $A\cap C$;
3) $\overline{B}$;
4) $B\setminus C$;
5) $A\cap\overline{C}$;
6) $A\cup B\cup C$.

33.4.° Напередодні футбольного матчу «Шахтар» — «Динамо» вболівальники обговорюють такі випадкові події:

A — «„Динамо“ не програє»;
B — «матч закінчиться внічию з рахунком 1:1»;
C — «„Шахтар“ переможе з рахунком 3:0»;

D — «у матчі заб'ють не більше двох голів».

Який рахунок може бути на табло після завершення матчу, якщо відбудеться випадкова подія:

1) $A \cap B$;
2) $B \cup C$;
3) $A \cap D$;
4) $\overline{A \cup C}$;
5) $D \setminus B$;
6) $\overline{C} \cup \overline{D}$?

33.5.° Серед учнів 11 класу навмання обирають одного. Випадкова подія A полягає в тому, що учень живе в приватному будинку, подія B — у тому, що учень любить морозиво, а подія C — у тому, що він має комп'ютер.

1) У чому полягає випадкова подія $A \cap B \cap \overline{C}$?

2) Коли має місце рівність $A \cap B = A$?

3) Коли має місце рівність $\overline{B} \cup C = C$?

33.6.° У коробці лежать сині, зелені та червоні кульки. З коробки послідовно навмання беруть дві кульки і розглядають такі випадкові події:

A — «обидві кульки одного кольору»;
B — «перша взята кулька зелена»;
C — «друга взята кулька не синя»;
D — «перша кулька червона, а друга не червона».

Що означає випадкова подія:

1) $A \cap B$;
2) $C \cup D$;
3) $A \cap D$;
4) $\overline{D}$;
5) $B \setminus C$;
6) $A \cap B \cap C$?

33.7.° Нехай A, B, C — випадкові події деякого випробування з простором елементарних наслідків U. Спростіть вираз:

1) $A \cap A$;
2) $A \cup \varnothing$;
3) $A \cap U$;
4) $A \cup \overline{A}$;
5) $(A \cup B) \cup A$;
6) $(A \setminus B) \cap A$;
7) $A \cap (B \cup \overline{A})$;
8) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$;
9) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

33.8.° Нехай A, B, C — випадкові події деякого випробування. Спростіть вираз:

1) $A \cup A$;
2) $A \cap \varnothing$;
3) $(A \cap B) \cap A$;
4) $(A \setminus B) \setminus B$;
5) $\overline{A \cap B}$;
6) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

33.9.° Нехай A, B, C — випадкові події деякого випробування. Розташуйте в порядку спадання ймовірностей випадкові події: $A \cup C$, $A \setminus B$, $A \setminus (B \setminus C)$, $\varnothing$, $(A \cap C) \setminus B$, A, $A \cup B \cup C$.

33.10.° Нехай A, B, C — випадкові події деякого випробування. Розташуйте в порядку зростання ймовірностей випадкові події: $B \cup C$, $A \setminus (A \setminus B)$, $A \cap (B \cup C)$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cup B \cup C$, $(A \cap B) \cup C$.

33.11.° Нехай A і B — незалежні випадкові події деякого випробування з ненульовими ймовірностями. Чи можуть випадкові події A і B бути несумісними?

33.12.° Про випадкові події A і B деякого випробування відомо, що $p(A) = p(B) = 0$. Доведіть, що:

1) $p(A \cap B) = 0$; 2) $p(A \setminus B) = 0$; 3) $p(A \cup B) = 0$.

33.13.° Про випадкові події A і B деякого випробування відомо, що $p(A) = p(B) = 1$. Доведіть, що:

1) $p(A \cup B) = 1$; 2) $p(A \cap B) = 1$.

33.14.° Робітник за зміну виготовляє n деталей. Випадкова подія A_k полягає в тому, що деталь з номером k виявиться бракованою. Використовуючи операції над подіями, запишіть випадкову подію:

1) перша деталь не має дефектів;
2) жодна з деталей не має дефектів;
3) лише перша деталь є бракованою;
4) лише деталі з парними номерами є бракованими.

33.15.° Науковець проводить 4 досліди. Випадкова подія A_k полягає в тому, що дослід з номером k виявиться вдалим. Використовуючи операції над подіями, запишіть випадкову подію:

1) усі 4 досліди вдалі;
2) не менше ніж один дослід є вдалим;
3) жоден з дослідів не є вдалим;
4) лише другий дослід є вдалим;
5) не менше трьох дослідів є вдалими.

33.16.° Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — випадкові події деякого досліду. Доведіть, що:

1) $p(A_1 \cup A_2) \leqslant p(A_1) + p(A_2)$;
2) $p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$.

33.17.° Гральний кубик підкинули двічі. Нехай випадкова подія A полягає в тому, що сума очок, які випали на кубику, парна; випадкова подія B полягає в тому, що принаймні один раз випала одиниця. Опишіть і знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $A \setminus B$.

33.18.° Правильну трикутну піраміду, грані якої пофарбовані в жовтий, зелений, червоний та синій кольори, підкинули двічі. Нехай випадкова подія A полягає в тому, що обидва рази піраміда впала на одну і ту саму грань; випадкова подія B полягає в тому, що перший раз піраміда впала на жовту грань або на зелену грань. Опишіть та знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $B \setminus A$.

33.19.° Серед абітурієнтів механіко-математичного факультету університету є призери обласних олімпіад і відмінники. Ймовірність натрапити серед абітурієнтів на призера обласної олімпіади дорівнює 20 %, на відмінника — 35 %, а на призера обласної олімпіади або відмінника — 43 %. Яка ймовірність натрапити серед абітурієнтів на призера обласної олімпіади і відмінника в одній особі?

33.20.° Випускник університету хоче працювати в банку або в страховій компанії. Побувавши у цих установах на співбесідах, він оцінює ймовірність бути прийнятим на роботу до банку в 0,5, а до страхової компанії — у 0,6. Крім цього, він вважає, що йому надійде пропозиція з обох місць з ймовірністю 0,4. Як має він оцінити ймовірність бути прийнятим на роботу?

33.21.° Міжнародні фінансові аналітики провели дослідження і з'ясували, що ймовірність зростання курсу євро до долара в наступному місяці складає 0,55, ймовірність зростання курсу швейцарського франка до долара — 0,35, а ймовірність того, що зростуть курси обох європейських валют до долара — 0,23. Знайдіть ймовірність того, що зросте курс принаймні однієї європейської валюти.

33.22.° Стрілець влучає в мішень з ймовірністю p. Дослід полягає в тому, що стрілець виконує постріли доти, доки не влучить у мішень. Знайдіть ймовірність того, що йому доведеться стріляти 6 разів.

33.23.° У неякісній партії деталей ймовірність натрапити на браковану деталь складає 0,2. Контролер перевіряє деталі доти, доки не виявить першу браковану. Знайдіть ймовірність того, що йому доведеться перевірити 8 деталей.

33.24.° Андрій влучає в мішень з ймовірністю 0,4, Сергій — 0,5, а Петро — 0,7. Усі троє роблять по одному пострілу. Яка ймовірність того, що:

1) влучать усі хлопці;
2) жоден з хлопців не влучить;
3) лише Андрій влучить;
4) рівно один з хлопців влучить;

5) не влучить лише Петро;
6) лише один з хлопців не влучить;
7) принаймні двоє з хлопців влучать?

33.25.° Серед лотерейних білетів 10 % виграшних. Гравець придбав 3 білети. Яка ймовірність того, що серед придбаних білетів:
1) не буде виграшних;
2) буде рівно один виграшний;
3) буде рівно два виграшних;
4) будуть усі виграшні?

33.26.° Ймовірність того, що футбольний матч між командами *A* і *B* завершиться внічию, складає 50 %. Ймовірність перемоги команди *A* дорівнює 20 %, а команди *B* — 30 %. Команди *A* і *B* планують провести серію з чотирьох поєдинків між собою. Яка ймовірність того, що:
1) усі ігри завершаться внічию;
2) команда *B* не програє жодного матчу;
3) команда *A* здобуде перемогу лише в другій грі;
4) команда *A* здобуде лише одну перемогу в серії;
5) команда *B* здобуде принаймні три перемоги в серії?

33.27.° Електричний блок (рис. 33.8) працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Для збільшення надійності електричний блок дублюють ще одним таким самим блоком так, що утворена система працює тоді, коли працює принаймні один з блоків (рис. 33.9). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року?

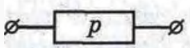


Рис. 33.8

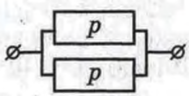


Рис. 33.9

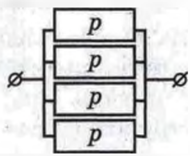


Рис. 33.10

33.28.° Електричний блок (рис. 33.8) працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Для збільшення надійності електричний блок дублюють ще трьома такими самими блоками так, що утворена система працює тоді, коли працює принаймні один з блоків (рис. 33.10). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року?

33.29.° Схема складається з 3 електричних блоків (рис. 33.11), кожний з яких працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Якщо виходить з ладу хоча б один блок, то система перестає працювати. Для збільшення надійності схему доповнюють ще 3 блоками (рис. 33.12). Яка ймовірність безвідмовної роботи новоутвореної системи протягом року? Чи збільшиться надійність системи, якщо використати схему, зображену на рисунку 33.13?

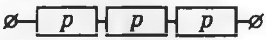


Рис. 33.11

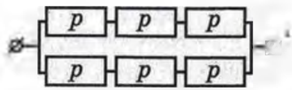


Рис. 33.12

Рис. 33.13

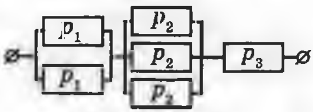


Рис. 33.14

33.30.° Деякі (найменш надійні) блоки електричної схеми дублюють (рис. 33.14). Ймовірності безвідмовної роботи кожного блока протягом року зображено на цьому рисунку. Яка ймовірність безвідмовної роботи новоутвореної системи протягом року?

33.31.° При одному оберті локатора радіолокаційна станція виявляє об'єкт з ймовірністю 70 %. Виявлення об'єкту на кожному оберті не залежить від попередніх обертів. Скільки обертів має зробити радіолокаційна станція, щоб виявити об'єкт з ймовірністю, більшою за 99,9 %?

33.32.° Ймовірність того, що Василь Спатилюб дасть правильну відповідь на поставлене запитання вчителя, складає 7 %. Скільки запитань має задати вчитель, щоб Василь дав хоча б одну правильну відповідь з ймовірністю, більшою за 50 %?

33.33.° Нехай A і B — випадкові події деякого досліду. Відомо, що $p(A) \geqslant 0{,}8$ і $p(B) \geqslant 0{,}8$. Доведіть, що $p(A \cap B) \geqslant 0{,}6$.

33.34.° Випадкова подія A полягає в тому, що потенційний покупець побачить рекламу товару по телебаченню, а випадкова подія B — у тому, що він побачить рекламу того самого товару в газеті. Відомо, що $p(A) > 0{,}8$, $p(B) > 0{,}3$. Чи можуть випадкові події A і B бути несумісними?

33.35.•• Стрілець влучає в мішень з ймовірністю p. Знайдіть ймовірність того, що з 8 пострілів стрілець влучить у мішень рівно три рази.

33.36.•• У випробуванні випадкова подія A відбувається з ймовірністю p. Випробування повторили n разів. Яка ймовірність того, що подія A відбулася рівно k разів?

33.37.•• Є r ящиків, у кожному з яких лежать n чорних і m білих куль. З кожного ящика навмання беруть по одній кулі. Яка ймовірність того, що серед взятих куль буде рівно k чорних?

33.38.•• Яка ймовірність того, що з n підкидань грального кубика шістка випаде не менше трьох разів?

33.39.•• Є n ящиків, пронумерованих натуральними числами від 1 до n, і k куль. Усі k куль навмання розкладають по ящиках. Яка ймовірність того, що загальна кількість куль, які потраплять до ящиків з номерами від 1 до r, дорівнює m?

33.40.•• Стрілець влучає в мішень з ймовірністю 0,85. Випадкова подія A_k полягає в тому, що з 60 пострілів стрілець влучить у мішень рівно k разів. При якому k ймовірність $p(A_k)$ набуває найбільшого значення?

33.41.•• У новозбудованій квартирі вкрутили 10 нових лампочок. Ймовірність того, що лампочка пропрацює не менше року, становить 0,9. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться замінити рівно 3 лампочки?

33.42.•• Для реклами прохолоджувального напою виробник вирішив закрити кришками з прихованим написом «приз» 30 000 пляшок з 500 000 випущених. Сергійко, який полюбляє цей напій, планує за літо випити 45 пляшок напою. Яка ймовірність того, що Сергійко назбирає не менше 2 кришок з написом «приз»? Відповідь округліть до десятих відсотка.

33.43.•• У деякій країні близько 30 млн виборців, серед яких партію A підтримують близько 10 млн. Яка ймовірність того, що серед 10 людей, яких обирають навмання, партію A підтримує менше ніж 4 особи? Відповідь округліть до десятих відсотка.

33.44.* Нехай A, B і C — випадкові події в деякому досліді. Доведіть, що:

1) $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$;

2) $p(A \cap B \cap C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cup B) - p(A \cup C) - p(B \cup C) + p(A \cup B \cup C)$.

33.45.* Випускники курсів іноземних мов вивчали англійську, німецьку та французьку мови. Ймовірність того, що навмання обраний випускник знає англійську і німецьку мови, дорівнює 0,6, німецьку і французьку — 0,5, а англійську і французьку — 0,4. Чи може адміністрація курсів гарантувати, що в середньому кожний четвертий випускник знає всі три мови?

33.46.* До фіналу конкурсу «Міс 11-ті класи» вийшли 3 красуні. Відомо, що кожному з хлопців школи подобається принаймні одна з красунь, крім цього, першій красуні симпатизує кожен другий хлопець, другій красуні — кожен третій, а останній — кожен четвертий учень. Доведіть, що деякі дві красуні можуть гарантувати, що з ймовірністю, не меншою від $\frac{1}{36}$, обраний навмання хлопець симпатизує їм обом.

34. Геометрична ймовірність

«Морський бій» — гра, знайома майже кожному школяру. У який корабель більше шансів влучити — у двопалубний чи чотирипалубний? Звісно, що в чотирипалубний, бо він складається з більшої кількості клітинок. Те саме можна сказати інакше: оскільки «площа» чотирипалубного корабля більша за «площу» двопалубного, то ймовірність влучити в чотирипалубний корабель більша, ніж ймовірність влучити у двопалубний.

Задачі, у яких ймовірність випадкової події можна знайти, обчисливши певні геометричні величини, є непоодинокими. Наведемо ще один приклад.

Згадаймо, що коли перші краплі дощу падають на суху асфальтовану баскетбольну площадку (рис. 34.1), то залишають на ній темні точки-відмітини. Яка ймовірність того, що чергова темна точка з'явиться в центральному крузі площадки (подія A)? Природно вважати, що ймовірність випадкової події A дорівнюватиме відношенню площі центрального круга до площі всієї площадки. Наприклад, якщо

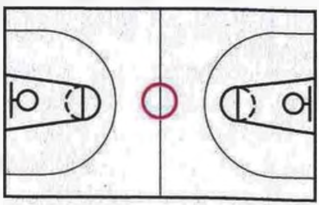


Рис. 34.1

площадка має розміри 26 м × 14 м, а радіус центрального круга дорівнює 1,8 м, то

$$p(A)=\frac{\pi 1{,}8^2}{26\cdot 14}\approx 0{,}03.$$

Узагальнимо наші міркування.

Розглянемо таке випробування. У плоскій фігурі U з ненульовою площею S навмання обирають точку X. Яка ймовірність того, що точка X потрапить до даної фігури $A \subset U$ з площею S_A (рис. 34.2)? Зазвичай вважають, що така ймовірність дорівнюватиме відношенню площі S_A фігури A до площі S фігури U, тобто

$$\boxed{p(A)=\frac{S_A}{S}}$$

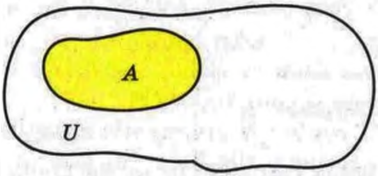


Рис. 34.2

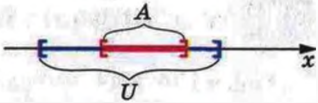


Рис. 34.3

Зауважимо, що для дослідів з вибором точки на прямій або в просторі можна записати аналогічні відношення. Наприклад, нехай точку X обирають навмання на проміжку U завдовжки l (рис. 34.3). Якщо проміжок A завдовжки l_A належить проміжку U, то ймовірність того, що точка X потрапить до проміжку A, можна обчислити за формулою

$$\boxed{p(A)=\frac{l_A}{l}}$$

У досліді з вибором точки з тіла U об'єму V використовують формулу

$$\boxed{p(A)=\frac{V_A}{V},}$$

де V_A — об'єм тіла A, що є частиною тіла U.

Ймовірність випадкової події, що визначена в такий спосіб, називають **геометричною ймовірністю**.

ПРИКЛАД У прямокутний трикутник з катетами 5 і 12 навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що точка потрапить у круг, вписаний у цей трикутник?

Розв'язання. Площа трикутника дорівнює $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Використовуючи формулу $r = \frac{S}{p}$, обчислимо радіус вписаного круга. Маємо $r = 2$. Тоді площа вписаного круга дорівнює $S_{\text{круга}} = 4\pi$.

Отже, ймовірність того, що навмання обрана точка потрапить у вписаний круг, становить $\frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15}$. ●

ПРИКЛАД Юнак та дівчина домовилися про побачення з 15:00 до 16:00. Відомо, що кожний з них приходить у будь-який час з 15:00 до 16:00 незалежно від іншого. Якщо юнак прийде і не зустріне дівчину, то він буде чекати її ще протягом 20 хв. Дівчина в аналогічній ситуації буде чекати юнака протягом лише 10 хв. Яка ймовірність того, що побачення відбудеться?

Розв'язання. Нехай x і y — час (у хвилинах) приходу на побачення юнака і час приходу дівчини відповідно, відраховані від 15:00. Наприклад, якщо юнак прийшов о 15:20, то $x = 20$ хв. Описати незалежний і випадковий вибір змінних $x \in [0; 60]$ та $y \in [0; 60]$ можна так. Оберемо навмання в квадраті $OKLM$ точку $Q(x; y)$ (рис. 34.4). Тоді координати x і y точки Q визначають час приходу юнака і дівчини відповідно.

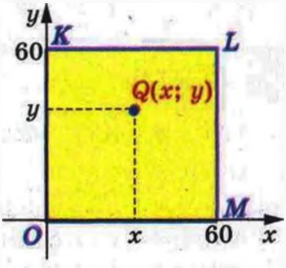


Рис. 34.4

З'ясуємо, за яких умов відбудеться побачення.

Якщо юнак прийшов раніше від дівчини, тобто $x < y$, то побачення відбудеться за умови, що дівчина прийде не пізніше ніж через 20 хв, тобто час y має задовольняти умову $y \leqslant x + 20$.

Якщо юнак прийшов не раніше від дівчини, тобто $y \leqslant x$, то побачення відбудеться за умови, що юнак прийде не пізніше ніж через 10 хв після дівчини, тобто час x має задовольняти умову $x \leqslant y + 10$.

Таким чином, побачення відбудеться тоді, коли числа x і y задовольнятимуть сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} x < y \leqslant x + 20, \\ y \leqslant x \leqslant y + 10. \end{array}\right.$$

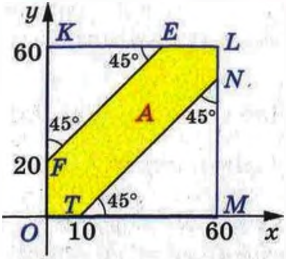


Рис. 34.5

Побудувавши графік цієї сукупності при $x \in [0; 60]$ і $y \in [0; 60]$ (рис. 34.5), отримаємо фігуру A.

Отже, юнак і дівчина зустрінуться тоді і лише тоді, коли навмання вибрана в квадраті $OKLM$ точка потрапить до фігури A. Для знаходження площі S_A фігури A підрахуємо площу квадрата $OKLM$ і площі трикутників KEF і MTN. Маємо:

$$S_{OKLM} = 60^2 = 3600, \quad S_{KEF} = \frac{1}{2}40^2 = 800,$$

$$S_{MTN} = \frac{1}{2}50^2 = 1250.$$

Звідси $S_A = 3600 - 800 - 1250 = 1550$.

Використовуючи геометричне визначення ймовірності, отримуємо $p(A) = \frac{1550}{3600} = \frac{31}{72}$. ●

Вправи

34.1.° На відрізку $[-2; 2]$ навмання обирають число x. Яка ймовірність того, що $|x| < 1$?

34.2.° У куб помістили інший куб з удвічі меншою стороною. Яка ймовірність того, що навмання обрана у великому кубі точка потрапить до меншого куба?

34.3.° У круг радіуса 1 вписали квадрат. Яка ймовірність того, що навмання обрана точка круга не потрапить до вписаного квадрата?

34.4.° У квадраті з стороною 3 навмання обирають точку. Яка ймовірність того, що відстань від обраної точки до найближчої сторони квадрата не перевищує 1?

34.5.° Від двох паличок завдовжки l випадковим чином відрізають по шматку. Яка ймовірність того, що довжина кожного з цих шматків виявиться більшою за $\frac{l}{5}$?

34.6.° У прямокутнику зі сторонами 5 і 7 навмання обирають точку. Яка ймовірність того, що відстань від обраної точки до всіх сторін прямокутника виявиться меншою від 4?

34.7.° У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Для випадкових подій $A=\{(x;y)\,|\,x<0{,}4\}$ і $B=\{(x;y)\,|\,y>0{,}7\}$ доведіть рівність $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$.

34.8.° У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Для випадкових подій $A=\{(x;y)\,|\,x\geqslant 0{,}5\}$ і $B=\{(x;y)\,|\,y<0{,}3\}$ доведіть рівність $p(A\cap B)=p(A)\,p(B)$.

34.9.° У кулю радіуса R вписали куб. Яка ймовірність того, що точка, навмання обрана в кулі, потрапить до вписаного куба?

34.10.° Навколо циліндра з радіусом основи R і висотою H описали кулю. Яка ймовірність того, що точка, навмання обрана в кулі, потрапить до циліндра?

34.11.° У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x;y)\,|\,x<0{,}3\}$;
2) $\{(x;y)\,|\,x+y>0{,}2\}$;
3) $\{(x;y)\,|\,\max\{x,y\}\geqslant 0{,}7\}$.

34.12.° У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x;y)\,|\,y\geqslant 0{,}8\}$;
2) $\{(x;y)\,|\,x-y<0{,}3\}$;
3) $\{(x;y)\,|\,\min\{x,y\}\leqslant 0{,}4\}$.

34.13.° На площині проведено нескінченну кількість паралельних прямих. Відстань між сусідніми прямими дорівнює 5. Яка ймовірність того, що монета радіуса 1, яку випадковим чином кидають на площину, перетне одну з паралельних прямих?

34.14.° На координатну площину випадковим чином кидають монету радіуса $\frac{1}{4}$. Яка ймовірність того, що вона перетне одну з прямих виду $y=k$ або $x=k$, де $k\in\mathbb{Z}$?

34.15.°° У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x;y)\,|\,y\leqslant x^3\}$;
2) $\{(x;y)\,|\,\sin\pi x<y\}$;
3) $\{(x;y)\,|\,5xy\leqslant 1\}$.

34.16.** На відрізку $[-1;1]$ координатної прямої навмання обирають дві точки. Нехай p і q — координати цих точок. Знайдіть ймовірність того, що рівняння $t^2+2pt+q=0$ має корені.

34.17.** У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x;y)|y>x^2\}$;
2) $\left\{(x;y)|\cos\frac{\pi x}{2}\geqslant y\right\}$;
3) $\{(x;y)|2xy>1\}$.

34.18.** У прямокутний рівнобедрений трикутник ABC $(\angle C=90°)$ вписано квадрат $CDEF$, вершини якого лежать на сторонах трикутника. У трикутнику ABC навмання обирають п'ять точок. Яка ймовірність того, що рівно три з них потраплять до квадрата $CDEF$?

34.19.** Точка C ділить відрізок AB на відрізки завдовжки $AC=a_1$ і $CB=a_2$. На відрізок AB навмання кидають n точок. Яка ймовірність того, що на відрізок AC потраплять k таких точок?

34.20.** У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть таке число z, що ймовірність виконання нерівності $x^2y\leqslant z$ дорівнює $50\ \%$.

34.21.** У квадраті з вершинами в точках з координатами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$ навмання обирають точку $Q(x;y)$. Знайдіть таке число z, що ймовірність виконання нерівності $y\leqslant zx^2$ дорівнює $30\ \%$.

34.22.** Андрій та Микола домовилися про зустріч о 12:00. Кожний з них приходить на зустріч у будь-який час з 11:50 до 12:10 незалежно від іншого. Друзі домовилися чекати один одного 10 хв. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

34.23.** Поїзди метро ходять кожні 3 хв. Посадка пасажирів триває протягом 20 секунд. Яка ймовірність того, що пасажир після приходу на станцію протягом 1 хв сяде у вагон метро?

34.24.** Від трьох паличок завдовжки l випадковим чином відрізають по шматку. Яка ймовірність того, що з трьох відрізаних шматків можна буде скласти трикутник?

34.25.** На відрізок навмання послідовно кидають дві точки. Яка ймовірність того, що з трьох утворених частин можна буде скласти трикутник?

34.26.** На відрізок навмання послідовно кидають три точки. Яка ймовірність того, що третя точка потрапить між двома першими?

34.27.* На відрізку AB навмання обирають точку C. Потім на відрізку AC навмання обирають точку D. Яка ймовірність того, що $AD < \frac{AB}{3}$?

34.28.* З множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ навмання обирають число x, а потім ще одне число y (числа x і y можуть бути рівними). Позначимо через p_n ймовірність того, що $x^2 + y^2 \leqslant n^2$. Знайдіть $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Метод Монте-Карло і задача Бюффона

Геометричну ймовірність використовують у розділах математичної науки, які, на перший погляд, не мають ніякого відношення до теорії ймовірностей. Покажемо, наприклад, як за допомогою геометричної ймовірності наближено обчислюють площі складних фігур.

Розглянемо фігуру A, задану на координатній площині xy, наприклад, нерівністю $\left(x+\sqrt{y-y^2}\right)2^{y\sqrt{x-x^2}} \leqslant 1$ (рис. 34.6). Побудувати графік (навіть приблизний) такої нерівності — складна задача[1]. Незрозуміло також, як відомими методами обчислити площу фігури A.

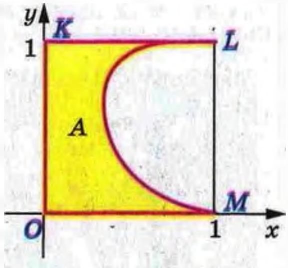


Рис. 34.6

Скористаємося формулою геометричної ймовірності $p(A) = \frac{S_A}{S}$, звідки $S_A = Sp(A)$. Отже, для обчислення пло-

[1] Графік даної нерівності, зображений на рисунку 34.6, побудовано за допомогою комп'ютера.

щі фігури A необхідно знати площу S фігури U, якій належить фігура A, та ймовірність потрапляння точки у фігуру A при випадковому виборі точки у фігурі U.

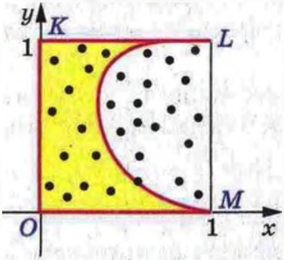


Рис. 34.7

Оскільки область визначення даної нерівності задається умовами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то всі точки фігури A належать одиничному квадрату $OKLM$ (рис. 34.7). Тому за фігуру U візьмемо одиничний квадрат $OKLM$ з площею $S=1$.

Величину $p(A)$ можна наближено оцінити, обчисливши частоту потрапляння точки у фігуру A. Для цього треба N разів навмання вибрати точку $Q(x;y)$ с координатами $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ і підрахувати кількість тих випадків, коли виконуватиметься дана нерівність (рис. 34.7). Зазвичай такі випробування моделюють за допомогою комп'ютера. Використовуючи стандартний генератор випадкових чисел, на комп'ютері легко реалізувати випадкове обрання чисел $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$. Крім цього, у такий спосіб необхідну велику кількість випробувань можна провести за лічені секунди.

Провівши $N=10^6$ таких випробувань, автори підручника з'ясували, що в $N_A = 457\,134$ випадках навмання обрана точка потрапила до фігури A. Отже, $p(A) \approx \frac{457134}{10^6} \approx 0{,}457$. Скориставшись формулою $S_A = p(A)S$, маємо, що $S_A \approx 0{,}457$.

Станіслав Улам (1909–1984)

Народився у Львові, закінчив Львівський політехнічний інститут. У 1936 р. переїхав до США. Основні його здобутки належать до топології, функціонального аналізу, теорії ймовірностей, теорії множин.

Такий метод наближеного обчислення площі називають методом **Монте-Карло.**

Назва методу Монте-Карло походить від назви міста князівства Монако. Місто Монте-Карло відомо численними казино, а одним з найпростіших механічних пристроїв для утворення випадкових чисел є ігрова рулетка.

Одним із засновників метода Монте-Карло вважають відомого математика Станіслава Улама, який у середині XX ст. описав можливості цього методу. Проте головна ідея методу Монте-Карло була відома набагато раніше. Ще у XVIII ст. французький натураліст, біолог, математик і письменник Жорж Луї Леклерк Бюффон запропонував ймовірнісний спосіб означення і обчислення числа π.

ЗАДАЧА БЮФФОНА Нехай на площині проведено нескінченну кількість паралельних прямих. Відстань між сусідніми прямими дорівнює 4. На площину навмання кидають голку завдовжки 2. Знайдіть ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

Розв'язання. Положення голки будемо визначати кутом x між прямою, що містить голку, і проведеними прямими, а також відстанню y від середини голки до найближчої прямої (рис. 34.8). Зрозуміло, що $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ і $y \in [0; 2]$. Можна вважати, що кут x і відстань y обирають навмання як координати точки $Q(x; y)$ прямокутника $OFGH$ зі сторонами $\frac{\pi}{2}$ і 2 (рис. 34.9). Розглянемо прямокутний трикутник ABC, катет AC якого паралельний даним прямим (рис. 34.8). Оскільки голка AB має довжину 2, то середня лінія KL трикутника ABC дорівнює $KL = \frac{BC}{2} = \frac{AB \sin x}{2} = \sin x$.

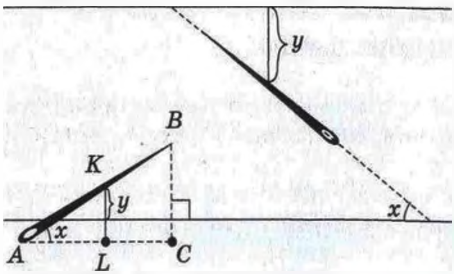


Рис. 34.8

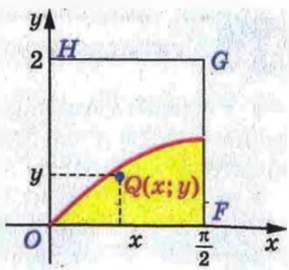


Рис. 34.9

Легко зрозуміти, що голка перетне проведену пряму тоді і тільки тоді, коли $y \leqslant KL$, тобто при $y \leqslant \sin x$. Іншими словами, голка перетне пряму тоді, коли взята навмання точка $Q(x;y)$ належатиме фігурі A, що розташована в прямокутнику $OFGH$ нижче від графіка функції $y = \sin x$ (рис. 34.9). Обчислимо площу фігури A.

Маємо $S_A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Площа прямокутника $OFGH$ дорівнює $S = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$. Тому $p(A) = \frac{1}{\pi}$. Звідси $\pi = \frac{1}{p(A)}$.

Отже, величина, обернена до ймовірності того, що голка перетне проведені прямі, дорівнює π.

Базуючись на отриманому висновку, науковці проводили експериментальне визначення числа π. Їх результати наведено в таблиці.

Дослідник	Кількість випробувань	Наближене значення числа π
Вольф	5000	3,1596
Сміт	3204	3,1553
Фокс	1120	3,1419

Якщо змоделювати на комп'ютері випадкове кидання голки, то, провівши велику кількість таких «випробувань», можна знайти декілька десяткових знаків числа π.

Спробуйте і ви обчислити кілька знаків числа π.

35. Статистичний аналіз даних

У 9 класі ви ознайомилися з елементами математичної статистики — науки про отримання, оброблення й аналіз даних, які характеризують масові явища.

У статистиці сукупність зібраних даних, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**. Фактично збирання даних — це певне випробування, яке проводять кілька разів. Простір елементарних наслідків цього випробування у статистиці прийнято називати **генеральною сукупністю** (рис 35.1).

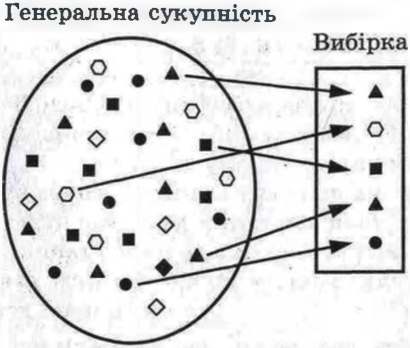


Рис. 35.1

Наприклад, для проведення ефективної рекламної кампанії деяка фірма вирішила скласти психологічний портрет свого типового клієнта. Для цього заплановано опитати деяку кількість навмання обраних клієнтів фірми. Тоді множина всіх клієнтів фірми утворює генеральну сукупність, а множина тих клієнтів, яких буде опитано, утворює вибірку.

Одна з головних задач статистики полягає в тому, щоб на основі аналізу даних вибірки зробити висновок про всю генеральну сукупність. Аналізуючи зібрані дані, виділяють один або кілька загальних показників, які характеризують найбільш важливі особливості генеральної сукупності. Наприклад, якщо вибірка складається з числових даних, то різницю між найбільшим і найменшим значеннями даних вибірки називають **розмахом** вибірки. Важливими показниками вибірки також є **середнє значення**, **медіана** та **мода**. Нагадаємо й уточнимо відповідні означення.

