А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

11

АЛГЕБРА

Підручник для класів з поглибленим вивченням математики

Частина 1

ГІМНАЗІЯ

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(лист від 04.08.2011 № 1/11-7176)

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с. : іл.
ISBN 978-966-474-165-8.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6

ISBN 978-966-474-165-8

Від авторів

ЛЮБІ ОДИНАДЦЯТИКЛАСНИКИ!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу. Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі, і сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією.

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Це не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не залишатися байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника розділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений ***жирним шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Бажаємо успіхів!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації.

Особливу увагу звернемо на задачі для математичних гуртків і факультативів, які помічено (*). Ці задачі складні. Радимо використовувати їх з особливою обережністю, керуючись принципом індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Назви оповідань для позакласної роботи (рубрика «Коли зроблено уроки») надруковано **зеленим** кольором. Цей матеріал не є обов'язковим для вивчення.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

▲ закінчення доведення теореми;

● закінчення розв'язування прикладу;

 рубрика «Коли зроблено уроки»;

«Алгебра-9» підручник «А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра. Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики. — Харків: Гімназія, 2009. — 384 с.: іл.»;

«Алгебра-10» підручник «А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу з поглибленим вивченням математики. — Харків: Гімназія, 2010. — 415 с.: іл.»

§ 1. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

1. Границя функції в точці

Розглянемо функції f, g, h, графіки яких зображено на рисунку 1.1, і точку x_0. Незважаючи на те що поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться, усім їм притаманна така властивість: якщо значення аргументу обирати все ближче й ближче до числа x_0, то відповідні значення функції все менше й менше відрізнятимуться від числа a.

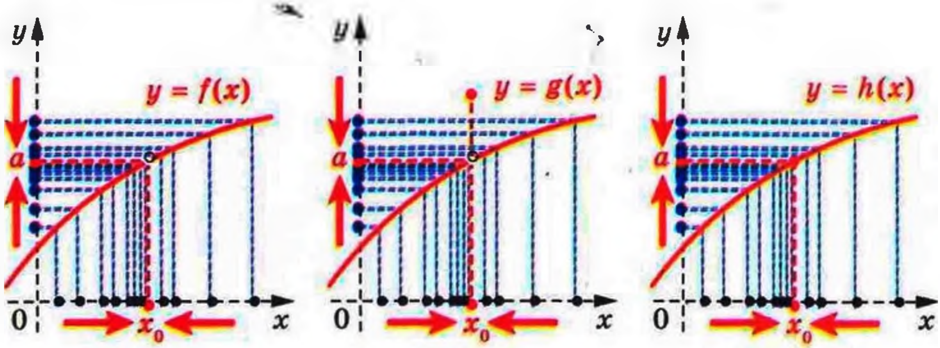


Рис. 1.1

Іншими словами, якщо довільна послідовність значень аргументу, відмінних від x_0, прямує до числа x_0, то відповідна послідовність значень функції прямує до числа a.

У такому випадку число a називають *границею функції в точці* x_0. Цей факт, наприклад, для функції $y = f(x)$ записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (використовують також і запис: $f(x) \to a$ при $x \to x_0$).

Наприклад, за допомогою рисунка 1.2 можна зробити висновок, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x = 1$.

Якщо звернутися до рисунка 1.3, то можна записати:

$$\lim_{x\to 1}\arccos x = 0,\quad \lim_{x\to -1}\arccos x = \pi.$$

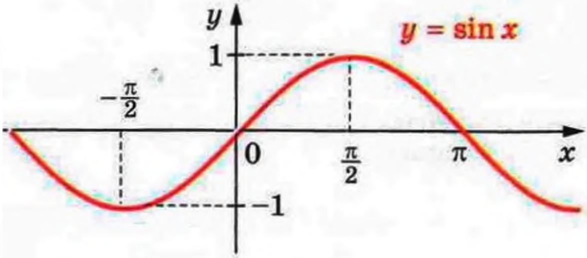


Рис. 1.2

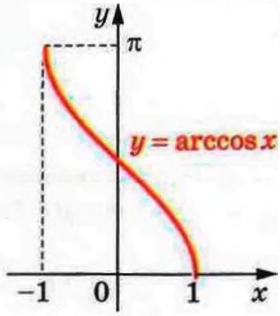


Рис. 1.3

На рисунку 1.4 зображено графік функції $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. Бачимо, що $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

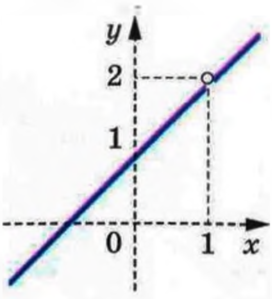


Рис. 1.4

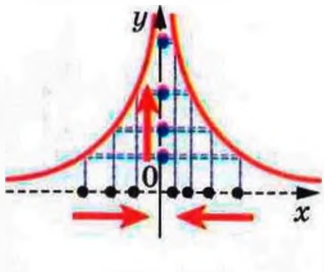


Рис. 1.5

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 1.5). Якщо послідовність значень аргументу x прямує до 0, то члени відповідної послідовності значень функції стають усе більшими й більшими. Тому не існує числа, до якого прямують значення функції f за умови, що значення аргументу прямують до 0.

Отже, функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{|x|}{x}$. При $x > 0$ отримуємо $f(x) = 1$, при $x < 0$ отримуємо $f(x) = -1$. Графік функції f зображено на рисунку 1.6.

Якщо значення аргументу x, де $x \neq 0$, прямують до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції f прямують до якогось певного числа. Справді, коли послідовність значень аргументу прямує до нуля і ці значення є від'ємними, то відповідна послідовність значень функції прямує до -1, а коли послідовність значень аргументу прямує до нуля і ці значення є додатними, то відповідна послідовність значень функції прямує до 1.

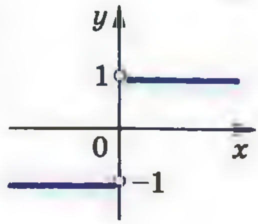


Рис. 1.6

Тому функція $f(x)=\frac{|x|}{x}$ у точці $x_0 = 0$ не має границі.

Тепер, коли ви отримали уявлення про границю функції в точці, сформулюємо строге означення.

Розглянемо функцію f і точку x_0, для якої існує послідовність відмінних від x_0 значень аргументів, яка збігається до точки x_0. Доцільно прийняти таке означення.

Означення. **Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значень аргументу функції f таких, що $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ значень функції збігається до числа a.**

Зверніть увагу на умову $x_n \neq x_0$ в означенні границі. Ця умова означає, що границя функції в точці x_0 не залежить від значення $f(x_0)$, а також дозволяє функції мати границю в точці, у якій вона не визначена (прикладами є функції, графіки яких зображено на рисунку 1.1).

Також зазначимо, що збіжність послідовності $(f(x_n))$ для *будь-якої* послідовності (x_n) є істотною умовою. Якщо можна вказати хоча б одну послідовність (x_n), де $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, для якої відповідна послідовність $(f(x_n))$ не буде збігатися до числа a, то це означатиме, що число a не є границею функції f у точці x_0.

На рисунку 1.7 зображено графік деякої функції. Для точки x_0 з області визначення не існує збіжної до x_0 послідовності відмінних від x_0 значень аргументів функції. Для таких функцій границю в точці x_0 не означають.

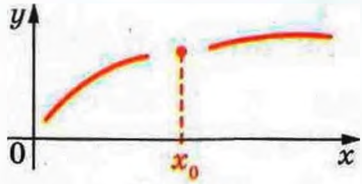


Рис. 1.7

На рисунку 1.8 точка x_0 така, що праворуч (ліворуч) від неї немає точок, які належать області визначення функції f.

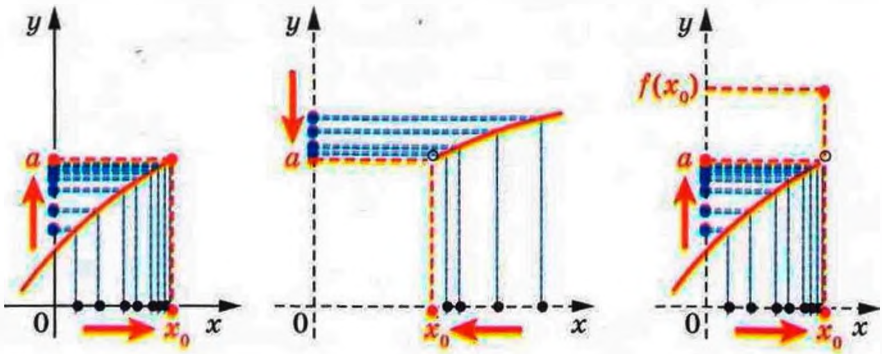


Рис. 1.8

У кожному з випадків, зображених на цьому рисунку, для будь-якої послідовності (x_n) аргументів функції f, де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції прямує до числа a. Це означає, що число a є границею функції f у точці x_0.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 10} \sqrt[4]{8x+1}$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n) значень аргументу функції $f(x) = \sqrt[4]{8x+1}$ таку, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 10$ і $x_n \neq 10$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції задається формулою $f(x_n) = \sqrt[4]{8x_n+1}$. Скориставшись теоремами про арифметичні дії зі збіжними послідовностями і теоремою про границю кореня, отримуємо:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[4]{8x_n+1} = \sqrt[4]{8 \cdot 10+1} = 3.$$

Оскільки послідовність (x_n) обрано довільно, то

$$\lim_{x \to 10} \sqrt[4]{8x+1} = 3. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть границю функції $y=\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$ в точці $x_0=\dfrac{1}{3}$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n) таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{3}$ і $x_n\neq\dfrac{1}{3}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Тоді відповідна послідовність (y_n) значень функції задається формулою $y_n=\dfrac{9x_n^2-1}{3x_n-1}$.

Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9x_n^2-1}{3x_n-1}=\lim_{n\to\infty}(3x_n+1)=3\cdot\frac{1}{3}+1=2.$$

Оскільки послідовність (x_n) обрано довільно, то отримуємо, що $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}=2.$ ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що функція $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0=0$.

Розв'язання. Розглянемо послідовність значень аргументу функції f, задану формулою загального члена $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ і $x_n\neq 0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Послідовність відповідних значень функції задається формулою $f(x_n)=\dfrac{|x_n|}{x_n}=\dfrac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}{\frac{(-1)^n}{n}}=\dfrac{1}{(-1)^n}=(-1)^n$. Ця послідовність не має границі.

Ми навели приклад збіжної до нуля послідовності (x_n), де $x_n\neq 0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$, такої, що відповідна послідовність значень функції $(f(x_n))$ не має границі. Отже, функція f не має границі в точці $x_0=0$. ●

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що функція $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0=0$.

Розв'язання. Розглянемо послідовності (a_n) і (b_n) значень аргументу функції f такі, що:

$$a_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\quad b_n=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ і $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(a_n))$ є стаціонарною послідовністю: 1, 1, 1, ...

Оскільки $f(b_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(b_n))$ є стаціонарною послідовністю: −1, −1, −1, ...

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

Ми навели приклад двох збіжних до нуля послідовностей, члени яких відмінні від нуля. Відповідні їм послідовності значень функції f мають різні границі. Отже, функція f не має границі в точці $x_0 = 0$. ●

Графік функції $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, побудований за допомогою комп'ютерної програми, зображено на рисунку 1.9.

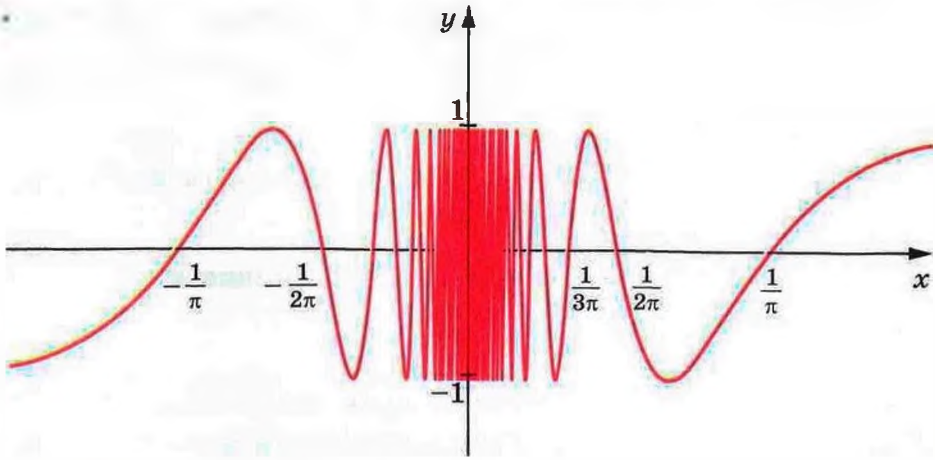


Рис. 1.9

ПРИКЛАД 5 Знайдіть границю функції $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n) таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, то послідовність (y_n), де $y_n = \sin\frac{1}{x_n}$, є обмеженою.

Послідовність $\left(x_n \sin \frac{1}{x_n}\right)$ являє собою добуток нескінченно малої послідовності (x_n) і обмеженої послідовності (y_n). Отже, послідовність $(x_n \cdot y_n)$ є нескінченно малою, тобто

$$\lim_{n \to \infty}\left(x_n \sin \frac{1}{x_n}\right) = 0.$$

Оскільки послідовність (x_n) було обрано довільно, то це означає, що $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. ●

Графік функції $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, побудований за допомогою комп'ютерної програми, зображено на рисунку 1.10.

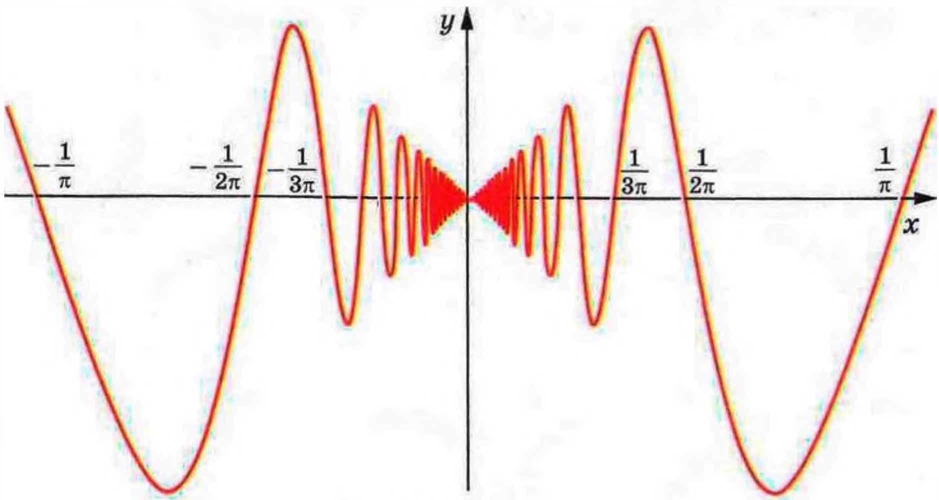


Рис. 1.10

Вправи

1.1.° Побудувавши графік функції f, укажіть (без обґрунтування), чи має функція f границю в точці x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
6) $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

1.2.° Побудувавши графік функції f, укажіть (без обґрунтування), чи має функція f границю в точці x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$;

4) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

1.3.° За допомогою графіка функції f (рис. 1.11) з'ясуйте (без обґрунтування), чи має функція f границю в точці x_0.

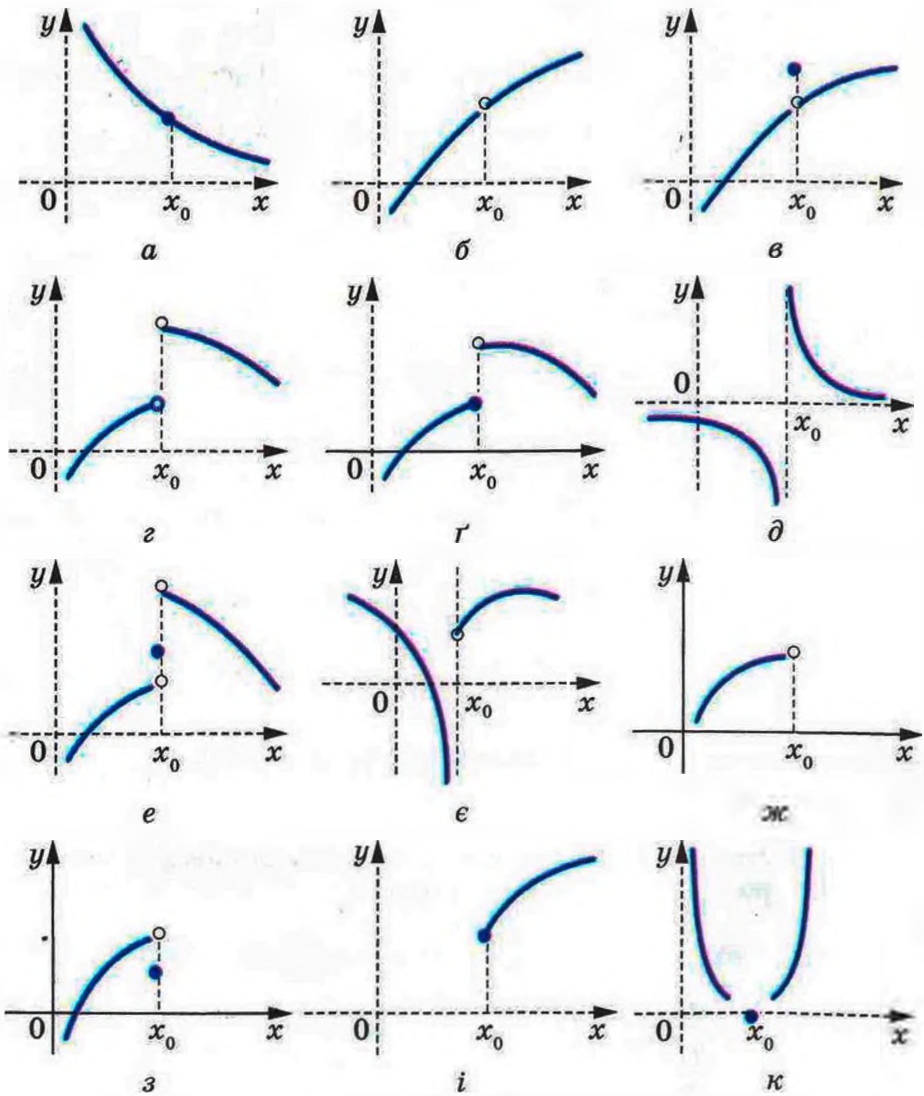
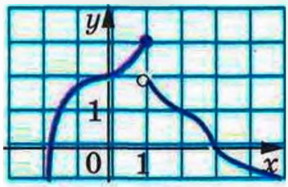


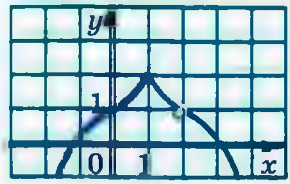
Рис. 1.11

1.4.° На рисунку 1.12 зображено графік функції $y = f(x)$.

1) Чому дорівнює значення функції f у точці $x_0 = 1$?
2) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 1$? У разі позитивної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.
3) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 2$? У разі позитивної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.



а



б

Рис. 1.12

1.5.° За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim\limits_{x \to -1}(2x+1)$;
2) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2+1}{x+2}$;
3) $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;
4) $\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$.

1.6.° За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim\limits_{x \to 2}(3x+2)$;
2) $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{x+1}{x^2+x}$;
3) $\lim\limits_{x \to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$;
4) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$.

1.7.° Визначена на $\mathbb{R}$ функція f така, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$ для кожного $x_0 \in \mathbb{R}$. Чи можна стверджувати, що $f(x)=0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$?

1.8.° Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, де c — деяке число.

1.9.° Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0}(kx+b) = kx_0+b$.

1.10.° Наведіть приклад такої функції f, що:

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(-x+2) = -3$;
2) $\lim\limits_{x \to 2}\left(f(x)+\cos f(x)\right) = 1$.

1.11.° Наведіть приклад такої функції f, що:

1) $\lim\limits_{x \to 3}\left(2f(x)+3\right) = 0$;
2) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)\sqrt{f^2(x)+1} = 2$.

1.12.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{2x+1}$.

1.13.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[3]{5x+2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt[4]{3x-2}$.

1.14.•• Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ не має границі в точці $x_0 = 2$.

1.15.•• Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ не має границі в точці $x_0 = -1$.

1.16.•• Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

1.17.•• Доведіть, що функція $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

1.18.•• Доведіть, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ не має границі в жодній точці.

1.19.•• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\dfrac{1}{x} = 0$.

1.20.•• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} x\,\mathfrak{D}(x) = 0$, де $\mathfrak{D}(x)$ — функція Діріхле.

1.21.•• Функція f така, що $D(f) = \mathbb{Q}$ і $f(x) = 1$ для будь-якого $x \in \mathbb{Q}$. Чи має функція f границю в точці: 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = \sqrt{2}$?

1.22.•• Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1.23.•• Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} f\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)$.

1.24.* Чи існує функція f така, що $D(f) = \mathbb{R}$ і функція f не має границі в жодній точці $x_0 \in \mathbb{R}$, але при цьому функція $y = \sin f(x)$ має границю в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$?

1.25.* Відомо, що функція $y = |f(x)|$ має границю в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Чи правильно, що функція $y = f(x)$ має границю хоча б в одній точці $x_0 \in \mathbb{R}$?

1.26.* Чи існує така функція f, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in D(f)$ і для всіх $p \in \mathbb{N}$ справджується рівність $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^p} = 0$?

1.27.* Про визначену на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ послідовність (y_n), де $y_n = f\left(\dfrac{x}{n}\right)$, прямує до нуля. Чи обов'язково $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Означення границі функції в точці за Коші

Означення, наведене в п. 1, називають означенням границі функції в точці за Гейне[1]. Проте можна ввести поняття границі функції в точці іншим способом, не використовуючи границю послідовності.

На рисунку 1.13 зображено графік функції f і на осях абсцис і ординат позначено відповідно точки x_0 і a, де $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Зазначимо, що $f(x_0) \neq a$.

Нехай ε — деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. На осі абсцис йому відповідає такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, відповідні значення функції f належать проміжку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, тобто виконуються нерівності $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Іншими словами, для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

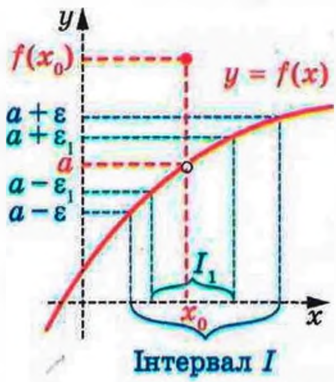


Рис. 1.13

Звузимо проміжок на осі ординат, тобто розглянемо інтервал $(a - \varepsilon_1;\ a + \varepsilon_1)$, де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тоді для числа ε_1 можна вказати такий інтервал I_1 осі абсцис, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ (рис. 1.13).