Нехай вибірка складається з числових даних x_1, x_2, ..., x_n. **Середнім значенням** цієї вибірки (**вибірковим середнім**) називають число $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Наприклад, у таблиці подано результати виступів українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах протягом 2001–2010 рр. (команда учасників на Міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб.)

Рік	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Кількість медалей	6	4	6	6	6	5	6	6	6	6

Для даної вибірки середнє значення дорівнює

$$\overline{x} = \frac{6+4+6+6+6+5+6+6+6+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більше 6 медалей, то вибіркове середнє 5,7 свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

Зверніть увагу на те, що середнє значення вибірки визначають лише у випадку, коли зібраними даними є числа.

Розглянемо вибірку, що складається з таких даних, які можна порівнювати одне з одним. Якщо кількість даних непарна і їх упорядковано $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, то медіаною даної вибірки називають x_n, тобто те з даних, яке в переліку x_1, x_2, ..., x_{2n-1} розміщене посередині.

Наприклад, у багатьох університетах України запроваджено оцінювання знань студентів не за числовою шкалою, а за шкалою букв: A, B, C, D, E, F (A — найвища, F — найнижча оцінка). Нехай при опитуванні 9 студентів про результати складання ними останнього екзамену було отримано таку послідовність оцінок (вибірку):

$$F,\ F,\ D,\ D,\ C,\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині розміщена літера C. Отже, медіаною даної вибірки є оцінка «C».

Якщо вибірка складається з парної кількості даних: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$, то медіаною даної вибірки називають будь-яке з даних x_n або x_{n+1}, тобто ті двоє даних, що розташовані посередині в переліку x_1, x_2, ..., x_{2n}.

Наприклад, якщо до 9 наведених вище оцінок студентів додати ще одну оцінку E, то отримаємо таку послідовність:

$$F,\ F,\ E,\ D,\ D,\ C,\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині знаходяться літери D і C. Отже, медіаною даної вибірки є оцінки D і C.

Зверніть увагу на те, що в наведених прикладах знаходження медіани вибірки досліджувані дані не є числами.

Якщо досліджуваними даними є числа, то у випадку парної кількості даних $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$ медіаною вибірки допускається вважати і величину $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Наприклад, якщо розглянути вибірку з чотирьох числових даних:

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,$$

то число $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ є медіаною цієї вибірки.

Нехай вибірка складається з даних x_1, x_2, ..., x_n. **Модою** даної вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку x_1, x_2, ..., x_n найчастіше. Якщо таких найчастіших даних кілька, то кожне з них є модою даної вибірки. Наприклад, якщо вибірка складається з п'яти різних даних: 1, 2, 3, 4, 5, то кожне з цих п'яти чисел є модою даної вибірки.

Звернемо увагу на те, що моду вибірки можна визначити для даних будь-якої природи, на відміну від даних, необхідних для визначення середнього значення (числові дані) або медіани (дані, які можна порівнювати одне з одним).

Нехай у виборах до шкільного парламенту беруть участь три партії: «За математику», «За сучасну музику» і «За красунь дівчат». Опитавши 30 учнів, з'ясували, що партію «За математику» підтримує 7 осіб, «За сучасну музику» — 14 осіб, «За красунь дівчат» — 9 осіб. Це означає, що серед 30 отриманих даних, що утворюють вибірку, найбільшу підтримку має партія «За сучасну музику». Тому назва цієї партії є модою даної вибірки.

Зауважимо, що в наведеному прикладі неможливо визначити ні середнє значення, ні медіану вибірки.

Незважаючи на те, що описані вище узагальнюючі показники (середнє значення, медіана, мода) по-різному характеризують вибірку, часом їх недостатньо для того, щоб дати коректну оцінку всієї генеральної сукупності.

Нехай потрібно з'ясувати середній рівень заробітної плати в Україні. За інформацією одного з статистичних досліджень відомі дані про заробітну плату в географічних регіонах України.

Регіон України	Рівень заробітної плати населення у січні 2011 року
Центральний регіон України	2319 грн
Південно-Східний регіон України	2410 грн
Західний регіон України	1934 грн

Якщо для трьох наведених даних $x_1 = 2319$, $x_2 = 2410$, $x_3 = 1934$ обчислити середнє значення, медіану і моду вибірки, то отримаємо такі значення:

$$\text{Середнє значення} = \frac{2319 + 2410 + 1934}{3} = 2221,$$

Медіана = 2319,

Мода = 2319, або 2410, або 1934.

Насправді жодне з цих значень не відображає коректно або, як ще кажуть, адекватно середній рівень заробітної плати в Україні. Причина полягає в тому, що в різних регіонах живе і працює різна кількість людей. Так, у Центральному регіоні України працює близько 7 млн людей, у Південно-Східному — 10 млн, а в Західному — 5 млн. Це означає, що працівники Центрального регіону заробили $7x_1$ млн грн, Південно-Східного — $10x_2$ млн грн, а Західного — $5x_3$ млн грн. Отже, у січні 2011 року жителі України всього заробили $7x_1+10x_2+5x_3$ млн грн. Оскільки загальна кількість працюючого населення України становить близько 7 + 10 + 5 = 22 млн людей, то середню заробітну плату в Україні можна оцінити так:

$$\frac{7x_1+10x_2+5x_3}{22}\approx 2273 \text{ грн.}$$

Величину $\frac{7x_1+10x_2+5x_3}{22}$ називають **середнім зваженим значенням** чисел x_1, x_2, x_3 **з ваговими коефіцієнтами** 7, 10 і 5 відповідно.

Узагалі, **середнім зваженим значенням** чисел x_1, x_2, ..., x_n з додатними ваговими коефіцієнтами m_1, m_2, ..., m_n називають число

$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Якщо серед даних вибірки зустрічаються однакові, то для обчислення середнього значення вибірки зручно скористатися середнім зваженим значенням.

Наприклад, нехай вибірка складається зі 100 числових даних, серед яких 40 разів зустрічається число $x_1=2$, 50 разів — число $x_2=3$, 10 разів — число $x_3=4$. Тоді середнє значення даної вибірки зі 100 чисел дорівнюватиме середньому зваженому значенню чисел $x_1=2$, $x_2=3$ та $x_3=4$ з ваговими коефіцієнтами $m_1=40$, $m_2=50$, $m_3=10$. Справді,

$$\overline{x}=\frac{\underbrace{2+2+\ldots+2}_{\text{40 доданків}}+\underbrace{3+3+\ldots+3}_{\text{50 доданків}}+\underbrace{4+4+\ldots+4}_{\text{10 доданків}}}{100}=$$

$$=\frac{40\cdot 2+50\cdot 3+10\cdot 4}{40+50+10}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

ПРИКЛАД 1 У деякому місті для визначення величини витрат однієї людини на лікарські засоби було проведено опитування 1000 осіб, серед яких 400 були молодші від 20 років, а 600 — старші за 20 років. З'ясувалося, що люди, молодші від 20 років, у середньому витрачають на місяць на лікарські засоби 22 грн, а люди, старші за 20 років, — 47 грн. Що в даному статистичному дослідженні є генеральною сукупністю? Що є вибіркою? Оцініть рівень витрат на лікарські засоби на місяць для однієї людини.

Розв'язання. У даному статистичному дослідженні множина всіх мешканців міста є генеральною сукупністю, а 1000 опитаних осіб утворюють вибірку.

Розглянемо вибірку (величин витрат мешканців міста на лікарські засоби протягом місяця), отриману в результаті проведеного опитування.

Знайдемо середнє значення цієї вибірки:

$$\bar{x} = \frac{\underbrace{22+22+\ldots+22}_{400 \text{ доданків}} + \underbrace{47+47+\ldots+47}_{600 \text{ доданків}}}{1000} = 37.$$

Те саме середнє значення вибірки можна обчислити як середнє зважене значення чисел 22 і 47 з ваговими коефіцієнтами 400 і 600 відповідно. Маємо:

$$\bar{x} = \frac{400 \cdot 22 + 600 \cdot 47}{1000} = 37 \text{ грн.}$$

Число 37 показує, що серед опитаних людей середній рівень витрат складає 37 грн на місяць. ●

Середнє зважене значення в статистиці використовують тоді, коли зібрані дані не є рівноцінними, тобто деякі дані мають більшу важливість (значущість), а деякі — меншу.

Наприклад, якщо в умові прикладу 1 додатково відомо, що частка людей віком до 20 років складає 24 % усіх мешканців цього міста, то відповідь на поставлене в задачі запитання слід змінити.

Отримані 1000 даних не є рівноцінними. Річ у тім, що співвідношення осіб віком до 20 років і після 20 років у нашій вибірці не відповідає їх співвідношенню в цьому місті. Тому для розрахунків слід дібрати вагові коефіцієнти таким чином, щоб вони відображали реальний розподіл населення міста за цими віковими групами.

Оскільки в цьому місті частки людей віком до 20 років і після 20 років складають 24 % і 76 % відповідно, то треба обчислити середнє зважене значення чисел 22 грн і 47 грн з ваговими коефіцієнтами 24 і 76. Маємо:

$$\bar{y} = \frac{24 \cdot 22 + 76 \cdot 47}{100} = 41.$$

Величину 41 грн можна вважати оцінкою середнього рівня витрат на лікарські засоби для однієї людини на місяць у цьому місті.

Вправи

35.1.° Запишіть прізвища учнів, яких було опитано вчителем на вашому останньому уроці під час перевірки домашнього завдання. Що є генеральною сукупністю і вибіркою в статистичному дослідженні вчителя з перевірки домашнього завдання?

31.2.° Результатом роботи комп'ютерної програми, що моделює статистичне дослідження, є деяке ціле число в діапазоні від −128 до 128. У результаті п'яти послідовних запусків програма видала такі результати: 62, −15, 31, 103, −22. Що в даному статистичному дослідженні є генеральною сукупністю? Що є вибіркою? Знайдіть розмах вибірки.

35.3.° Учнів опитали про їх улюблений предмет у школі. Які статистичні показники (середнє значення, середнє зважене значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

35.4.° На замовлення підприємств легкої промисловості проведено дослідження, результатами якого є розміри одягу в міжнародному форматі (символи: XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Які статистичні показники (середнє значення, середнє зважене значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

35.5.° Користуючись таблицею середніх температур повітря в січні в деяких містах світу, обчисліть розмах, середнє значення, медіану і моду даної вибірки.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Амстердам	3	Москва	−10
Афіни	8	Найробі	27
Буенос-Айрес	23	Нью-Йорк	0
Гонконг	24	Ріо-де-Жанейро	30
Єрусалим	8	Рим	8
Київ	−6	Сінгапур	27
Монреаль	−11	Токіо	3

35.6.° Користуючись таблицею урожайності насіння соняшнику в Україні, обчисліть розмах, середнє значення, медіану і моду даної вибірки.

Рік	Урожайність, ц/га	Рік	Урожайність, ц/га
1991	15	2003	11
1993	13	2004	9
1995	14	2005	13
1997	12	2006	14
1999	10	2007	12
2001	9	2008	15
2002	12	2009	15

35.7.° У чемпіонаті України з футболу 2009–2010 рр. команда «Шахтар» зіграла 30 матчів, серед яких один раз забила 5 голів, 3 рази — 4 голи, 6 разів — 3 голи, 9 разів — 2 голи, 9 разів — один гол і у 2 матчах не забила жодного голу. Обчисліть, скільки в середньому команда «Шахтар» забивала м'ячів в одному матчі.

35.8.° Студент протягом навчання в інституті отримав 45 оцінок, серед яких 7 п'ятірок, 22 четвірки та 16 трійок. Обчисліть середній бал студента.

35.9.° На учнівських олімпіадах під час визначення рейтингу команд індивідуальні результати учасників оцінюють таким чином: диплом першого ступеня приносить команді 5 балів, диплом другого ступеня — 3 бали, диплом третього ступеня — 1 бал, диплом учасника олімпіади — 0 балів. У таблиці подано дані про результати деякої олімпіади. Знайдіть моду, медіану і середнє значення командних балів, набраних учасниками олімпіади.

Кількість балів, які учасник приніс команді	Кількість учасників
5	14
3	29
1	46
0	88

35.10.° На зовнішньому незалежному оцінюванні школярів з математики 2010 року було запропоновано тестове завдання: «Розв'яжіть нерівність $10 - 3x > 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; 2)$

На діаграмі (рис. 35.2) зображено дані про кількість учнів, що відповідали на це завдання. Знайдіть моду відповідей учнів. За правильну відповідь нараховувався 1 бал, а за неправильну відповідь — 0 балів. Обчисліть середнє значення і медіану кількості балів, яку набрали учасники тестування за цю задачу.

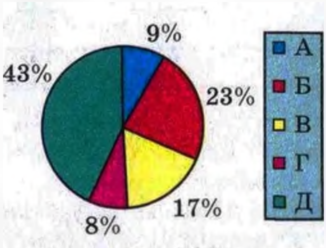


Рис. 35.2

35.11.° Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі (рис. 35.3). Обчисліть розмах, середнє значення, медіану і моду цієї вибірки.

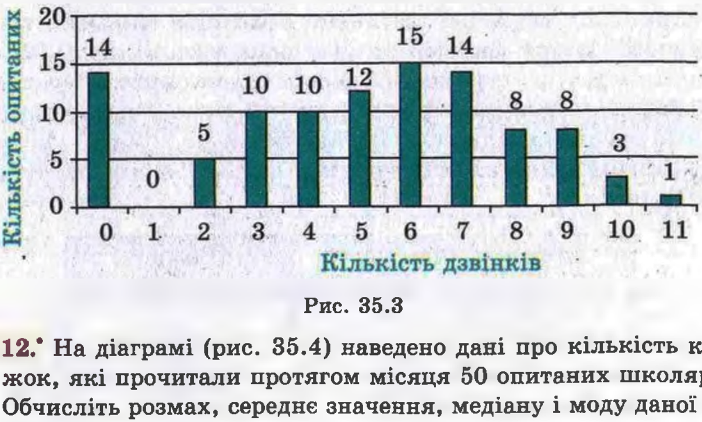


Рис. 35.3

35.12.° На діаграмі (рис. 35.4) наведено дані про кількість книжок, які прочитали протягом місяця 50 опитаних школярів. Обчисліть розмах, середнє значення, медіану і моду даної вибірки.

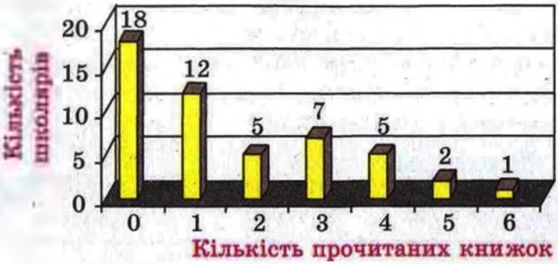


Рис. 35.4

35.13.• У деякому ліцеї одинадцятикласники, які навчаються в класах фізичного, економічного та філологічного профілів, написали спільну контрольну роботу з математики. За даними адміністрації ліцею середній бал учнів фізичного профілю дорівнює 8,9, економічного — 7,7, а філологічного — 7,1.

1) Оцініть середній бал учнів цього ліцею за контрольну роботу з математики.
2) Як слід змінити відповідь, якщо додатково відомо, що в класі фізичного профілю навчаються 23 учні, економічного — 25 учнів, а у двох класах філологічного профілю — 46 учнів?

35.14.• У школі опитали деяких хлопців і дівчат про час, який вони витрачають на допомогу батькам по домашньому господарству. Виявилося, що хлопці в середньому витрачають 1,1 год на добу, а дівчата — 1,7 год на добу.

1) Користуючись цими даними, оцініть середній час, який витрачає учень школи на допомогу батькам на добу.
2) Як слід змінити відповідь, якщо додатково відомо, що у школі навчається 400 дівчат і 560 хлопців?

35.15.• У таблиці наведено дані про частоту випадіння герба при підкиданні монети в дослідах, проведених деякими вченими.

Дослідник	Частота випадіння герба
Жорж Бюффон	0,5069
Огастес де Морган	0,5005
Вільям Джевонс	0,5068
Всеволод Романовський	0,4923
Карл Пірсон	0,5005
Вільям Феллер	0,4979

1) На основі цих даних оцініть ймовірність випадіння герба при підкиданні монети.
2) Якою буде відповідь, якщо додатково урахувати дані про кількість кидків монети в цих дослідах?

Дослідник	Кількість кидків монети
Жорж Бюффон	4040
Огастес де Морган	4092
Вільям Джевонс	20 480
Всеволод Романовський	80 640
Карл Пірсон	24 000
Вільям Феллер	10 000

Відповідь дайте з точністю до сотих відсотка.

35.16.* У таблиці наведено розміри процентних ставок деяких банків України за строковими депозитами населення в національній валюті і суми вкладів у цих банках.

Номер банку у вибірці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Розмір процентної ставки, %	11	17,2	11,3	14,5	14	14	11,9	15,8	12	15,5
Сума вкладів, млн грн	2242	783	42	4793	2222	239	296	1204	2768	5564

1) Оцініть середнє значення вибірки розміру процентної ставки банків.
2) Який середній прибуток (у процентах) отримують вкладники цих банків від вкладів у національній валюті?

Відповідь дайте з точністю до сотих процента.

35.17.* У третьому стовпці таблиці наведено дані Міжнародного валютного фонду щодо внутрішнього валового продукту (ВВП) деяких країн у 2010 році на душу населення в грошовому еквіваленті.

1) Користуючись цими даними, оцініть середній рівень ВВП у 2010 році на душу населення у світі.
2) Як слід змінити відповідь, якщо врахувати інформацію про кількість населення відповідних країн (четвертий стовпець таблиці)? Відповідь дайте з точністю до сотень доларів США.

№	Країна	ВВП на душу населення, тис. доларів США	Кількість населення, млн
1	Гамбія	2,0	1,8
2	Греція	28,8	11,3
3	Індонезія	4,4	237,6
4	Китай	7,5	1341,0
5	Коста-Рика	10,7	4,6
6	Латвія	14,3	2,2
7	Люксембург	80,3	0,5
8	Росія	15,8	141,9
9	США	47,1	311,0
10	Україна	6,7	45,8

35.18.** Розглянемо послідовність із семи чисел, кожне з яких дорівнює 0 або 3. Для отримання такої послідовності (вибірки) баскетболіст планує зробити 7 триочкових кидків м'яча (якщо спортсмен влучає в кошик — пишуть 3, а якщо не влучає — пишуть 0). Баскетболіст влучає в кошик із ймовірністю 80 %. Знайдіть ймовірність того, що:

1) середнє значення вибірки виявиться рівним $1\frac{2}{7}$;
2) середнє значення вибірки виявиться меншим від 2,5;
3) медіана вибірки виявиться рівною 0 (дайте відповідь з точністю до десятих відсотка);
4) мода вибірки виявиться рівною 3 (дайте відповідь з точністю до десятих відсотка).

35.19.** Розглянемо послідовність з 9 чисел, яка складається з нулів і одиниць. Для отримання такої послідовності (вибірки) планують 9 разів підкинути монету (якщо випаде герб — пишуть 0, а якщо цифра — пишуть 1). Знайдіть ймовірність того, що:

1) медіана вибірки виявиться рівною 0;

2) мода вибірки виявиться рівною 1;

3) середнє значення вибірки виявиться рівним $\frac{1}{3}$;

4) середнє значення вибірки виявиться більшим за 0,7.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Задача одна — відповіді різні

У 1889 році французький математик Жозеф Луї Франсуа Бертран написав дивну наукову роботу. У ній він запропонував задачу та навів декілька її розв'язань. Проте розв'язання науковця приводили до різних відповідей! Цю задачу назвали парадоксом Бертрана.

ПАРАДОКС БЕРТРАНА У коло з центром у точці O вписано рівносторонній трикутник. Яка ймовірність того, що довжина вибраної навмання хорди кола[1] більша за сторону цього трикутника?

Перше розв'язання. Зафіксуємо деякий радіус OM. Оскільки кожна хорда перпендикулярна до деякого радіуса, то, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що навмання обирають хорду, перпендикулярну до радіуса OM. Обрати навмання таку хорду означає обрати навмання на внутрішності відрізка OM точку N і провести через неї хорду XY, перпендикулярну до OM (рис. 35.5).

Впишемо в дане коло рівносторонній трикутник ABC так, щоб сторона BC була перпендикулярна до радіуса OM (рис. 35.6). Позначимо через K точку перетину відрізків BC і OM. Оскільки

[1] У парадоксі Бертрана розглядаються лише хорди, відмінні від діаметрів.

$\angle OBK = 30°$, то $\frac{OK}{OB} = \sin 30° = \frac{1}{2}$; звідси випливає, що K — середина OM.

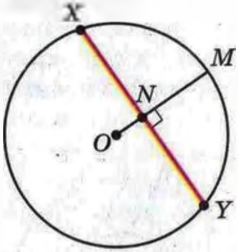


Рис. 35.5

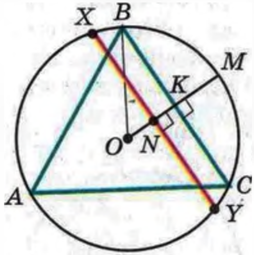


Рис. 35.6

Довжина хорди XY буде більшою за сторону BC, якщо точка N належатиме внутрішності відрізка OK. Використовуючи геометричне визначення ймовірності, стверджуємо, що ймовірність обрати хорду XY, більшу за сторону BC, дорівнює відношенню $\frac{OK}{OM}$. Оскільки $\frac{OK}{OM} = \frac{1}{2}$, то така ймовірність дорівнює $\frac{1}{2}$.

Друге розв'язання. Зафіксуємо на колі деяку точку X і діаметрально протилежну до неї точку X_1 (рис. 35.7). Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що навмання обирають хорду з кінцем у точці X. Оберемо навмання на колі інший кінець хорди — точку Y.

Впишемо в коло рівносторонній трикутник XAC.

Зрозуміло, що довжина хорди XY буде більшою за сторону вписаного рівностороннього трикутника, якщо точка Y належатиме дузі AX_1C кола і буде відмінною від точок A, X_1, C (рис. 35.7). Використовуючи геометричне визначення ймовірності, стверджуємо, що ймовірність обрати хорду XY, більшу за сторону трикутника XAC, дорівнює відношенню довжини дуги AC до довжини всього кола. Оскільки точки X, A, C розбивають коло на три рівні дуги, то така ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$.

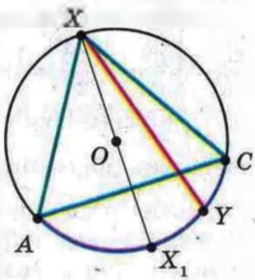


Рис. 35.7

Третє розв'язання. Нехай N — довільна точка внутрішності круга, відмінна від точки O. Побудуємо таку хорду XY, що точка N є її серединою (рис. 35.8). Оскільки трикутник OXY рівнобедрений, то ON є не лише його медіаною, а й висотою. Отже, для побудови шуканої хорди XY треба через точку N провести хорду, перпендикулярну до ON. Зрозуміло, що така хорда єдина. Таким чином, обрати навмання хорду XY означає обрати в крузі навмання точку N, відмінну від точки O, і провести таку хорду XY, що точка N є її серединою.

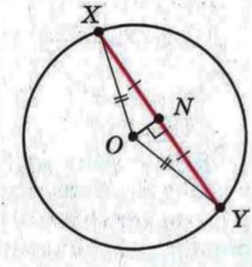


Рис. 35.8

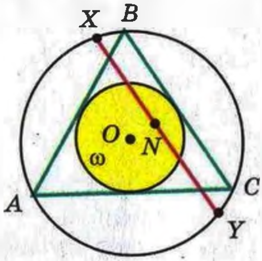


Рис. 35.9

Впишемо в коло рівносторонній трикутник ABC і розглянемо вписане коло ω цього трикутника (рис. 35.9). Неважко переконатися, що радіус r вписаного кола ω дорівнює $\frac{R}{2}$, де R — радіус даного в умові задачі кола.

Зрозуміло, що довжина хорди XY буде більшою за сторону трикутника ABC, якщо точка N, відмінна від точки O, належатиме внутрішності круга ω. Використовуючи геометричне визначення ймовірності, стверджуємо, що ймовірність обрати хорду XY, більшу за сторону трикутника ABC, дорівнює відношенню площ вписаного та описаного кругів трикутника ABC. Оскільки $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, то така ймовірність дорівнює $\frac{1}{4}$. ●

У результаті ми отримали, що ймовірність однієї випадкової події може дорівнювати і $\frac{1}{2}$, і $\frac{1}{3}$, і $\frac{1}{4}$!? Яке ж із трьох наведених міркувань є правильним, і де помилка в інших двох?

Відповідь на поставлені запитання надзвичайно несподівана — усі запропоновані розв'язання є ПРАВИЛЬНИМИ! Кожне з наведених міркувань коректно розв'язує свою окрему задачу.

Власне, ідеться про три різні задачі і відповідно про три коректних розв'язування.

Для того щоб детальніше розібратися в сказаному, нам доведеться краще проаналізувати умови ймовірнісних задач.

Згадаємо, що інколи при словесному описі умови задачі не вдається абсолютно точно уявити, як фактично відбувається випробування, а отже, неможливо коректно описати простір елементарних наслідків, довести їх рівноможливість тощо.

Наприклад, якщо сказано «з множини $\{1, 2, 3\}$ навмання обирають два числа», то незрозуміло, як саме беруть ці два числа: спочатку одне, а потім інше, чи одразу два числа купою. У першому варіанті маємо 6 елементарних наслідків:

$$U_1 = \{(1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2)\}.$$

У другому способі є лише 3 елементарних наслідки:

$$U_2 = \{\{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}\}.$$

Фактично йдеться про два різних експерименти.

Найчастіше головна проблема виникає через те, що слово «навмання» допускає занадто вільні трактування і дуже сильно спирається на побутовий досвід і традиції.

Розглянемо, наприклад, задачу.

У жіночій сумочці є два відділення, у кожному з яких лежать по два тюбики з помадою. У першому відділенні обидві помади рожеві, а в другому — червоні. Жінка навмання витягує із сумочки два тюбики з помадою. Яка ймовірність того, що обидві витягнуті помади виявляться рожевими (подія A)?

Прочитавши таку умову, ми уявляємо, як рука жінки відкриває сумочку, обирає одне з двох відділень і витягує якийсь тюбик помади з цього відділення. Потім ця процедура повторюється ще раз.

Ймовірність обрати відділення з рожевими помадами дорівнює $\frac{1}{2}$ як у першій, так і в другій спробі. Оскільки друге випробування відбувається незалежно від результатів першого, то ймовірність витягнути обидві рожеві помади дорівнює $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Розглянемо ще одне тлумачення умови цієї задачі. Уявімо, що жінка звикла до іншого способу витягувати два тюбики помади навмання із сумочки (хто може передбачити дії жінки в такій справі?). Спочатку вона серед літер «*а*», «*б*», «*в*» навмання обирає одну. Якщо вибрано літеру «*а*», то жінка витягує обидва тюбики помади з першого відділення, якщо вибрано літеру «*б*», то — з другого, а якщо літеру «*в*», то вона витягує один тюбик помади з першого, а ще один тюбик — з другого відділення навмання. При такому способі вибору обидві рожеві помади будуть узяті з ймовірністю $p(A)=\frac{1}{3}$ (коли обрано літеру «*а*»).

То яке ж із двох запропонованих розв'язувань правильне? Звісно, що кожне, бо це розв'язання двох різних задач, що відповідають двом різним тлумаченням слова «навмання».

Те саме явище відбувається і в парадоксі Бертрана. Кожне з трьох запропонованих розв'язувань відповідає своєму спеціальному способу випадкового вибору хорди. Тепер уже не дивно, що при цьому було отримано різні відповіді.

§ 6. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

36. Множина комплексних чисел

Алгебраїчні рівняння слугують математичними моделями реальних процесів, які вивчаються в найрізноманітніших галузях знань. Тому одним із важливих завдань математики є дослідження алгебраїчних рівнянь.

Вам добре знайомий ланцюжок $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, який демонструє співвідношення між числовими множинами. Він ілюструє процес розширення числових множин. Багато в чому це розширення стимулювалося розвитком теорії розв'язування алгебраїчних рівнянь. Пояснимо сказане.

Рівняння $x + 2 = 0$ не має натуральних коренів. При цьому зазначене рівняння має розв'язки на множині $\mathbb{Z}$. Рівняння $2x - 1 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{Z}$, але воно має розв'язки на множині $\mathbb{Q}$. Рівняння $x^2 - 2 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{Q}$, але воно має розв'язки на множині $\mathbb{R}$.

Ці приклади показують, що розширення числових множин може зробити нерозв'язуване рівняння розв'язуваним.

Рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{R}$. Виникає природне запитання: чи є необхідність розширити множину $\mathbb{R}$ так, щоб це рівняння стало розв'язуваним?

Звернемося, наприклад, до рівняння $x^3 - 15x + 10 = 0$. Розглянувши неперервну функцію $f(x) = x^3 - 15x + 10$, за допомогою першої теореми Больцано–Коші встановлюємо, що на кожному з проміжків $(-5; 0)$, $(0; 1)$ і $(1; 4)$ функція f має нуль.

Проте гарантія існування коренів даного кубічного рівняння ніяк не допомагає знайти їх. Це рівняння є складним. Якщо методами розв'язування квадратних рівнянь володіли ще стародавні греки, то для кубічних рівнянь, незважаючи на величезні зусилля багатьох поколінь учених, протягом більше тисячі років не вдавалося знайти більш-менш загального способу розв'язування.

Лише в XVI столітті італійські науковці винайшли прийом, який ми продемонструємо на даному кубічному рівнянні.

Зробивши заміну $x = z + \frac{5}{z}$, отримуємо:

$$z^3 + 15z + \frac{75}{z} + \frac{125}{z^3} - 15\left(z + \frac{5}{z}\right) + 10 = 0.$$

Звідси $z^3 + \frac{125}{z^3} + 10 = 0.$

Маємо: $z^6 + 10z^3 + 125 = 0$; $(z^3 + 5)^2 + 100 = 0$; $\left(\frac{z^3 + 5}{10}\right)^2 + 1 = 0.$

Виконавши заміну $\frac{z^3 + 5}{10} = t$, отримаємо рівняння $t^2 + 1 = 0$.

Звісно, рівняння $t^2 + 1 = 0$ не має коренів. Але бажання розв'язати початкове кубічне рівняння спонукало вчених ввести до розгляду деякий новий об'єкт (позначимо його, наприклад, символом i) такий, що $i^2 + 1 = 0$. Виконуючи дії з цим об'єктом як з дійсними числами, італійські вчені змогли виразити через нього значення змінної z, а потім знайти й x. Виявилося, що вирази для знаходження змінної x не містять символу i та визначають дійсні корені даного кубічного рівняння.

Таким чином, розширення множини $\mathbb{R}$ до множини, на якій рівняння $x^2 + 1 = 0$ буде мати корені, є доцільним.

Окреслимо напрями пошуку нової числової множини (будемо її називати множиною *комплексних чисел*):

1) множина комплексних чисел повинна містити в собі множину дійсних чисел;
2) над елементами множини комплексних чисел мають бути визначені арифметичні дії (додавання, віднімання, множення і ділення);
3) арифметичні дії повинні мати властивості відповідних дій із дійсними числами;
4) рівняння $x^2 + 1 = 0$ повинно мати розв'язок на множині комплексних чисел.

Серед множин, які ви вивчали раніше в школі, немає такої, яка задовольняє всі перелічені вимоги. Але існує множина, що задовольняє деякі з цих умов.

На координатній площині розглянемо множину (позначатимемо її $\mathbb{C}$) всіх векторів $\overline{OZ}$, де O — початок координат, а Z —

будь-яка точка на площині. Елементи множини $\mathbb{C}$ можна додавати і віднімати за правилами, подібними тим, за якими додають і віднімають дійсні числа. Наприклад,

$$\overline{OZ_1}+\overline{OZ_2}=\overline{OZ_2}+\overline{OZ_1}$$

або

$$\overline{OZ_1}-\left(\overline{OZ_2}+\overline{OZ_3}\right)=\overline{OZ_1}-\overline{OZ_2}-\overline{OZ_3}.$$

Якщо між двома множинами встановлено взаємно однозначну відповідність, то елементи однієї множини можна ототожнити з елементами другої. Наприклад, точку координатної прямої ми називаємо дійсним числом, а дійсне число — точкою. Існує й інша геометрична інтерпретація дійсних чисел, коли дійсне число ототожнюють з вектором. Розглянемо таку інтерпретацію.

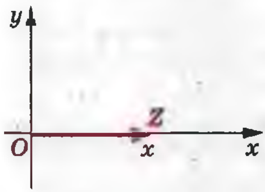


Рис. 36.1

Нехай точка Z лежить на осі абсцис і має координати $Z(x;0)$. Тоді вектору $\overline{OZ}$ з координатами $(x;0)$ відповідає дійсне число x (рис. 36.1). І навпаки, кожному дійсному числу x відповідає вектор $\overline{OZ}$ з координатами $(x;0)$. Наведена відповідність дозволяє ототожнити дійсне число x і вектор $\overline{OZ}$ з координатами $(x;0)$. Множина таких векторів є підмножиною множини $\mathbb{C}$. Тому можна вважати, що $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Таким чином, множина $\mathbb{C}$ частково задовольняє описані вище вимоги до множини комплексних чисел. Це дає підстави будувати множину комплексних чисел, ґрунтуючись на множині $\mathbb{C}$.

Означення. Комплексним числом називають вектор $\overline{OZ}$, де O — початок координат, а Z — довільна точка площини.

Комплексне число $\overline{OZ}$ позначають буквою z. Пишуть: $z=\overline{OZ}$.

Розглянемо вектор $\overline{OA}$ з координатами $(1;0)$. Цей вектор ототожнено з дійсним числом 1. Тому таке комплексне число $\overline{OA}$ позначають цифрою 1 і називають **одиницею**.