[1] Гейне, Генріх Едуард (1821–1881) — німецький математик, член-кореспондент Прусської і Ґеттингенської академій наук. Основні його здобутки — у галузі теорії функцій, математичної фізики.

На рисунку 1.14 зображено графік такої функції f, що $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 1.15 відповідає функції f, для якої $f(x_0) = a$.

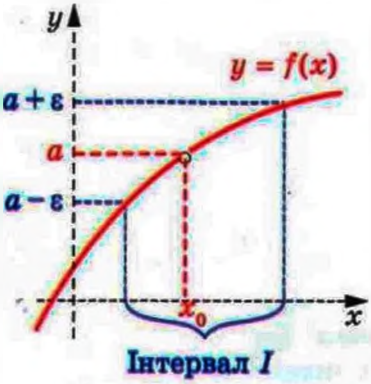


Рис. 1.14

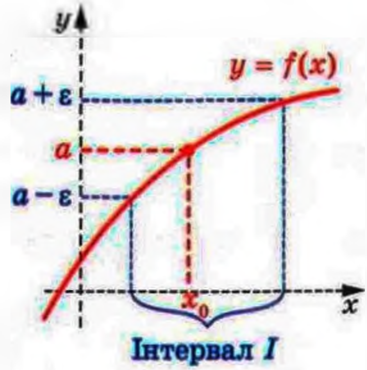


Рис. 1.15

У кожному з випадків, зображених на рисунках 1.13–1.15, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить точку x_0, що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Наведені міркування дозволяють дати таке означення границі функції f у точці x_0.

Означення. Число a називають **границею функції f у точці** x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

У цьому означенні розглядають такі функції f і точки x_0, що для будь-якого інтервалу I, який містить точку x_0, множина $(I \cap D(f)) \setminus \{x_0\}$ не є порожньою. Наприклад, для функції, графік якої зображено на рисунку 1.7, границю в точці x_0 не означають.

Якщо інтервал I містить точку x_0, то існує таке додатне число δ, що проміжок $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ належить I (рис. 1.16).

Тоді, якщо точка x_0 належить інтервалу I, то цей інтервал містить множину, яка є розв'язком подвійної нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, де δ — деяке додатне число.

Тепер наведене означення границі функції f у точці можна переформулювати так.

Рис. 1.16

Означення (Коші). **Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх $x \in D(f)$ з нерівностей $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.**

Рисунок 1.17 ілюструє це означення.

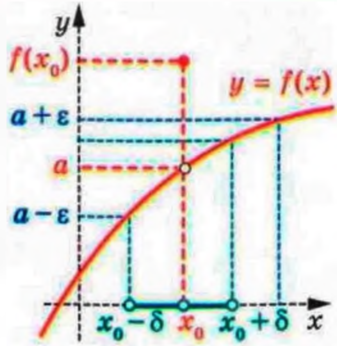


Рис. 1.17

ПРИКЛАД 1 За допомогою означення Коші границі функції в точці доведіть, що $\lim\limits_{x \to 1}(2x+3)=5$.

Розв'язання. Для кожного додатного числа ε розглянемо нерівність $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$. Перетворивши її, запишемо $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Отримана нерівність підказує, яким чином для даного $\varepsilon > 0$ можна знайти потрібне число $\delta > 0$.

Нехай $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з умови $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ випливає, що $|2x - 2| < \varepsilon$. Звідси $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$. Сказане означає, що число $a = 5$ є границею функції $y = 2x + 3$ в точці $x_0 = 1$. ●

ПРИКЛАД 2 Використовуючи означення Коші границі функції в точці, доведіть, що функція $f(x)=\frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Припустимо, що границя функції f у точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює a. Покажемо, що, наприклад, для $\varepsilon = 1$ неможливо підібрати таке $\delta > 0$, щоб з нерівностей $0 < |x - 0| < \delta$ випливала нерівність $\left|\frac{|x|}{x}-a\right|<1$.

Якщо $0 < x < \delta$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x}-a\right|<1$ набуває вигляду $|1 - a| < 1$. Звідси $0 < a < 2$.

Якщо $-\delta < x < 0$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x}-a\right|<1$ набуває вигляду $|-1 - a| < 1$. Звідси $-2 < a < 0$.

Оскільки не існує значень a, які б задовольняли кожну з нерівностей $0 < a < 2$ і $-2 < a < 0$, то функція f у точці $x_0 = 0$ не має границі. ●

2. Теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці

Вивчаючи границю функції у точці, будемо використовувати такі поняття.

Означення. **Проміжок виду $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, називають δ-околом точки x_0.**

Означення. **Множину виду $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, називають проколотим δ-околом точки x_0.**

Поняття δ-околу і проколотого δ-околу точки x_0 проілюстровано на рисунках 2.1 і 2.2 відповідно.

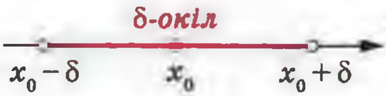


Рис. 2.1

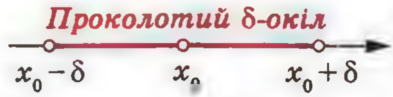


Рис. 2.2

У попередньому пункті ви навчилися обчислювати границю функції в точці за допомогою означення. Полегшити процес пошуку границі дозволяють теореми про границю суми, добутку і частки двох функцій.

У теоремах 2.1–2.3 будемо розглядати функції, що визначені в одних і тих самих точках деякого проколотого δ-околу точки x_0.

Теорема 2.1 (границя суми). ***Якщо функції f і g мають границю в точці x_0, то функція $y = f(x) + g(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Доведення. Позначимо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Нехай (x_n) — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g, де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $(f(x_n))$ і $(g(x_n))$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. У силу теореми 46.2 (див. «Алгебра-10») послідовність $(f(x_n) + g(x_n))$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n) = a + b.$$

Оскільки послідовність (x_n) було обрано довільно, то це означає, що $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. ▲

Розглянемо функції $f(x)=\sqrt{x}$ і $g(x)=\sqrt{-x}$. Кожна з цих функцій має границю в точці $x_0=0$. Проте функція $y=f(x)+g(x)$ визначена лише в точці $x_0=0$ і тому не має границі в цій точці. Цей приклад показує важливість вимоги того, що функції f і g мають бути визначені в одних і тих самих точках деякого проколотого δ-околу точки x_0.

Теорема 2.1 залишається справедливою для будь-якої скінченної кількості доданків. Цей факт можна довести за допомогою методу математичної індукції.

Теорема 2.2 (границя добутку). ***Якщо функції f і g мають границю в точці x_0, то функція $y = f(x)\,g(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\,g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 2.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 2.2 залишається справедливою для будь-якої скінченної кількості множників.

Наслідок. ***Якщо функція f має границю в точці x_0 і k — довільна стала, то функція $y = kf(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x\to x_0}kf(x)=k\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Справедливість наслідку випливає з теореми про границю добутку.

Теорема 2.3 (границя частки). ***Якщо функції f і g мають границю в точці x_0, причому границя функції g відмінна від нуля, то функція $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 2.1, доведіть цю теорему самостійно.

Зазначимо, що теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці є аналогами відповідних теорем для збіжних послідовностей. Така відповідність не обмежується лише теоремами 2.1–2.3. Прочитавши умови вправ 2.11–2.14, ви впізнаєте аналоги інших властивостей збіжних послідовностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Розв'язання. З ключової задачі 1.9 випливає, що $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Тоді, якщо функцію $y = x^2$ подати у вигляді $y = x \cdot x$, то можна застосувати теорему про границю добутку. Маємо:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x) = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^2. \quad \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 4 = 2^2 - 4 = 0$, то не можна застосувати теорему про границю частки до функції $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Перетворимо вираз $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Маємо:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}, \text{ де } x \neq 2 \text{ та } x \neq -2.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$. Оскільки функції f і g збігаються при всіх $x \neq 2$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x-3)}{\lim\limits_{x \to 2} (x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}. \quad \bullet$$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ якщо } x \neq \frac{1}{2}, \\ 3, \text{ якщо } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

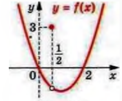


Рис. 2.3

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = x^2 - 2x$. Оскільки в будь-якому проколотому δ-околі точки $x_0 = \frac{1}{2}$ функції f і g збігаються (рис. 2.3), то $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$. Тому достатньо знайти $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, запишемо:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x^2-2x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}x^2-\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}.$$ ●

Вправи

2.1.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x-1)$;
2) $\lim\limits_{x\to -1}x^4$;
3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x-2)$;
4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{3x-2}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x+5}{x^2+2x-1}$;
6) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-\dfrac{1}{x}+2x-3\right)$.

2.2.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+5)$;
2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+2x+2)$;
3) $\lim\limits_{x\to -2}(2x^3-3x^2+6)$;
4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-5}{10+2x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;
6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+1}{(x-2)^{20}}$.

2.3.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;
2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$;
3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^2-12x-4}{x^2-4}$;
4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x+1}$.

2.4.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;
2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-(1+4x)}{x^2+x^4}$;
4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$.

2.5.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

2.6.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x^2-5x+2}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

2.7.• Нехай $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$. Знайдіть границю функції $y=(f(x)+1)^2$ у точці $x_0=0$.

2.8.• Нехай $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-1$. Знайдіть границю функції $y=\dfrac{xf(x)+1}{x^2+5}$ у точці $x_0=3$.

2.9.• Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, де $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & \text{якщо } x\neq 0,\\ -1, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$

2.10.• Знайдіть $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, де $f(x)=\begin{cases} -x^2+3x, & \text{якщо } x\neq 3,\\ 2, & \text{якщо } x=3.\end{cases}$

2.11.• Про функцію f відомо, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$. Доведіть, що $a=b$.

2.12.• Доведіть, що число a є границею функції f у точці x_0 тоді і лише тоді, коли функцію f можна подати у вигляді $f(x)=a+\beta(x)$, де β — така функція, що $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x)=0$.

2.13.• Функції f і g такі, що $f(x)\leqslant g(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, причому існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$. Доведіть, що $a\leqslant b$.

2.14.• Функції f, g і h такі, що $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, причому існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$. Доведіть, що функція g також має границю в точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$.

2.15.•• Наведіть приклад такої функції f, щоб мала місце рівність:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(x+2f(x))=4$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2f(x)-3x}{x+f(x)}=2$.

2.16.•• Наведіть приклад такої функції f, щоб мала місце рівність:

1) $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=2$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=5$.

2.17.•• Знайдіть $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^m+1}{x^n+1}$, де m і n — непарні натуральні числа.

2.18.•• Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, де m і n — натуральні числа.

2.19.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

мати границю в точці x_0, якщо:

1) функція f має границю в точці x_0, а функція g не має границі в точці x_0;
2) функції f і g не мають границь у точці x_0?

2.20.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція

$$h(x) = f(x)\,g(x)$$

мати границю в точці x_0, якщо:

1) функція f має границю в точці x_0, а функція g не має границі в точці x_0;
2) функції f і g не мають границі у точці x_0?