Розглянемо вектор $\overline{OB}$ з координатами $(0;1)$. Таке комплексне число $\overline{OB}$ позначають буквою i та називають **уявною одиницею** (рис. 36.2).

Вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$ неколінеарні. Тому для будь-якого вектора $\overline{OZ}$ існує єдина пара дійсних чисел $(a;b)$ така, що $\overline{OZ}=a\cdot\overline{OA}+b\cdot\overline{OB}$.

Зауважимо, що пара дійсних чисел $(a;b)$ — це координати точки Z і вектора $\overline{OZ}$ (рис. 36.3).

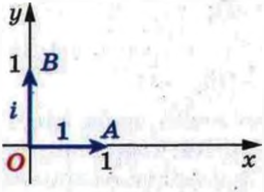


Рис. 36.2

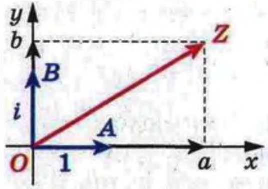


Рис. 36.3

З урахуванням введених позначень рівність $\overline{OZ} = a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB}$ можна записати так: $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Таким чином, *довільне комплексне число* z *можна подати у вигляді* $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, де a, b — деякі дійсні числа (координати точки Z і вектора $\overline{OZ}$).

Наголосимо, що в записі $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ символи 1 та i — це позначення векторів з координатами $(1;0)$ та $(0;1)$ відповідно.

Замість виразу $a \cdot 1 + b \cdot i$ для комплексного числа z прийнято скорочений запис $a + bi$. Цей запис називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

У записі $z = a + bi$ число a називають **дійсною частиною** комплексного числа z і позначають $\mathrm{Re}\, z$, число b — **уявною частиною** і позначають $\mathrm{Im}\, z$ (від французьких слів *réele* — дійсний і *imaginaire* — уявний), тобто $\mathrm{Re}\, z = a$, $\mathrm{Im}\, z = b$.

Наприклад, для комплексного числа $z = 2 + 4i$ маємо: $\mathrm{Re}\, z = 2$, $\mathrm{Im}\, z = 4$ (рис. 36.4).

Якщо $\mathrm{Re}\, z = 0$, тобто $z = bi$, то таке комплексне число z називають **суто уявним**.

Далі, якщо інше не обумовлене, у записі $a + bi$ числа a і b вважатимемо дійсними.

Ви знаєте, що два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати. Тому *комплексні числа* z_1 *і* z_2 *рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові дійсні частини та однакові уявні частини.*

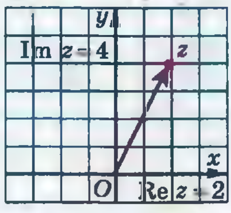


Рис. 36.4

Оскільки комплексні числа — це вектори, то можна вважати, що для комплексних чисел введено операції: додавання, віднімання та множення на дійсне число. Наприклад, виконуються рівності:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i,$$
$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\,i,$$
$$k\,(a+bi)=ka+kbi,\ \ k\in\mathbb{R}.$$

Нагадаємо, що записані рівності виражають правила дій з векторами в координатній формі.

ПРИКЛАД 1 Нехай $z_1=3+2i$, $z_2=-4+i$. Виконайте дії:

1) z_1+2z_2; 2) $-\frac{z_1}{2}-3\left(z_2+\frac{z_1}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо:

1) $z_1+2z_2=(3+2i)+2(-4+i)=3+2i-8+2i=-5+4i$;

2) $-\frac{z_1}{2}-3\left(z_2+\frac{z_1}{2}\right)=-\frac{1}{2}z_1-3z_2-\frac{3}{2}z_1=-2z_1-3z_2=$

$=-6-4i+12-3i=6-7i.$ ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть дійсні числа x і y з рівності

$$(3x+2yi)+(-5y+4xi)=1+10i.$$

Розв'язання. Додамо комплексні числа, які стоять у лівій частині рівності:

$$(3x-5y)+(2y+4x)\,i=1+10i.$$

Далі, скориставшись умовою рівності двох комплексних чисел, отримуємо:

$$\begin{cases}3x-5y=1,\\2y+4x=10.\end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $x=2$, $y=1$. ●

З курсу геометрії вам відомо, що модулем вектора $\overline{OZ}$ називають відстань між точками O і Z. Якщо вектор $\overline{OZ}$ має координати $(a;b)$, то $\left|\overline{OZ}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$. Таким чином, модулем комплексного числа $z=a+bi$ є число $\sqrt{a^2+b^2}$. Пишуть: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ (рис. 36.5).

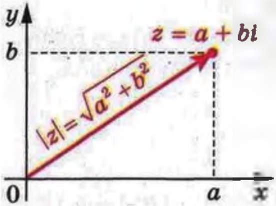


Рис. 36.5

Модуль комплексного числа є дійсним числом.

Наприклад,

$$|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5,$$

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad |-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

З означення модуля комплексного числа випливає, що для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність $|z| \geqslant 0$, причому $|z| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $z = 0$.

На множині $\mathbb{C}$ визначено операції додавання, віднімання та множення на дійсне число. Нагадаємо, що одним з мотивів введення комплексних чисел була необхідність знайти таке комплексне число, яке є розв'язком рівняння $x^2 + 1 = 0$, тобто рівняння $x \cdot x + 1 = 0$. Для цього потрібно дати означення добутку комплексних чисел. Зауважимо, що відомий вам скалярний добуток векторів для цієї мети не підходить. Справді, скалярний добуток $z \cdot z$ для будь-якого вектора $z \in \mathbb{C}$ дорівнює дійсному числу $|z|^2$. Оскільки $|z|^2 \geqslant 0$, то $z^2 + 1 > 0$ при будь-якому $z \in \mathbb{C}$.

Спробуємо ввести добуток комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ так, щоб зберегти звичні властивості множення. Для цього у виразі $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ розкриємо дужки звичним способом:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \, (i \cdot i). \qquad (1)$$

Бачимо, що для означення добутку комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ треба лише домовитися про значення добутку $i \cdot i$. При цьому добуток $i \cdot i$ має бути означений так, щоб рівняння $z \cdot z = -1$, тобто рівняння $z^2 + 1 = 0$, мало розв'язок. Тому домовилися, що $i \cdot i = -1$, тобто $i^2 + 1 = 0$. Отже, рівність (1) можна записати так:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \cdot (-1) =$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Тепер дамо таке означення:

Означення. Добутком комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ та $a_2 + b_2 i$ називають комплексне число $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$.

Наприклад,

$$(2 + 3i)(1 - i) = (2 + 3) + (-2 + 3)\, i = 5 + i.$$

Неважко переконатися, що визначений у такий спосіб добуток комплексних чисел має всі звичні властивості. Наприклад,

1) $z_1 z_2 = z_2 z_1$,

2) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,

3) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

З властивостей операції множення випливає, що ціла низка тотожностей, справедливих для дійсних чисел, наприклад, формули скороченого множення або правила розкриття дужок, є справедливими і для комплексних чисел. Отже, дії з комплексними числами можна виконувати за правилами дій з многочленами, замінюючи i^2 на -1.

ПРИКЛАД Знайдіть усі такі комплексні числа z, що $z^2 = -8 + 6i$.

Розв'язання. Нехай $z = a + bi$. Тоді $(a + bi)^2 = -8 + 6i$.

Звідси $a^2 + 2abi - b^2 = -8 + 6i$; $(a^2 - b^2) + 2abi = -8 + 6i$.

Таким чином, задача зводиться до пошуку дійсних розв'язків системи $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8, \\ 2ab = 6. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ a^2 - \dfrac{9}{a^2} = -8; \end{cases}$ $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ a^4 + 8a^2 - 9 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = -3. \end{cases} \end{array}\right.$

Отже, задача має два розв'язки: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -1 - 3i$. ●

Означення. Комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ називають **спряженими**.

Наприклад, комплексні числа $5+7i$ і $5-7i$ є спряженими. Також кажуть, що число $5-7i$ є спряженим числу $5+7i$, а число $5+7i$ є спряженим числу $5-7i$.

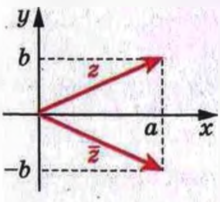


Рис. 36.6

Комплексне число, спряжене числу z, позначають $\bar{z}$, тобто якщо $z = a + bi$, то $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

Наприклад, $\overline{5+7i} = 5 - 7i$, $\bar{i} = -i$.

Спряжені комплексні числа — це вектори, симетричні відносно осі абсцис (рис. 36.6).

Число, спряжене дійсному числу a, збігається з числом a. Наприклад, $\bar{5} = 5$.

Для будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 виконуються рівності:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Доведіть ці властивості самостійно.

ПРИКЛАД 4 Розкладіть на множники вираз $a^2 + b^2$, використовуючи формулу різниці квадратів.

Розв'язання. Маємо: $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a - bi)(a + bi)$. ●

Отриману в прикладі 4 тотожність $(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$ можна записати так: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. З цієї тотожності випливає, що *добуток спряжених чисел є дійсним числом.*

Дію ділення комплексних чисел означають, використовуючи дію множення. Наприклад, під часткою чисел $-1+i$ і $1+i$ розуміють таке число z, що $z(1+i)=-1+i$. Оскільки $i(1+i)=-1+i$, то число i є часткою чисел $-1+i$ і $1+i$.

Означення. Часткою комплексних чисел z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, називають таке комплексне число z, що $z \cdot z_2 = z_1$.

Пишуть: $z_1 : z_2 = z$ або $\frac{z_1}{z_2} = z$.

При заданих z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, використовуючи властивості операції множення, покажемо існування та єдиність такого z, що $z \cdot z_2 = z_1$. Тим самим доведемо, що частка комплексних чисел z_1 і z_2 існує і визначається однозначно.

Помноживши обидві частини рівності $z \cdot z_2 = z_1$ на $\bar{z}_2$, отримаємо таке: $zz_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_2$. Звідси $z|z_2|^2 = z_1\bar{z}_2$.

Помноживши обидві частини останньої рівності на дійсне число $\frac{1}{|z_2|^2}$, отримуємо: $z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Неважко переконатися, що отримане число $z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ задовольняє рівність $z \cdot z_2 = z_1$.

Таким чином, доведено, що частка комплексних чисел z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, існує та визначається однозначно.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть частку $\frac{2-3i}{2+i}$.

Розв'язання. Для знаходження частки $\frac{z_1}{z_2}$ зручно домножити чисельник і знаменник дробу на $\bar{z}_2$.

Маємо: $\frac{2-3i}{2+i} = \frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-2i-6i-3}{4+1} = \frac{1-8i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$. ●

Підведемо підсумки. Множина $\mathbb{C}$ задовольняє всі чотири сформульовані вище вимоги:

1) множина $\mathbb{C}$ містить у собі множину дійсних чисел;
2) над елементами множини $\mathbb{C}$ визначено арифметичні дії;
3) арифметичні дії на множині $\mathbb{C}$ мають властивості відповідних дій з дійсними числами;
4) рівняння $x^2+1=0$ має розв'язок на множині $\mathbb{C}$.

Вправи

36.1.° Подайте в алгебраїчній формі комплексні числа, зображені на рисунку 36.7.

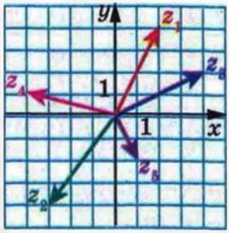


Рис. 36.7

36.2.° Назвіть дійсну і уявну частини комплексного числа:

1) -5; 3) $3+2i$; 5) $i-2$;
2) $3i$; 4) $4-5i$; 6) $-1-6i$.

36.3.° Укажіть, які з даних комплексних чисел рівні:

$z_1=2-3i$; $z_3=3-2i$; $z_5=\sqrt{9}-\sqrt{4}$;
$z_2=2-\sqrt[3]{27}\,i$; $z_4=\sqrt{4}-3i$; $z_6=\sqrt[3]{8}-3i$.

36.4.° Знайдіть дійсні числа x і y з рівності:

1) $x+(x-y)\,i=-6+i$; 3) $(x^2+5yi)-(y+xi)=3+3i$.
2) $x^2+xyi=9-2i$;

36.5.° Знайдіть дійсні числа x і y з рівності:

1) $5x-7yi=2+3i$; 3) $(x+3y^2i)-(2y-xi)=1+6i$.
2) $6x-y^2i=-1-4i$;

36.6.° Знайдіть суму комплексних чисел:

1) $(3-5i)+(2+3i)$; 2) $4i+(1-i)$; 3) $(4-3i)+2$.

36.7.° Знайдіть різницю комплексних чисел z_1 і z_2, якщо:

1) $z_1=-9+2i$, $z_2=2-5i$; 3) $z_1=-3-i$, $z_2=4+i$.
2) $z_1=7$, $z_2=4+i$;

36.8.° Знайдіть значення виразу $3z_1-2z_2$, якщо $z_1=5-6i$, $z_2=1-9i$.

36.9.° Розв'яжіть рівняння $-2(z+i)=4-3i$.

36.10.° Розв'яжіть рівняння $3(z-1)=i-z$.

36.11.° Напишіть число, спряжене даному:

1) $2 - 7i$; 2) $-3 + 5i$; 3) 6; 4) $-7i$.

36.12.° Напишіть число, спряжене даному:

1) $8 - 3i$; 2) $-6 + 11i$; 3) -12; 4) $9i$.

36.13.° Доведіть, що: 1) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$; 2) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$.

36.14.° Знайдіть модуль комплексного числа:

1) $-7i$; 2) 3; 3) $5 + 12i$.

36.15.° Знайдіть модуль комплексного числа:

1) $4i$; 2) -18; 3) $15 - 8i$.

36.16.° Доведіть, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується рівність:

1) $\bar{\bar{z}} = z$; 2) $|z| = |\bar{z}|$.

36.17.° Доведіть, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ число $z + \bar{z}$ є дійсним.

36.18.° Доведіть, що рівність $\bar{z} = z$ є справедливою тоді і тільки тоді, коли z — дійсне число.

36.19.° Знайдіть добуток комплексних чисел:

1) $(2 + 3i)(3 + 2i)$; 2) $(4 + 3i)(4 - 3i)$; 3) $(5 + i)\,2i$.

36.20.° Знайдіть добуток комплексних чисел:

1) $(6 + i)(1 - 3i)$; 2) $(2 - 3i)(2 + 3i)$; 3) $3i\,(7 - 4i)$.

36.21.° Знайдіть значення виразу: 1) i^{73}; 2) i^{4n+2}; 3) i^{4n+3}, $n \in \mathbb{N}$.

36.22.° Знайдіть значення виразу: 1) i^{54}; 2) i^{4n}; 3) i^{4n+1}, $n \in \mathbb{N}$.

36.23.° Спростіть вираз:

1) $(2 + i)(1 - i) + i\,(4 - 5i)$; 3) $(1 + i)^4$;

2) $\left(\sqrt{5} + 2i\right)\left(\sqrt{5} - 2i\right) + (1 - i)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

36.24.° Спростіть вираз:

1) $(4 - i)\,i + (7 - 2i)(3 + i)$; 3) $(1 - i)^4$;

2) $\left(1 - \sqrt{2}\,i\right)\left(1 + \sqrt{2}\,i\right) + (1 + i)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

36.25.° Знайдіть усі такі комплексні числа z, що:

1) $z^2 = i$; 2) $z^2 = -5 + 12i$.

36.26.° Знайдіть усі такі комплексні числа z, що:

1) $z^2 = -i$; 2) $z^2 = 15 - 8i$.

36.27.° Обчисліть:

1) $\frac{-1}{i}$; 2) $\frac{2+i}{-i}$; 3) $\frac{4}{2-i}$; 4) $\frac{3i}{1+2i}$; 5) $\frac{1+4i}{2+3i}$; 6) $\frac{3+4i}{3-4i}$.

36.28.° Обчисліть:

1) $\dfrac{3}{-i}$; 2) $\dfrac{5i}{3+2i}$; 3) $\dfrac{7+i}{2+i}$; 4) $\dfrac{4-5i}{4+5i}$.

36.29.° Розв'яжіть рівняння:

1) $iz = 2 + i$; 2) $(4 - i)\,z = 3 + i$; 3) $\dfrac{i}{z+i} = \dfrac{4-i}{iz-1}$.

36.30.° Розв'яжіть рівняння:

1) $-iz = 7 - 3i$; 2) $(4 + 3i)\,z = 4 - 3i$; 3) $\dfrac{3i-z}{i-1} = 2iz+1$.

36.31.° Обчисліть:

1) $\dfrac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; 3) $\dfrac{2}{3-i}+\dfrac{2}{3+i}$; 5) $\left(\dfrac{1+i^{7}}{1-i^{5}}\right)^{8}$.

2) $\dfrac{4-3i}{(1-i)(2+i)}$; 4) $\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{1-2i}{1+2i}$;

36.32.° Обчисліть:

1) $\dfrac{(2+5i)(1+i)}{-1+i}$; 3) $\dfrac{5+i}{5-i}+\dfrac{5-i}{5+i}$;

2) $\dfrac{4+i}{(-2+3i)(1+2i)}$; 4) $\left(\dfrac{1-i^{19}}{1+i^{17}}\right)^{15}$.

36.33.° Дано: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$. Обчисліть:

1) $\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$; 2) $\dfrac{z_1}{\bar{z}_1+z_2}$; 3) $\dfrac{z_1-z_2}{\bar{z}_2}$.

36.34.° Дано: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$. Обчисліть:

1) $\dfrac{z_1+\bar{z}_2}{(z_2)^2}$; 2) $\dfrac{z_1-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-z_2}$; 3) $\dfrac{(\bar{z}_1+z_2)^2}{z_2}$.

36.35.° Доведіть нерівність:

1) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$;

2) $|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$.

36.36.° Доведіть рівність $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

36.37.° Доведіть нерівність $|z_1-z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|$.

36.38.° Доведіть, що $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

36.39.° Доведіть, що число $z^n+\bar{z}^n$ є дійсним для всіх $z \in \mathbb{C}$.

36.40.° Доведіть, що:

1) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; 2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

36.41.° Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу $1 + i + i^2 + \ldots + i^n$ дорівнює 1.

36.42.° Знайдіть значення виразу $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 100i^{100}$.

36.43.° Знайдіть усі комплексні числа, які спряжені своєму квадрату.

36.44.°° Доведіть, що коли $x + yi = (a + bi)^n$, то $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^n$.

36.45.°° Доведіть, що коли $x + yi = (a + bi)^n$, то $x - yi = (a - bi)^n$.

37. Комплексна площина. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо на координатній площині точку $Z(a; b)$ (рис. 37.1). Оскільки комплексне число $z = a + bi$ — це вектор $\overline{OZ}$ з координатами $(a; b)$, то кожному комплексному числу $z = a + bi$ можна поставити у відповідність єдину точку $Z(a; b)$ координатної площини. І навпаки, кожна точка Z з координатами $(a; b)$ є відповідною єдиному комплексному числу $z = a + bi$. Комплексне число $z = a + bi$ називають **комплексною координатою** точки $Z(a; b)$. Наприклад, число $z = 2 - 3i$ є комплексною координатою точки M з декартовими координатами $(2; -3)$ (рис. 37.2). Це позначають так: $M(2 - 3i)$.

Отримана взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини дозволяє ототожнювати елементи цих двох множин. Так, замість слів «точка, яка зображує число $2 - 3i$» (рис. 37.2), коротко говорять «точка $2 - 3i$». Також, наприклад, говорять «трикутник з вершинами $1 - i$, $1 + i$, $-i$» (рис. 37.3).

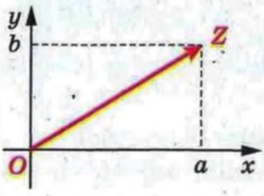


Рис. 37.1

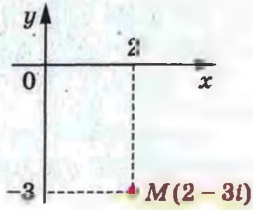


Рис. 37.2

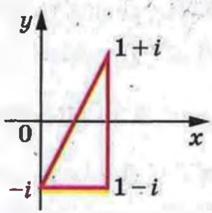


Рис. 37.3

Зрозуміло, що при такій інтерпретації дійсні числа зображуються точками осі абсцис, а суто уявні числа — точками осі ординат. Тому вісь абсцис називають **дійсною віссю** (позначають Re), а вісь ординат — **уявною віссю** (позначають Im). Площину, на якій зображають комплексні числа z, називають **комплексною площиною** z (позначають (z)).

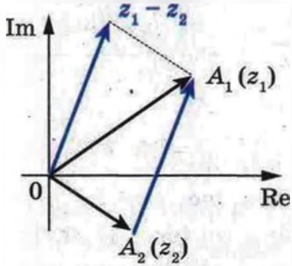


Рис. 37.4

На комплексній площині розглянемо точки $A_1(z_1)$ і $A_2(z_2)$ (рис. 37.4). Оскільки $\overline{A_2A_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA_2} = z_1 - z_2$, то $\overline{A_2A_1} = z_1 - z_2$. Таким чином, будь-який вектор на площині дорівнює різниці комплексної координати кінця вектора і комплексної координати початку вектора. Цей факт дозволяє будь-який вектор на площині розглядати як комплексне число.

З рівності $\overline{A_2A_1} = z_1 - z_2$ отримуємо $|z_1 - z_2| = |\overline{A_2A_1}| = A_2A_1$. Це означає, що число $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками z_1 і z_2. Ця властивість виражає геометричний зміст модуля різниці двох комплексних чисел.

ПРИКЛАД 1 Зобразіть на комплексній площині всі такі числа z, які задовольняють умову:

1) $z\bar{z} = 1$; 2) $1 < |z + 1| < 2$; 3) $|z - i| = |z - 1|$.

Розв'язання. 1) Оскільки $z\bar{z} = |z|^2$, то отримуємо, що $|z| = 1$. Тоді всі шукані точки знаходяться на відстані 1 від початку координат. Отже, шукана множина точок — це коло з центром у початку координат радіуса 1 (рис. 37.5).

2) Розглянемо нерівність $|z + 1| < 2$, тобто $|z - (-1)| < 2$. Число $|z - (-1)|$ дорівнює відстані від точки $-1 + 0i$ до деякої точки z. Тоді нерівність $|z + 1| < 2$ задовольняють усі ті і тільки ті точки комплексної площини, які лежать усередині круга радіуса 2 з центром у точці $-1 + 0i$.

Зрозуміло, що нерівність $|z + 1| > 1$ задовольняють усі ті і тільки ті точки комплексної площини, які лежать поза кругом радіуса 1 з центром у точці $-1 + 0i$.

Тоді шукані точки утворюють кільце, обмежене колами $|z + 1| = 1$ і $|z + 1| = 2$ (рис. 37.6).

3) Дану умову задовольняють усі ті і тільки ті точки комплексної площини, які рівновіддалені від точок i і 1. Таким чином, шукана множина — це серединний перпендикуляр відрізка з кінцями i і 1 (рис. 37.7). ●

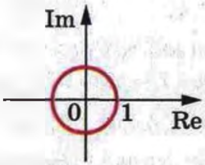


Рис. 37.5

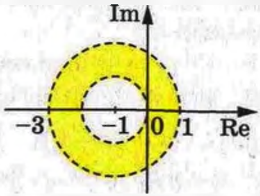


Рис. 37.6

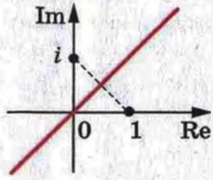


Рис. 37.7

Розглянемо комплексні числа z і z_0 такі, що $|z| = |z_0|$ і точка z_0 належить додатному напряму дійсної осі (рис. 37.8). Тоді точку z можна розглядати як образ точки z_0 при повороті з центром O на деякий кут φ, тобто $z = R_O^{\varphi}(z_0)$.

Кут φ називають **аргументом** комплексного числа z. Його позначають так: $\arg z$.

Для числа $z = 0$ аргумент не означають. Тому в усіх подальших міркуваннях, пов'язаних з аргументом комплексного числа z, будемо вважати, що $z \neq 0$.

Оскільки існує безліч кутів повороту, при яких точка z є образом точки z_0, то дане комплексне число z має безліч аргументів. Будь-які два аргументи даного комплексного числа відрізняються одне від одного на число виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, кожне число виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є аргументом числа i. Легко встановити, що кожний кут виду $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є аргументом числа $-1 + i$ (рис. 37.9).

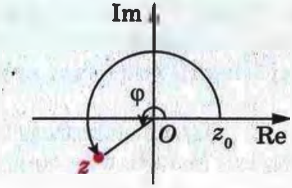


Рис. 37.8

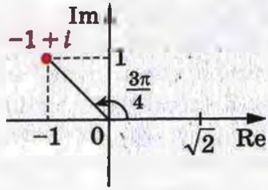


Рис. 37.9

Нехай r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $z = a + bi$. Тоді з означення синуса і косинуса кута повороту можна записати: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ (рис. 37.10). Тому число z можна подати в такому вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1)$$

Запис комплексного числа $z \neq 0$ у вигляді (1) називають тригонометричною формою комплексного числа.

Наприклад, $5 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$;

$$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi);$$

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Оскільки модуль комплексного числа $z = a + bi$ дорівнює $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, то аргумент φ комплексного числа z, де $z \neq 0$, можна знайти із системи:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \qquad (2)$$

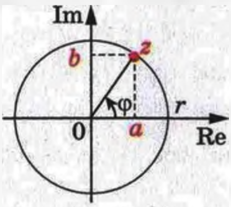


Рис. 37.10

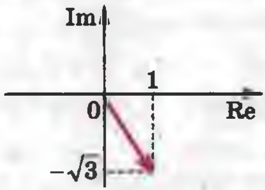


Рис. 37.11

ПРИКЛАД Запишіть комплексне число $z = 1 - \sqrt{3}i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. На рисунку 37.11 зображено комплексне число $z = 1 - \sqrt{3}i$. Тоді $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Використовуючи формули (2), знаходимо:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси } \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді шуканою тригонометричною формою числа $z = 1 - i\sqrt{3}$ можуть слугувати, наприклад, такі записи:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right). \bullet$$

Зауважимо, що комплексне число $z = 1 - i\sqrt{3}$ можна подати й так:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Проте за означенням такий запис не є тригонометричною формою комплексного числа z.

Зазначимо, що для двох комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записаних у тригонометричній формі, рівність $z_1 = z_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $r_1 = r_2$ і $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вправи

37.1.° Позначте на комплексній площині точку, яка відповідає комплексному числу:

1) 3; 3) $1 + 2i$; 5) $2 - 3i$; 7) $\frac{1}{1-i}$;

2) $-5i$; 4) $-3 + i$; 6) $-4 - i$; 8) $(1 + i)^4$.

37.2.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\operatorname{Re} z = 3$; 4) $\operatorname{Im} z \leqslant 2$;

2) $\operatorname{Re} z \geqslant 4$; 5) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;

3) $\operatorname{Im} z = -1$; 6) $(\operatorname{Re} z)^2 = \operatorname{Im} z$.

37.3.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\operatorname{Re} z = -2$; 4) $\operatorname{Im} z \geqslant -3$;

2) $\operatorname{Re} z \leqslant 1$; 5) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$;

3) $\operatorname{Im} z = 4$; 6) $(\operatorname{Re} z)^2 = (\operatorname{Im} z)^2$.

37.4.° Скориставшись рисунком 37.12, назвіть комплексне число, рівне вектору:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{BD}$.

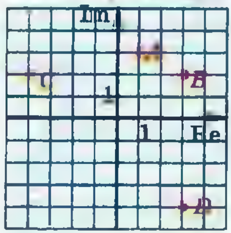


Рис. 37.12

37.5.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $|z| = 1$;
2) $|z| \leqslant 1$;
3) $|z + i| = 2$;
4) $|z + i| \geqslant 2$.

37.6.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $|z - 2i| = 3$;
2) $|z - 2i| < 3$;
3) $|z - 2i| \geqslant 3$.

37.7.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\arg z = \frac{\pi}{6}$;
2) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$;
3) $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}, \\ |z| = 2. \end{cases}$

37.8.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\arg z = -\frac{\pi}{4}$;
2) $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}$;
3) $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}, \\ |z| = 1. \end{cases}$

37.9.° Знайдіть усі аргументи комплексного числа:

1) 7;
2) $4i$;
3) $-2 - 2i$;
4) $\sqrt{3} + i$.

37.10.° Знайдіть усі аргументи комплексного числа:

1) -3;
2) $-5i$;
3) $-3 + 3i$;
4) $-1 + \sqrt{3}\,i$.

37.11.° Укажіть, які з комплексних чисел записано в тригонометричній формі:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{11} - i\sin\frac{\pi}{11}\right)$;
2) $9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$;
3) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;
4) $5\left(\cos\left(-\frac{27\pi}{5}\right) + i\sin\frac{27\pi}{5}\right)$;
5) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
6) $\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$;
7) $6\left(\sin\frac{2\pi}{13} + i\cos\frac{2\pi}{13}\right)$;
8) $\cos 2\pi + i\sin 4\pi$.

37.12.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) 7;
2) $4i$;
3) $-2 + 2i$;
4) $\sqrt{3} + i$;
5) $-1 + 2i$;
6) $-3 - i$;
7) $(3 - 2i)^2$;
8) $\frac{2+i}{1+i}$.

37.13.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) -3; 3) $-3 + 3i$; 5) $2 - i$; 7) $(1 + 3i)^2$;

2) $-5i$; 4) $-1+\sqrt{3}\,i$; 6) $-2 - 3i$; 8) $\frac{3-i}{1-i}$.

37.14.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}\right)$; 5) $-\cos\frac{1}{3}-i\sin\frac{1}{3}$.

3) $6\left(\sin\frac{2\pi}{13}+i\cos\frac{2\pi}{13}\right)$;

37.15.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) $5\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{5}\right)+i\sin\frac{19\pi}{5}\right)$; 3) $\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$;

2) $7\left(\cos\frac{7\pi}{29}-i\sin\frac{7\pi}{29}\right)$; 4) $-3\left(\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}\right)$.

37.16.° Доведіть, що коли φ — аргумент комплексного числа z, то $-\varphi$ — аргумент комплексного числа $\bar{z}$.

37.17.° Доведіть, що коли φ — аргумент комплексного числа z, то $-\varphi$ — аргумент комплексного числа $\frac{1}{z}$.

37.18.° На комплексній площині позначено дві точки: $A(z_1)$ і $B(z_2)$. Знайдіть комплексну координату середини відрізка AB.

37.19.° На комплексній площині позначено дві точки $A(z_1)$ і $B(z_2)$. Знайдіть комплексну координату такої точки C відрізка AB, що $AC:CB=m:n$.

37.20.° На комплексній площині зображено трикутник з вершинами $A(z_1)$, $B(z_2)$ і $C(z_3)$. Знайдіть комплексну координату точки перетину медіан трикутника ABC.

37.21.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $1 < |z - 1 - i| < 3$; 4) $|z| = \operatorname{Re} z$;

2) $|z - 2i| = |z - 4|$; 5) $|z| \leqslant \operatorname{Im} z$;

3) $|z - 2i| > |z - 4|$; 6) $|z - 1| = \operatorname{Re} z$.

37.22.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $2 \leqslant |z-1+i| < 3$; 3) $|z - 2| \geqslant |z + 4i|$; 5) $|z| \geqslant \operatorname{Re} z$;

2) $|z - 2| = |z + 4i|$; 4) $|z| = \operatorname{Im} z$; 6) $|z - i| = \operatorname{Im} z$.

37.23." Подайте в тригонометричній формі число $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, якщо:

1) $\varphi\in(0;\pi)$; 2) $\varphi\in(\pi;2\pi)$.

37.24.' Подайте в тригонометричній формі число $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, якщо:

1) $\varphi\in(0;\pi)$; 2) $\varphi\in(-\pi;0)$.

37.25." Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}+\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$; 2) $(1+i)\bar{z}=(1-i)z$.

37.26." Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}-\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$; 2) $(1-i)\bar{z}=(1+i)z$.

38. Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі. Корінь n-го степеня з комплексного числа

Знайдемо добуток комплексних чисел z_1 і z_2, записаних у тригонометричній формі.

Нехай $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Маємо: $z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Отже,

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (1)$$

Отримана формула дозволяє зробити такий висновок: ***модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників***, тобто

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2.$$

З формули (1) випливає, що коли комплексну координату точки M помножити на комплексне число $\cos\varphi+i\sin\varphi$, то отримаємо точку M_1 — образ точки M при повороті R_O^{φ}, тобто при повороті з центром у початку координат на кут φ (рис. 38.1).

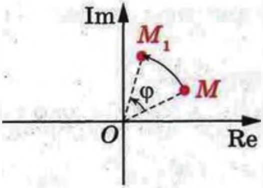


Рис. 38.1

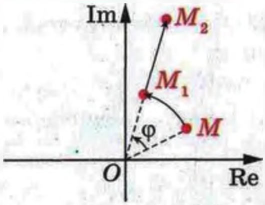


Рис. 38.2

Наприклад, множення комплексної координати точки M на число $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ задає поворот точки M з центром у початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$.

Коли комплексну координату точки M помножити на комплексне число $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то отримаємо точку M_2 — образ точки M при композиції перетворень повороту R_O^{φ} і гомотетії H_O^r, тобто $R_O^{\varphi}(M)=M_1$ і $H_O^r(M_1)=M_2$ (рис. 38.2).

Обчислимо частку $\frac{z_1}{z_2}$. Маємо:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Отже,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (2)$$

Отримана формула дозволяє зробити такий висновок: ***модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника***, тобто

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2.$$

З формули (1) випливає, що

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^2=r^2(\cos2\varphi+i\sin2\varphi),$$
$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^3=r^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi).$$

Узагалі, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ є справедливою формула

$$\boxed{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),}$$

яку називають **формулою Муавра**.

За допомогою метода математичної індукції доведіть формулу Муавра самостійно.

ПРИКЛАД 1 Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову $\arg(zi) = \frac{\pi}{3}$.