3. Неперервність функції в точці

На рисунку 3.1 зображено графіки функцій f і g, які визначені в точці x_0. Проте поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться. Графік функції g, на відміну від графіка функції f, у точці x_0 має розрив. Таку відмінність поведінки функцій f і g у точці x_0 можна охарактеризувати за допомогою границі.

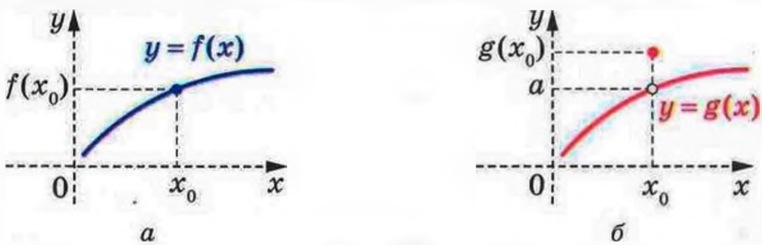


Рис. 3.1

Означення. **Функцію f називають неперервною в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значень аргументу функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.**

Так, якщо для функції f (рис. 3.1, *а*) обрати довільну збіжну до x_0 послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значень аргументу функції, то відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$. Таким чином, функція f є неперервною в точці x_0.

Разом з тим функція g (рис. 3.1, *б*) не є неперервною в точці x_0. Справді, якщо обрати збіжну до x_0 послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

значень аргументу функції таку, що $x_n \neq x_0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, то відповідна послідовність $g(x_1)$, $g(x_2)$, ..., $g(x_n)$, ... значень функції збігається до числа a, яке не дорівнює $g(x_0)$.

Наведемо ще один приклад. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x-1}$ і точку $x_0 \in D(f)$. Оскільки для будь-якої збіжної до x_0 послідовності (x_n) аргументів функції f маємо

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{x_n - 1} = \sqrt{x_0 - 1} = f(x_0),$$

то функція f є неперервною в кожній точці $x_0 \in D(f)$, зокрема в точці $x_0 = 1$.

Зауважимо, що в означенні неперервності функції в точці порівняно з означенням границі функції в точці знято обмеження $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність (x_n) може містити будь-яку кількість членів, рівних x_0, і навіть складатися лише з членів, рівних x_0.

Наприклад, функція $g(x) = \sqrt{-x^2}$ визначена лише в точці $x_0 = 0$. Тому існує єдина послідовність (x_n) значень аргументу функції g: x_0, x_0, x_0, ... Тоді всі члени послідовності $(g(x_n))$ дорівнюють нулю, а тому $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Це означає, що функція g є неперервною в точці $x_0 = 0$.

Так само неперервною в точці x_0 є функція, графік якої зображено на рисунку 3.2.

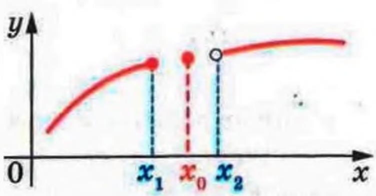


Рис. 3.2

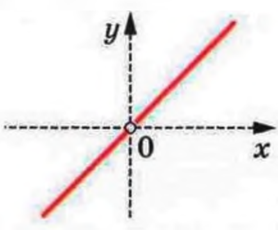


Рис. 3.3

Зауважимо, що коли функція f не визначена в точці x_0, то вона не є неперервною в цій точці. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ не є неперервною в точці $x_0 = 0$ (рис. 3.3).

Неперервність функції в точці можна також установити, використовуючи поняття границі функції в точці.

Теорема 3.1. ***Нехай функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta;\ x_0]$ або $[x_0;\ x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Тоді функція f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Наприклад, для функції $f(x) = x^2 + x$ можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x) = \lim_{x \to x_0} x^2 + \lim_{x \to x_0} x = x_0^2 + x_0 = f(x_0).$$

Тому функція f неперервна в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

Якщо функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, то з теореми 3.1 випливає, що умову неперервності функції в цій точці можна виразити рівністю $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Вище ми з'ясували, що функція g, графік якої зображено на рисунку 3.1, *б*, не є неперервною в точці x_0. Говорять, що точка x_0 є **точкою розриву** функції g. Наприклад, кожна точка виду $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву функції $y = \{x\}$ (рис. 3.4).

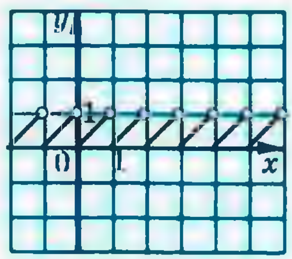


Рис. 3.4

Більш докладно про точки розриву ви дізнаєтеся в наступному пункті.

Ефективним методом для доведення неперервності функції в точці є використання такої теореми.

Теорема 3.2 (про арифметичні дії з неперервними функціями). ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є і функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $g(x_0) \neq 0$).***

Доведення теореми проведемо лише для функції $y = f(x) + g(x)$ (для інших функцій доведіть теорему самостійно). Розглянемо довільну збіжну до x_0 послідовність (x_n) аргументів функції $y = f(x) + g(x)$. Оскільки функції f і g є неперервними в точці x_0, то $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ і $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$.

Використовуючи теорему про границю суми збіжних послідовностей, маємо, що $\lim\limits_{n \to \infty} \big(f(x_n) + g(x_n)\big) = f(x_0) + g(x_0)$. Це означає, що функція $y = f(x) + g(x)$ є неперервною в точці x_0. ▲

Фактично теорема 3.2 складається з трьох теорем, які називають теоремами про неперервність суми, неперервність добутку та неперервність частки.

Використовуючи теорему про арифметичні дії з неперервними функціями, маємо, що кожна з функцій $y = f(x)$ і $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$, $g(x)$ — многочлени, є неперервною в кожній точці області визначення.

Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset \mathbb{R}$, то говорять, що **вона неперервна на множині** M.

Якщо функція f є неперервною на множині $D(f)$, то таку функцію називають **неперервною.** Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Тому $y = \frac{1}{x}$ — неперервна функція. Узагалі, кожна раціональна функція[1] є неперервною. Функція, графік якої зображено на рисунку 3.2, також є неперервною.

Доведемо, що функція $y = \sin x$ є неперервною.

Лема 3.1. ***Для будь-якого*** $x \in \mathbb{R}$ ***виконується нерівність*** $|\sin x| \leqslant |x|$.

Доведення. Якщо $x = 0$ або $|x| \geqslant 1$, то нерівність, яка доводиться, є очевидною.

Нехай $x \in (0; 1)$. На рисунку 3.5 точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0 (1; 0)$ навколо початку координат на кут x радіан. Оскільки $x \in (0; 1)$, то $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тому точка P_x знаходиться в першій чверті.

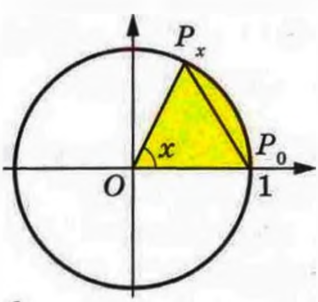


Рис. 3.5

Площа трикутника P_xOP_0 менша від площі сектора P_xOP_0 (рис. 3.5). Маємо:

$$S_{\Delta P_xOP_0} = \frac{1}{2} OP_0^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$S_{\text{сект } P_xOP_0} = \frac{1}{2} OP_0^2\, x = \frac{1}{2} x.$$

---

[1] Функцію виду $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени, називають **раціональною.**

Тоді $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x$. Отримуємо $\sin x < x$.

Нехай $x \in (-1; 0)$. Тоді $-x \in (0; 1)$. Можна записати: $\sin(-x) < -x$. Звідси $\sin x > x$.

Отже, якщо $x \in (0; 1)$, то $0 < \sin x < x$. Тому $|\sin x| < |x|$;

якщо $x \in (-1; 0)$, то $0 > \sin x > x$. Тому $|\sin x| < |x|$. ▲

Лема 3.2. ***Для будь-яких*** $x \in \mathbb{R}$ ***і*** $x_0 \in \mathbb{R}$ ***виконується нерівність*** $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|$.

Доведення. Маємо:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

З леми 3.1 випливає, що $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x-x_0}{2}\right|$. Тому можна записати:

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$ ▲

Теорема 3.3. ***Функція*** $y = \sin x$ ***неперервна на*** $\mathbb{R}$.

Доведення. Установимо неперервність функції $y = \sin x$ у кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай (x_n) — довільна послідовність така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - x_0| = 0$. У силу леми 3.2

$$-|x_n - x_0| \leqslant \sin x_n - \sin x_0 \leqslant |x_n - x_0|.$$

За теоремою про двох конвоїрів (теорема 45.5 підручника «Алгебра-10») отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty}(\sin x_n - \sin x_0) = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = \sin x_0$. Оскільки послідовність (x_n) обрано довільно, то це означає, що функція $y = \sin x$ є неперервною. ▲

Теорема 3.4. ***Функція*** $y = \cos x$ ***неперервна на*** $\mathbb{R}$.

Скориставшись рівністю $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}$ та ідеєю доведення теореми 3.3, доведіть цю теорему самостійно.

Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ — неперервні, то з теореми про неперервність частки випливає, що функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ також є неперервними.

Ви знаєте, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Вони є рівними фігурами, а отже, мають багато однакових геометричних властивостей. Має місце таке твердження: якщо оборотна функція f визначена на деякому проміжку та є неперервною, то обернена до неї функція g також буде неперервною[1].

Як було встановлено вище, функція $y = x^2$ є неперервною. Тоді й оборотна функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є неперервною. Отже, обернена до неї функція $g(x) = \sqrt{x}$ також є неперервною.

Міркуючи аналогічно, доходимо висновку, що функція $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є неперервною. Так само встановлюємо, що неперервними є і функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x$.

Теорема 3.5 (про неперервність складеної функції). ***Якщо функція $t = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(t)$ неперервна в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0.***

Доведення. Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції $y = f(g(x))$ така, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Позначимо $t_n = g(x_n)$ і $y_n = f(t_n) = f(g(x_n))$.

Оскільки функція g є неперервною в точці x_0, то послідовність $(g(x_n))$, тобто послідовність (t_n), збігається до числа $t_0 = g(x_0)$. Оскільки функція f є неперервною в точці t_0 і послідовність (t_n) збігається до числа t_0, то послідовність $(f(t_n))$, тобто послідовність (y_n), збігається до числа $f(t_0) = f(g(x_0))$.

Отже, ми показали, що для будь-якої збіжної до x_0 послідовності (x_n) значень аргументу функції $y = f(g(x))$ відповідна послідовність (y_n) значень функції збігається до числа $f(g(x_0))$. Тому функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0. ▲

Наприклад, функція $t = 2x - 1$ неперервна в точці $x_0 = 5$, функція $y = \sqrt{t}$ неперервна в точці $t_0 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. Тоді складена функція $y = \sqrt{2x - 1}$ є неперервною в точці $x_0 = 5$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що складена функція $y = \sqrt{2x - 1}$ є неперервною в кожній точці своєї області визначення.

---

[1] Доведення цього факту виходить за межі шкільної програми. Задача 3.33 показує суттєвість того, що областю визначення функції f є деякий проміжок.

Ще приклади. Функції $y = \sin x$ і $y = 5x$ є неперервними. Тоді складена функція $y = \sin 5x$ також неперервна.