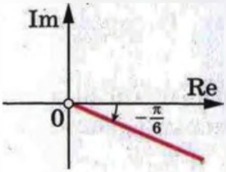


Рис. 38.3

Розв'язання. Нехай $\arg z = \varphi$. Оскільки $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то $\arg(zi) = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Маємо: $\varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$. Звідси $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Шукана множина чисел — це промінь, у якого «виколото» початок (рис. 38.3). ●

ПРИКЛАД 2 Обчисліть $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$.

Розв'язання. Маємо: $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{12} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^{12} = 2^6(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -64. \text{ ●}$$

Означення. Коренем n-го степеня з комплексного числа z, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке комплексне число w, що $w^n = z$.

Наприклад, число $1+i$ є квадратним коренем з числа $2i$. Справді, $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Число $-1-i$ також є квадратним коренем з числа $2i$.

Очевидно, що число 1 є кубічним коренем з числа 1. Ви знаєте, що на множині $\mathbb{R}$ існує тільки одне число, що є коренем кубічним з одиниці. На множині $\mathbb{C}$ ця властивість не зберігається. Кожне з чисел $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ та $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ також є коренем кубічним з одиниці. Справді,

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

$$\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3=\cos 4\pi+i\sin 4\pi=1.$$

Таким чином, на множині комплексних чисел кубічний корінь з одиниці набуває щонайменше трьох значень. Насправді має місце така теорема.

Теорема 38.1. ***Для будь-якого комплексного числа $z\neq 0$ існує рівно n комплексних чисел, кожне з яких є коренем n-го степеня з числа z.***

Доведення. Подамо число z у тригонометричній формі: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Коренями n-го степеня з числа z будуть усі ті і тільки ті комплексні числа w, що задовольняють рівність $w^n=z$. Покажемо, що при заданому z рівняння $w^n=z$ має n різних коренів (тим самим теорему буде доведено).

Якщо $w=0$, то $w^n=0$, тобто $z=0$, що суперечить умові теореми. Отже, $w\neq 0$.

Тоді число w можна подати в тригонометричній формі: $w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

Маємо: $(\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$;

$$\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Скориставшись умовою рівності двох комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі, отримуємо $\rho^n=r$ і $n\alpha=\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Оскільки ρ і r є додатними дійсними числами, то можна записати $\rho=\sqrt[n]{r}$ (тут $\sqrt[n]{r}$ — це арифметичний корінь n-го степеня з додатного дійсного числа r). Також отримуємо, що $\alpha=\frac{\varphi+2\pi k}{n}$.

Таким чином, шукані числа w можуть бути записані у вигляді

$$w=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k\in\mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Якщо в правій частині рівності (3) змінити значення k на $k+n$, то значення виразу не зміниться. Це означає, що достатньо розглянути лише такі значення k: 0, 1, 2, ..., $(n-1)$. Маємо:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),$$

$$\dots$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}\right).$$

Зазначимо, що числа w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1} є попарно різними, оскільки будь-які з двох кутів $\frac{\varphi}{n}$, $\frac{\varphi+2\pi}{n}$, ..., $\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}$ відрізняються менше ніж на 2π.

Отже, формула (3) задає рівно n чисел w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}, кожне з яких є коренем n-го степеня з числа z. ▲

Таким чином, ми дійшли висновку, що всі n коренів n-го степеня з числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, записаного в тригонометричній формі, можуть бути обчислені за формулою

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \text{ де } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}} \qquad (4)$$

Задача знаходження кореня n-го степеня з комплексного числа буде розв'язана повністю, якщо ми знайдемо всі значення кореня n-го степеня з числа $z = 0$.

Очевидно, що число $w = 0$ задовольняє рівність $w^n = 0$. Інших чисел, які задовольняють рівність $w^n = 0$, не існує. Справді, при $w \neq 0$ маємо: $|w^n| = |w|^n \neq 0$. Звідси $w^n \neq 0$.

ПРИКЛАД Знайдіть кубічні корені з числа $z = -1$.

Розв'язання. Маємо: $z = -1 + 0i = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Скориставшись формулою (4), запишемо

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right), \text{ де } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Звідси $w_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = -1,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad ●$$

З формули (4) випливає, що корені n-го степеня з числа 1 обчислюють за формулою

$$e_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \text{ де } k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}.$$

Зауважимо, що модулі комплексних чисел виду e_k дорівнюють 1. Тому на комплексній площині числа e_k лежать на колі радіуса 1, причому аргументи сусідніх чисел відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$. Тому числа e_k ділять одиничне коло на n рівних частин і є вершинами правильного n-кутника.

Наприклад, на рисунку 38.4 зображено кубічні корені з числа 1. Вони є вершинами правильного трикутника. На рисунку 38.5 зображено корені четвертого степеня з числа 1. Вони є вершинами квадрата.

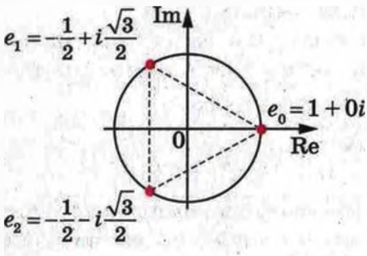


Рис. 38.4

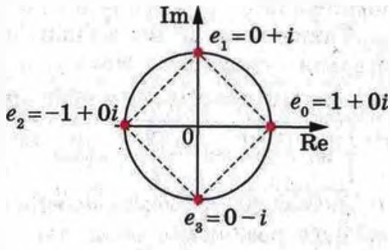


Рис. 38.5

Вправи

38.1.° Знайдіть добуток комплексних чисел z_1 і z_2, якщо:

1) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

2) $z_1 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$, $z_2 = \cos 1 + i\sin 1$;

3) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

38.2.° Знайдіть добуток комплексних чисел z_1 і z_2, якщо:

1) $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $z_1 = 7\left(\cos\frac{1}{3} + i\sin\frac{1}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{1}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

3) $z_1 = -3\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = -4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

38.3.° Знайдіть частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1 = 8\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

2) $z_1 = 6\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$;

3) $z_1 = -2(\cos 2 + i\sin 2)$, $z_2 = \cos 1 + i\sin 1$.

38.4.° Знайдіть частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$;

2) $z_1 = 9\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $z_1 = 15(\cos 6 + i\sin 6)$, $z_2 = 5(\sin 2 + i\cos 2)$.

38.5.° Запишіть у тригонометричній формі число z, якщо:

1) $z = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)\right)^{10}$;

2) $z = \left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right)^{6}$;

3) $z = \left(\cos\frac{1}{35} + i\sin\frac{1}{35}\right)^{7}$.

38.6.° Запишіть у тригонометричній формі число z, якщо:

1) $z = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)\right)^{4}$;

2) $z = \left(-2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right)^{5}$.

38.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $(1+i)^{20}$;

2) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{9}$;

3) $(3+4i)^{4}$;

4) $(1-i)^{12}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}$;

5) $\frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}-i)^{8}}$.

38.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $(1-i)^{14}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{15}$;

3) $\left(\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i\right)^{10}$;

4) $(1+i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{6}$;

5) $\frac{(1-i)^{14}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}}$.

38.9.° Знайдіть корені n-го степеня з числа z, якщо:

1) $z=3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $n=3$;

2) $z=8\left(\cos\frac{6}{7}+i\sin\frac{6}{7}\right)$, $n=3$;

3) $z=-32i$, $n=5$;

4) $z=\sqrt{3}+i$, $n=4$.

38.10.° Знайдіть корені n-го степеня з числа z, якщо:

1) $z=4\left(\cos\frac{16\pi}{19}+i\sin\frac{16\pi}{19}\right)$, $n=4$;

2) $z=125\left(\cos\frac{9}{11}+i\sin\frac{9}{11}\right)$, $n=3$;

3) $z=64$, $n=6$;

4) $z=\sqrt{3}-i$, $n=4$.

38.11.° Зобразіть на комплексній площині числа, які є коренями n-го степеня з числа z, якщо:

1) $z=i$, $n=3$;

2) $z=1+i$, $n=4$;

3) $z=-i$, $n=6$.

38.12.° Зобразіть на комплексній площині числа, які є коренями n-го степеня з числа z, якщо:

1) $z=-1$, $n=4$;

2) $z=1+\sqrt{3}i$, $n=3$;

3) $z=1$, $n=8$.

38.13.° Нехай e_0, e_1, ..., e_{n-1} — корені n-го степеня з числа 1. Знайдіть добуток $e_0 e_1 \cdot \ldots \cdot e_{n-1}$.

38.14.° Нехай e_0, e_1, ..., e_{n-1} — корені n-го степеня з числа 1. Знайдіть суму $e_0+e_1+\ldots+e_{n-1}$.

38.15.•• Знайдіть усі такі дійсні x і y, що $(x+yi)^6=x-yi$.

38.16.•• Знайдіть усі такі дійсні x і y, що $(x+yi)^4=x-yi$.

38.17.•• Василь Заплутайко доводить «рівність» $1=-1$ так: $1=\sqrt{(-1)^2}=\left(\sqrt{-1}\right)^2=i^2=-1$. У чому полягає помилка Василя?

38.18.•• Доведіть, що точки z_1 і z_2, відмінні від точки $z=0$, лежать на прямій, яка проходить через початок координат, тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

38.19." Доведіть, що три точки z_1, z_2, z_3 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_1}}$.

38.20." Точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ комплексної площини є вершинами чотирикутника. Доведіть, що сторони AB і CD паралельні тоді і тільки тоді, коли $\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z_4} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}}$.

38.21." Точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ комплексної площини належать колу $|z| = 1$. Доведіть, що хорди AB і CD паралельні тоді і тільки тоді, коли $z_1 z_2 = z_3 z_4$.

38.22." Доведіть, що геометричним місцем точок z комплексної площини, які задовольняють рівняння

$$(\overline{z_1} - \overline{z_2})z + (z_2 - z_1)\overline{z} + z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} = 0,$$

де $z_1 \neq z_2$, є пряма, яка проходить через точки $M(z_1)$ і $N(z_2)$.

38.23." Дві точки $M(z_1)$ і $N(z_2)$ комплексної площини належать колу $|z| = 1$. Доведіть, що рівняння прямої, яка проходить через точки M і N, можна подати у вигляді $z + z_1 z_2 \overline{z} = z_1 + z_2$.

38.24." Точки $M(z_1)$ і $N(z_2)$ комплексної площини відмінні від точки $O(0)$. Доведіть, що вектори $\overline{OM}$ і $\overline{ON}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

38.25." На комплексній площині позначили точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ і $D(z_4)$. Доведіть, що прямі AB і CD перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$(z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_4}) + (\overline{z_1} - \overline{z_2})(z_3 - z_4) = 0.$$

38.26." Точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ і $D(z_4)$ комплексної площини належать колу $|z| = 1$. Доведіть, що хорди AB і CD перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$z_1 z_2 + z_3 z_4 = 0.$$

38.27." Точка $A(z_1)$ комплексної площини належить колу $|z| = 1$. Доведіть, що рівняння дотичної, проведеної до цього кола в точці A, має вигляд $\overline{z_1}z + z_1\overline{z} = 2$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Застосування комплексних чисел

Комплексні числа виникли досить несподівано: при пошуку дійсних коренів кубічних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. У багатьох випадках застосування комплексних чисел також є неочікуваним. Узагалі, комплексні числа можуть слугувати ефективним інструментом для розв'язування задач з комбінаторики, тригонометрії, теорії чисел, геометрії та багатьох інших галузей математики.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу

$$S = 1 - 3C_{101}^{2} + 3^{2}C_{101}^{4} - 3^{3}C_{101}^{6} + \ldots - 3^{49}C_{101}^{98} + 3^{50}C_{101}^{100}.$$

Розв'язання. Розглянемо комплексне число $z = 1 + \sqrt{3}i$. Скориставшись формулою бінома Ньютона, можна записати:

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{101} = 1 + C_{101}^{1}\sqrt{3}i + C_{101}^{2}\left(\sqrt{3}i\right)^{2} + \ldots + C_{101}^{100}\left(\sqrt{3}i\right)^{100} + \left(\sqrt{3}i\right)^{101}.$$

Далі маємо:

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{101} = 1 + \sqrt{3}\,C_{101}^{1}i - 3C_{101}^{2} - \ldots + 3^{50}C_{101}^{100} + \left(\sqrt{3}\right)^{101} i =$$

$$= \left(1 - 3C_{101}^{2} + 3^{2}C_{101}^{4} + \ldots - 3^{49}C_{101}^{98} + 3^{50}C_{101}^{100}\right) +$$

$$+ \left(\sqrt{3}\,C_{101}^{1} - \left(\sqrt{3}\right)^{3}C_{101}^{3} + \ldots - \left(\sqrt{3}\right)^{99}C_{101}^{99} + \left(\sqrt{3}\right)^{101}\right)i.$$

Тепер зрозуміло, що значення S дорівнює дійсній частині комплексного числа $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{101}$.

Оскільки $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то отримуємо:

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{101} = 2^{101}\left(\cos\frac{101\pi}{3} + i\sin\frac{101\pi}{3}\right) = 2^{101}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{100} - 2^{100}\sqrt{3}i.$$

Таким чином, значення даного виразу дорівнює 2^{100}.

Відповідь: 2^{100}.

Зауважимо, що під час розв'язування прикладу 1 ми отримали і таку рівність:

$$\sqrt{3}\,C_{101}^{1} - \left(\sqrt{3}\right)^{3}C_{101}^{3} + \ldots - \left(\sqrt{3}\right)^{99}C_{101}^{99} + \left(\sqrt{3}\right)^{101} = -2^{100}\sqrt{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Виразіть $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

Розв'язання. Розглянемо комплексне число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Використовуючи формули Муавра і бінома Ньютона, подамо число z^{5} двома способами:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{5} = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha;$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos^5\alpha + 5\cos^4\alpha\,(i\sin\alpha) + 10\cos^3\alpha\,(i\sin\alpha)^2 +$$
$$+10\cos^2\alpha\,(i\sin\alpha)^3 + 5\cos\alpha\,(i\sin\alpha)^4 + (i\sin\alpha)^5 =$$
$$=(\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha) +$$
$$+(5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha)\,i.$$

Залишилося прирівняти уявні частини отриманих виразів.

Відповідь: $\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha$.

Зауважимо, що під час розв'язування прикладу 2 ми отримали і такий результат:

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha.$$

ПРИКЛАД 3 Чи існують такі натуральні числа $x \geqslant 15$ і $y \geqslant 15$, що $x^2 + y^2 = 29 \cdot 41$?

Розв'язання. Подамо добуток $29 \cdot 41$ у вигляді

$$29 \cdot 41 = |5+2i|^2 \cdot |5+4i|^2.$$

Скориставшись рівністю $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$, отримаємо:

$$29 \cdot 41 = |5+2i|^2 \cdot |5+4i|^2 = |(5+2i)(5+4i)|^2 = |17+30i|^2 = 17^2 + 30^2.$$

Відповідь: Так, наприклад, $x = 17$, $y = 30$.

ПРИКЛАД 4 На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABDE$ і $CBLK$. Точки M_1 і M_2 — середини відрізків LD і CA відповідно. Доведіть, що центри квадратів і точки M_1 і M_2 є вершинами квадрата.

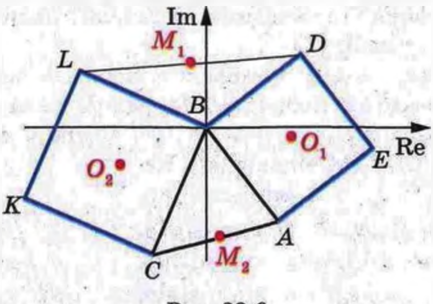


Рис. 38.6

Розв'язання. Уведемо комплексну площину так, щоб точка B збігалася з початком координат (рис. 38.6). Позначимо через O_1 і O_2 центри квадратів $ABDE$ і $CBLK$ відповідно. Нехай a і c — комплексні координати точок A і C відповідно. Зауважимо, що точка D є образом точки A при повороті з центром B на кут $\frac{\pi}{2}$, а точка L — образом точки C при повороті з центром B на кут $-\frac{\pi}{2}$. Тоді комплексні координати точок D і L дорівнюють числам ia та $-ic$ відповідно.

Знайдемо комплексні координати z_{O_1}, z_{O_2} і z_{M_2} точок O_1, O_2 і M_2. Оскільки ці точки є серединами відрізків AD, CL і AC відповідно, то $z_{O_1} = \frac{a+ia}{2}$, $z_{O_2} = \frac{c-ic}{2}$, $z_{M_2} = \frac{a+c}{2}$.

Покажемо, що точка M_2 — вершина рівнобедреного прямокутного трикутника $O_1M_2O_2$. Для цього достатньо переконатися, що при повороті з центром M_2 на кут $\frac{\pi}{2}$ вектор $\overline{M_2O_2}$ є образом вектора $\overline{M_2O_1}$. Іншими словами, достатньо перевірити рівність: $i\,\overline{M_2O_1} = \overline{M_2O_2}$, тобто $i(z_{O_1} - z_{M_2}) = z_{O_2} - z_{M_2}$.

Маємо: $i(z_{O_1} - z_{M_2}) = i\left(\frac{a+ia}{2} - \frac{a+c}{2}\right) = \frac{i(ia-c)}{2} = \frac{-a-ic}{2}$;

$$z_{O_2} - z_{M_2} = \frac{c-ic}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{-a-ic}{2}.$$

Міркуючи аналогічно, можна показати, що M_1 — вершина рівнобедреного прямокутного трикутника $O_1M_1O_2$. ●

ПРИКЛАД 5 Коло з центром O вписано в чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що точка O і середини діагоналей чотирикутника лежать на одній прямій.

Розв'язання. Уведемо комплексну площину так, щоб точка O збігалася з початком координат, а радіус кола дорівнював 1 (рис. 38.7). Позначимо через M, N, P і Q точки дотику кола до сторін AB, BC, CD і DA відповідно. Нехай z_M, z_N, z_P і z_Q — комплексні координати точок M, N, P і Q відповідно. Рівняння прямих AB і AD мають вигляд $\bar{z}_M z + z_M \bar{z} = 2$ і $\bar{z}_Q z + z_Q \bar{z} = 2$ відповідно (див. задачу 38.27). Тоді комплексну координату точки A можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} \bar{z}_M z + z_M \bar{z} = 2, \\ \bar{z}_Q z + z_Q \bar{z} = 2. \end{cases}$$

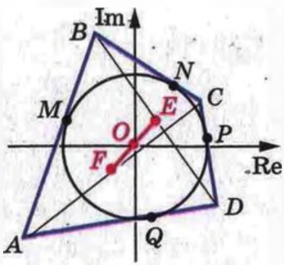


Рис. 38.7

Оскільки $z_M \neq 0$ і $z_Q \neq 0$, то можна записати

$$\begin{cases} z_Q\bar{z}_M z + z_M z_Q \bar{z} = 2z_Q, \\ z_M\bar{z}_Q z + z_M z_Q \bar{z} = 2z_M. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння отриманої системи друге, отримуємо:

$$z_Q\bar{z}_M z - z_M\bar{z}_Q z = 2z_Q - 2z_M.$$

Оскільки $\bar{z}_M = \frac{1}{z_M}$ і $\bar{z}_Q = \frac{1}{z_Q}$, то можна записати:

$$\frac{z_Q}{z_M}z - \frac{z_M}{z_Q}z = 2(z_Q - z_M), \quad \left(z_Q^2 - z_M^2\right)z = 2z_M z_Q (z_Q - z_M),$$

$$(z_Q + z_M)z = 2z_M z_Q. \text{ Звідси } z = \frac{2z_M z_Q}{z_M + z_Q}.$$

Аналогічно можна показати, що комплексні координати точок B, C і D відповідно дорівнюють $\frac{2z_M z_N}{z_M + z_N}$, $\frac{2z_N z_P}{z_N + z_P}$, $\frac{2z_P z_Q}{z_P + z_Q}$.

Позначимо через F і E середини діагоналей AC і BD відповідно. Нехай z_F і z_E — комплексні координати точок F і E відповідно. Тоді $z_F = \frac{z_M z_Q}{z_M + z_Q} + \frac{z_N z_P}{z_N + z_P}$, $z_E = \frac{z_M z_N}{z_M + z_N} + \frac{z_P z_Q}{z_P + z_Q}$. Для завершення розв'язування достатньо показати, що виконується рівність $\frac{z_E}{z_F} = \frac{\bar{z}_E}{\bar{z}_F}$ (див. ключову задачу 38.18). Скориставшись рівностями $z_M\bar{z}_M = 1$, $z_N\bar{z}_N = 1$, $z_P\bar{z}_P = 1$, $z_Q\bar{z}_Q = 1$, завершіть розв'язування самостійно. ●

ПРИКЛАД 6 Є дві карти прямокутної форми, які зображають одну й ту саму місцевість, але мають різний масштаб. Меншу карту поклали так, що вона опинилася цілком усередині більшої карти. Доведіть, що можна проткнути голкою одночасно обидві карти так, що проколоті точки обох карт будуть зображати одну й ту саму точку місцевості.

Розв'язання. Введемо комплексну площину так, щоб одна з вершин більшої карти збігалася з початком координат, а сторони, які містять цю вершину, належали додатним півосям.

Розглянемо перетворення, у результаті якого з більшої карти можна отримати меншу карту, розміщену так, як показано на рисунку 38.8.

Нехай число r — відношення масштабу меншої карти до масштабу більшої карти. Зрозуміло, що $r<1$. Помножимо комплексну координату z кожної точки площини на число $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Результат такої дії з точками площини можна розглядати як композицію перетворень гомотетії H_O^r і повороту R_O^φ. Унаслідок цього перетворення ми отримали образ більшої карти, який дорівнює меншій карті та розміщений так, як показано на рисунку 38.9. Тепер перенесемо цей образ «на відповідне місце» (рис. 38.10).

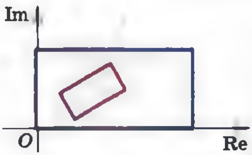


Рис. 38.8

Рис. 38.9

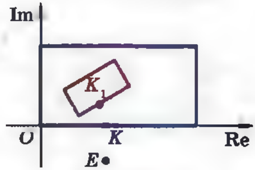


Рис. 38.10

Для цього до комплексної координати az кожної точки площини додамо комплексне число b. Результат такої дії можна розглядати як паралельне перенесення на вектор b.

Отже, у результаті описаних перетворень кожна точка $M(z)$ більшої карти має образ — точку $N(az+b)$ меншої карти. Точки M і N збігаються за умови виконання рівності $z=az+b$. Оскільки $a\neq 1$, то це рівняння має єдиний корінь $z=\frac{b}{1-a}$.

Тим самим ми показали, що існує єдина точка $E\left(\frac{b}{1-a}\right)$ комплексної площини, яка в результаті описаних перетворень виявилася «нерухомою». Тепер доведемо, що ця «нерухома точка» належить обом картам.

Кожна точка більшої карти є прообразом деякої точки меншої карти. Тому точка E не може належати більшій карті і при цьому не належати меншій карті.

Припустимо, що точка E розміщена поза більшою картою. Розглянемо точку K більшої карти, яка найменш віддалена від точки E, та її образ K_1 при описаних перетвореннях (рис. 38.10).

Зазначимо, що в результаті гомотетії з коефіцієнтом r, де $0<r<1$, відстань між образами будь-яких двох точок є меншою, ніж відстань між цими точками.

Тоді має виконуватися нерівність $KE>K_1E$, а це суперечить тому, як було обрано точку K. ●

Вправи

38.28. Виразіть $\cos 6\alpha$ через $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$.

38.29. Доведіть рівність

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}.$$

38.30. Доведіть, що

$$\cos^{100}\varphi=\frac{1}{2^{99}}\left(\cos 100\varphi+C_{100}^{1}\cos 98\varphi+C_{100}^{2}\cos 96\varphi+\ldots+C_{100}^{50}\right).$$

38.31. Доведіть, що

$$\sin^{100}\varphi=\frac{1}{2^{99}}\left(\cos 100\varphi-C_{100}^{1}\cos 98\varphi+C_{100}^{2}\cos 96\varphi-\ldots+C_{100}^{50}\right).$$

38.32. Доведіть рівність $C_{51}^{0}-C_{51}^{2}+C_{51}^{4}-C_{51}^{6}+\ldots+C_{51}^{48}-C_{51}^{50}=-2^{25}$.

38.33. Знайдіть такі натуральні числа $x\geqslant 18$ і $y\geqslant 18$, що

$$x^2+y^2=37\cdot 53.$$

38.34. На дошці написано функції $y=x+\frac{1}{x}$ і $y=x^2$. Якщо на дошці записано функції f і g, то дозволяється дописати будь-яку з функцій $y=f^2(x)$, $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)g(x)$, $y=cf(x)$, де c — довільна дійсна стала. Чи може в результаті виконання декількох таких дій на дошці з'явитися функція $y=\frac{1}{x}$?

38.35. У чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини сторін AB і CD відповідно. Точка K — середина MN. Медіани трикутника BCD перетинаються в точці P. Доведіть, що точки A, K і P лежать на одній прямій.

38.36. Дано трикутник ABC і довільну точку O. Нехай точки P, Q і R — відповідно точки перетину медіан трикутників AOB, BOC, COA. Доведіть, що точка O і точки перетину медіан трикутників ABC і PQR лежать на одній прямій.

38.37. На сторонах AB і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$. Доведіть, що $MC = BP$, $MC \perp BP$.

38.38. На сторонах BC і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники BCK і CAM. Знайдіть кут між прямими BM і AK і доведіть, що $BM = AK$.

38.39. На прямій l взято послідовно точки A, B і C, а на відрізках AB і AC у різних півплощинах відносно прямої l побудовано рівносторонні трикутники ABD і ACN. Доведіть, що середини K і L відповідно відрізків DC і BN і точка A є вершинами рівностороннього трикутника.

38.40. На прямій l взято послідовно точки A, C, E. На відрізках AC і CE в одну півплощину відносно прямої l побудовано рівносторонні трикутники ABC і CDE. Точки K і M — середини відрізків AD і BE відповідно. Доведіть, що трикутник CKM — рівносторонній.

38.41. Відомо, що ABC і $A_1B_1C_1$ — рівносторонні трикутники (порядок вершин указано в напрямку руху годинникової стрілки). Середини відрізків AA_1, BB_1 і CC_1 є вершинами трикутника. Доведіть, що цей трикутник є рівностороннім.

38.42. Через кінці діаметра AB кола провели дотичні l_1 і l_2 відповідно. На колі позначили точку X і провели в ній дотичну, яка перетинає прямі l_1 і l_2 у точках C і D відповідно. Доведіть, що добуток $AC \cdot BD$ не залежить від вибору точки X.

38.43. Точки A, B і C лежать на колі. У цих точках до кола проведено дотичні, які перетинають прямі BC, AC і CA в точках M, N і P відповідно. Доведіть, що точки M, N і P лежать на одній прямій.

§ 7. МНОГОЧЛЕНИ

39. Розв'язування алгебраїчних рівнянь на множині комплексних чисел

Вам добре відома формула коренів квадратного рівняння

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \tag{1}$$

При підстановці чисел $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ у рівняння $ax^2+bx+c=0$ отримаємо правильну рівність. Під час цієї підстановки в лівій частині рівняння доведеться виконувати лише арифметичні операції. Оскільки для дійсних і комплексних чисел арифметичні операції мають спільні властивості, то на множині комплексних чисел корені квадратного рівняння можна знаходити за формулою:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\Delta}{2a},$$

де за Δ треба взяти будь-яке значення квадратного кореня з дискримінанта $D=b^2-4ac$.

Розглянемо, наприклад, квадратне рівняння $x^2-6x+10=0$. Його дискримінант $D=6^2-4\cdot10=-4$ — від'ємне число. Числа $2i$ і $-2i$ є квадратними коренями з дискримінанта. Таким чином, числа

$$x_1=\frac{6+2i}{2}=3+i \text{ та } x_2=\frac{6-2i}{2}=3-i$$

є комплексними коренями даного квадратного рівняння.

Маючи комплексні корені квадратного тричлена, його можна розкласти на множники аналогічно випадку дійсних коренів. Наприклад, можна записати:

$$x^2-6x+10=(x-(3+i))(x-(3-i)).$$

Таким чином, кожний квадратний тричлен можна розкласти на два лінійних множники. Тому кожне квадратне рівняння має не більше двох комплексних коренів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $z^2-(9+i)z+20=0$.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант $D=(9+i)^2-80=18i$.

Квадратні корені з числа $18i=18\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ дорівнюють:

$$\sqrt{18}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3+3i,$$

$$\sqrt{18}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-3-3i.$$

Тепер можна записати корені даного квадратного рівняння:

$$z_1=\frac{9+i+(3+3i)}{2}=6+2i,\quad z_2=\frac{9+i-(3+3i)}{2}=3-i.$$ ●

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $z^2-(3+2i)z+(5+i)=0$.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант $D=(3+2i)^2-4(5+i)=$ $=-15+8i$. У даному випадку пошук квадратних коренів з $D=$ $=-15+8i$, записаних у тригонометричній формі, є недоцільним, оскільки аргумент комплексного числа $-15+8i$ — «незручний» кут. Обчислимо ці квадратні корені $\Delta=x+yi$ в алгебраїчній формі.

Маємо:

$$\Delta^2=(x^2-y^2)+2xyi=-15+8i. \text{ Звідси}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=-15, \\ 2xy=8. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо такі значення квадратних коренів з дискримінанта: $1+4i$, $-1-4i$.

Тепер можна записати корені даного квадратного рівняння:

$$z_1=\frac{(3+2i)+(1+4i)}{2}=2+3i,$$

$$z_2=\frac{(3+2i)-(1+4i)}{2}=1-i.$$ ●

Уведення до розгляду комплексних чисел призвело до того, що довільне квадратне рівняння має корінь. Цей факт є окремим випадком однієї з перлин математики — основної теореми алгебри.

Теорема 39.1 (основна теорема алгебри). ***Кожний многочлен***

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степеня $n \in \mathbb{N}$ з комплексними коефіцієнтами має комплексний корінь.

З ідеєю доведення основної теореми алгебри ви можете ознайомитися в оповіданні «Дама із собачкою» на с. 211.

За цією теоремою будь-яке алгебраїчне рівняння, наприклад,

$$x^6 - x + 2 = 0,$$

має комплексний корінь.

Наслідок. ***Кожний многочлен***

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степеня $n \in \mathbb{N}$ з комплексними коефіцієнтами можна єдиним способом подати у вигляді добутку лінійних множників

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, серед яких можуть бути рівні, є коренями многочлена P. Кожний корінь многочлена P дорівнює одному з цих чисел.

Доведення. За основною теоремою алгебри многочлен P має комплексний корінь — число z_1. Тому за теоремою Безу многочлен P можна подати у вигляді

$$P(z) = (z - z_1)Q(z),$$

де многочлен Q має вигляд

$$Q(z) = z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Якщо степінь многочлена Q — число натуральне, то, застосовуючи основну теорему алгебри до многочлена Q, подамо його у вигляді

$$Q(z) = (z - z_2)R(z),$$

де z_2 — корінь многочлена Q. Тоді многочлен P можна подати у вигляді

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)R(z).$$

Якщо продовжити цей процес далі, то многочлен P можна подати у вигляді

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n). \qquad (2)$$

Зрозуміло, що кожне з чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ є коренем многочлена P. З іншого боку, кожний корінь многочлена P дорівнює одному з чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Справді, якщо деяке число z^* є коренем многочлена P, то, підставляючи значення $z = z^*$ у рівність (2) і враховуючи, що $P(z^*) = 0$, отримуємо:

$$(z^* - z_1)(z^* - z_2)\ldots(z^* - z_n) = 0.$$

Це означає, що z^* дорівнює одному з чисел z_1, z_2, ..., z_n.

Єдиність подання многочлена P у вигляді добутку (2) доведіть самостійно. ▲

Вправи

39.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2 + 8z + 25 = 0$;
2) $z^2 - (3 - 2i)z + 10 = 0$;
3) $z^2 - 3z + 11 - 3i = 0$;
4) $z^2 + (i - 5)z + 8 - i = 0$.

39.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2 - 10z + 41 = 0$;
2) $z^2 + 2(i - 6)z + 30 = 0$;
3) $z^2 - 2z - 7 - 6i = 0$;
4) $z^2 + 2(i - 2)z + 3 + 4i = 0$.

39.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $z^4 + 15z^2 - 16 = 0$;
2) $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$;
3) $z^4 + 1 = 0$;
4) $z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$.

39.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$;
2) $z^3 + 3z^2 + 9z + 27 = 0$;
3) $z^4 + 9 = 0$;
4) $z^3 - (4 - i)z^2 + (7 - i)z - 4 = 0$.

39.5.** Розв'яжіть рівняння $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$.

39.6.** Розв'яжіть рівняння $z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1 = 0$.

39.7.** Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x) = x^{120} + 2x^{65} + 2$ на $x^2 - x + 1$.

39.8.** Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x) = x^{2012} - x^{101} + 5$ на $x^2 + 1$.

39.9.** Доведіть, що коли комплексне число z_0 є коренем многочлена P з дійсними коефіцієнтами, то комплексне число $\bar{z}_0$ також є коренем многочлена P.

39.10.** Про рівняння $z^4 - 5z^3 + 13z^2 - 16z + 10 = 0$ відомо, що число $z = 1 + i$ є його коренем. Розв'яжіть це рівняння.

39.11.** Доведіть, що кожний многочлен P степеня $n \in \mathbb{N}$ з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні або квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами.

39.12.** Доведіть, що кожний многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має дійсний корінь.

39.13.** Чи існує функція, графік якої має спільну точку з будь-якою параболою виду $y=ax^2+bx+c$?

39.14.* Знайдіть усі такі $n \in \mathbb{N}$, що многочлен $P(x)=x^n+x+90$ ділиться націло на x^2-x+2.