Кожна з функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=x^2$ є неперервною. Тоді складена функція $y=\sqrt{x^2}$, тобто функція $y=|x|$, також є неперервною.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)=\sqrt{2x+1}-3$ є неперервною, то $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{2x+1}-3\right)=\sqrt{2\cdot 4+1}-3=0$. Отже, застосувати теорему про границю частки не можна.

Перетворимо дріб, який стоїть під знаком границі:

$$\frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}=\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x+1)-9}=$$

$$=\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right).$$

Оскільки функція $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$ є неперервною, то можна записати $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2\cdot 4+1}+3\right)=3$.

Відповідь: 3.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-a^2}, \text{ якщо } x\neq 1 \text{ і } x\neq a^2,\\ a^2+a, \text{ якщо } x=1,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли $a^2 \neq 1$. Тоді $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-a^2}=0$. Для того щоб функція f була неперервною в точці $x_0 = 1$, потрібно, щоб $f(1) = a^2 + a = 0$. Звідси $a = 0$ або $a = -1$. Умову $a^2 \neq 1$ задовольняє лише $a = 0$.

Якщо $a^2 = 1$, то маємо $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$. Тоді значення a, які задовольняють умову, знайдемо із системи $\begin{cases}a^2=1,\\ a^2+a=2.\end{cases}$ Звідси $a = 1$.

Відповідь: $a = 0$ або $a = 1$.

ПРИКЛАД 3 Чи існує функція, яка визначена на $\mathbb{R}$ і неперервна рівно в одній точці?

Розв'язання. Покажемо, що функція

$$f(x) = x\,\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

є неперервною лише в точці $x_0 = 0$.

Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції f така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Оскільки значення $f(x_n)$ дорівнює або 0 (якщо x_n — ірраціональне число), або x_n (якщо x_n — раціональне число), то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Сказане означає, що функція f є неперервною в точці $x_0 = 0$.

Покажемо, що в будь-якій точці x_0, відмінній від 0, функція $f(x)$ не є неперервною.

Нехай $x_0 \neq 0$ і $x_0 \in \mathbb{Q}$. Тоді $f(x_0) = x_0 \neq 0$. Розглянемо послідовність (x_n), яка складається тільки з ірраціональних чисел, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді всі члени послідовності $(f(x_n))$ дорівнюють нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(x_0)$. Отже, функція f не є неперервною в точці x_0.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тоді $f(x_0) = 0 \neq x_0$. Розглянемо послідовність (x_n), яка складається тільки з раціональних чисел, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді $f(x_n) = x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq f(x_0)$. Отже, функція f не є неперервною в точці x_0. ●

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі неперервні в точці $x_0 = 0$ функції f такі, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки задана в умові рівність виконується для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, то при заміні x на $\frac{x}{2}$ ми знову отримаємо правильну рівність $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)$. Скориставшись методом математичної індукції, можна довести (зробіть це самостійно), що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ і всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ послідовність $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots, \frac{x}{2^n}, \ldots$ прямує до нуля, то для неперервної в точці $x_0 = 0$ функції f відповідна послідовність значень функції $f\left(\frac{x}{2}\right), f\left(\frac{x}{4}\right), \ldots, f\left(\frac{x}{2^n}\right), \ldots$ прямує до числа $f(x_0)$, тобто до числа $f(0)$. При цьому, як було встановлено раніше, кожний член послідовності $f\left(\frac{x}{2}\right), f\left(\frac{x}{4}\right), \ldots,$ $f\left(\frac{x}{2^n}\right), \ldots$ дорівнює $f(x)$. Таким чином, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0).$

Це означає, що шукана функція має вигляд $f(x) = c$, де c — константа. Зрозуміло, що будь-яка така функція задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = c$, де c — довільна константа.

Властивості неперервних функцій використовують для розв'язування багатьох складних задач. Так, ви не раз зустрічалися з рівняннями, корені яких не вдавалося знайти. Розглянемо, наприклад, рівняння $\cos x = x$. З рисунка 3.6 видно, що це рівняння має єдиний корінь $x = a$. За допомогою комп'ютерних програм знайдено його перші десяткові знаки: $a = 0{,}7390851332\ldots$. Подібну комп'ютерну програму ви можете створити і самі, використовуючи такі міркування.

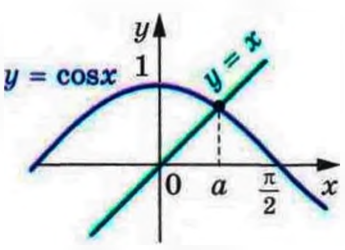


Рис. 3.6

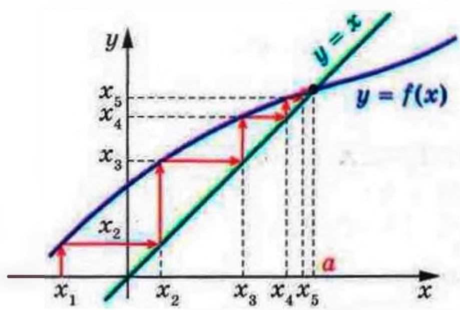


Рис. 3.7

Для наближеного розв'язування рівняння $f(x) = x$, де f — деяка неперервна на $\mathbb{R}$ функція, у математиці використовують так званий **метод простої ітерації**. Розв'язуючи рівняння цим методом, спочатку обирають довільне число x_1 (початкове наближення). Далі будують послідовність (x_n) таку, що $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (рис. 3.7). Якщо послідовність (x_n) виявиться збіжною, то її границею буде корінь рівняння $f(x)=x$. Справді, перейдемо до границі в рівності $x_{n+1}=f(x_n)$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=a$. Крім цього, з неперервності функції f випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$. Отже, доведено, що $a=f(a)$, тобто число a є коренем рівняння $x=f(x)$.

Доведене твердження лежить в основі методу простої ітерації. Оскільки послідовність (x_n) може прямувати лише до кореня рівняння $f(x)=x$, то за наближене значення цього кореня беруть деякий член послідовності (x_n) з достатньо великим номером n. Тому послідовність (x_n) називають **послідовністю наближень**.

Покажемо, як працює цей метод при розв'язуванні рівняння $\cos x=x$. Оберемо довільне початкове наближення. Нехай $x_1=0$. Використовуючи метод простої ітерації, побудуємо послідовність наближень[1] до кореня рівняння (рис. 3.8):

$$x_2=\cos x_1=\cos 0=1,$$
$$x_3=\cos x_2=\cos 1=0{,}5403\ldots,$$
$$x_4=\cos x_3=0{,}8576\ldots,$$
$$x_5=\cos x_4=0{,}6543\ldots,$$
$$\ldots$$
$$x_{10}=0{,}7314\ldots,$$
$$\ldots$$
$$x_{20}=0{,}73893\ldots,$$
$$\ldots$$
$$x_{30}=0{,}739082\ldots.$$

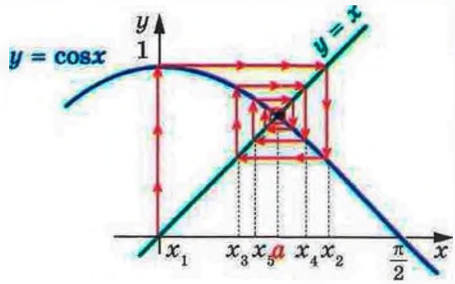


Рис. 3.8

Як бачимо, вже тридцятий член послідовності має п'ять правильних десяткових знаків після коми кореня $a=0{,}7390851\ldots$ рівняння $\cos x=x$.

Вправи

3.1.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\sin x$;
3) $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{4}}\operatorname{tg} x$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x$;
5) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg} x$.

[1] У пункті 12 (задача 12.31) буде обґрунтовано збіжність цієї послідовності.

3.2.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg} x$; 5) $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{arcctg} x$.

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\arccos x$;

3.3.° Доведіть неперервність функції:

1) $f(x)=\sqrt{x}+3$; 3) $f(x)=\sqrt{5x+2}$; 5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

2) $f(x)=\sqrt{x}-x^2$; 4) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$;

3.4.° Доведіть неперервність функції:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$;

2) $f(x)=\sin x+\operatorname{ctg} x$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg} 5x$.

3.5.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin 3x$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{5}}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos^2 x$.

3.6.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\cos 4x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.7.° Чи є неперервною в точці x_0 функція:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{якщо } x\neq 3,\\ 6, & \text{якщо } x=3,\end{cases}$ $x_0=3$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}, & \text{якщо } x\neq \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{якщо } x=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$?

3.8.° Чи є неперервною в точці x_0 функція:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x+1}, & \text{якщо } x\neq -1,\\ 0, & \text{якщо } x=-1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}, & \text{якщо } x\neq \pi,\\ -2, & \text{якщо } x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$?

3.9.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

3.10.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

3.11.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x^2-3}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

3.12.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

3.13.° Доведіть, що функція Діріхле не є неперервною в жодній точці області визначення.

3.14.° Про неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{5n^2+1}{(3n-1)(n+1)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Знайдіть значення $f(0)$.

3.15.° Про неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що $f\left(\dfrac{2+n^2}{n^2+n}\right)=\dfrac{-n+2}{4n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Знайдіть значення $f(1)$.

3.16.°° Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

є неперервною в точці $x_0=0$.

3.17.°° Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція

$$f(x)=\begin{cases} a\cos\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a^2-4a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$$

є неперервною в точці $x_0=0$.

3.18.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a^2-1)|x|}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a^2+a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0 = 0$.

3.19.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-a}, & \text{якщо } x\neq 2 \text{ і } x\neq a,\\ a^2+3a, & \text{якщо } x=2,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0 = 2$.

3.20.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-a^2}, & \text{якщо } x\neq 4 \text{ і } x\neq a^2,\\ a^2+2a, & \text{якщо } x=4,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=4$.

3.21.** Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x) = f(x) + g(x)$ бути неперервною в точці x_0, якщо:

1) функція f є неперервною в точці x_0, а функція g не є неперервною в точці x_0;
2) функції f і g не є неперервними в точці x_0?

3.22.** Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x) = f(x)\,g(x)$ бути неперервною в точці x_0, якщо:

1) функція f є неперервною в точці x_0, а функція g не є неперервною в точці x_0;
2) функції f і g не є неперервними в точці x_0?

3.23.** Доведіть, що рівняння $\sin x = x$ має єдиний корінь — число 0.

3.24.** Доведіть, що функція $f(x) = 1$, $D(f) = \mathbb{Q}$, є неперервною.

3.25.** Знайдіть усі неперервні на $\mathbb{R}$ функції такі, що $f(x)=x^2$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$.

3.26.** Про неперервні на $\mathbb{R}$ функції f і g відомо, що $f(x)=g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$. Розв'яжіть рівняння $f(x)=g(x)$.

3.27.** Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ -x, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$.

3.28.** Про визначену на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що вона не є неперервною в жодній точці. Чи може існувати границя $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

3.29.** Доведіть, що функція $f(x) = x^2\mathfrak{D}(x)$ є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$.

3.30.* Наведіть приклад функції, яка визначена на $\mathbb{R}$ і є неперервною рівно в двох точках.

3.31.* Наведіть приклад функції, яка визначена на $\mathbb{R}$, не є неперервною в жодній точці і задовольняє умову $f(f(x)) = x$.

3.32.* Знайдіть усі неперервні в точці $x_0 = -1$ функції f такі, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f(2x + 1)$.

3.33.* Графіки функцій f і g є рівними фігурами. Функція f є неперервною. Чи обов'язково функція g є неперервною?

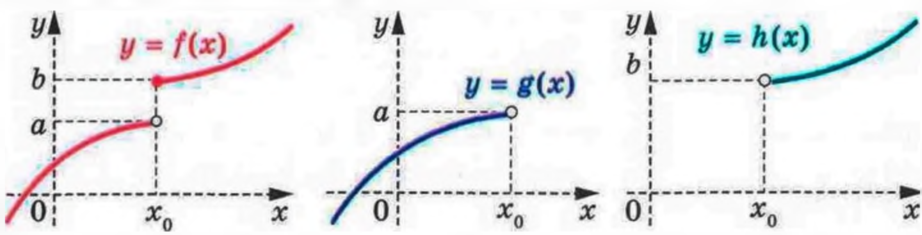
3.34.* Функції f і g є неперервними на $\mathbb{R}$. Доведіть, що функції $y = \max\{f(x); g(x)\}$ і $y = \min\{f(x); g(x)\}$ також є неперервними на $\mathbb{R}$.

3.35.* Знайдіть границю послідовності (x_n), що задовольняє умову $x_{n+1} = \sin x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

3.36.* Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою $x_n = \cos\left(2\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

4. Односторонні границі функції в точці. Класифікація точок розриву

На рисунку 4.1, *а* зображено графік функції f, $D(f) = \mathbb{R}$, яка не має границі в точці x_0.



а *б* *в*

Рис. 4.1

Разом з тим функція $y = g(x)$, $D(g) = (-\infty; x_0)$, яка на проміжку $(-\infty; x_0)$ збігається з функцією f (рис. 4.1, *б*), має границю в точці x_0. Цю границю функції g природно назвати **лівою границею** функції f у точці x_0. Також функція $y = h(x)$, $D(h) = (x_0; +\infty)$, яка збігається з функцією f на проміжку $(x_0; +\infty)$ (рис. 4.1, *в*), має границю в точці x_0. Цю границю функції h природно назвати **правою границею** функції f у точці x_0.

Розглянемо функцію f і точку x_0, для якої існує послідовність менших (більших) від x_0 значень аргументу, яка збігається до точки x_0. Тоді доцільно прийняти таке означення.

Означення. Число a називають **лівою (правою) границею функції f у точці** x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значень аргументу функції f, елементи x_n якої менші (більші) від x_0, відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ значень функції збігається до числа a.

Ліву границю функції f у точці x_0 позначають $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$.

Праву границю функції f у точці x_0 позначають $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$.

Для функції f, графік якої зображено на рисунку 4.1, *а*, можна записати: $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = b$.

Для функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 4.2) можна записати: $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1-} \sqrt{x} = 1$. Для функції $y = \arcsin x$ (рис. 4.3) можна записати: $\lim\limits_{x \to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

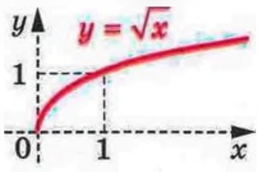


Рис. 4.2

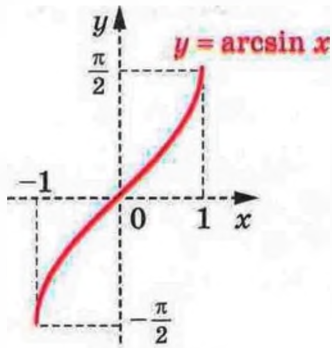


Рис. 4.3

Зазначимо, що $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x \to 1-} \arcsin x = \lim\limits_{x \to 1} \arcsin x$.

Ліву та праву границі функції в точці називають **односторонніми границями.**

Має місце такий наочно очевидний факт. *Якщо в точці x_0 ліва і права границі функції існують і рівні, то в цій точці існує границя функції, яка дорівнює лівій і правій границям.* Доведіть це твердження самостійно.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть ліву і праву границі функції $f(x)=\frac{|x|}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

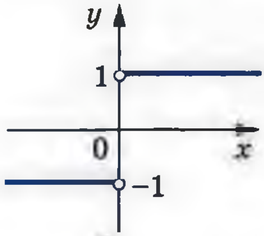


Рис. 4.4

Розв'язання. Нехай (x_n) — довільна послідовність, яка збігається до нуля, і $x_n < 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ можна записати: $f(x_n)=\frac{|x_n|}{x_n}=-\frac{x_n}{x_n}=-1$.

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=-1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=-1$.

Аналогічно доводять, що $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=1$.

Отриманий результат ілюструє графік функції f (рис. 4.4). ●

Функція $f(x)=\frac{|x|}{x}$ не є неперервною в точці $x_0 = 0$. Говорять, що $x_0 = 0$ — точка розриву функції f.

Означення. **Якщо існує послідовність відмінних від x_0 значень аргументу функції f, яка збігається до x_0, і функція f у точці x_0 не є неперервною, то цю точку називають *точкою розриву* функції f.**

Наприклад, точка $x_0 = 1$ є точкою розриву функції $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ (рис. 4.5); кожна точка виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву функції $y = [x]$ (рис. 4.6); будь-яка точка $x_0 \in \mathbb{R}$ є точкою розриву функції Діріхле.

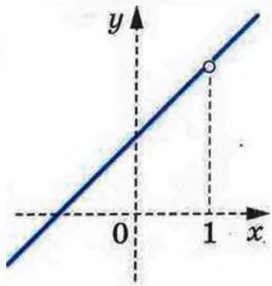


Рис. 4.5

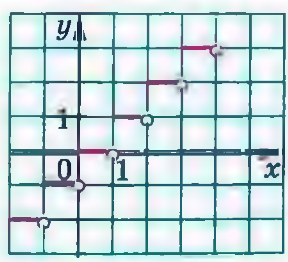


Рис. 4.6

На рисунку 4.7 зображено графіки функцій f і g, для яких x_0 є точкою розриву, але при цьому ці функції мають границю в точці x_0, яка дорівнює a.

а б

Рис. 4.7

Розглянемо дві нові функції (рис. 4.8):

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } x\neq x_0, \\ a, & \text{якщо } x=x_0, \end{cases} \quad \text{і} \quad \varphi(x)=\begin{cases} g(x), & \text{якщо } x\neq x_0, \\ a, & \text{якщо } x=x_0. \end{cases}$$

Очевидно, що функції h і φ є неперервними в точці x_0.

а б

Рис. 4.8

Замінивши функції f і g відповідно на функції h і φ, ми «усунули розрив» у точці x_0 і при цьому не змінили значень функцій f і g в інших точках.

Означення. **Точку розриву x_0 називають точкою усувного розриву функції f, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.**

Наприклад, $x_0 = 1$ є точкою усувного розриву функції $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (рис. 4.5).

Точка розриву $x_0 = 0$ функції $y=\dfrac{|x|}{x}$ не є точкою усувного розриву (рис. 4.4). Разом з цим у точці $x_0 = 0$ функція $y=\dfrac{|x|}{x}$ має ліву і праву границі.

Означення. **Точку розриву x_0 називають точкою розриву першого роду функції f, якщо в цій точці існують і ліва, і права границі функції f.**

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою розриву першого роду функції $y=\frac{|x|}{x}$; кожна точка виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву першого роду функції $y = [x]$. Зазначимо, що не кожна точка усувного розриву є точкою розриву першого роду (рис. 4.7, *а*).

Функція $y=\frac{1}{x}$ (рис. 4.9) у точці $x_0 = 0$ не має ні лівої, ні правої границі; функція $y=\frac{|x|+x}{x^2}$ (рис. 4.10) у точці $x_0 = 0$ має ліву границю, яка дорівнює 0, і не має правої границі.

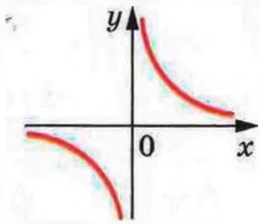


Рис. 4.9

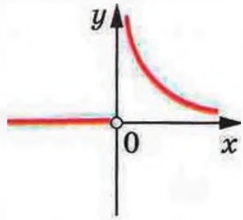


Рис. 4.10

Означення. **Точку розриву x_0 називають точкою розриву другого роду функції *f*, якщо x_0 не є ні точкою усувного розриву, ні точкою розриву першого роду.**

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою розриву другого роду функцій $y=\frac{1}{x}$ і $y=\frac{|x|+x}{x^2}$.

Оскільки функція Діріхле у кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ не має ні лівої, ні правої границі, то кожна точка x_0 є точкою розриву другого роду цієї функції.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що точка $x_0 = 0$ є точкою розриву другого роду функції $f(x)=\cos\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Покажемо, що функція *f* у точці $x_0 = 0$ не має, наприклад, правої границі.

Нехай $x_n=\frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді послідовність (x_n) додатних значень аргументу функції *f* збігається до нуля, а послідовність $(f(x_n))$ має вигляд: $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Ця послідовність не є збіжною. Отже, функція *f* не має правої границі в точці $x_0 = 0$, тому $x_0 = 0$ — точка розриву другого роду функції *f*.

Вправи

4.1.° За допомогою графіка функції f (рис. 4.11) з'ясуйте, чи має функція f ліву (праву) границю в точці x_0. У разі позитивної відповіді укажіть значення цієї границі.

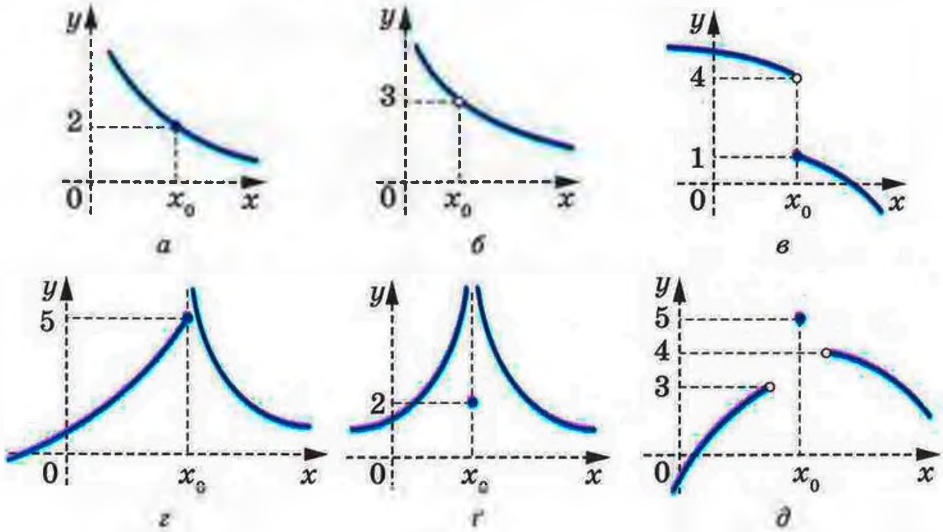


Рис. 4.11

4.2.° За допомогою графіка функції f (рис. 4.12) з'ясуйте, чи має функція f ліву (праву) границю в точці x_0. У разі позитивної відповіді укажіть значення цієї границі.