39.15.* Нехай P — деякий ненульовий многочлен. Доведіть існування таких ненульових многочленів Q і R, що
$$P(x)\,Q(x)=R(x^{2012}).$$

39.16.* Нехай многочлен $P(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ має $2n$ різних додатних коренів. Доведіть існування такого многочлена Q, що $P(x^2)=Q(x)\,Q(-x)$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Дама із собачкою

У попередньому пункті ви ознайомилися з однією з головних теорем усієї математики — основною теоремою алгебри.

Доведенням цієї теореми займалися багато видатних науковців: Жан Д'Аламбер, Леонард Ейлер, Жозеф-Луї Лагранж, Карл Гаусс та інші. Наприклад, К. Гаусс навів чотири різні доведення цієї теореми. Причина такої кількості доведень полягала в тому, що в ті часи самі множини дійсних чи комплексних чисел не мали точних означень і тому міркування науковців не були переконливими.

Сучасні доведення основної теореми алгебри спираються на цілу низку властивостей дійсних або комплексних чисел, які не вивчають у середній школі. Проте існують цікаві геометричні ілюстрації до деяких із цих доведень. Одне з них отримало образну назву «Дама із собачкою».

Розглянемо многочлен
$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0.$$

Перш за все зауважимо, що коли $a_0=0$, то твердження теореми очевидно виконується, бо число $z=0$ є коренем многочлена P.

Нехай $a_0 \neq 0$. На множині комплексних чисел розглянемо функції $w=P(z)$ і $w=Q(z)$, де $Q(z)=z^n$. Поряд з комплексною площиною (z), на якій позначатимемо аргументи функцій P і Q, будемо розглядати комплексну площину (w), де позначатимемо значення функцій P і Q (рис. 39.1).

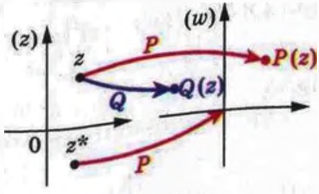


Рис. 39.1

Для доведення основної теореми алгебри треба показати існування такого комплексного числа z^*, що $P(z^*)=0$, тобто існування такої точки z^* комплексної площини (z), якій відповідає початок координат комплексної площини (w) (рис. 39.1).

Нехай точка комплексної площини (z) рухається по колу з центром у початку координат радіуса R, тобто $|z|=R$ (рис. 39.2). Кожну точку z цього кола можна подати у вигляді

$$z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

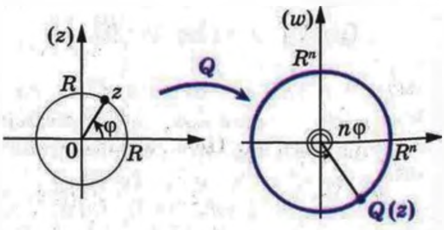


Рис. 39.2

Простежимо за тим, як під час такого руху точки z буде рухатися точка $Q(z)=z^n$ на комплексній площині (w). Точку $Q(z)$ будемо називати «дамою». За формулою Муавра

$$Q(z)=z^n=R^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Це означає, що точка $Q(z)$ буде рухатися по колу радіуса R^n з центром у початку координат. Коли точка z обходить коло, кут φ змінюється від 0 до 2π, а кут $n\varphi$ — від 0 до $2\pi n$. Тому одному оберту точки z відповідатиме n обертів точки $Q(z)$ на комплексній площині (w). Отже, «дама» $Q(z)$ рухається колом радіуса R^n, робить n обертів навколо початку координат і повертається в початкову точку.

З'ясуємо, як при розглянутому русі точки z буде рухатися точка $P(z)$ на комплексній площині (w). Точку $P(z)$ будемо називати «собачкою».

Дослідження руху точки $P(z)$ розіб'ємо на три випадки:

1) радіус R є досить великим;

2) радіус R є досить малим;

3) радіус R зменшується від досить великого до досить малого.

Нехай радіус R є досить великим. Подамо функцію P у вигляді

$$P(z)=z^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right).$$

Оскільки $|z|=R$, то для величини $\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}$ можна записати оцінку:

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right|\leqslant\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|+\left|\frac{a_{n-2}}{z^2}\right|+\ldots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|=$$

$$=\frac{|a_{n-1}|}{R}+\frac{|a_{n-2}|}{R^2}+\ldots+\frac{|a_0|}{R^n}.$$

Тому при досить великих значеннях R величина $\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right|$ — досить мала. Це означає, що траєкторія руху точки $P(z)$ мало відрізняється від траєкторії руху точки $Q(z)=z^n$ (нагадаємо, що точка $Q(z)$ рухається колом радіуса R^n). Наприклад, якщо обрати таке значення R, що

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right|<\frac{1}{10}, \text{ то}$$

$$|P(z)-Q(z)|=\left|z^n\left(\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right)\right|\leqslant|z^n|\cdot\frac{1}{10}=\frac{R^n}{10}.$$

Отже, відстань між точками $P(z)$ і $Q(z)$ не перевищуватиме $\frac{1}{10}$ радіуса кола, яким рухається точка $Q(z)$ (рис. 39.3). Говорячи неформально, коли «дама» $Q(z)$ рухається колом, «собачка» $P(z)$ бігає біля «дами», віддаляючись не більше ніж на довжину повідця — величину $\frac{R^n}{10}$.

Оскільки «дама» $Q(z)$ робить n обертів навколо початку координат, то і «собачка» $P(z)$ також n разів оббігає навколо початку координат і повертається в початкову точку.

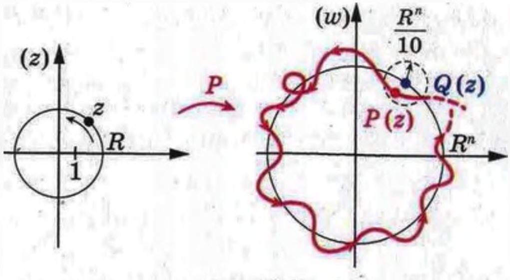


Рис. 39.3

Перейдемо до другого випадку. Простежимо за рухом «собачки» $P(z)$, коли точка z комплексної площини (z) рухається колом деякого досить малого радіуса R з центром у початку координат. Тепер рух «собачки»

$$P(z)=\left(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z\right)+a_0$$

не буде визначатися рухом «дами» $Q(z)=z^n$. У цьому випадку «собачка» буде бігати біля точки a_0, де, можливо, лежить смачна кістка. Справді, відстань між «собачкою» $P(z)$ і точкою a_0 можна оцінити так:

$$\left|P(z)-a_0\right|=\left|z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z\right|\leqslant\left|z^n\right|+\left|a_{n-1}z^{n-1}\right|+$$
$$+\ldots+\left|a_1z\right|\leqslant R^n+\left|a_{n-1}\right|R^{n-1}+\ldots+\left|a_1\right|R.$$

Тому, обираючи досить малий радіус R, можна забезпечити виконання, наприклад, нерівності

$$\left|P(z)-a_0\right|\leqslant\frac{\left|a_0\right|}{10}.$$

Це означає, що «собачка» $P(z)$ бігає в крузі радіуса $\frac{\left|a_0\right|}{10}$ з центром у точці a_0 (рис. 39.4). Отже, якщо радіус R досить малий, то «собачка» $P(z)$ під час руху жодного разу не оббігає навколо початку координат.

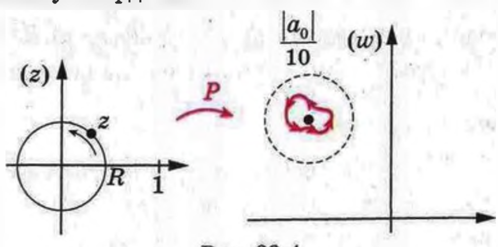
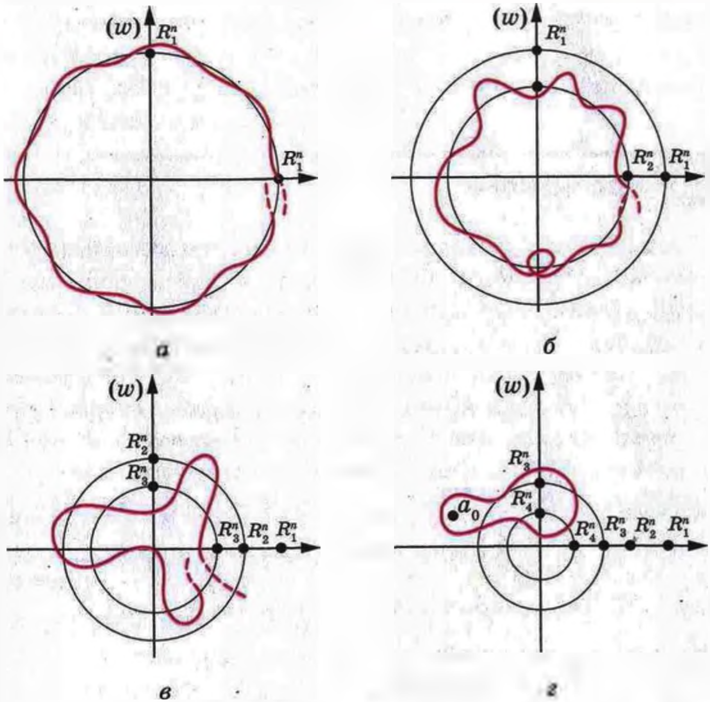


Рис. 39.4



$$R_1 > R_2 > R_3 > R_4$$

Рис. 39.5

Перейдемо до останнього етапу дослідження руху «собачки» $P(z)$. Нехай радіус кола R неперервно зменшується від досить великого (коли «собачка» $P(z)$ n разів оббігала початок координат і рухалася майже по колу) до досить малого (коли «собачка» $P(z)$ жодного разу не оббігає навколо початку координат і знаходиться біля точки a_0). Прослідкуємо, як при такій зміні радіуса R змінюватимуться траєкторія руху «собачки» $P(z)$ і кількість обертів навколо початку координат. При «плавному» зменшенні значень R траєкторія руху «собачки» також буде «плавно» деформуватися (рис. 39.5, *а*–*г*). Тому існуватиме такий момент, коли кількість обертів змінює своє значення. Цей момент відповідатиме такому радіусу R, що траєкторія руху «собачки» $P(z)$ проходить через початок координат (рис. 39.5, *в*). Але це якраз і означає існування такого комплексного числа z^*, що $P(z^*)=0$.

Отже, рівняння $P(z)=0$ має корінь.

40. Кратні корені

Розглянемо квадратне рівняння з нульовим дискримінантом, наприклад $x^2-6x+9=0$. Інколи говорять, що це рівняння має два однакових корені $x_1=3$ і $x_2=3$. Причиною для такого висловлювання є те, що вираз x^2-6x+9 можна подати у вигляді добутку двох однакових множників $(x-3)(x-3)$, кожний з яких визначає корінь початкового рівняння. У таких випадках точніше буде сказати, що число $x=3$ є **кратним коренем** многочлена x^2-6x+9 і кратність цього кореня дорівнює двом.

Означення. **Число x_0 називають кратним коренем многочлена P, якщо многочлен P можна подати у вигляді $P(x)=(x-x_0)^k\,Q(x)$, де $k>1$, $k\in\mathbb{N}$, Q — многочлен і $Q(x_0)\neq 0$. Число k називають кратністю кореня x_0.**

Наприклад, многочлен

$$P(x)=(x-1)^4\,(x^2+1)^2$$

має кратний корінь $x_0=1$. Кратність кореня $x_0=1$ дорівнює 4. Кажуть також, що число $x_0=1$ є коренем кратності чотири.

Якщо корінь x_0 многочлена P не є кратним, то його називають *простим коренем*. Такий многочлен P можна подати у вигляді $P(x)=(x-x_0)^1\,Q(x)$, де $Q(x_0)\neq 0$. Кажуть, що *простий корінь має кратність один*.

Якщо многочлен P можна подати у вигляді $P(x)=(x-x_0)^k\,Q(x)$, де $k\in\mathbb{N}$ і $Q(x_0)\neq 0$, то це означає, що многочлен P ділиться націло на $(x-x_0)^k$ і не ділиться націло на $(x-x_0)^{k+1}$. Іншими словами, *число x_0 є коренем кратності k многочлена P тоді і лише тоді, коли P ділиться націло на $(x-x_0)^k$ і не ділиться націло на $(x-x_0)^{k+1}$, де $k\in\mathbb{N}$.*

Оскільки многочлен P степеня n не може ділитися націло на $(x-x_0)^k$ при $k>n$, то кожний корінь x_0 многочлена P має кратність k, що задовольняє нерівності $1\leqslant k\leqslant n$.

Розглянемо, наприклад, многочлен $P(x)=(x-1)^4(x^2+1)^2$ на множині комплексних чисел. Його кратним коренем буде не лише число $x_0=1$, а й комплексні числа $x_1=i$ та $x_2=-i$. Справді, многочлен P можна подати у вигляді

$$P(x)=(x-1)^4(x-i)^2(x+i)^2.$$

Тому числа $x_1=i$ та $x_2=-i$ є коренями многочлена P кратності два.

У попередньому пункті ви дізналися, що кожний многочлен

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

степеня $n\in\mathbb{N}$ з комплексними коефіцієнтами можна подати у вигляді добутку

$$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n),$$

де серед чисел z_1, z_2, ..., z_n можуть бути однакові.

Використовуючи поняття кратності кореня, можна сформулювати очевидний наслідок цього твердження: ***кожний многочлен степеня $n\in\mathbb{N}$ має рівно n коренів з урахуванням їх кратності.***

Наприклад, можна сказати, що многочлен

$$P(x)=(x-1)^4(x-i)^2(x+i)^2$$

має 8 коренів з урахуванням їх кратності: 1, 1, 1, 1, i, i, $-i$, $-i$. Узагалі, коли говорять, що числа x_1, x_2, ..., x_n є коренями многочлена степеня $n\in\mathbb{N}$, то серед перелічених чисел можуть бути однакові. Кратність кореня визначає, скільки разів цей корінь зустрічається в переліку.

Якщо многочлен P розкладено на лінійні множники, то з'ясувати, які корені є кратними, легко. Важче знайти кратність кореня, якщо многочлен задано у стандартному вигляді

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

Виявляється, що кратність кореня можна знайти, використовуючи похідні[1] многочлена P. Для визначення кратності кореня поряд з першою та другою похідними многочлена $y=P(x)$ доцільно розглядати похідні третього, четвертого, ..., n-го порядків. Наприклад, під третьою похідною многочлена P розуміють першу похідну многочлена P''. Третю похідну многочлена P позначають P''' або $P^{(3)}$.

[1] Оскільки у шкільній програмі поняття похідної розглядається тільки для функцій f таких, що $D(f)\subset\mathbb{R}$ і $E(f)\subset\mathbb{R}$, то використовувати похідну для пошуку кратних коренів будемо лише на множині дійсних чисел.

Теорема 40.1. ***Якщо кратний корінь x_0 многочлена P має кратність k, де $k > 1$ і $k \in \mathbb{N}$, то число x_0 буде коренем многочлена P' кратності $k - 1$.***

Доведення. Якщо кратний корінь x_0 многочлена P має кратність k, то многочлен P можна подати у вигляді $P(x)=(x-x_0)^k Q(x)$, де $k>1$, $k \in \mathbb{N}$ і $Q(x_0)\neq 0$. Використовуючи таке подання многочлена P, обчислимо його похідну. Маємо:

$$P'(x)=\left((x-x_0)^k Q(x)\right)'=k(x-x_0)^{k-1}Q(x)+(x-x_0)^k Q'(x)=$$

$$=(x-x_0)^{k-1}(kQ(x)+(x-x_0)Q'(x)).$$

Якщо многочлен $kQ(x)+(x-x_0)Q'(x)$ позначити через $Q_1(x)$, то можна записати

$$P'(x)=(x-x_0)^{k-1}Q_1(x).$$

Оскільки значення многочлена $Q_1(x)$ у точці $x=x_0$ дорівнює $Q_1(x_0)=kQ(x_0)+(x_0-x_0)Q'(x_0)=kQ(x_0)$ і $Q(x_0)\neq 0$, то $Q_1(x_0)\neq 0$. Це означає, що x_0 є коренем многочлена P' кратності $k-1$. ▲

Теорема 40.2. ***Якщо число x_0 є простим коренем многочлена P, то число x_0 не є коренем многочлена P'.***

Міркуючи аналогічно доведенню теореми 40.1, доведіть це твердження самостійно.

Наприклад, легко перевірити, що число $x_0=1$ є коренем многочлена $P(x)=x^5-3x^2+2$. Знайдемо кратність k цього кореня. Коли припустити, що $k>1$, то за теоремою 40.1 число $x_0=1$ має бути коренем многочлена $P'(x)=5x^4-6x$. Але $P'(1)\neq 0$. Тому наше припущення невірне і $k=1$. Отже, $x_0=1$ — простий корінь многочлена $P(x)=x^5-3x^2+2$.

Інший приклад. Число $x_0=-1$ є коренем многочлена $P(x)=$ $=x^4-3x^2-2x$. Знайдемо кратність k цього кореня. Оскільки число $x_0=-1$ є коренем і многочлена $P'(x)=4x^3-6x-2$, то за теоремою 40.2 число $x_0=-1$ не є простим коренем многочлена P. Тому $k>1$ і за теоремою 40.1 число $x_0=-1$ є коренем многочлена $P'(x)=4x^3-6x-2$ кратності $k_1=k-1$. Припустимо, що $k_1>1$. Тоді, використовуючи теорему 40.1 для многочлена P', маємо, що число $x_0=-1$ має бути коренем многочлена $P''(x)=12x^2-6$. Але $P''(-1)\neq 0$. Отже, наше припущення невірне і $k_1=1$. Звідси $k=2$.

Таким чином, якщо треба з'ясувати, чи є число x_0 коренем многочлена P і якої кратності, то можна діяти за такою схемою.

1. Обчислити значення $P(x_0)$ і переконатися, що $P(x_0)=0$ (якщо $P(x_0)\neq 0$, то число x_0 не є коренем многочлена P).
2. Обчисливши похідні P', P'', P''', ..., серед послідовності значень $P'(x_0)$, $P''(x_0)$, $P'''(x_0)$, ... знайти перше ненульове — нехай це $P^{(k)}(x_0)$.
3. Зробити висновок, що число x_0 є коренем многочлена P кратності k.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть кратність кореня $x_0 = 1$ многочлена

$$P(x)=x^{10}-45x^2+80x-36.$$

Розв'язання. Оскільки $P(1)=1^{10}-45\cdot 1^2+80\cdot 1-36=0$, то число $x_0=1$ є коренем многочлена P. Серед послідовності значень $P'(1)$, $P''(1)$, ... знайдемо перше ненульове. Маємо:

$P'(x)=10x^9-90x+80,$ $\quad$ $P'(1)=10\cdot 1^9-90\cdot 1+80=0,$

$P''(x)=90x^8-90,$ $\quad$ $P''(1)=90\cdot 1^8-90=0,$

$P'''(x)=720x^7,$ $\quad$ $P'''(1)=720\cdot 1^7\neq 0.$

Тому число $x_0=1$ є коренем многочлена P кратності три. ●

Вправи

40.1.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:

1) $P(x)=(x-2)^3$;
2) $P(x)=(x+4)^3(2x-1)^2$;
3) $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$;
4) $P(x)=(x+3)^5(x^2+1)^3$.

40.2.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:

1) $P(x)=(x+1)^5$;
2) $P(x)=(3x+2)^2(x-4)^7$;
3) $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2$;
4) $P(x)=(x-7)^2(x^4+2)$.

40.3.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:

1) $P(x)=(x^2-6x+8)^2$;
2) $P(x)=(x^2+4x-5)(x^2-25)$;
3) $P(x)=(x^3+x^2+x)(x^3-x)^3$;
4) $P(x)=(x^4-1)^2(x^2-1)^3(x-1)^4$.

40.4.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:

1) $P(x)=(x^2-3x+2)^3$;
2) $P(x)=(x^2-1)(x^2-5x+4)$;
3) $P(x)=(x^3+1)^2(x^2+x)^4$.

40.5.° Знайдіть комплексні корені многочлена P і вкажіть їх кратність, якщо:

1) $P(z)=(z^4-1)^5$;
2) $P(z)=(z^2-2z+5)^3$;
3) $P(z)=(z^4-5z^2-36)^7(z-3)^2$;
4) $P(z)=(z^3-2z+4)^4$.

40.6.° Знайдіть комплексні корені многочлена P і вкажіть їх кратність, якщо:

1) $P(z)=(z^2-4z+5)^5$;
2) $P(z)=(z^4-4)(z^2+2)^2$;
3) $P(z)=(z^3-7z^2+16z-10)^2$.

40.7.° Наведіть приклад многочлена з дійсними коефіцієнтами, який має корені:

1) $x_1=2$ кратності три та $x_2=3$ кратності два;
2) $x_1=i$ кратності два;
3) $x_1=-1$ кратності три та $x_2=1-i$ кратності чотири;
4) $x_1=-1+2i$ кратності один та $x_2=1-i$ кратності два.

40.8.° Наведіть приклад многочлена з дійсними коефіцієнтами, який має корені:

1) $x_1=3$ кратності два та $x_2=-2$ кратності три;
2) $x_1=-i$ кратності три;
3) $x_1=2-i$ кратності один та $x_2=1+i$ кратності три.

40.9.° Многочлени P і Q задовольняють умову: якщо $P(x_0)=0$, де $x_0\in\mathbb{C}$, то $Q(x_0)=0$. Чи випливає звідси, що многочлен Q ділиться націло на многочлен P?

40.10.° Многочлен Q ділиться націло на многочлен P і число x_0 є кратним коренем многочлена P. Чи можна стверджувати, що число x_0 є кратним коренем многочлена Q?

40.11.° Укажіть кратність кореня x_0 многочлена P:

1) $P(x)=x^8-8x+7$, $x_0=1$;
2) $P(x)=3x^6-8x^4-64$, $x_0=-2$;
3) $P(x)=5x^{12}+12x^5+7$, $x_0=-1$;
4) $P(x)=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$, $x_0=3$.

40.12.° Укажіть кратність кореня x_0 многочлена P:

1) $P(x)=x^{25}+25x^3+26$, $x_0=-1$;
2) $P(x)=x^4-24x^2+64x-48$, $x_0=2$;
3) $P(x)=7x^{12}-22x^7+70x-55$, $x_0=1$.

40.13.* При яких дійсних A і B число $x=-1$ є кратним коренем многочлена $P(x)=Ax^{2012}+Bx^{2011}+1$?

40.14.* При яких дійсних A і B число $x=1$ є кратним коренем многочлена $P(x)=x^{2011}+Ax+B$?

40.15.** Знайдіть кратні корені многочлена

$$P(x)=x^4-8x^3+64x+64.$$

40.16.** Знайдіть кратні корені многочлена

$$P(x)=x^4+4x^3-8x+4.$$

40.17.** Усі корені многочлена $P(x)=x^3+ax^2+5x+3b$, де $a,\ b\in\mathbb{Z}$, є цілими числами. Доведіть, що многочлен не має кратних коренів.

40.18.** Усі корені многочлена $P(x)=x^3+ax^2+7x+8b$, де $a,\ b\in\mathbb{Z}$, є цілими числами. Доведіть, що многочлен не має кратних коренів.

40.19.** Многочлен виду $P(x)=x^3+px+q$ має кратні корені. Доведіть, що $27q^2+4p^3=0$.

40.20.** Про коефіцієнти многочлена $P(x)=x^3-3px+2q$ відомо, що $p^3=q^2$. Доведіть, що многочлен P має кратні корені.

40.21.** Доведіть, що при жодному $n\in\mathbb{N}$ многочлен

$$P(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

не має кратних коренів.

40.22.** Доведіть, що при жодному $n\in\mathbb{N}$ многочлен

$$P(x)=\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}-\ldots-x+1$$

не має кратних коренів.

40.23.** Многочлен P такий, що число x_0 є коренем многочлена P' кратності k. Чи можна стверджувати, що x_0 є коренем многочлена P кратності $k+1$?

40.24.** Многочлен P степеня n має n різних дійсних коренів. Чи може многочлен P' мати кратні корені?

40.25.** Усі комплексні корені многочлена $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+$ $+a_2x^2+a_1x+a_0$ — прості. Чи може многочлен

$$na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1$$

мати кратні корені?

40.26.** Многочлен P з дійсними коефіцієнтами має екстремум у точці x_0. Доведіть, що многочлен $Q(x)=P(x)-P(x_0)$ має кратний корінь.

40.27.** Нехай x_0 — дійсний корінь парної кратності многочлена P з дійсними коефіцієнтами. Доведіть, що існує проколотий окіл точки x_0, у якому многочлен P зберігає постійний знак.

40.28.** Нехай x_0 — дійсний корінь непарної кратності многочлена P з дійсними коефіцієнтами. Доведіть, що в будь-якому околі точки x_0 многочлен P змінює знак.

40.29.** Про многочлен P з дійсними коефіцієнтами і число x_0 відомо, що $P'(x_0)=P''(x_0)=\ldots=P^{(2011)}(x_0)=0$, а $P^{(2012)}(x_0)\neq 0$. Доведіть, що функція $y=P(x)$ має в точці x_0 екстремум.

40.30.** Про многочлен P з дійсними коефіцієнтами і число x_0 відомо, що $P'(x_0)=P''(x_0)=\ldots=P^{(2010)}(x_0)=0$, а $P^{(2011)}(x_0)\neq 0$. Доведіть, що функція $y=P(x)$ не має в точці x_0 екстремуму.

40.31.** Доведіть, що коли комплексне число z_0 є кратним коренем многочлена P з дійсними коефіцієнтами кратності k, то комплексне число $\bar{z}_0$ також є кратним коренем, до того ж тієї самої кратності k.

40.32.** Нехай P — такий многочлен з дійсними коефіцієнтами, що розв'язком нерівності $P(x)\geqslant 0$ є одноелементна множина. Доведіть, що P має кратний корінь.

40.33.** Многочлен степеня $n\in\mathbb{N}$ з дійсними коефіцієнтами має k дійсних коренів, кожний з яких є простим коренем. Доведіть, що числа n і k однакової парності.

40.34.* Многочлен P з дійсними коефіцієнтами такий, що рівняння $P(x)=3$ має три дійсних корені, а рівняння $P(x)=4$ має чотири дійсних корені. Доведіть, що серед цих семи коренів є корінь многочлена P'.

40.35.* Многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами набуває невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x. Доведіть, що його можна подати у вигляді суми квадратів кількох многочленів з дійсними коефіцієнтами.

40.36.* Многочлен P степеня n має n різних дійсних коренів. Яку найбільшу кількість нульових коефіцієнтів він може мати?

41. Кубічні рівняння

У 8 та 9 класах ви детально ознайомилися з властивостями квадратичної функції, отримали формули для розв'язування квадратних рівнянь, познайомилися з теоремою Вієта, яка установлює зв'язок коренів квадратного рівняння з його коефіцієнтами.

У цьому пункті вивчимо деякі властивості кубічних рівнянь.

Означення. Рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c, d — параметри, причому $a \neq 0$, називають кубічним.

Кубічні рівняння не є для вас новими. Так, у 8 класі ви дізналися, як шукати раціональні корені многочленів з цілими коефіцієнтами. Тому ви можете розв'язати, наприклад, кубічне рівняння $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Познайомимося із загальним методом (його називають **методом Кардано**) розв'язування кубічних рівнянь на такому прикладі.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть у комплексних числах кубічне рівняння:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 11 = 0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Якщо доповнити два перших доданки $x^3 + 3x^2$ лівої частини рівняння до формули куба суми $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$, то рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$(x+1)^3 - 6x - 12 = 0.$$

Зробивши заміну $t = x + 1$, отримаємо

$$t^3 - 6(t-1) - 12 = 0;$$

$$t^3 - 6t - 6 = 0. \qquad (2)$$

Отже, виділення в рівнянні (1) повного куба $(x+1)^3$ дало змогу перейти до рівняння (2) з нульовим коефіцієнтом при t^2.

Для розв'язання рівняння (2) подамо змінну t у вигляді суми $t = u + v$, де значення змінних u і v оберемо пізніше. Маємо:

$$(u+v)^3 - 6(u+v) - 6 = 0;$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 6(u+v) - 6 = 0;$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 6) - 6 = 0. \qquad (3)$$

Підберемо значення змінних u і v так, щоб $3uv - 6 = 0$, тобто $uv = 2$.

Тоді рівняння (3) набуває вигляду $u^3+v^3=6$. Отже, для знаходження змінних u і v розв'яжемо систему

$$\begin{cases} u^3+v^3=6, \\ uv=2. \end{cases} \tag{4}$$

Підставляючи $v=\frac{2}{u}$ у перше рівняння системи, знаходимо

$$u^3+\frac{8}{u^3}=6,$$

$$u^6-6u^3+8=0.$$

Звідси $u^3=4$ або $u^3=2$.

Якщо $u^3=4$, то з першого рівняння системи (4) отримуємо: $v^3=2$, а якщо $u^3=2$, то отримуємо: $v^3=4$. Оскільки значення $t=u+v$ не змінюється, якщо поміняти місцями доданки u і v, то можна розглядати лише випадок $\begin{cases} u^3=4, \\ v^3=2, \\ uv=2. \end{cases}$ Оскільки рівняння $v^3=2$ випливає з двох інших рівнянь останньої системи, то достатньо розв'язати систему $\begin{cases} u^3=4, \\ uv=2. \end{cases}$

Використовуючи формули для кореня n-го степеня з комплексного числа, розв'яжемо рівняння $u^3=4$. Маємо:

$$u_1=\sqrt[3]{4},$$

$$u_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$u_3=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Звідси за формулою $v=\frac{2}{u}$ отримуємо:

$$v_1=\sqrt[3]{2},$$

$$v_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-2\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi}{3}\right),$$

$$v_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-4\pi}{3}+i\sin\frac{-4\pi}{3}\right).$$

Таким чином, знаходимо три розв'язки рівняння (2):

$$t_1=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},$$

$$t_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) =$$
$$= -\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2} + i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right),$$

$$t_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\right) =$$
$$= -\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2} - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right).$$

Повертаючись до змінної x, можна записати всі три розв'язки рівняння (1).

Відповідь: $x_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1$, $x_2 = -\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{2} + i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)$,

$$x_3 = -\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+2}{2} - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right).$$

Відзначимо, що метод Кардано може бути застосований до будь-якого кубічного рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $a \neq 0$.

Наведений приклад переконливо показує, що використання методу Кардано вимагає неабияких зусиль і уважності. Водночас, якщо в задачі потрібно знайти не самі корені x_1, x_2, x_3 кубічного рівняння, а значення деяких виразів, які містять корені, наприклад $x_1 + x_2 + x_3$ або $x_1x_2x_3$, то можна обійтися простішими розрахунками. У цьому допомагає теорема Вієта.

Теорема 41.1 (теорема Вієта). ***Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена з комплексними коефіцієнтами***

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0,$$

тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases} \qquad (5)$$

Доведення. Якщо числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена P, то многочлен P можна подати у вигляді добутку

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

У правій частині останньої рівності розкриємо дужки. Маємо:

$$P(x) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3.$$

Оскільки многочлени

$$ax^3+bx^2+cx+d \qquad (6)$$

і

$$ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-ax_1x_2x_3 \qquad (7)$$

набувають однакових значень при всіх значеннях x, то їх коефіцієнти при однакових степенях змінної x збігаються. Тому

$$\begin{cases}-a(x_1+x_2+x_3)=b,\\ a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=c,\\ -ax_1x_2x_3=d.\end{cases}$$

Звідси випливають рівності системи (5).

Навпаки, якщо виконуються рівності системи (5), то многочлени (6) і (7) мають рівні відповідні коефіцієнти, тому ці многочлени рівні при всіх значеннях x. Оскільки многочлен (7) можна переписати у вигляді

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

то маємо, що

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Це означає, що числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена P. ▲

ПРИКЛАД 2 Знайдіть суму і добуток усіх комплексних коренів кубічного рівняння

$$x^3+3x^2-3x-11=0.$$

Розв'язання. У розв'язанні прикладу 1 знайдено всі корені x_1, x_2, x_3 даного рівняння. Проте навіть якщо відомі точні значення цих коренів, обчислення їх суми і добутку вимагає певної технічної роботи (спробуйте провести ці розрахунки).

Водночас, використовуючи теорему Вієта, одразу маємо, що

$$x_1+x_2+x_3=-3,$$

$$x_1x_2x_3=11. \ ●$$

ПРИКЛАД 3 Скільки дійсних коренів має рівняння

$$x^3-2x^2-x+1=0?$$

Знайдіть суму їх квадратів.

Розв'язання. З'ясуємо, скільки дійсних коренів має многочлен $P(x)=x^3-2x^2-x+1$. Маємо:

$$P(-1)=-1<0,\quad P(0)=1>0,\quad P(1)=-1<0,\quad P(3)=7>0.$$

Оскільки на кінцях кожного з відрізків $[-1;0]$, $[0;1]$, $[1;3]$ многочлен P набуває значень різних знаків, то на кожному з інтервалів $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 3)$ многочлен P має дійсний корінь. Звідси випливає, що многочлен P має три дійсних корені x_1, x_2, x_3.

Знайдемо суму $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. За теоремою Вієта для многочлена P маємо:

$$x_1+x_2+x_3=2,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1.$$

Тоді

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2(-1)=6. \bullet$$

ПРИКЛАД 4 Три комплексних числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $x^3-x^2+2x+1=0$. Складіть кубічне рівняння з коренями x_1x_2, x_1x_3 та x_2x_3.

Розв'язання. За теоремою Вієта комплексні корені x_1, x_2, x_3 даного рівняння задовольняють рівності:

$$x_1+x_2+x_3=1,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2,$$
$$x_1x_2x_3=-1.$$

Тоді для чисел $t_1=x_1x_2$, $t_2=x_1x_3$ та $t_3=x_2x_3$ виконуються рівності

$$t_1+t_2+t_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2,$$
$$t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=x_1^2x_2x_3+x_2^2x_1x_3+x_3^2x_1x_2=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=-1,$$
$$t_1t_2t_3=x_1^2x_2^2x_3^2=1.$$

Тому за теоремою Вієта числа t_1, t_2 та t_3 є коренями рівняння

$$x^3-2x^2-x-1=0. \bullet$$

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть у дійсних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=11, \\ x^3+y^3+z^3=27. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо многочлен $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ з коренями x, y, z.