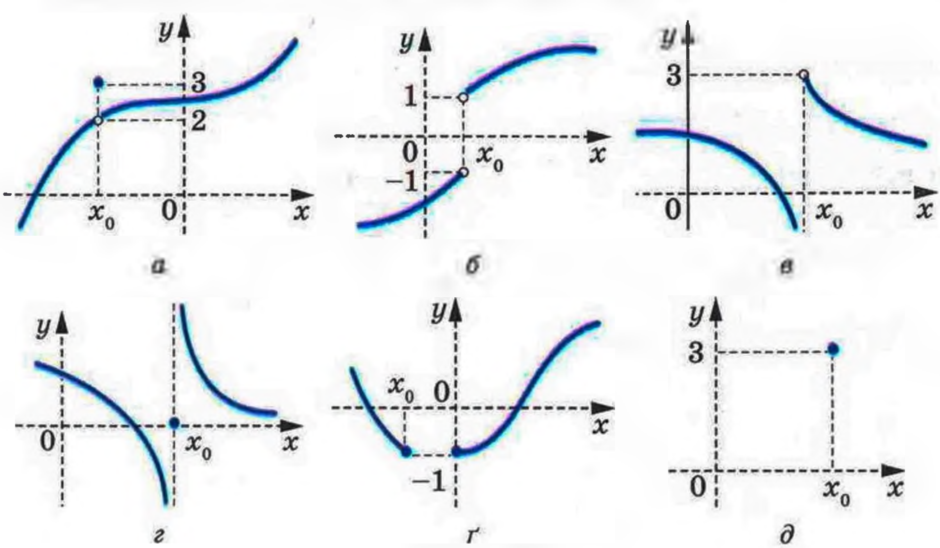


Рис. 4.12

4.3.• Знайдіть ліву і праву границі функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x_0=-3$;

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x}$, $x_0=\pi$;

4) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

6) $f(x)=\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

7) $f(x)=\sin|x|\operatorname{ctg} x$, $x_0=0$;

8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x<0,\\ \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } x>0,\end{cases}$ $x_0=0$.

4.4.• Знайдіть ліву і праву границі функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$, $x_0=4$;

2) $f(x)=\dfrac{x^7+1}{x^9+1}$, $x_0=-1$;

3) $f(x)=(|\sin x|-\sin x)\operatorname{ctg} x$, $x_0=\pi$;

4) $f(x)=\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & \text{якщо } x>0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{якщо } x<0,\end{cases}$ $x_0=0$.

4.5.• Визначте характер розриву функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & \text{якщо } x<-1,\\ 3x, & \text{якщо } x>-1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & \text{якщо } x<-2,\\ \sin\dfrac{\pi x}{4}, & \text{якщо } x>-2,\end{cases}$ $x_0=-2$;

3) $f(x)=2^{[x]}$, $x_0=2$;

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$.

4.6.$^{\bullet}$ Визначте характер розриву функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$, $x_0=0$;

2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi[x]}{2}$, $x_0=2$;

3) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

4) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } x>0,\end{cases}$ $x_0=0$.

4.7.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a функція f у точці x_0 має рівні ліву і праву границі?

1) $f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x<0,\\ x+a, & \text{якщо } x>0,\end{cases}$ $x_0=0$;

2) $f(x)=\begin{cases}\{x\}, & \text{якщо } x>2,\\ x+a, & \text{якщо } x<2,\end{cases}$ $x_0=2$.

4.8.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a функція f у точці x_0 має рівні ліву і праву границі?

1) $f(x)=\begin{cases}3x+4, & \text{якщо } x<a,\\ 5x, & \text{якщо } x>a,\end{cases}$ $x_0=a$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-a}, & \text{якщо } x<2 \text{ і } x\neq a,\\ \dfrac{1}{2}a^2+a, & \text{якщо } x\geqslant 2,\end{cases}$ $x_0=2$.

4.9.$^{\bullet\bullet}$ Чи існує така визначена на $\mathbb{R}$ функція f, що границя $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ існує для всіх $x_0\in\mathbb{R}$, але границя $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ не існує принаймні для одного x_0?

4.10.$^{\bullet\bullet}$ Чи існує така визначена на $\mathbb{R}$ функція f, що границя $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ існує для всіх $x_0\leqslant 0$, а границя $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ не існує для жодного $x_0>0$?

4.11.$^{\bullet\bullet}$ Чи існує така визначена на $\mathbb{R}$ функція f, що $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=-1$ для всіх $a\leqslant 0$ і при цьому $\lim\limits_{x\to b+} f(x)=1$ для всіх $b\geqslant 0$?

5. Деякі властивості неперервних функцій

Розглянемо низку властивостей неперервних функцій.

Теорема 5.1 (перша теорема Больцано–Коші). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.***

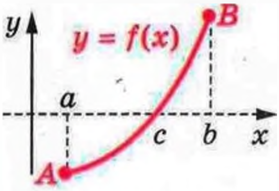


Рис. 5.1

Ця теорема є наочно очевидною. Справді, якщо точки A і B, які лежать у різних півплощинах відносно осі абсцис, з'єднати неперервною кривою, то ця крива обов'язково перетне вісь абсцис (рис. 5.1).

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 51.

Наслідок. ***Якщо функція неперервна і не має нулів на деякому проміжку I, то вона на цьому проміжку зберігає знак*** (рис. 5.2).

Доведення. Припустимо, що дана функція f на проміжку I не зберігає знак, тобто існують такі $a \in I$ і $b \in I$, де $a < b$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки (рис. 5.1). Тоді за першою теоремою Больцано–Коші існує точка $c \in (a; b) \subset I$ така, що $f(c) = 0$. Отримали суперечність. ▲

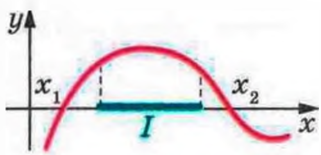


Рис. 5.2

Нагадаємо, що цей наслідок лежить в основі методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що рівняння $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ має корінь.

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію

$$f(x) = x^5 + 2x^2 - 11.$$

Маємо: $f(0) = -11$, $f(2) = 29$. Отже, за першою теоремою Больцано–Коші на інтервалі $(0; 2)$ рівняння $f(x) = 0$ має корінь. ●

ПРИКЛАД 2 Неперервна функція f є такою, що $D(f) = E(f) = [0; 1]$. Доведіть, що рівняння $f(x) = x$ має щонайменше один корінь.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - x$. Для розв'язання задачі достатньо показати, що функція g на відрізку $[0; 1]$ має хоча б один нуль. Очевидно, що функція $g(x)$ є неперервною на відрізку $[0; 1]$.

Якщо $g(0) = 0$ або $g(1) = 0$, то твердження задачі доведене.

Нехай $g(0) \neq 0$ і $g(1) \neq 0$. З урахуванням того, що $E(f) = [0; 1]$, отримуємо $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ і $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Тоді неперервна на відрізку $[0; 1]$ функція g у точках $x = 0$ і $x = 1$ набуває значень різних знаків, а отже, існує така точка $x_0 \in (0; 1)$, що $g(x_0) = 0$. ●

Теорема 5.2 (друга теорема Больцано–Коші про проміжне значення функції). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.***

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$ (випадок, коли $f(a) \geqslant f(b)$, розгляньте самостійно).

Нехай C — довільне число з проміжку $(f(a); f(b))$, тобто $f(a) < C < f(b)$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = C$. Тим самим буде показано, що функція f набуває значення C.

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція g є неперервною на відрізку $[a; b]$.

Маємо: $g(a) = f(a) - C < 0$;

$g(b) = f(b) - C > 0$.

Отже, згідно з першою теоремою Больцано–Коші існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$. ▲

Доведена теорема допомагає знаходити область значень неперервної функції.

Чеський математик, філософ і логік. Очолював кафедру історії релігії в Празькому університеті. При житті надрукував (анонімно) лише 5 невеликих математичних творів, основну частину його рукописної спадщини вчені досліджували вже після його смерті. Трактат «Учення про функції», написаний у 1830 р., побачив світ тільки через 100 років. У ньому Больцано, за багато років до Вейєрштрасса і Коші, сформулював і довів низку положень математичного аналізу. У роботі «Парадокси нескінченності» Больцано опрацьовував питання потужності нескінченних множин; у роботі «Наукознавство» висунув низку ідей, які передували математичній логіці.

Бернард Больцано (1781–1848)

Наслідок. ***Якщо областю визначення неперервної функції f є деякий проміжок і $\min\limits_{D(f)} f(x)=a$, $\max\limits_{D(f)} f(x)=b$, де $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть область значень функції $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{x^2}{1+x^4} \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{x^2}{2\sqrt{1\cdot x^4}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $f(1)=\frac{1}{2}$, то $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\frac{1}{2}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку теореми 5.2 випливає, що $E(f)=\left[0; \frac{1}{2}\right]$. ●

Функція $f(x) = \sin x$ є такою, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|\sin x| \leqslant 1$. Функція $g(x) = x^2$ є такою, що для будь-якого $x \in [-1; 2]$ виконується нерівність $|g(x)| < 5$. Говорять, що функція f **обмежена** на $D(f)$, а функція g обмежена на відрізку $[-1; 2]$.

Узагалі, функцію f називають **обмеженою на множині** M, якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant C$.

Огюстен Луї Коші (1789–1857)

Французький математик. Опублікував понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики; займався також дослідженнями з тригонометрії, теорії пружності, оптики, астрономії. Був членом Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства і майже всіх академій наук світу.

Функцію f, обмежену на $D(f)$, називають **обмеженою**.

Наприклад, функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою. Справді, для будь-якого $x \in D(y)$ виконується нерівність $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ не є обмеженою на проміжку $(0; \pi)$. При цьому вона є обмеженою на будь-якому відрізку $[a; b]$, який належить проміжку $(0; \pi)$ (рис. 5.3).

Не будь-яка функція, визначена на відрізку $[a; b]$, є обмеженою (рис. 5.4). Проте для неперервних функцій має місце така теорема.

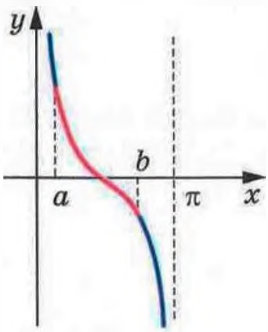


Рис. 5.3

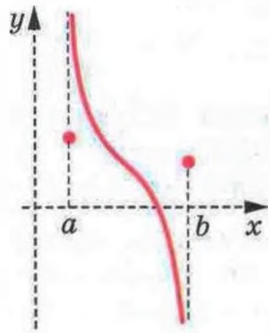


Рис. 5.4

Теорема 5.3 (перша теорема Вейєрштрасса). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому проміжку.***

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 52.

Німецький математик, член Берлінської академії наук, Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук. Одним з найважливіших його здобутків є система логічного обґрунтування математичного аналізу, заснована на побудованій ним теорії дійсних чисел. Вейєрштрасс приділяв значну увагу застосуванню математики до механіки та фізики і заохочував до цього своїх учнів.

Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (1815–1897)

Зауважимо, що для проміжків виду $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ твердження теореми не є справедливим. Так, функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною на будь-якому проміжку виду $(0; a]$, проте вона не є обмеженою на цьому проміжку.

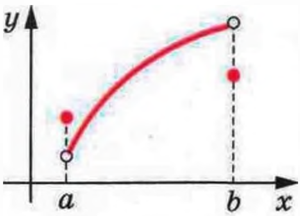


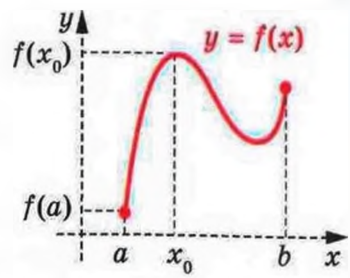
Рис. 5.5

Не будь-яка функція, визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень. Це ілюструє рисунок 5.5.