За теоремою Вієта $p=-(x+y+z)=-3$. Оскільки

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, то $9=11+2(xy+xz+yz)$. Звідси

$$q=xy+xz+yz=-1.$$

Тому многочлен P можна записати так:

$$P(t)=t^3-3t^2-t+r.$$

Знайдемо коефіцієнт r. Оскільки числа x, y, z є коренями многочлена P, то

$$x^3 - 3x^2 - x + r = 0,$$
$$y^3 - 3y^2 - y + r = 0,$$
$$z^3 - 3z^2 - z + r = 0.$$

Додавши три останні рівності, отримаємо

$$(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 3r = 0.$$

Звідси, використовуючи умову задачі, маємо:

$$27 - 3 \cdot 11 - 3 + 3r = 0; \quad r = 3.$$

Таким чином,

$$P(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3.$$

Розкладаючи многочлен P на множники, маємо, що

$$P(t) = t^2(t-3) - (t-3) = (t-3)(t^2-1) = (t-3)(t-1)(t+1).$$

Отже, коренями многочлена є числа 3, 1 і −1.

Відповідь: $(3; 1; -1)$, $(1; 3; -1)$, $(1; -1; 3)$, $(3; -1; 1)$, $(-1; 1; 3)$, $(-1; 3; 1)$. ●

Вправи

41.1.° Три комплексних числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $2x^3 - 4x^2 + x - 6 = 0$. Знайдіть значення виразів $x_1 + x_2 + x_3$ і $x_1 x_2 x_3$.

41.2.° Три комплексних числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $-x^3 + 2x^2 - 7x - 1 = 0$. Знайдіть значення виразів $x_1 + x_2 + x_3$ і $x_1 x_2 x_3$.

41.3.° Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $3x^3 - px + q = 0$. Знайдіть $x_1 + x_2$, якщо $x_3 = -2$.

41.4.° Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $6x^3 + px^2 - qx + 18 = 0$. Знайдіть $x_1 x_2$, якщо $x_3 = 3$.

41.5.° Рівняння $x^3 + px^2 + x = 0$ має комплексні корені x_1, x_2 та $x_3 = 0$. Знайдіть $x_1 x_2$.

41.6.° Число 2 є кратним коренем рівняння $x^3 + px^2 - 20x + q = 0$. Знайдіть комплексні корені цього рівняння.

41.7.° Три комплексних числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $5x^3 + px^2 + 15x - 40 = 0$. Знайдіть $x_1 + x_2$, якщо $x_3 = 25$.

41.8.° Три комплексних числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $x^3 + 29x^2 - 6x + q = 0$. Знайдіть $x_1 x_2$, якщо $x_3 = -31$.

41.9.° Дійсні корені рівняння $x^3 + px^2 - qx + 6 = 0$ відносяться як $1:2:3$. Знайдіть значення коефіцієнтів p і q.

41.10.° Рівняння $x^3 - 8x^2 + px + q = 0$ має комплексні корені x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1 - x_2 = 1$, $x_2 + x_3 = 5$. Знайдіть значення коефіцієнтів p і q.

41.11.° Три дійсних корені рівняння $x^3 - 6x^2 - qx + 10 = 0$ утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть значення q.

41.12.° Три дійсних корені рівняння $x^3 + px^2 + 39x - 27 = 0$ утворюють геометричну прогресію. Знайдіть p.

41.13.° Відомо, що рівняння $2x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$ має три дійсних корені x_1, x_2, x_3. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

3) $\dfrac{x_2 + x_3}{x_1} + \dfrac{x_1 + x_3}{x_2} + \dfrac{x_1 + x_2}{x_3}$;

4) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

41.14.° Відомо, що рівняння $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$ має три дійсних корені x_1, x_2, x_3. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_2x_3} + \dfrac{1}{x_1x_3}$;

2) $x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + x_3(x_1 - x_3)$;

3) $x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2)$.

41.15.° Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $x^3 + px + q = 0$. Доведіть рівності:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 = x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.$$

41.16.° Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $x^3 + px^2 + q = 0$. Доведіть рівності:

$$x_1^2(x_2 + x_3) = x_2^2(x_1 + x_3) = x_3^2(x_1 + x_2).$$

41.17.° Числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена $P(x) = x^3 + px + q$. Доведіть, що числа $t_1 = x_2 + x_3$, $t_2 = x_1 + x_3$ та $t_3 = x_1 + x_2$ є коренями многочлена $Q(x) = x^3 + px - q$.

41.18.° Числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена $P(x) = x^3 + px + q$. Доведіть, що числа $t_1 = x_2x_3$, $t_2 = x_1x_3$ і $t_3 = x_1x_2$ є коренями многочлена $Q(x) = x^3 - px^2 - q^2$.

41.19.* Коренями многочлена $x^3+3x^2+2x-2=0$ є три комплексних числа x_1, x_2, x_3. Складіть кубічне рівняння з коренями $3x_1$, $3x_2$ та $3x_3$.

41.20.* Коренями многочлена $x^3-x^2+4x-1=0$ є три комплексних числа x_1, x_2, x_3. Складіть кубічне рівняння з коренями x_1^2, x_2^2 та x_3^2.

41.21.* Коренями многочлена $x^3-2x^2+3x-4=0$ є три комплексних числа x_1, x_2, x_3. Складіть кубічне рівняння з коренями x_1+x_2, x_1+x_3 та x_2+x_3.

41.22.* Розв'яжіть рівняння:

1) $z^3+6z+2=0$;

2) $z^3+6z^2+9z+1=0$.

41.23.* Розв'яжіть рівняння:

1) $z^3+18z+15=0$;

2) $z^3-9z^2+24z-17=0$.

41.24.** Розв'яжіть систему рівнянь у дійсних числах:

1) $\begin{cases} xyz=-6, \\ xy+xz+yz=1, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=-\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ x^3+y^3+z^3=-25, \\ xy+xz+yz=-5. \end{cases}$

41.25.** Розв'яжіть систему рівнянь у дійсних числах:

1) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=-1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy+xz+yz=(x+y+z)-13, \\ x^2+y^2+z^2=29, \\ xyz=-24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

41.26.** Дано два трикутники — один зі сторонами a_1, a_2, a_3, а другий зі сторонами b_1, b_2, b_3. Доведіть, що ці трикутники рівні тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3, \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3, \\ a_1a_2a_3=b_1b_2b_3. \end{cases}$$

41.27.** Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x+y+z$, $xy+xz+yz$ і xyz — раціональні числа. Чи можна гарантувати, що серед чисел x, y, z є раціональні?

41.28.** Дано числа a, b, c, серед яких немає рівних. Знайдіть значення змінних x, y, z, якщо

$$\begin{cases} x+ya+za^2=-a^3, \\ x+yb+zb^2=-b^3, \\ x+yc+zc^2=-c^3. \end{cases}$$

41.29.** Про числа x, y, z відомо, що

$$(x+y+z)-3(xy+xz+yz)+9xyz=\frac{1}{3}.$$

Доведіть, що принаймні одне з цих чисел дорівнює $\frac{1}{3}$.

41.30.** Чи існують такі дійсні числа a, b, c, що $\begin{cases} a+b+c=0, \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0? \end{cases}$

41.31.** Числа x, y, z, a задовольняють систему

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \end{cases}$$

Доведіть, що принаймні одне з чисел x, y, z дорівнює a.

41.32.** Про дійсні числа a, b, c відомо, що:

$$a+b+c\geqslant 0, \qquad ab+ac+bc\geqslant 0, \qquad abc\geqslant 0.$$

Доведіть, що числа a, b і c — невід'ємні.

41.33.** Про дійсні числа a, b, c відомо, що

$$\begin{cases} abc=1, \\ a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \end{cases}$$

Доведіть, що принаймні одне з чисел a, b, c дорівнює 1.

41.34.* Про дійсні числа $a_1 < a_2 < a_3$ та $b_1 < b_2 < b_3$ відомо, що

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3,$$

$$a_1 < b_1.$$

Доведіть, що $a_2 > b_2$ і $a_3 < b_3$.

41.35.* Про дійсні числа x, y, z відомо, що

$$x + y + z = 5,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Доведіть, що $4 \leqslant xyz \leqslant \frac{112}{27}$.

41.36.* Цілі числа a, b, c такі, що числа $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ і $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ також цілі. Доведіть, що $|a| = |b| = |c|$.

41.37.* Цілі числа a, b, c такі, що кожне з чисел $a + b + c$ і $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться націло на непарне число n. Доведіть, що число $a^5 + b^5 + c^5$ також ділиться націло на число n.

41.38.* Сума невід'ємних чисел a, b, c дорівнює одиниці. Доведіть, що

$$ab + bc + ca - 2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

21.19. 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **21.20.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **21.21.** 1) –3; 2) –1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $-\frac{1}{2}$. **21.22.** 1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) –1. **21.23.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) –3. **21.24.** 1) –5; 2) –2. **21.25.** 1) 2; 2) 4. **21.26.** 1) 6; 2) 9. **21.28.** 30. **21.29.** 21. **21.30.** $\log_a b$. **21.31.** $\log_b a$. **21.39.** Розгляньте, наприклад, числа $a=\sqrt{3}$, $b=\log_3 4$. **21.40.** Розгляньте, наприклад, числа $a=3$, $b=\log_3 4$. **21.41.** 1. **21.42.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **21.43.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **21.44.** lg 2. *Вказівка.* У кожному з логарифмів перейдіть до основи 10. **21.45.** $\frac{5}{2}$. **21.50.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $b^x = a^{x\log_a b}$. **21.51.** $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. *Вказівка.* $\log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. **21.52.** *Вказівка.* У виразі $\log_{ab} x$ перейдіть до логарифма з основою a. **21.53.** –3. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\log_{ab} b + \log_{ab} a = 1$. **21.54.** $\frac{2a+b+1}{2b+1}$. **21.55.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{a+b}{1-a}$. **21.56.** 1) $\frac{3-3a}{b+1}$.

22.12. 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **22.13.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **22.14.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь; 3) 1 корінь. **22.15.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь. **22.16.** 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **22.17.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **22.18.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{0,2} 0{,}1 > \log_{0,1} 0{,}2$. **22.20.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Вказівка.* Числа $\log_2 3$ і $\log_3 2$ є додатними та взаємно оберненими. **22.22.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\{0\}$; 4) усі числа виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 6) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 7) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 8) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$;

9) $(0;\ 2) \cup (2;\ 3)$; 10) $(-3;\ -2) \cup (-2;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$; 11) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k <$ $< x < \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 12) $\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **22.23.** 1) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) усі числа виду $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 5) $(-8;\ -2) \cup (-2;\ -1)$; 6) $(0;\ 7) \cup (7;\ 8)$; 7) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$; 8) $(0;\ 4) \cup (4;\ 5)$; 9) $(-1;\ 1) \cup (1;\ 2)$; 10) $[-5;\ 0) \cup (0;\ 2]$; 11) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **22.24.** 1) $[1; \log_3 5]$; 2) $[0; +\infty)$. **22.25.** 1) $[1; 3]$; 2) $(-\infty; 1]$. **22.26.** 3) Див. рисунок; 4) див. рисунок. **22.27.** 3) Див. рисунок.

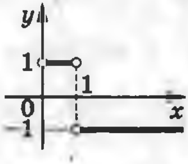


Рис. до задачі 22.26 (3)

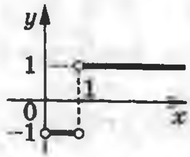


Рис. до задачі 22.26 (4) і 22.27 (3)

22.28. 1) -2; 2) -1. **22.29.** 1) 3; 2) 1. **22.30.** Непарна. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}$. **22.32.** $(-2; 2)$. **22.33.** $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. **22.34.** $\lg 2 = 0{,}3\ldots$, тому перша цифра після коми — трійка. *Вказівка.* Доведіть нерівності $\frac{3}{10} < \lg 2 < \frac{1}{3}$. **22.35.** $\log_2 3 < \log_3 7$. *Вказівка.* Доведіть нерівності $\log_2 3 < \frac{5}{3} < \log_3 7$. **22.36.** 478. *Вказівка.* Якщо натуральне число a містить у своєму десятковому записі m цифр, то $10^{m-1} \leqslant a < 10^m$. **22.37.** 1) 0. *Вказівка.* Підставте $x = y = 1$; 2) -1. *Вказівка.* Підставте $x = \frac{1}{y} = 2$; 3) 2. *Вказівка.* Підставте $x = y = 2$; 4) 10. *Вказівка.* Послідовно підставляючи $x = y,\ x = y^2,\ x = y^3,\ \ldots$, доведіть, що $f(x^n) = nf(x)$; 5) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $f(x) = nf\left(\sqrt[n]{x}\right)$ при $n = 3$. **22.38.** *Вказівка.*

Спочатку доведіть, що $f(2^r)=r$ для всіх $r \in \mathbb{Q}$. Далі, скориставшись означенням степеня 2^x для $x \in \mathbb{R}$ і неперервністю функції f, доведіть, що $f(2^x)=x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, і зробіть заміну $t=2^x$.
22.39. $(n-2)2^n+n+2$. *Вказівка.* Перше розв'язання. Розглянемо графік функції $y=\log_2 x$, $D(y)=[1;2^n]$ (на рисунку зображено випадок, коли $n=4$). Нехай $S_с$, $S_з$ та $S_ж$ — відповідно площі синьої, зеленої та жовтої фігур. Тоді $S=S_с+S_з$. Крім цього, $S_ж+S_з=2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-2$. Далі врахуйте, що площа прямокутника $OABC$ дорівнює $S_с+S_ж+S_з$. Друге розв'язання. У сумі S останній доданок дорівнює n. Крім того, у сумі S є: 2^0 доданків, рівних 0 (це $[\log_2 1]$), 2^1 доданків, рівних 1 (це $[\log_2 2]$ і $[\log_2 3]$), 2^2 доданків, рівних 2 (це $[\log_2 4]$, $[\log_2 5]$, $[\log_2 6]$, $[\log_2 7]$), ..., 2^{n-1} доданків, рівних $(n-1)$ (це доданки від $[\log_2 2^{n-1}]$ до $[\log_2(2^n-1)]$). Це означає, що $S-n=0\cdot 2^0+1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+...+$ $+(n-1)\cdot 2^{n-1}=2(1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+...+(n-1)\cdot 2^{n-2})$. Для обчислення останньої суми розгляньте похідну функції $f(x)=x+x^2+...+x^{n-1}$ у точці $x_0=2$.

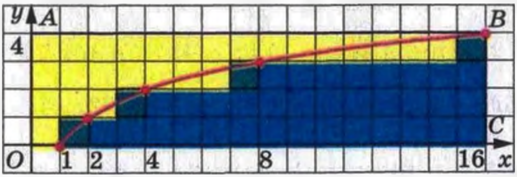
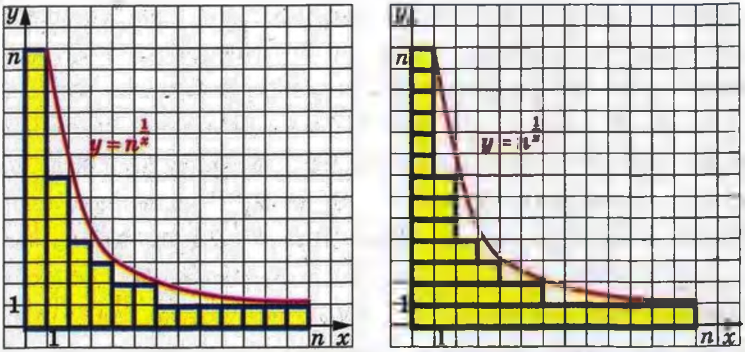


Рис. до задачі 22.39

22.40. *Вказівка.* Розгляньте графік функції $y=n^{\frac{1}{x}}$, $D(y)=[1;n]$, і знайдіть обернену функцію. Тоді $n+\left[\sqrt{n}\right]+\left[\sqrt[3]{n}\right]+...+\left[\sqrt[n]{n}\right]$ — площа жовтої фігури, яку пораховано «по вертикалі» (рис. *а*), а $n+[\log_2 n]+[\log_3 n]+[\log_4 n]+...+[\log_n n]$ — площа тієї самої жовтої фігури, яку пораховано «по горизонталі» (рис. *б*).

23.3. 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 512. **23.4.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **23.5.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) –1. **23.6.** 1) 1; 2) 0; 1. **23.7.** 1) –2; 6; 2) коренів немає; 3) –1; 4) 0. **23.8.** 1) –2; 2) коренів немає; 3) 0; 13; 4) –2.



а *б*

Рис. до задачі 22.40

23.9. 1) 1; 2) 1; 3) 2. **23.10.** 1) $\log_2 3$; 2) 2. **23.11.** 1) 2; 3; 2) 4; 3) 8; 4) 4; 5) 4; 6) 7. **23.12.** 1) 2; 2) −1; 4; 3) 3; 4) 8. **23.13.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **23.14.** 1) 2; 2) $\log_3 \left(3+\sqrt{11}\right)$. **23.15.** 1) 9; $\frac{1}{3}$; 2) 10; 1000; 3) 25; $\sqrt{5}$; 4) $\frac{1}{6}$. **23.16.** 1) −8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **23.17.** 1) 7; 2) коренів немає; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **23.18.** 1) Коренів немає; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **23.19.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) −5; −2; $\frac{\sqrt{89}-7}{2}$. **23.20.** 1) −6; −4; 2; 2) −1; 2; 3. **23.21.** 1) $\frac{1}{3}$; $3^{\frac{5}{9}}$; 2) 0,1; $\sqrt{10}$; 3) 4; 4) 8; $\frac{1}{8}$; 5) 100; 10^{-8}; 6) 5; $\frac{1}{625}$; 7) 10; 8) 10 000. **23.22.** 1) $\sqrt[3]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 2) 3; 9; 3) 1; 49; 4) 100; $\frac{1}{100}$; 5) 6; 6^{-7}; 6) 32. **23.23.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) 0,001; 10; 3) 3; 9; 4) 216; $\frac{1}{6}$. **23.24.** 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 16; $\frac{1}{4}$; 4) 1 000 000; 0,001. **23.25.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 4) 1; 9; 5) 1; 16; 6) $\frac{1}{2}$. **23.26.** 1) $\frac{1}{9}$; 3; 2) $\sqrt{3}$; 3; 3) 7; 4) 3.

23.27. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **23.28.** 1) (1; 3); 2) (9; 3), (3; 9); 3) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 4) (3; 9), (9; 3); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 6) (2; 10), (10; 2). **23.29.** 1) (1,5; 2); 2) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 3) (5; 5); 4) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$; 5) (4; 1); 6) (2; 1). **23.30.** 1) 100; 2) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$. **23.31.** 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 7. **23.32.** 1) −1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Вказівка.* Розгляньте дане рівняння як квадратне відносно $\log_2 x$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\sqrt{2}$. **23.33.** 1) 8; 2) 3; $\frac{1}{27}$; 3) πk, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\sqrt[6]{3}$. **23.34.** 3; $\sqrt{2}$. **23.35.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1,5. **23.36.** 1) 2; 2) коренів немає. **23.37.** 1) 1; 2) 3. **23.38.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. **23.39.** Якщо $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 7$, то один розв'язок; якщо $-1 < a < 7$, то 2 розв'язки. **23.40.** Якщо $a \leqslant 2$ або $a \geqslant 11$, то один розв'язок; якщо $2 < a < 11$, то 2 розв'язки. **23.41.** $a = \frac{8}{3}$ або $a \leqslant \frac{7}{3}$. **23.42.** $a = -3$ або $a \geqslant -2{,}5$. **23.43.** 1) k, де $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; 2) $\arccos \frac{1}{10} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **23.44.** 1) $1+4k$, $k \in \mathbb{N}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$. *Вказівка.* Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ -6 < x < 0, \\ x^2+6x+10 \neq 0, \\ \sin 2x > 0. \end{cases}$$

23.45. 2. **23.46.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Покажіть, що $\log_2 (5+3\cos 4x) \geqslant 1$. **23.47.** 2. **23.48.** Якщо $b < 3$ або $b \geqslant 7$, то розв'язків немає; якщо $b = 3$, то $3 \leqslant x < 5$; якщо $3 < b < 7$, то $x = \frac{3+b}{2}$. **23.49.** $(-\infty; -1] \cup \{1-\sqrt{2}\}$. **23.50.** (2; 2). *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(t)=\sqrt{t}+\log_3 t$. **23.51.** 1; 3. **23.52.** $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$. *Вказівка.* Рівняння $2x^2-x+3=x^2+2x+1$ є наслідком заданого. Воно має два корені $x_1=1$, $x_2=2$. Початкове рівняння має єдиний розв'язок, якщо один із цих коренів належить області визначення рівняння, а другий — не належить. **23.53.** $\left(2;\frac{7}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3};3\right]\cup\left\{\frac{7}{2}\right\}$. **23.54.** $\left[\frac{1}{3};1\right]$. *Вказівка.* Для того щоб корінь рівняння $\log_a(x-2)=b$ був меншим від 3, повинна виконуватись умова $b<0$. Тоді слід знайти, при яких значеннях параметра a рівняння $(a-1)t^2-$ $-2(a+1)t+a-3=0$ має лише від'ємні корені. **23.55.** 1. *Вказівка.* Підставте в дане рівняння $a=1$. **23.56.** 5. **23.57.** Ні. *Вказівка.* Число $x=\frac{1}{4}$ також є коренем даного рівняння. Рисунок 23.3 не може слугувати обґрунтуванням того, що дане рівняння має один корінь. У цьому і полягає помилка Василя. Насправді можна показати, що дане рівняння має три корені. Побудувавши, наприклад, за допомогою комп'ютерної програми графіки функцій $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{16}} x$, на проміжку $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ можна побачити наявність цих трьох коренів.

24.5. 1) $(1;+\infty)$; 2) $(0;1)$; 3) $(3;+\infty)$; 4) $(-3;-2)\cup(3;+\infty)$; 5) $(-\infty;-3]\cup[4;9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10};4\right]\cup[5;+\infty)$. **24.6.** 1) $\left(\frac{3}{2};4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7};\frac{3}{2}\right)$; 3) $[5;+\infty)$; 4) $(-\infty;-4]\cup[3;5)$. **24.7.** 1) $[-1;1)\cup(3;5]$; 2) $(-2;-1)\cup$ $\cup(0;1)$; 3) $(-6;-5)\cup(-5;-4)$; 4) $[-1;0)\cup(3;4]$; 5) $\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4};2\right)\cup(2;+\infty)$; 7) $(-\infty;-2{,}5)\cup[2;+\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3};1\right]$. **24.8.** 1) $(2;3)$; 2) $[1;2)\cup(4;5]$; 3) $[-4;-3)\cup(0;1]$; 4) $[0;1)\cup(1;2]$; 5) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup[3;+\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **24.9.** 1) $(3;6]$; 2) $(1;3]$; 3) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; 4) $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$; 5) $[-4;-3)\cup(1;3]$; 6) $[-5;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right]$.

24.10. 1) $(-3;\ -1)$; 2) $(4;\ 5]$; 3) $(-5;\ 7]$; 4) $\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup(4;13]$.

24.11. 1) $(5;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 4)$; 4) $(5;\ 7]$; 5) $\left(-1;-\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty;-\frac{7}{5}\right]$. **24.12.** 1) $[-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 2]$; 3) $[11;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3};+\infty\right)$.

24.13. 1) $\left[2\sqrt{2};8\right)$; 2) $[6;\ 7]$. **24.14.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $[6;\ 11)$.

24.15. 1) $\left[\frac{1}{5};5\right]$; 2) $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[9;+\infty)$; 3) $(0{,}0001;\ 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16};256\right]$; 5) $(0;\ 4]\cup[8;\ +\infty)$; 6) $\left(0;\frac{1}{81}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **24.16.** 1) $\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[8;+\infty)$; 2) $(0;\ 0{,}1]\cup[1000;\ +\infty)$; 3) $(0{,}5;\ 4)$; 4) $[0{,}04;\ 5]$. **24.17.** 1) $\left(\frac{1}{128};2\right]$; 2) $(0;\ 3^{-10}]\cup[3;\ +\infty)$; 3) $[0{,}001;\ 1)\cup[100;\ +\infty)$; 4) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup(1;5]$.

24.18. 1) $\left(0;\frac{1}{49}\right]\cup[7;+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216};6\right]$; 3) $(3;\ 9]\cup[81;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4};1\right)\cup[2;+\infty)$. **24.19.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2};-2\right)\cup\left(3;\frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup$ $\cup(1;+\infty)$; 3) $[1{,}5;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$. **24.20.** 1) $\left[-2;1-\sqrt{5}\right)\cup\left(1+\sqrt{5};4\right]$; 2) $\left(\frac{3}{4};1\right]$. **24.21.** $\left(0;\frac{1}{27}\right]\cup[3;+\infty)$. **24.22.** 1) $\left[\frac{1}{625};5\right]$. **24.23.** 1) $[1;+\infty)$; 2) $(0;4]$. **24.24.** 1) $(1;4)$; 2) $[5;+\infty)$. **24.25.** 1) $(2;\ 3)$; 2) $(4{,}5;\ 5)$; 3) $(0;\ 2)$; 4) $(3{,}5;\ 5)$; 5) $(0;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$; 6) $(1{,}5;\ 2]$; 7) $\left(3;\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left(4;\frac{9}{2}\right]$.

24.26. 1) $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $(1;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2)\cup(2{,}5;\ 4)$; 4) $(1;\ 2]$; 5) $(0;\ 1]$. **24.27.** 1) $\left[\log_4\frac{1}{2};1\right)$; 2) $\left[\frac{3}{4};1\right)$. **24.28.** 1) $\left[\log_5\frac{11}{20};3\right)$.

24.29. 1) $(3;\ 4]\cup\{5\}$; 2) $\left[-\frac{9}{8};-1\right)\cup\{2;-2\}$; 3) $\left[\frac{9}{5};2\right)\cup(2;3]\cup\{1\}$.

24.30. 1) $(2;\ 3]\cup\{5\}$; 2) $(5;\ +\infty)\cup\{4\}$. **24.33.** Якщо $a\leqslant 8$, то $x\in[3;\ +\infty)$; якщо $a>8$, то $x\in[\log_2 a;\ +\infty)\cup\{3\}$. **24.34.** Якщо

$a \leqslant 9$, то $x = 2$; якщо $a > 9$, то $x \in [2; \log_3 a]$. **24.35.** $(0; 1) \cup \cup \left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right)$. **24.36.** $(0;1) \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$. **24.37.** $(3; +\infty)$. **24.38.** $(0; 3)$. **24.39.** $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (1; +\infty)$. **24.40.** $(-2; -1] \cup (1; 2)$. **24.41.** 1) $[-2; +\infty)$. *Вказівка.* Скористайтеся нерівностями $\sqrt{x+2}+1 \geqslant 1$ і $\log_3(x^2+4x+13) \geqslant 2$; 2) $[2; +\infty)$. **24.42.** $[1; +\infty)$. **24.43.** *Вказівка.* Нехай $x = \log_a b$, $y = \log_b c$, $z = \log_c a$. Тоді $x > 1$, $y > 1$, $xyz = 1$ і дана нерівність набуває вигляду $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Останню нерівність можна переписати так: $x + y + z < xy + yz + xz$; $(x-1)(y-1)(z-1) < 0$. **24.44.** *Вказівка.* Маємо $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$; $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. Тому $\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > > \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a = \log_b (\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0$.

25.5. 1) $\frac{2}{e}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 24. **25.6.** 1) -1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **25.7.** 1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$; 4) $y = 4x - 1$; 5) $y = 4x + 4$; 6) $y = \frac{2x}{3\ln 3} - \frac{2}{3\ln 3} + 1$. **25.8.** 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = 6x\ln 3 - 12\ln 3 + 3$; 3) $y = 4x - \ln 4$; 4) $y = 3x - 6$. **25.9.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **25.10.** $y = -1600$. **25.11.** 1) $y = 5x + 3$; 2) $y = 3x - 3$. **25.12.** 1) $y = 2x$; 2) $y = x + 1 + \ln 5$; 3) $y = -x$. **25.13.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 2) зростає на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $x_{min} = -\frac{1}{2}$; 3) зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$; 4) зростає на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = \frac{2}{\ln 2}$; 5) зростає на $(-\infty; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 6) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 7) зростає на $(-\infty; 2]$, спадає на $[2; +\infty)$, $x_{max} = 2$; 8) зростає на $[3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{min} = 3$; 9) зростає на $(-\infty; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 10) зростає на $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 11) зростає на $(0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$,

$x_{max} = 1$; 12) зростає на $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $x_{min} = e^{-\frac{1}{2}}$; 13) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 14) зростає на $[e; +\infty)$, спадає на $(0; 1)$ і $(1; e]$, $x_{min} = e$; 15) зростає на $(0; e^2]$, спадає на $[e^2; +\infty)$, $x_{max} = e^2$; 16) зростає на $[-1; 0)$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $(0; 1]$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 17) зростає на $(0; 1]$ і $[e; +\infty)$, спадає на $[1; e]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = e$; 18) зростає на $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; \sqrt{10}\right]$, $x_{min} = \sqrt{10}$. **25.14.** 1) Зростає на $[-2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$, $x_{min} = -2$; 2) зростає на $[-1; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[0; 1]$, $x_{max} = 0$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 3) зростає на $[-1; 1]$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = -1$; 4) зростає на $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{min} = -\frac{1}{4}$; 5) зростає на $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, спадає на $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) зростає на $(-\infty; -2]$, спадає на $[-2; +\infty)$, $x_{max} = -2$; 7) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 8) зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{min} = 1$; 9) зростає на $(0; e]$, спадає на $[e; +\infty)$, $x_{max} = e$; 10) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 11) зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $[e^2; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{min} = e^2$; 12) зростає на $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$ і $[10; +\infty)$, спадає на $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і $[1; 10]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = \frac{1}{10}$, $x_{min} = 10$. **25.15.** 1) $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$; 2) e^2; 0; 3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2. **25.16.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **25.17.** 1) Опукла вгору на $(-\infty; 0]$, опукла вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $\left(0; \sqrt{e^3}\right]$, опукла вниз на $\left[\sqrt{e^3}; +\infty\right)$, $x = \sqrt{e^3}$ — точка перегину; 3) опукла вгору на $(-\infty; 0)$, опукла вниз на $(0; +\infty)$. **25.18.** 1) Опукла вниз на $(-\infty; +\infty)$; 2) опукла вгору на $(-\infty; 2]$, опукла вниз на $[2; +\infty)$, $x = 2$ — точка перегину; 3) опукла вгору на кожному з проміжків $(0; 1)$ і $[e^2; +\infty)$, опукла вниз на $(1; e^2]$,

$x = e^2$ — точка перегину. **25.19.** Див. рисунок. **25.20.** Див. рисунок.

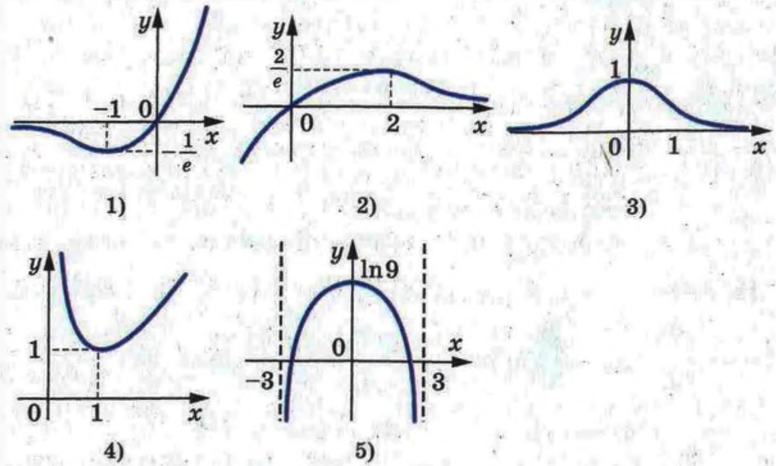


Рис. до задачі 25.19

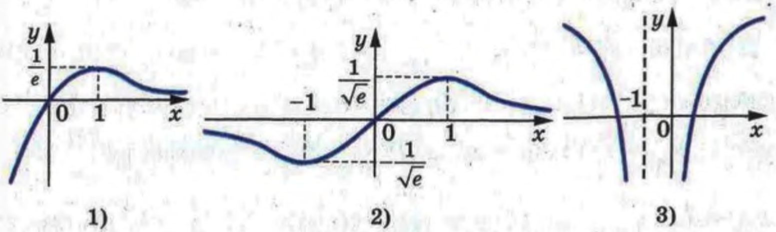


Рис. до задачі 25.20

25.21. *Вказівка.* Скористайтеся нерівностями $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
25.22. *Вказівка.* Для доведення нерівності $\ln x \leqslant x-1$ розбийте проміжок $(0;+\infty)$ на дві частини точкою $x_0 = 1$. Для доведення нерівності $\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x$ зробіть в нерівності $\ln x \leqslant x-1$ заміну $x = \frac{1}{t}$.
25.24. α. *Вказівка.* Знайдіть похідну функції $y = (1+x)^{\alpha}$ в точці $x_0 = 0$. **25.25.** 1. **25.28.** При $a < 1$ коренів немає, при $a = 1$ один корінь, при $a > 1$ два корені. **25.29.** При $a \leqslant 0$ або $a = e^{-1}$ — один

корінь, при $0<a<e^{-1}$ — два корені, при $a>e^{-1}$ коренів немає. **25.30.** $a \leqslant 0$. **25.31.** $a \geqslant 0$. **25.32.** $a=1$, $b=0$. *Вказівка.* Розгляньте рівність $(e^{ax+b})'=(ae^x+b)'$. **25.33.** $m \geqslant 0$. **25.34.** $a \leqslant 1$. **25.35.** $x^x(1+\ln x)$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $x^x=e^{x\ln x}$. **25.36.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **25.40.** 0; 2. **25.41.** 1; 2. **25.42.** 0; 1. *Вказівка.* Поділіть обидві частини на 7^x. **25.43.** 0; 1. **25.44.** 1) 2; 4. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x-2^{x-1}-1$. Оскільки функція $f'(x)=\left(\sqrt{3}\right)^x\ln\sqrt{3}-2^{x-1}\ln 2$ має лише один нуль, то, використовуючи ключову задачу пункту 12, отримаємо, що функція f має не більше двох нулів; 2) 0; 1; 2. **25.45.** 1) 0; 1; 2) 1; 2; 3. **25.46.** $(0;1)\cup(1;+\infty)$. **25.47.** $(-\infty;0]$. **25.48.** $x=-1$, $y=0$. *Вказівка.* Точка $A(x;e^{x+1})$ належить графіку функції $f(x)=e^{x+1}$, точка $B(y;y)$ — графіку функції $g(x)=x$. Тоді $AB^2=(x-y)^2+(y-e^{x+1})^2$. Далі знайдіть найменшу відстань між точками графіків функцій f і g. **25.49.** *Вказівка.* Розглянемо функцію $f(x)=\ln x$. Застосувавши теорему Лагранжа, запишемо: $\ln 2-\ln 1=\frac{1}{x_1}<1$, $\ln 3-\ln 2=\frac{1}{x_2}<\frac{1}{2}$, ..., $\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{x_n}<\frac{1}{n}$, $x_i\in(i;\ i+1)$. Додавши записані нерівності, отримаємо потрібний результат. **25.51.** 1) $e^\pi>\pi^e$. *Вказівка.* Дослідіть на зростання і спадання функцію $y=\frac{\ln x}{x}$. **25.52.** $\ln^2 100>\ln 99\cdot\ln 101$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=\frac{\ln x}{\ln(x-1)}$. **25.53.** 0. *Вказівка.* Функції $f(x)=e^x-1$ і $g(x)=\ln(x+1)$ є взаємно оберненими і зростаючими. Отже, спільні точки їх графіків лежать на прямій $y=x$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $f(x)=x$. Далі скористайтеся задачею 25.23. **25.54.** *Вказівка.* Застосуйте теорему Лагранжа для функції $g(x)=e^{-x}f(x)$ на відрізку $[0;1]$. **25.55.** *Вказівка.* Застосуйте теорему Ролля для функції $h(x)=e^{-g(x)}f(x)$ на відрізку $[0;1]$.

26.8. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **26.9.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **26.10.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$; 2) $y=\operatorname{tg} x+2\sqrt{3}$; 3) $y=\ln(-x)+4$; 4) $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}$. **26.11.** 1) $y=-\operatorname{ctg} x+1$; 2) $y=2\sqrt{x}+2$; 3) $y=\ln x-1$; 4) $y=x^2-24$. **26.15.** $\frac{1}{2}$. **26.16.** $-\frac{1}{2}$.

26.17. $F(x)+C$, де $F(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x<0,\\ -\cos x+1, & \text{якщо } x\geqslant 0,\end{cases}$ C — довільне число.

26.18. $F(x)+C$, де $F(x)=\begin{cases}x+1, & \text{якщо } x<1,\\ 2\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 1,\end{cases}$ C — довільне число.

26.19. $-\frac{\cos x^4}{4}+C$, де C — довільне число. *Вказівка.* Обчисліть похідну функції $y=-\frac{\cos x^4}{4}$. **26.20.** $e^{\sin x}+C$, де C — довільне число. **26.21.** *Вказівка.* Нехай F — первісна непарної функції f. Тоді $F'(x)=f(x)$ і $F'(-x)=-f(-x)$. Звідси $F'(x)=F'(-x)$. Отже, $F(x)=F(-x)+C$, де C — деяке число. Підставивши $x=0$, доводимо, що $C=0$. **26.23.** Ні. *Вказівка.* Первісна періодичної функції не завжди є періодичною. Наприклад, усі первісні періодичної функції $f(x)=1$ не є періодичними. Помилка Василя полягає в твердженні, що рівність $F(x)+C_1=F(x+T)+C_2$ виконується для довільних чисел C_1, C_2. Для кожного значення C_1 існує лише єдине значення C_2. Його можна знайти, наприклад, з рівності $C_2=F(0)-F(T)+C_1$.

27.5. 1) $F(x)=x-x^2+8$; 2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=-\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}+6{,}5$; 4) $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{3}$; 5) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 6) $F(x)=7\ln(x-4)+2\sqrt{x+4}$; 7) $F(x)=\sqrt{6x+1}+2$; 8) $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$; 9) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$; 10) $F(x)=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)$. **27.6.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=$

$=-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{3}$; 5) $F(x)=8\sqrt{\frac{x}{2}-2}+4$; 6) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+3{,}5$; 7) $F(x)=$ $=\frac{1}{4}\ln(4x-3e^2)+5{,}5$; 8) $F(x)=-8\operatorname{ctg}\frac{x}{8}+5$. **27.7.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, первісна має ще один нуль, який дорівнює 1. **27.8.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-$ $-12x+27$. **27.9.** 1) F_2; 2) F_2. **27.10.** F_1. **27.11.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **27.12.** $s(t)=2t^3+t-47$ або $s(t)=2t^3+t-67$. **27.13.** $y=2x^3-x^5+7$. **27.14.** $y=6\sqrt{x}+x-21$. **27.15.** 1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. *Вказівка*. Застосуйте формули пониження степеня; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. *Вказівка*. Застосуйте формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму; 3) $\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **27.16.** 1) $\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{18}\sin 9x+C$. **27.17.** 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$; 2) $\frac{x^3}{3}+$ $+\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x-1)+C$. **27.18.** 1) $\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x+3}+C$; 2) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-$ $-3\ln(-x-3)+C$. **27.19.** $\operatorname{tg} x-x+C$. **27.20.** $-\operatorname{ctg} x-x+C$. **27.21.** $F_1(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{5}{6}$, $F_2(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-\frac{323}{24}$. **27.22.** $F_1(x)=\frac{x^3}{3}-$ $-4x+\frac{2}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4x-\frac{20}{3}$. **27.23.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **27.24.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **27.26.** Ні. *Вказівка.* Припустимо, що F — первісна функції f. Тоді для будь-якого $x>0$ виконується рівність $\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$. Справді, за теоремою Лагранжа для функції F на відрізку $[0; x]$ існує таке $c\in(0; x)$, що $\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(c)=f(c)=1$. Тому $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$. Аналогічно можна довести, що

$\lim\limits_{x \to 0-} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -1$. Тому не існує границі $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x}$, тобто функція F не є диференційовною в точці $x_0 = 0$. **27.27.** Може. *Вказівка.* Див. задачу 10.52.

28.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) 0,5; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3e^2-1}{e^2}$; 10) 18. **28.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) $8\ln 2$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{72-2\ln 3}{\ln 3}$. **28.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e-6$; 11) $-\frac{1}{9}$; 12) 240. **28.9.** 1) -45; 2) 6; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{288}$; 7) $\frac{1}{3}\ln 10$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{78}{7}$. **28.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-1; 4) $4\ln 4-3$; 5) $12-4\ln 4$; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) $24-7\ln 7$; 14) 2; 15) $\sqrt{2}-1$. **28.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $6-3\ln 3$; 7) 1; 8) $12-5\ln 5$. **28.12.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}-1$. **28.13.** 3. **28.14.** 3; -3. **28.15.** 2; -2. **28.16.** 6. **28.17.** $-\sqrt[4]{8}$. **28.18.** 1) $(0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; 2) $(\log_{0,2} 6;\ +\infty)$. **28.19.** $(1;\ +\infty)$. **28.20.** 1) $\frac{4-\pi}{12}$; 2) $\pi-2$; 3) 0; 4) $\frac{3e^2+8e-8}{8e^2}$. **28.21.** 1) $\frac{20-5\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0,2; 4) $e^2-e-\frac{1}{2}$. **28.22.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) $8-4\ln 2$. **28.23.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4,5; 4) 9. **28.24.** 1) $5\frac{1}{3}$; 2) 1,5. **28.25.** 1) $2\frac{5}{6}$; 2) 3. **28.26.** $1\frac{1}{12}$. **28.27.** $\frac{1}{6}$. **28.28.** $F'(x) = f(x)$. *Вказівка.* Скористайтеся означенням визначеного інтеграла. **28.30.** *Вказівка.* Нехай F — первісна функції f на відрізку $[a; b]$. Застосуйте теорему Лагранжа для функції F на відрізку $[a; b]$. **28.31.** *Вказівка.* Розгляньте

$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$. **28.35.** 1) $\frac{\pi}{2}$. *Вказівка.* Використайте геометричний зміст визначеного інтеграла; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 4π; 4) $\frac{9\pi}{2}$; 5) 8,5; 6) 6,5. **28.36.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 3π; 3) 2π; 4) 5. **28.37.** 0. *Вказівка.* Доведіть, що функція $y=\frac{2^{\sqrt[3]{x}}-1}{2^{\sqrt[3]{x}}+1}$ є непарною. **28.38.** 0. **28.39.** 1. *Вказівка.* Зобразіть криволінійну трапецію, площа якої дорівнює шуканому інтегралу, і розгляньте функцію, обернену до підінтегральної функції. **28.40.** $\frac{\pi}{2}-1$. **28.41.** $\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}$. *Вказівка.* Знайдіть площу жовтої фігури, зображеної на рисунку. **28.42.** *Вказівка.* Знайдіть площу жовтої фігури, зображеної на рисунку.

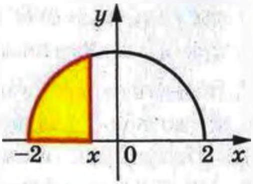


Рис. до задачі 28.41

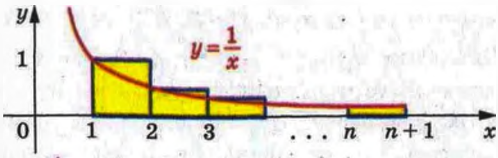


Рис. до задачі 28.42

28.43. *Вказівка.* Послідовність (x_n) є зростаючою. Тому достатньо довести нерівність $x_n-1=\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\leqslant\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx<2$.

29.1. 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **29.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **29.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$.

30.7. 200. **30.8.** 24. **30.9.** $n!$. **30.11.** 30!. **30.12.** A_{25}^6. **30.13.** A_n^5. **30.14.** C_{25}^6. **30.15.** C_{100}^{40}. **30.16.** 5^n. **30.17.** 0. *Вказівка.* Підставте у формулу бінома Ньютона $a=1$, $b=-1$. **30.18.** 1. **30.21.** 2. **30.22.** $\frac{1}{2^{100}}$. **30.23.** 17. **30.24.** 67. **30.25.** 49. **30.26.** Тринадцятий член розкладу має вигляд $C_{22}^{12}x^2$. **30.27.** 8. **30.28.** 3^n. **30.29.** 3^{15}.

30.30. 4^6. **30.31.** $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. *Вказівка.* Обчисліть кількість способів розкласти n різних куль по трьох різних ящиках так, щоб: а) два ящики були порожніми; б) один ящик був порожнім. **30.32.** $\dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$. *Вказівка.* Порівняйте шукану кількість з кількістю способів розкласти n різних куль по трьох різних ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім. **30.33.** $\dfrac{3^{n-1} + 1}{2}$. *Вказівка.* Обчисліть кількість способів розкласти n різних куль по трьох однакових ящиках так, щоб: а) два ящики були порожніми; б) один ящик був порожнім. **30.34.** C_{n+2}^2. *Вказівка.* Якщо серед $(n+2)$ куль, розставлених у ряд, закреслити дві, то решта n куль розіб'ються на три групи, що дозволить відповідно розкласти їх по трьох різних ящиках. Наприклад, якщо закреслено кулі, зображені на рисунку, то до першого ящика потрапить одна куля, до другого — три кулі, а до останнього — $(n-4)$ кулі. **30.35.** C_{n-1}^2 при $n \geqslant 3$; 0 при $n < 3$. *Вказівка.* Якщо між n кулями, розставленими в ряд, поставити дві перегородки, то кулі розіб'ються на три групи, що дозволить відповідно розкласти їх по трьох різних ящиках. Наприклад, якщо перегородки поставити так, як зображено на рисунку, то до першого ящика потрапить одна куля, до другого — три кулі, а до останнього — $(n-4)$ кулі. Цю задачу можна розв'язати й інакше. Якщо спочатку покласти до кожного ящика по одній кулі, то дану задачу можна звести до задачі **30.34**.

○⊗○○○⊗○...○○○

Рис. до задачі 30.34

○|○○○|○...○○○

Рис. до задачі 30.35

30.36. *Вказівка.* На рисунку показано, що сума чисел, які стоять на сусідніх червоних прямих, дорівнює сумі чисел, розміщених на наступній червоній прямій. **30.37.** *Вказівка.* Див. рисунок. **30.38.** $11^4 = (10+1)^4 = 10^4 + C_4^1 10^3 + C_4^2 10^2 + C_4^3 10^1 + 1 = 14\,641$. **30.39.** 6. **30.40.** 3. **30.45.** *Вказівка.* Скористайтеся формулами пониження степеня і нерівністю, доведеною в задачі 30.44. **30.46.** $C_{200}^{117}\left(\sqrt{2}\right)^{117}$. *Вказівка.* Порівняйте два сусідніх доданки формули бінома Ньюо-

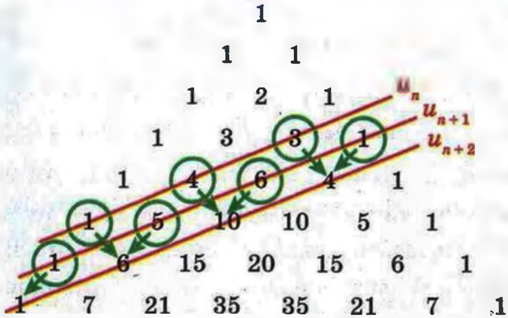


Рис. до задачі 30.36

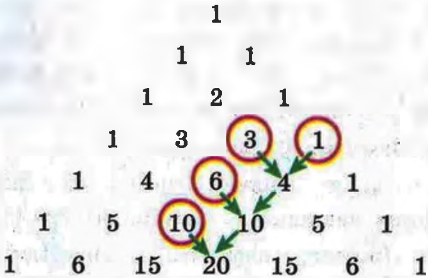


Рис. до задачі 30.37

тона. **30.47.** $-C_{50}^{23}2^{27}\left(\sqrt{3}\right)^{23}$. **30.48.** $A=B=2^{100}$. *Вказівка.* Доведіть, що $A+B=2^{101}$, а $A-B=0$. **30.49.** $n2^{n-1}$. *Вказівка.* Обчисліть похідну обох частин рівності $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$.

30.50. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. *Вказівка.* Знайдіть первісні обох частин рівності $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$. **30.51.** *Вказівка.* За формулою бінома Ньютона розкрийте дужки в рівності $(1+x)^n(1+x)^n=$ $=(1+x)^{2n}$ і порівняйте коефіцієнти при x^n. **30.52.** Усі 1000 цифр після коми — дев'ятки. *Вказівка.* Використовуючи формулу бінома Ньютона, доведіть, що $\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}+\left(\sqrt{50}-7\right)^{1000}$ — ціле число. Тому число $\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}$ менше цілого на додатне число

$\left(\sqrt{50}-7\right)^{1000}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}}<\dfrac{1}{10^{1000}}$. **30.53.** *Вказівка.* Нехай $b_n=a_n+1$. Тоді $b_{k+1}=19(b_k-1)^{20}+20(b_k-1)^{19}+1$. Використовуючи формулу бінома Ньютона, маємо $b_{k+1}=19(1-20b_k+C_{20}^2b_k^2-\ldots+b_k^{20})-$ $-20(1-19b_k+C_{19}^2b_k^2-\ldots-b_k^{19})+1=b_k^2x_k$, де $x_k\in\mathbb{Z}$. Це означає, що коли десятковий запис числа b_k закінчується на m нулів, то запис числа b_{k+1} закінчується щонайменше на $2m$ нулів. Звідси випливає, що десятковий запис числа b_{21} закінчується щонайменше на $2^{20}=(2^{10})^2>1000^2=1\,000\,000$ нулів.

31.4. Ні. **31.5.** Ні. **31.6.** Так. **31.7.** 1) 11; 2) 9; 3) 11. **31.8.** 1) 9; 2) 9; 3) 10. **31.10.** Дослід має шість елементарних наслідків: «випало 0 гербів», «випав 1 герб», ..., «випало 5 гербів». **31.11.** $U=\{0,1,\ldots,100\}$. **31.13.** $U=\{(0;0),(0;1),(1;0),(2;0),(1;1),$ $(0;2),\ldots\}$. **31.14.** $U=(0;+\infty)$. **31.15.** Кожний елементарний наслідок — це пара чисел $(a;b)$, де кожне з чисел a і b набуває значень від 1 до 6. Простір елементарних наслідків складається з 36 елементарних наслідків. **31.16.** $30\cdot29\cdot28$. **31.17.** C_{35}^8. **31.18.** *Вказівка.* Простором елементарних наслідків є двоелементна множина $U=\{\text{Г},\text{Ч}\}$, де елементарний наслідок Г означає, що в результаті досліду випав герб, а наслідок Ч означає, що випало число. Ця множина містить чотири підмножини (випадкові події): $A_1=\varnothing$, $A_2=\{\text{Г}\}$, $A_3=\{\text{Ч}\}$, $A_4=\{\text{Г},\text{Ч}\}$. **31.19.** 2^{20}. *Вказівка.* Оскільки із шести команд обрати три, які потраплять до групи A, можна $C_6^3=20$ способами, то в даному досліді простір елементарних наслідків складається з 20 елементів. Тому простір елементарних наслідків містить 2^{20} різних підмножин. **31.20.** 2^8. **31.23.** Простір елементарних наслідків $U=\{1,2,3,\ldots\}$ складається з нескінченної кількості елементарних наслідків. Тут числа 1, 2, 3, ... означають кількість підкидань до першої появи герба. **31.25.** 22,8 %. **31.26.** 14. **31.27.** 1) 15,4 %; 2) 25,6 %; 3) 19,9 %; 4) 9,6 %; 5) 74,1 %. **31.28.** 1) $\dfrac{23}{99}$; 2) $\dfrac{6}{17}$; 3) $\dfrac{16}{73}$. **31.29.** 5 %. *Вказівка.* Проведемо багато разів дослід — з конвеєра навмання беруть деталь. Якщо серед узятих деталей n деталей вироблено на другому автоматі, то можна вважати, що серед узятих деталей на першому автоматі вироблено $3n$ деталей. Тоді кількість бракованих деталей, вироблених на першому автоматі, дорівнює $0{,}06 \cdot 3n$, а кількість деталей, вироблених на другому автоматі, дорівнює $0{,}02n$. Отже, серед обраних $4n$ деталей виявлено $0{,}06 \cdot 3n + 0{,}02 \cdot n$ бракованих. **31.30.** 0,6. *Вказівка.* Нехай було проведено n випробувань, описаних в умові задачі (навмання обирали коробку і кулю в ній). Тоді серед цих n випробувань $0{,}4n$ таких, що вибрали коробку першого типу, і $0{,}6n$ таких, що вибрали коробку другого типу. Серед $0{,}4n$ випробувань, коли обрали коробку першого типу, білу кулю було взято $0{,}3 \cdot 0{,}4n$ разів; а серед решти $0{,}6n$ випробувань білу кулю було взято $0{,}8 \cdot 0{,}6n$ разів.

32.1. 1) 0; 2) 1. **32.2.** 1) 1; 2) 0. **32.5.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$. **32.6.** 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **32.7.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **32.8.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **32.9.** $\frac{1}{360}$. **32.11.** 2) 5 %. **32.12.** 1) $\frac{2}{15}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{11}{30}$; 4) $\frac{1}{10}$. **32.13.** 1) 18; 2) 3. **32.14.** 2) 8. **32.15.** $\frac{C_{12}^4}{C_{30}^4} = \frac{11}{609}$. **32.16.** $\frac{C_6^3}{C_{40}^3} = \frac{1}{494}$. **32.17.** $\frac{C_{20}^4 + C_9^4}{C_{29}^4} \approx 0{,}21$. **32.18.** $\frac{C_9^2 C_{91}^5}{C_{100}^7}$. **32.19.** $\frac{C_{12}^1 C_8^2 + C_{12}^2 C_8^1}{C_{20}^3} = \frac{72}{95}$. **32.20.** $\frac{C_{16}^2 C_{10}^2}{C_{26}^4} = \frac{108}{299}$. **32.21.** 1) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{3}{8}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{3}{4}$. **32.22.** 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{4}{9}$; 5) $\frac{5}{12}$. **32.23.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{1}{12}$. **32.24.** $\frac{5^{k-1}}{6^k}$. **32.25.** $\frac{1}{16}$. **32.26.** $\frac{C_9^4}{2^9}$. **32.27.** $\frac{C_{10}^7 3^3}{4^{10}} \approx 0{,}003$. **32.28.** $\frac{C_8^3 2^5}{3^8}$. **32.29.** $\frac{3}{10}$. *Вказівка.* Розгляньте дослід, у якому з ящика навмання послідовно витягують три кулі. Далі обчисліть загальну кількість елементарних наслідків та кількість таких елементарних наслідків, де третя витягнута куля — чорна. Інший розв'язок можна отримати, коли зауважити, що кількість елементарних наслідків, у яких третя витягнута куля — чорна, дорівнює кількості елементарних наслідків, у яких перша витягнута куля — чорна. Це означає, що шукана ймовірність дорівнює ймовірності витягнути чорну кулю з першої спроби. **32.30.** $\frac{5}{12}$. *Вказівка.* Розгляньте дослід, у якому з ящика з 25 олівцями навмання і послідовно витягують два олівці. Обчисліть кількість таких елементарних наслідків, коли другий витягнутий олівець — синій. Тоді можна вважати, що перший витягнутий олівець — це той, який загубився. **32.31.** $\frac{1}{n}$. **32.32.** Шанси рівні. **32.33.** $\frac{15}{C_{30}^{28}}=\frac{1}{29}$. **32.34.** $\frac{8}{15}$. **32.35.** 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{5}{324}$; 4) $\frac{1}{81}$. **32.36.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{125}{216}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{5}{36}$. **32.37.** $\frac{3^{10}}{5^{10}}$. **32.38.** $\frac{6^5}{7^5}$. **32.39.** $\frac{C_{20}^2 C_{10}^4 C_5^1}{C_{35}^7}\approx 0{,}03$. **32.40.** $\frac{C_{12}^4 C_8^3 C_4^2}{C_{24}^9}\approx$ $\approx 6\cdot 10^{-4}$. **32.41.** $\frac{3}{190}$. **32.42.** 1) $\frac{1}{n}$; 2) $\frac{n-1}{n}$; 3) $\frac{n-2}{A_n^3}=\frac{1}{n(n-1)}$. **32.43.** $\frac{C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2}{2^{10}}\approx 0{,}05$. *Вказівка.* Указана частота буде меншою від 0,3, якщо з 10 підкидань монети герб випаде менше ніж три рази. **32.44.** $\frac{C_{35}^5+C_{35}^4 C_{10}^1}{C_{45}^5}\approx 0{,}69$. **32.45.** $\frac{C_{50}^8-C_{46}^8}{C_{50}^8}\approx 0{,}51$. **32.46.** $\frac{11}{36}$. *Вказівка.* Розгляньте дослід, у якому кубик кидають двічі. Якщо першого разу на кубику випало число a, а другого — число b, то результатом досліду є величина $x=\begin{cases} a+b, \text{якщо } a<3, \\ a, \quad \text{якщо } a\geqslant 3. \end{cases}$ **32.47.** $\frac{5}{72}$. **32.48.** $\frac{5}{19}$. *Вказівка.* На пару двох сусідніх з Андрієм місць з однаковими шансами претендує будь-яка пара його однокласників. Тому шукана ймовірність дорівнює ймовірності обрати пару дівчат при виборі навмання пари двох однокласників Андрія. **32.49.** $\frac{1}{6}$. **32.50.** $\frac{C_{20}^{10}C_{20-10}^{6}C_{20-10-6}^{4}}{3^{20}}=\frac{20!}{10!\,6!\,4!\,3^{20}}$. **32.51.** 1) $\frac{1}{k^n}$; 2) $\frac{1}{k^{n-1}}$; 3) якщо $k\geqslant n$, то $\frac{k!}{k^n\,(k-n)!}$; якщо $k<n$, то 0. **32.52.** $\frac{11}{21}$. *Вказівка.* Якщо визначено місце найсильнішого гравця, то на кожне з 21 інших місць (10 у команді найсильнішого гравця

і 11 в іншій команді) другий найсильніший гравець може потрапити з однаковою ймовірністю. **32.53.** $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Вважатимемо, що елементарним наслідком експерименту є послідовність з нулів і одиниць довжини 101, де перші 50 чисел задають результат першого гравця, а решта чисел — результат другого гравця (1 означає герб, 0 — число). Зрозуміло, що всі елементарні наслідки рівноможливі. Два елементарних наслідки називатимемо протилежними, якщо на жодній з відповідних позицій вони не мають однакових чисел. Наприклад, наслідок (1, 0, 1, 0, 1, ..., 1) протилежний наслідку (0, 1, 0, 1, ..., 0). Нехай елементарний наслідок u_1 містить n одиниць серед перших 50 чисел відповідної послідовності і m одиниць серед інших 51 чисел. Тоді протилежний наслідок міститиме $50-n$ та $51-m$ одиниць відповідно. Неважко зрозуміти, що умова $n<m$ рівносильна умові $50-n \geqslant 51-m$. Це означає, що із двох протилежних елементарних наслідків умову $n<m$ задовольняє лише один. **32.54.** $\frac{48}{125}$. *Вказівка.* Всього існує 5^5 варіантів розкласти п'ять різних куль у п'ять різних ящиків. Обчислимо кількість тих варіантів, коли рівно один ящик залишається вільним. Це можливо лише тоді, коли в інших трьох ящиках лежить по одній кулі, а в останньому ящику — дві кулі. Тому спочатку обирається один вільний ящик, потім один ящик, де будуть лежати дві кулі, далі обираємо 2 кулі, які потраплять у цей ящик, і нарешті розкладаємо три кулі, що залишилися, по трьох ящиках. Маємо $5 \cdot 4 \cdot C_5^2 \cdot 3!$ сприятливих варіантів. **32.55.** $\frac{15}{16}$. *Вказівка.* Уявімо, що монету не було загублено і її підкинули ще 4 рази (для закінчення гри за рахунку 6:3 більше чотирьох підкидань монети не знадобилося б). Тоді всі 16 можливих результатів цих чотирьох підкидань є рівноможливими. У 15 з них першим набирає 7 очок гравець A і лише в одному — гравець B. **32.56.** Відповідь зміниться. У першому випадку ймовірність дорівнює $\frac{C_{13}^4 - C_{10}^4 - C_8^1 C_{10}^3}{C_{13}^4 - C_{10}^4} = \frac{29}{101} \approx 28{,}7\,\%$, у другому випадку — $\frac{C_{12}^3 - C_{10}^3}{C_{12}^3} = \frac{5}{11} \approx 45{,}5\,\%$. *Вказівка.* C_{13}^4 — кількість варіантів

обрати 4 картки; C_{10}^4 — кількість варіантів обрати 4 картки, серед яких немає жодної картки з літерою; $\left(C_{18}^4 - C_{10}^4\right)$ — кількість варіантів обрати 4 картки, серед яких є принаймні одна картка з літерою; $C_3^1 C_{10}^3$ — кількість варіантів обрати 4 картки, серед яких рівно одна картка з літерою; C_{12}^3 — кількість варіантів обрати 4 картки, серед яких є картка з літерою A; C_{10}^3 — кількість варіантів обрати 4 картки, серед яких є лише одна картка з літерою і це картка з літерою A. **32.57.** $\frac{C_{20}^5 - C_{16}^5}{C_{20}^5}$. *Вказівка.* Закодуємо довільну п'ятиелементну підмножину множини $A = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ у вигляді послідовності символів з 5 «зірочок» і 15 «хрестиків», де зірочка на відповідному місці означає, що даний елемент множини A входить до підмножини, а хрестик — ні. Підмножина не містить двох послідовних натуральних чисел, якщо між двома зірочками знаходиться щонайменше один хрестик. Для того щоб отримати таку послідовність, спочатку запишемо послідовність із 16 зірочок і 15 хрестиків (рис. 1), а потім залишимо в ній 5 зірочок, а решту 11 — закреслимо. Послідовність, зображена на рисунку 2, задає таку п'ятиелементну множину $\{1, 3, 6, 18, 20\}$. Кількість шуканих підмножин визначається тим, скількома способами можна залишити 5 зірочок із 16. Тому їх C_{16}^5. Отже, $p(A) = \frac{C_{20}^5 - C_{16}^5}{C_{20}^5}$.

☆×☆×☆×☆×☆…☆×☆
(16 зірочок і 15 хрестиків)
Рис. 1 до задачі 32.57

☆×☆××☆×××…××☆×☆
(5 зірочок і 15 хрестиків)
Рис. 2 до задачі 32.57

33.4. 4) Будь-який рахунок на користь команди «Шахтар», окрім 3:0; 6) будь-який рахунок. **33.5.** 2) Усі учні 11 класу, які живуть у приватних будинках, люблять морозиво; 3) усі учні 11 класу, які не люблять морозиво, мають комп'ютер. **33.9.** $p(A \cup B \cup C) \geqslant p(A \cup C) \geqslant p(A) \geqslant p(A \setminus (B \setminus C)) \geqslant p(A \setminus B) \geqslant p((A \cap C) \setminus B) \geqslant p(\varnothing)$. **33.11.** Ні. *Вказівка.* Якщо A і B — несумісні та незалежні випадкові події, то $0 = p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$. **33.14.** 1) $\overline{A_1}$; 2) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$; 3) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$; 4) якщо n — непарне число, то $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4 \cap \ldots \cap \overline{A_n}$; якщо n — парне число, то $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4 \cap \ldots \cap A_n$. **33.15.** 2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$; 3) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$; 4) $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$; 5) $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$. **33.17.** 4) $\frac{13}{36}$. **33.18.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{3}{8}$. **33.19.** 12 %. **33.20.** 0,7. **33.21.** 0,67. **33.22.** $(1-p)^5 p$. **33.23.** $0{,}8^7 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}04$. **33.24.** 1) 14 %; 2) 9 %; 3) 6 %; 4) 36 %; 5) 6 %; 6) 41 %; 7) 55 %. **33.25.** 1) 72,9 %; 2) 24,3 %; 3) 2,7 %; 4) 0,1 %. **33.26.** 1) 6,25 %; 2) 40,96 %; 3) 10,24 %; 4) 40,96 %; 5) 8,37 %. **33.27.** $2p - p^2$. **33.28.** $1-(1-p)^4$. **33.29.** $2p^3 - p^6$. При переході на схему, зображену на рисунку 33.13, ймовірність безвідмовної роботи збільшиться (не зменшиться при $p = 0$ або $p = 1$) і дорівнюватиме $p^3(2-p)^3$. **33.30.** $(1-(1-p_1)^2)(1-(1-p_2)^3)\,p_3$. **33.31.** 6 обертів. *Вказівка.* Ймовірність того, що станція не виявить об'єкт за k обертів, дорівнює $0{,}3^k$. **33.32.** 10 запитань. **33.33.** *Вказівка.* Обчисліть ймовірність $p(A \cup B)$ і врахуйте, що $p(A \cup B) \leqslant 1$. **33.34.** Ні. **33.35.** $C_8^3 p^3 (1-p)^5$. **33.36.** $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

33.37. $C_r^k \left(\frac{n}{n+m}\right)^k \left(\frac{m}{n+m}\right)^{r-k}$. **33.38.** $1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{C_n^1 5^{n-1}}{6^n} - \frac{C_n^2 5^{n-2}}{6^n}$.

33.39. $C_k^m \left(\frac{r}{n}\right)^m \left(\frac{n-r}{n}\right)^{k-m}$. *Вказівка.* Перенумеруйте кулі натуральними числами від 1 до k. **33.40.** 51. *Вказівка.* Маємо $p(A_k) = C_{60}^k \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{60-k}$. Далі порівняйте $p(A_k)$ і $p(A_{k+1})$.

33.41. $C_{10}^3 0{,}1^3 0{,}9^7 \approx 0{,}057$. **33.42.** $p(A) = 1 - \frac{C_{470\,000}^{45}}{C_{500\,000}^{45}} - \frac{C_{30\,000}^1 C_{470\,000}^{44}}{C_{500\,000}^{45}}$,

$p(A) \approx 1 - \left(\frac{47}{50}\right)^{45} - 45 \cdot \frac{3}{50} \cdot \left(\frac{47}{50}\right)^{44}$, що приблизно становить 76,1 %.

33.43. 55,9 %. **33.44.** 1) *Вказівка.* $p(A \cup B \cup C) = p(A \cup B) + p(C) - p((A \cup B) \cap C)$. Далі доданок $p(A \cup B)$ перетворіть так: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, а для перетворення доданку $p((A \cup B) \cap C)$ скористайтеся рівністю $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. **33.45.** Так. *Вказівка.* Використайте ключову задачу 33.44 для випадкових подій X = «випускник знає англійську і німецьку мови», Y = «випускник знає англійську і французьку мови», Z = «випускник знає німецьку і французьку мови» і врахуйте, що $p(X \cup Y \cup Z) \leqslant 1$.

34.5. $\frac{16}{25}$. **34.6.** $\frac{3}{35}$. **34.9.** $\frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}$. **34.10.** $\frac{6R^2H}{(4R^2+H^2)^{3/2}}$. **34.11.** 2) 0,98; 3) 0,51. **34.12.** 2) 75,5 %; 3) 64 %. **34.13.** $\frac{2}{5}$. *Вказівка.* Проведемо пряму l, перпендикулярну до даних прямих. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що центр монети потрапить на пряму l. **34.14.** $\frac{3}{4}$. **34.15.** 1) $\frac{1}{4}$. *Вказівка.* Для обчислення площі фігури $\{(x;y)\,|\,y \leqslant x^3, x \in [0;1], y \in [0;1]\}$ підрахуйте інтеграл $\int\limits_0^1 x^3dx$; 2) $1-\frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{1+\ln 5}{5}$. **34.16.** $\frac{2}{3}$. *Вказівка.* У квадраті з вершинами в точках з координатами $(-1;-1)$, $(1;-1)$, $(1;1)$, $(-1;1)$ навмання оберемо точку $Q(p;q)$. Рівняння $t^2+2pt+q=0$ має корені, якщо точка $Q(p;q)$ належить фігурі, що задана нерівністю $D=4p^2-4q \geqslant 0$. **34.17.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{1-\ln 2}{2}$. **34.18.** $\frac{C_5^3}{2^5}$. *Вказівка.* Ймовірність того, що одна обрана навмання в трикутнику ABC точка потрапить до квадрата $CDEF$, дорівнює $\frac{1}{2}$. Далі скористайтеся ключовою задачею 33.36. **34.19.** $C_n^k\frac{a_1^k a_2^{n-k}}{(a_1+a_2)^n}$. **34.20.** $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$. **34.21.** $\frac{9}{10}$. **34.22.** $\frac{3}{4}$. **34.23.** $\frac{4}{9}$. **34.24.** 0,5. *Вказівка.* Елементарним наслідком у даному випробуванні є упорядкована трійка чисел $(x;y;z)$, де кожна зі змінних може набувати значень від 0 до l. Відповідно до умови задачі таку трійку можна отримати, обираючи навмання точку $Q(x;y;z)$ у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 1). З відрізків завдовжки x, y і z можна скласти трикутник, якщо $\begin{cases} x<y+z, \\ y<x+z, \\ z<x+y. \end{cases}$

Тіло F, що є графіком записаної системи, можна отримати з куба

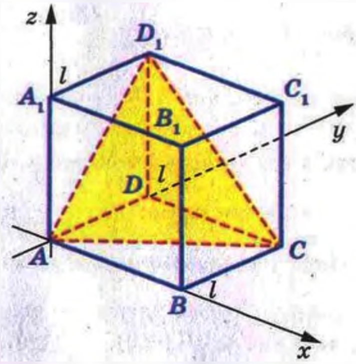


Рис. 1 до задачі 34.24

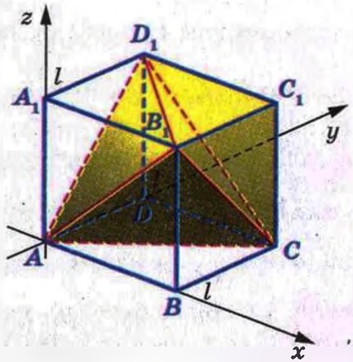


Рис. 2 до задачі 34.24

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ шляхом видалення трьох рівних трикутних пірамід, що відповідають нерівностям $x \geqslant y+z$, $y \geqslant x+z$ і $z \geqslant x+y$. Наприклад, нерівності $y \geqslant x+z$ відповідає піраміда $ACDD_1$ з об'ємом $\frac{l^3}{6}$ (рис. 1). Тіло F зображено на рисунку 2. Об'єм тіла F дорівнює $V_F = l^3 - 3 \cdot \frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{2}$. Таким чином, ймовірність із трьох відрізаних шматків паличок скласти трикутник становить $p(F) = \frac{V_F}{V_{\text{куба}}} = \frac{\frac{l^3}{2}}{l^3} = \frac{1}{2}$. **34.25.** $\frac{1}{4}$. *Вказівка.* Нехай довжина даного відрізка l. Елементарним наслідком у даному випробуванні є пара чисел $(x; y)$, де кожна зі змінних може набувати значень від 0 до l. Тоді трикутник можна буде скласти, якщо пара $(x; y)$ є розв'язком системи $\begin{cases} x \leqslant y, \\ l-y<y, \\ y-x<l-y+x, \\ x<l-x \end{cases}$ або системи $\begin{cases} x>y, \\ l-x<x, \\ x-y<l-x+y, \\ y<l-y. \end{cases}$ **34.26.** $\frac{1}{6}$.

34.27. *Вказівка.* Помилково було б описувати умову задачі ймовірнісною моделлю, коли на відрізку AB навмання обирають дві точки, які позначають через C і D так, щоб точка D потрапила на відрізок AC. Справді, за умовою задачі вибір двох таких точок не є незалежним. Наприклад, ймовірність того, що $AD<\frac{AB}{4}$, коли $AC=\frac{AB}{2}$, дорівнює 50 %; а ймовірність того, що $AD<\frac{AB}{4}$, коли $AC=\frac{AB}{4}$, дорівнює 100 %. Скористаємося іншою ймовірнісною моделлю. Якщо відрізок AB точкою C розбили на дві частини, то величини $\lambda_1=\frac{AC}{AB}\in[0;1]$ і $\lambda_2=\frac{AD}{AC}\in[0;1]$ однозначно визначають точки C і D. Відповідно до умов задачі оберемо навмання точку $Q(\lambda_1;\lambda_2)$ у квадраті $OKLM$ з вершинами $O(0;0)$, $K(1;0)$, $L(1;1)$, $M(0;1)$. Маємо $AD=\lambda_1\lambda_2\,AB$. Умова $AD<\frac{AB}{3}$, тобто умова $\lambda_1\lambda_2<\frac{1}{3}$, виконується лише тоді, коли точка $Q(\lambda_1;\lambda_2)$ потрапить до фігури F, зображеної на рисунку. Для знаходження площі фігури F обчислимо $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{1}{3x}\,dx=\frac{1}{3}\ln x\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}=-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}=\frac{\ln 3}{3}$. Отже, площа фігури F і ймовірність того, що $AD<\frac{AB}{3}$, дорівнює $\frac{1+\ln 3}{3}$. **34.28.** $\frac{\pi}{4}$.

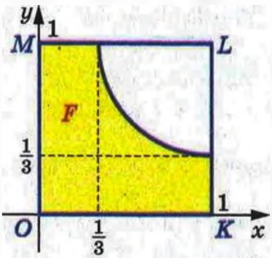


Рис. до задачі 34.27

Вказівка. В описаному досліді n^2 елементарних наслідків — упорядкованих пар $(x;y)$, де $x\in\mathbb{N}$, $y\in\mathbb{N}$, $x\leqslant n$, $y\leqslant n$. Нехай нерівність $x^2+y^2\leqslant n^2$ задовольняє k_n елементарних наслідків. Тоді $p_n=\frac{k_n}{n^2}$. Поставимо у відповідність кожному елементарному наслідку $(x;y)$ квадратик $KLMN$ розміром $\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}$, вершини якого мають координати $K\left(\frac{x-1}{n};\frac{y-1}{n}\right)$, $L\left(\frac{x}{n};\frac{y-1}{n}\right)$, $M\left(\frac{x}{n};\frac{y}{n}\right)$, $N\left(\frac{x-1}{n};\frac{y}{n}\right)$. Наприклад, на рисунку 1 зображено квадрат $KLMN$, який відповідає парі чисел (2;4) для $n=5$. Якщо нерівність $x^2+y^2\leqslant n^2$ переписати у вигляді $\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\leqslant 1$, то легко зрозуміти, що елементарний наслідок $(x;y)$ задовольняє дану нерівність тільки тоді, коли відповідний квадратик $KLMN$ повністю лежить усередині одиничного круга. Такі квадратики утворюють фігуру A_n площею $k_n\frac{1}{n^2}=p_n$ (на рисунку 2 зображено фігуру A_n при $n=10$). З означення площі випливає, що послідовність площ фігур A_n прямує до площі чверті одиничного круга, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} p_n=\frac{\pi}{4}$.

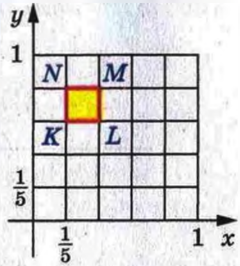


Рис. 1 до задачі 34.28

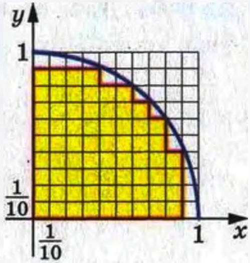


Рис. 2 до задачі 34.28

35.3. Моду. **35.4.** Медіану і моду. **35.7.** $2\frac{1}{15}\approx 2{,}07$ м'яча за гру. **35.8.** 3,8 . **35.13.** 1) 7,9; 2) 7,7. **35.14.** 1) 1,4 год/добу; 2) 1,35 год/добу. **35.15.** 1) 50,08 %; 2) 49,68 %. **35.16.** 1) 13,72 %. *Вказівка.* Обчисліть середнє значення даних другого рядка таблиці; 2) 14,12 %. *Вказівка.* Обчисліть середнє зважене значення даних другого рядка таблиці з ваговими коефіцієнтами з третього рядка таблиці. **35.17.** 1) 21,8 тис. доларів США; 2) 13,7 тис. доларів. **35.18.** 1) $C_7^3 0{,}8^3 0{,}2^4\approx 2{,}9\,\%$. *Вказівка.* Середнє значення вибірки дорівнюватиме $1\frac{2}{7}$, якщо спортсмен влучить рівно 3 рази; 2) $1-C_7^6 0{,}8^6 0{,}2-C_7^7 0{,}8^7\approx 42\,\%$; 3) 3,3 %. *Вказівка.* Обчисліть ймовірність того, що спортсмен влучить у кошик менше ніж 4 рази; 4) 96,7 %. **35.19.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{21}{128}\approx 16\,\%$; 4) $\frac{23}{256}\approx 9\,\%$.

36.4. 3) $x=2$, $y=1$ або $x=-\frac{9}{5}$, $y=\frac{6}{25}$. **36.27.** 4) $\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i$; 5) $\frac{14}{13}+\frac{5}{13}i$. **36.29.** 1) $1-2i$. **36.30.** 2) $\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$. **36.31.** 3) $\frac{6}{5}$; 5) 1. **36.32.** 2) $-\frac{33}{65}-\frac{4}{65}i$. **36.33.** 2) $\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i$. **36.34.** 3) $\frac{69}{13}+\frac{58}{13}i$. **36.41.** $n=4k$, $k\in\mathbb{N}$. **36.42.** $50-50i$. **36.43.** 0; 1; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt3}{2}i$. **36.44.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $|z^n|=|z|^n$.

37.2. 2) Див. рисунок; 4) див. рисунок; 5) див. рисунок. **37.3.** 6) Див. рисунок. **37.5.** 3) Див. рисунок. **37.7.** 2) Див. рисунок.

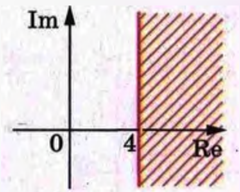


Рис. до задачі 37.2 (2)

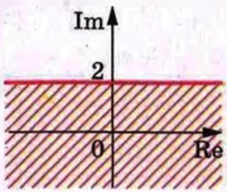


Рис. до задачі 37.2 (4)

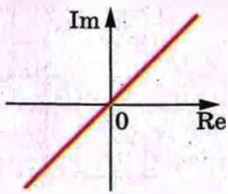


Рис. до задачі 37.2 (5)

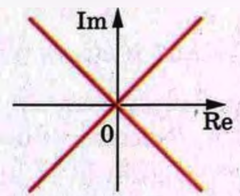


Рис. до задачі 37.3 (6)

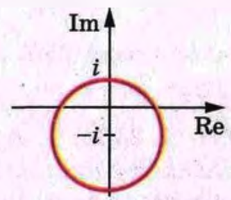


Рис. до задачі 37.5 (3)

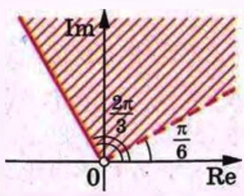


Рис. до задачі 37.7 (2)

37.9. 1) $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **37.10.** 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **37.12.** 3) $2\sqrt2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 5) $\sqrt5\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)\right)+i\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)\right)\right)$; 7) $13\left(\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)+i\sin\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)\right)$.

37.13. 3) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 7) $10\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)$. **37.14.** 2) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{11}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right)$; 3) $6\left(\cos\frac{9\pi}{26}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{9\pi}{26}\right)$; 5) $\cos\left(\pi+\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{1}{3}\right)$. **37.15.** 3) $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$; 4) $3\left(\cos\frac{13\pi}{11}+i\sin\frac{13\pi}{11}\right)$. **37.19.** $\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$. **37.21.** 3) Див. рисунок. **37.23.** 1) $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$; 2) $-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)\right)$. **37.24.** 1) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)\right)$; 2) $-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)\right)$. **37.25.** 1) Коло з центром $M(1-i)$ радіуса $\sqrt{2}$ з виколотою точкою $z=0$ (див. рисунок); 2) див. рисунок. **37.26.** 1) Див. рисунок.

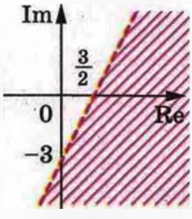


Рис. до задачі 37.21 (3)

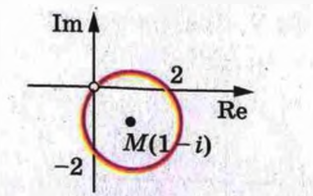


Рис. до задачі 37.25 (1)

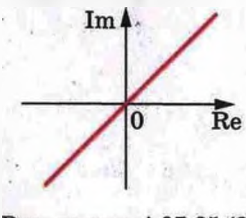


Рис. до задачі 37.25 (2)

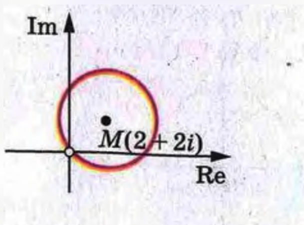


Рис. до задачі 37.26 (1)

38.1. 2) $5\left(\cos\left(1-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(1-\frac{\pi}{16}\right)\right)$; 3) $8\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

38.2. 2) $21\left(\cos\frac{1}{12}+i\sin\frac{1}{12}\right)$. **38.3.** 2) $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$; 3) $2(\cos(\pi+1)+i\sin(\pi+1))$. **38.4.** 2) $-3i$; 3) $3\left(\cos\left(8-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(8-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. **38.5.** 2) $27\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 3) $\cos\frac{1}{5}+i\sin\frac{1}{5}$.

38.7. 2) -1; 3) $625\left(\cos\left(4\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(4\arccos\frac{3}{5}\right)\right)$; 4) -64; 5) $\frac{\sqrt{3}-i}{16}$.

38.8. 3) $\cos\left(-10\arccos\frac{5}{13}\right)+i\sin\left(-10\arccos\frac{5}{13}\right)$. **38.9.** 1) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $\sqrt{3}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $\sqrt{3}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$; 3) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$, $2\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$, $2\left(\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$, $2\left(\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}\right)$, $-2i$. **38.11.** 1) Див. рисунок; 3) див. рисунок.

38.12. 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок.

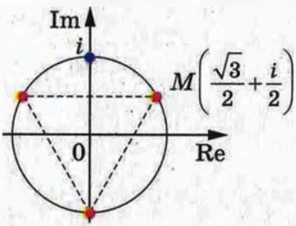


Рис. до задачі 38.11 (1)

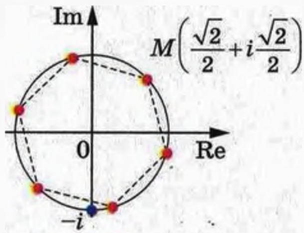


Рис. до задачі 38.11 (3)

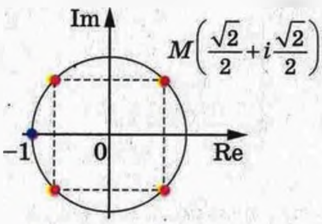


Рис. до задачі 38.12 (1)

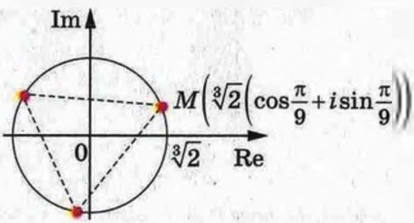


Рис. до задачі 38.12 (2)

38.13. 1. **38.14.** 0. **38.15.** $(0;0)$; $\left(\cos\frac{2\pi k}{7};\sin\frac{2\pi k}{7}\right)$, де $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **38.16.** $(0;0)$; $\left(\cos\frac{2\pi k}{5};\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, де $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **38.17.** Помилка Василя полягає в тому, що він поширив означення і властивості арифметичного квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа на комплексні числа. На множині комплексних чисел існує два значення квадратного кореня з числа $(-1)^2=1$ — це числа 1 і -1. **38.18.** *Вказівка*. Оскільки $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, то рівність $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ означає, що число $\frac{z_1}{z_2}$ — дійсне. Тоді $\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **38.19.** *Вказівка*. Дана рівність означає, що число $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ — дійсне. **38.21.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $z_1\overline{z_1}=1$, $z_2\overline{z_2}=1$, $z_3\overline{z_3}=1$, $z_4\overline{z_4}=1$, а також результатом задачі 38.20. **38.22.** *Вказівка*. Скористайтеся результатом задачі 38.19. **38.23.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $z_1\overline{z_1}=1$, $z_2\overline{z_2}=1$, а також результатом задачі 38.22. **38.24.** *Вказівка*. Дана рівність означає, що число $\frac{z_1}{z_2}$ є суто уявним. Тоді $\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **38.25.** *Вказівка*. Скористайтеся результатом задачі 38.24. **38.26.** *Вказівка*. Скористайтеся результатом задачі 38.25. **38.27.** *Вказівка*. Нехай $M(z)$ — довільна точка дотичної. Тоді $OA\perp MA$. Далі скористайтеся результатом задачі 38.25. **38.29.** *Вказівка*. Нехай $a=\cos\frac{\pi}{13}+i\sin\frac{\pi}{13}$. Тоді $a^3=\cos\frac{3\pi}{13}+i\sin\frac{3\pi}{13}$, $a^5=\cos\frac{5\pi}{13}+i\sin\frac{5\pi}{13}$, ..., $a^{11}=\cos\frac{11\pi}{13}+i\sin\frac{11\pi}{13}$. Тоді $a+a^3+a^5+\ldots+a^{11}=\left(\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\ldots+\cos\frac{11\pi}{13}\right)+i\left(\sin\frac{\pi}{13}+\sin\frac{3\pi}{13}+\ldots+\sin\frac{11\pi}{13}\right)$. Далі, використовуючи формулу суми геометричної прогресії, перетворіть вираз $a+a^3+a^5+\ldots+a^{11}$ і прирівняйте дійсні частини чисел, записаних у лівій і правій частинах рівності. **38.30.** *Вказівка*.

Нехай $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тоді $\cos^{100}\varphi = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{100}$. Далі скористайтеся формулою бінома Ньютона. **38.32.** *Вказівка.* Розгляньте комплексне число $(1+i)^{51}$. **38.33.** $x = 19$, $y = 40$. **38.34.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте значення даних функцій при $x = i$. **38.39.** *Вказівка.* Нехай комплексні координати точок A, K і N дорівнюють z_1, z_2 і z_3 відповідно. Достатньо показати, що $(z_2 - z_1) = e(z_3 - z_1)$, де e — одне з чисел $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ або $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

39.1. 2) $1+2i$; $2-4i$; 3) $2+3i$; $1-3i$; 4) $2+i$; $3-2i$. **39.2.** 2) $3+i$; $9-3i$; 3) $4+i$; $-2-i$; 4) $4-3i$; i. **39.3.** 2) 2; $2i$; $-2i$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 4) i; $1+i$; $1-i$. **39.4.** 2) -3; $3i$; $-3i$; 4) 1; $1+i$; $2-2i$. **39.5.** $\cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}$, де $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **39.6.** $\cos\frac{\pi+2\pi k}{10} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{10}$, де $k \in \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. **39.7.** $-2x+5$. *Вказівка.* Знайдіть корені квадратного рівняння $x^2 - x + 1 = 0$ і підставте їх у рівність $P(x) = Q(x)(x^2 - x + 1) + ax + b$. **39.8.** $-x+6$. **39.9.** *Вказівка.* Скориставшись рівностями $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, доведіть, що $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. **39.11.** *Вказівка.* Скористаємося методом математичної індукції. Якщо $n = 1$, то твердження задачі є очевидним. Нехай твердження задачі має місце для всіх $k \leqslant n$. Розглянемо многочлен P степеня $n+1$ з дійсними коефіцієнтами. За основною теоремою алгебри многочлен P має корінь z_0. Якщо $z_0 \in \mathbb{R}$, то існує такий многочлен Q з дійсними коефіцієнтами, що $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. Якщо $z_0 \notin \mathbb{R}$, то за ключовою задачею 39.9 многочлен P має ще один корінь $\bar{z}_0$. Тоді існує такий многочлен Q, що $P(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)Q(z) = (z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0)Q(z)$, причому коефіцієнти многочлена Q і квадратного тричлена $z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0$ є дійсними числами. Далі скористайтеся припущенням індукції для многочлена Q. **39.12.** *Вказівка.* За задачею 39.11 даний многочлен можна розкласти на добуток лінійних і квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами. Якби серед цих множників не було жодного лінійного, то степінь даного многочлена був би парним числом. **39.13.** Так, наприклад, $y=x^3$. **39.14.** $n=13$. *Вказівка.* Маємо $P(x)=(x^2-x+2)Q(x)$. Оскільки комплексні числа $z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ є коренями рівняння $z^2-z+2=0$, то $P(z_1)=0$, тобто $z_1^n=-z_1-90$. Ураховуючи рівність $|z_1|=\sqrt{2}$ і рівність $|z_1^n|=|-z_1-90|$, маємо, що $(\sqrt{2})^n=|-z_1-90|$. Оскільки $|-z_1-90|\leqslant|z_1|+90\leqslant92$ і $|-z_1-90|\geqslant90-|z_1|\geqslant88$, то $88\leqslant(\sqrt{2})^n\leqslant92$. **39.15.** *Вказівка.* Скориставшись основною теоремою алгебри, розкладіть многочлен P на лінійні множники: $P(z)=$ $=a(z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$. Розгляньте добуток $a(z^{2012}-z_1^{2012})\times$ $\times(z^{2012}-z_2^{2012})\cdot\ldots\cdot(z^{2012}-z_n^{2012})$. **39.16.** *Вказівка.* Подайте многочлен $P(x^2)$ у вигляді добутку виразів виду $\left(x^2-\left(\sqrt{x_k}\right)^2\right)$, де x_k — корінь многочлена P, $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant2n$, і скористайтеся формулою різниці квадратів.

40.5. 1) Кожний з коренів $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=i$, $z_4=-i$ має кратність п'ять; 2) кожний з коренів $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$ має кратність три; 3) кожний з коренів $z_1=2i$, $z_2=-2i$, $z_3=-3$ має кратність сім, а корінь $z_4=3$ має кратність дев'ять; 4) кожний з коренів $z_1=-2$, $z_2=1-i$, $z_3=1+i$ має кратність чотири. **40.6.** 2) Кожний з коренів $z_1=\sqrt{2}$, $z_2=-\sqrt{2}$ має кратність один, а кожний з коренів $z_3=\sqrt{2}i$, $z_4=-\sqrt{2}i$ має кратність три; 3) кожний з коренів $z_1=1$, $z_2=3-i$, $z_3=3+i$ має кратність два. **40.7.** 1) $(x-2)^3(x-3)^2$; 2) $(x^2+1)^2$; 4) $(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)^2$. **40.9.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $P(x)=(x-1)^3$, $Q(x)=(x-1)^2$. **40.10.** Так. **40.11.** 4) 4. **40.12.** 3) 3. **40.13.** $A=2011$, $B=2012$. **40.14.** $A=-2011$, $B=2010$. **40.15.** $x_1=2-2\sqrt{3}$ та $x_2=2+2\sqrt{3}$ — корені кратності 2. *Вказівка.* Розв'яжіть рівняння $P'(x)=0$. **40.16.** $x_1=-1-\sqrt{3}$ та $x_2=-1+\sqrt{3}$ — корені кратності 2. **40.17.** *Вказівка.* Якщо x_0 — кратний корінь многочлена P, то x_0 — корінь многочлена $P'(x)=3x^2+2ax+5$.

Звідси $x_0 \in \{-1, 1, -5, 5\}$. **40.21.** *Вказівка.* Доведіть, що будь-який кратний корінь многочлена P є коренем многочлена $P - P'$. **40.23.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, многочлен $P(x) = (x - x_0)^{k+1} + 1$. **40.24.** Ні. *Вказівка.* За ключовою задачею п. 12 між двома коренями многочлена P є корінь многочлена P'. Тому многочлен P' степеня $n-1$ має не менше ніж $n-1$ різних коренів. **40.25.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, многочлен $P(x) = x^n - 1$. **40.27.** *Вказівка.* Нехай $P(x) = (x - x_0)^{2k} Q(x)$, де $k \in \mathbb{N}$ і $Q(x_0) \neq 0$. Далі розгляньте многочлен Q в такому околі x_0, який не містить жодного іншого кореня многочлена P. **40.29.** *Вказівка.* Доведіть, що многочлен $P(x) - P(x_0)$ можна подати у вигляді $(x - x_0)^{2012} Q(x)$, де $Q(x_0) \neq 0$. **40.31.** *Вказівка.* Нехай $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. З ключової задачі 39.9 випливає, що $\bar{z}_0$ є коренем многочлена P. Позначимо кратність кореня $\bar{z}_0$ через m. Тоді многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - z_0)^k (x - \bar{z}_0)^m Q(x)$, де $Q(z_0) \neq 0$, $Q(\bar{z}_0) \neq 0$. Припустимо, що $m < k$. Тоді можна записати: $P(x) = (x^2 - (z_0 + \bar{z}_0)x + z_0\bar{z}_0)^m (x - z_0)^{k-m} Q(x)$, де коефіцієнти многочлена $R(x) = (x^2 - (z_0 + \bar{z}_0)x + z_0\bar{z}_0)^m$ є дійсними числами. Многочлен P ділиться націло на многочлен R. Тоді частка від цього ділення — многочлен $P_1(x) = (x - z_0)^{k-m} Q(x)$ — також має дійсні коефіцієнти. З ключової задачі 39.9 випливає, що $\bar{z}_0$ є коренем многочлена P_1, тому $Q(\bar{z}_0) = 0$. Отримали суперечність. Випадок $m > k$ розглядається аналогічно. **40.32.** *Вказівка.* Нехай розв'язком нерівності є множина $\{x_0\}$. Тоді x_0 — корінь парної кратності многочлена P. **40.33.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 39.11. **40.34.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 40.33. **40.35.** *Вказівка.* Використовуючи ключову задачу 39.11, розкладіть многочлен у добуток многочленів першого і другого степенів з дійсними коефіцієнтами, де многочлени другого степеня мають від'ємні дискримінанти. Доведіть, що всі многочлени першого степеня входять у цей добуток у парних степенях. Далі в кожному многочлені другого степеня виділіть повний квадрат і розкрийте дужки добутку. **40.36.** Якщо n — парне число, то $n/2$; якщо n — непарне число, то $(n+1)/2$. *Вказівка.* Спочатку доведіть, що многочлен $P^{(m)}$ має $n-m$ різних простих дійсних коренів. Якщо припустити, що многочлен P має деякі два сусідні нульові коефіцієнти, то існуватиме таке m, що $P^{(m)}(x)=a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{n-m}x^{n-m}$. Це означає, що число $x_0=0$ є коренем многочлена $P^{(m)}$ кратності не менше ніж два. З отриманої суперечності випливає, що многочлен P не має двох сусідніх нульових коефіцієнтів. Водночас многочлени $(x^2-1)(x^2-2)\ldots(x^2-k)$ та $x(x^2-1)(x^2-2)\ldots(x^2-k)$ є прикладами многочленів парного і непарного степенів, у яких кожний другий коефіцієнт нульовий.

41.6. -6 — простий корінь і 2 — корінь кратності два. **41.7.** $\frac{67}{625}$. **41.8.** 56. **41.9.** $p=6$, $q=-11$. **41.11.** -3. **41.13.** 3) 3. *Вказівка.* $\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_1+x_3}{x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3}=\frac{s-x_1}{x_1}+\frac{s-x_2}{x_2}+\frac{s-x_3}{x_3}$, де $s=x_1+x_2+x_3$; 4) $\frac{31}{2}$. *Вказівка.* Додайте значення многочлена $2x^3-4x^2-3x+1$ при $x=x_1$, $x=x_2$ і $x=x_3$. **41.14.** 1) 2; 2) -19; 3) 13. **41.17.** *Вказівка.* Оскільки $x_1+x_2+x_3=0$, то $t_1=-x_1$. Тому $Q(t_1)=(-x_1)^3+p(-x_1)-q=-P(x_1)=0$. Інший розв'язок можна отримати, якщо перевірити рівності $t_1+t_2+t_3=0$, $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=p$, $t_1t_2t_3=q$. **41.18.** *Вказівка.* Переконайтеся, що $t_1+t_2+t_3=p$, $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=0$, $t_1t_2t_3=q^2$. **41.20.** $x^3+7x^2+14x-1=0$. **41.21.** $x^3-4x^2+7x-2=0$. **41.22.** 1) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\right)\sqrt{3}i$; $\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\right)\sqrt{3}i$; 2) $2\cos\frac{\pi}{9}-2$; $2\cos\frac{5\pi}{9}-2$; $2\cos\frac{7\pi}{9}-2$. **41.23.** 1) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$; $\left(\frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{2}\right)\sqrt{3}i$; $\left(\frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{2}\right)\sqrt{3}i$; 2) $2\cos\frac{2\pi}{9}+3$; $2\cos\frac{4\pi}{9}+3$; $2\cos\frac{8\pi}{9}+3$. **41.24.** 1) $(-1; 2; 3)$; $(-1; 3; 2)$; $(2; 3; -1)$; $(2; -1; 3)$; $(3; 2; -1)$; $(3; -1; 2)$; 3) $(-3; 1; 1)$; $(1; -3; 1)$; $(1; 1; -3)$. **41.25.** 2) $(2; 4; -3)$; $(2; -3; 4)$; $(4; 2; -3)$; $(4; -3; 2)$; $(-3; 4; 2)$; $(-3; 2; 4)$; 3) $(2; -1; 1)$; $(2; 1; -1)$; $(1; -1; 2)$; $(1; 2; -1)$; $(-1; 1; 2)$; $(-1; 2; 1)$. **41.27.** Ні. *Вказівка.* Наведіть приклад многочлена з раціональними коефіцієнтами, який має три ірраціональних корені. **41.28.** $x=-abc$, $y=ab+ac+bc$,

$z=-(a+b+c)$. **41.29.** *Вказівка.* Нехай числа x, y, z є коренями многочлена $P(z)=z^3-pz^2+qz-r$. За умовою задачі $p-3q+9r=\frac{1}{3}$. **41.30.** Ні. *Вказівка.* Числа a, b, c мали б бути коренями рівняння $x^3+d=0$. **41.31.** *Вказівка.* Розгляньте кубічний многочлен з коренями x, y, z і за теоремою Вієта знайдіть зв'язок між його коефіцієнтами. Далі підставте у цей многочлен значення a. **41.32.** *Вказівка.* Розгляньте кубічний многочлен з коренями a, b, c та за теоремою Вієта знайдіть його коефіцієнти. Далі покажіть, що цей многочлен не має від'ємних коренів. **41.34.** *Вказівка.* Розгляньте многочлени $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ та $Q(x)=$ $=(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ і доведіть, що вони відрізняються лише вільним членом. Це означає, що графік многочлена Q можна отримати з графіка многочлена P паралельним перенесенням угору чи вниз. **41.35.** *Вказівка.* Маємо $q=xy+xz+yz=8$. Позначимо $r=xyz$. Тоді x, y, z є коренями рівняння $t^3-5t^2+8t-r=0$. Дане кубічне рівняння має три (з урахуванням кратності) корені тоді і лише тоді, коли $4\leqslant r\leqslant\frac{112}{27}$. **41.36.** *Вказівка.* Нехай $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$. За умовою задачі x, y, z — раціональні числа. Розглянемо кубічний многочлен $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ з коренями x, y, z. З теореми Вієта випливає, що $p=-(x+y+z)=-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$ — ціле число, $q=xy+xz+yz=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ — ціле число, а $r=-xyz=-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=-1$. Отже, усі коефіцієнти многочлена P — цілі числа, а старший і вільний коефіцієнти дорівнюють 1 і -1 відповідно. Тому раціональними коренями цього многочлена можуть бути лише числа 1 і -1, звідки $|x|=|y|=|z|=1$. **41.37.** *Вказівка.* З умови задачі випливає, що число $ab+bc+ca$ також ділиться націло на n. Розгляньте рівняння $t^5=(a+b+c)t^4-$ $-(ab+bc+ca)t^3+abct^2$, коренями якого є числа a, b, c. Послідовно підставте в дане рівняння замість t значення a, b, c і додайте отримані рівності. **41.38.** *Вказівка.* Нехай $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

Тоді рівність $t^3-t^2+qt-r=(t-a)(t-b)(t-c)$ виконується для всіх t. При $t=\frac{1}{2}$ отримуємо $-\frac{1}{8}+\frac{q-2r}{2}=\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)$. Якщо кожне з чисел a, b, c не більше за $\frac{1}{2}$, то з нерівності Коші випливає: $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)\leqslant\left(\frac{\frac{3}{2}-(a+b+c)}{3}\right)^3=\frac{1}{216}$. Тому $-\frac{1}{8}+\frac{q-2r}{2}\leqslant\frac{1}{216}$. Звідси $q-2r\leqslant\frac{7}{27}$. Якщо ж серед чисел a, b, c є більші за $\frac{1}{2}$, то таке число серед них єдине. Тоді $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\times\left(\frac{1}{2}-c\right)\leqslant 0$. Звідси $-\frac{1}{8}+\frac{q-2r}{2}\leqslant 0<\frac{1}{216}$.

ЗМІСТ

§ 7. Многочлени

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів
з поглибленим вивченням математики

У двох частинах

Частина 2

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 17,00.
Тираж 3 000 прим. Замовлення №423.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003