Проте для неперервних функцій має місце така теорема.

Теорема 5.4 (друга теорема Вейєрштрасса). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку вона набуває своїх найбільшого і найменшого значень.***

Ця теорема наочно очевидна. Якщо дві точки на координатній площині з'єднати неперервною кривою, то на цій кривій знайдуться точки з найбільшою і найменшою ординатами (рис. 5.6).



$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$

Рис. 5.6

Доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу.

Зазначимо, що коли в теоремі 5.4 відрізок $[a; b]$ замінити проміжком іншого виду, наприклад інтервалом $(a; b)$, то неперервна на цьому проміжку функція може не набувати своїх найбільшого і найменшого значень. Так, функція $y = x$, яка є неперервною на проміжку $(0; 1)$, не досягає на цьому своїх найбільшого і найменшого значень.

Вправи

5.1.° Доведіть, що рівняння має корінь:

1) $x^6 + 2x - 13 = 0$;
2) $3 \sin x = 2x - 1$;
3) $\operatorname{arctg}^3 x = 2 \operatorname{tg} x - 1$.

5.2.° Доведіть, що рівняння має корінь:

1) $x^3 + 3x - 8 = 0$;
2) $2 \cos x = x^2 + 4x - 6$;
3) $x^2 \arcsin x + 3x - 1 = 0$.

5.3.° Які з даних функцій є обмеженими:

1) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=[x]$; 5) $y=\frac{|x|}{x}$;

2) $y=\arccos x$; 4) $y=\{x\}$; 6) $y=x^3$?

5.4.° Які з даних функцій є обмеженими:

1) $y=\sin x+\cos x$; 3) $y=\text{arcctg}\, x$; 5) $y=\text{tg}\, x$;

2) $y=\frac{x^2}{x}$; 4) $y=\mathfrak{D}(x)$; 6) $y=\text{sgn}\,(x)$?

5.5.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sin x+2$; 2) $y=\cos x-3$; 3) $y=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$.

5.6.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sin x-4$; 2) $y=3+\cos x$; 3) $y=\pi-\arccos x$.

5.7.• Знайдіть область значень функції:

1) $y=\frac{x^2}{9x^4+1}$; 2) $y=\sqrt{2x-x^2}$.

5.8.• Знайдіть область значень функції:

1) $y=\frac{x^2}{4x^4+3x^2+1}$; 2) $y=\sqrt{4x-x^2}$.

5.9.• Знайдіть область значень функції $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

5.10.• Знайдіть область значень функції $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

5.11.• При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x)=a$ було з'ясовано, що при всіх $a\in(-5;2]$ рівняння має два корені, при всіх $a\in(2;3]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо $D(f)=[0;1]$?

5.12.• При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x)=a$ було з'ясовано, що при всіх $a\in[-10;3)$ рівняння має два корені, при всіх $a\in(3;5]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо її областю визначення є деякий проміжок?

5.13.• Чи існує неперервна на $[0;1]$ функція f з такою властивістю: для кожного $x\in[0;1]$ знайдеться такий $y\in[0;1]$, що $f(y)>f(x)$?

5.14.˙ Функція f, $D(f)=[a;b]$, є такою, що на відрізку $[a;b]$ існують точки x_1 та x_2, для яких виконується умова $f(x_1)=\min\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2)=\max\limits_{[a;b]} f(x)$. Крім цього, функція f набуває всіх значень між $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Чи обов'язково функція f є неперервною?

5.15.˙˙ Неперервна функція f, де $D(f)=[a;b]$, для всіх $x\in[a;b]$ задовольняє нерівність $0<f(x)<1$. Доведіть, що функція $y=\frac{1}{f(x)(1-f(x))}$ є обмеженою.

5.16.˙˙ Доведіть, що функція $f(x) = x \sin x$ не є обмеженою.

5.17.˙˙ Доведіть, що функція $f(x)=x\sin x$ не є періодичною.

5.18.˙˙ Доведіть, що функція $f(x) = x \cos x$ не є обмеженою.

5.19.˙˙ Чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція f така, що $f(x)f(x+1)=-1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$?

5.20.˙˙ Доведіть, що коли функція є неперервною і оборотною на проміжку, то вона або зростає, або спадає на цьому проміжку.

5.21.˙˙ Функції f і g неперервні на відрізку $[0; 1]$. Відомо, що $f(0) < g(0)$ і $f(1) > g(1)$. Доведіть, що рівняння $f(x) = g(x)$ має корінь.

5.22.* При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x)=a$ було з'ясовано, що при всіх $a\in(-5;2]$ рівняння має два корені, при всіх $a\in(2;3]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо $D(f) = \mathbb{R}$?

5.23.* При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x)=a$ було з'ясовано, що при всіх $a\in(1;2]$ рівняння має два корені, при всіх $a\in(2;4)$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо $D(f)=[0;1)\cup(1;2)$?

5.24.* Функції f і g є неперервними на $[0; 1]$, $D(f) = D(g) = E(f) = E(g) = [0; 1]$. Доведіть, що рівняння $f(g(x)) = g(f(x))$ має щонайменше один корінь.

5.25.* Функція f є неперервною на $\mathbb{R}$. Доведіть, що коли рівняння $f(x) = x$ не має коренів, то рівняння $f(f(x)) = x$ також не має коренів.

5.26.* Чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція f, яка в раціональних точках набуває ірраціональних значень, а в ірраціональних точках — раціональних значень?

5.27.* Неперервна на $\mathbb{R}$ функція f є такою, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x)) \cdot f(x) = 1$. Відомо, що $f(3) = \frac{1}{3}$. Знайдіть $f(2)$.

5.28.* Чи існує визначена на $\mathbb{R}$ функція, яка:

1) є неперервною і набуває кожного свого значення рівно два рази;
2) кожного свого значення набуває рівно два рази;
3) є неперервною і набуває кожного свого значення рівно три рази?

5.29.* Функція f неперервна на інтервалі $(a; b)$ і $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a; b)$. Доведіть існування такого $x_0 \in (a; b)$, що

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

5.30.* Неперервна функція f визначена на відрізку $[0; 1]$, причому $f(0) = f(1)$. Доведіть, що існує хорда графіка[1] функції f, паралельна осі абсцис, довжина якої дорівнює $\frac{1}{3}$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Доведення першої теореми Больцано–Коші

Розглянемо неперервну на відрізку $[a; b]$ функцію f таку, що числа $f(a)$ та $f(b)$ мають різні знаки. Доведемо існування такої точки $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.

Припустимо, що такої точки $c \in (a; b)$ не існує, тобто $f(c) \neq 0$ для всіх $c \in (a; b)$.

Нехай c_0 — середина відрізка $[a; b]$.

Оскільки числа $f(a)$ і $f(b)$ різних знаків, то на кінцях одного з відрізків $[a; c_0]$ і $[c_0; b]$ функція f набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$.

[1] *Хордою графіка* функції називають будь-який відрізок, що сполучає дві точки графіка.

Нехай c_1 — середина відрізка $[a_1; b_1]$. Тоді на кінцях одного з відрізків $[a_1; c_1]$ і $[c_1; b_1]$ функція f набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_2; b_2]$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots .$$

За принципом вкладених відрізків (див. «Алгебра-10», с. 356) існує така точка c, яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Отже, кожна з послідовностей (a_n) і (b_n) прямує до числа c. Нехай x_n є тією з точок a_n або b_n, для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність (x_n) також прямує до числа c. Оскільки функція f неперервна в точці c, то $f(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant 0$. Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$. ▲

Доведення першої теореми Вейєрштрасса

Розглянемо неперервну на відрізку $[a; b]$ функцію f. Доведемо, що функція f є обмеженою на $[a; b]$.

Припустимо, що функція f не є обмеженою на $[a; b]$.

Нехай c_0 — середина відрізка $[a; b]$. Якби функція f була обмеженою на кожному з відрізків $[a; c_0]$ і $[c_0; b]$, то вона була б обмеженою і на відрізку $[a; b]$. Тому функція f не є обмеженою принаймні на одному з відрізків $[a; c_0]$ або $[c_0; b]$. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$ і оберемо на ньому таку точку x_1, що $|f(x_1)| > 1$.

Нехай c_1 — середина відрізка $[a_1; b_1]$. Тоді функція f не є обмеженою принаймні на одному з відрізків $[a_1; c_1]$ або $[c_1; b_1]$. Позначимо цей відрізок $[a_2; b_2]$ і оберемо на ньому таку точку x_2, що $|f(x_2)| > 2$. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots .$$

За принципом вкладених відрізків (див. «Алгебра-10», с. 356) існує така точка c, яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. На кожному з відрізків $[a_n; b_n]$ було обрано таку точку x_n, що $|f(x_n)| > n$. Тому $(f(x_n))$ — розбіжна послідовність (вона не є обмеженою).

Оскільки $x_n \in [a_n; b_n]$ і $c \in [a_n; b_n]$, то

$$0 \leqslant |x_n - c| \leqslant (b_n - a_n).$$

Послідовність довжин відрізків $[a_n; b_n]$ прямує до нуля. Тому послідовність (x_n) прямує до числа c.

Оскільки функція f неперервна в точці c, то послідовність $(f(x_n))$ має збігатися до числа $f(c)$. Але це не так, оскільки $(f(x_n))$ — розбіжна послідовність. Отримана суперечність завершує доведення першої теореми Веєрштрасса. ▲

6. Перша чудова границя

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ця функція не визначена в точці $x_0 = 0$. Проте в цій точці існує границя функції f. Доведемо, що має місце така рівність:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad (1)$$

Лема 6.1. *Якщо* $|x| < 1$ *і* $x \neq 0$, *то* $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$.

Доведення. Нехай $x \in (0; 1)$. На рисунку 6.1 точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут x радіан. Оскільки $x \in (0; 1)$, тобто $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то точка P_x знаходиться в першій чверті.

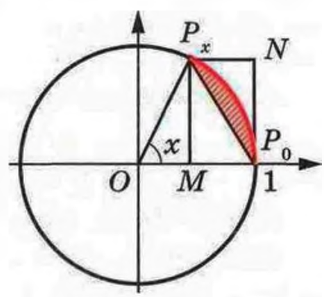


Рис. 6.1

Побудуємо прямокутник MP_xNP_0, для якого відрізок P_xP_0 є діагоналлю (рис. 6.1).

Оскільки $P_xM = \sin x$ і $OM = \cos x$, то

$$S_{\Delta P_xNP_0} = \frac{1}{2}\sin x(1 - \cos x) = \sin x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Оскільки $x \in (0; 1)$, то за лемою 3.1 отримуємо: $\sin x \leqslant x$; $\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Отже, $S_{\Delta P_xNP_0} = \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \leqslant x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4}$.

Очевидно, що площа заштрихованого сегмента менша від площі трикутника P_xNP_0.

Маємо: $S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сект } P_xOP_0} - S_{\Delta P_xOP_0} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x.$

Тепер можна записати: $0 < \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x < \frac{x^3}{4}.$

Звідси з урахуванням того, що $x \in (0;\ 1)$, отримуємо

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Оскільки функції $y = 1 - \frac{\sin x}{x}$ і $y = \frac{x^2}{2}$ є парними, то остання подвійна нерівність виконується також для всіх x з проміжку $(-1;\ 0)$. ▲

Тепер доведемо рівність (1).

Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$ Тоді існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| < 1.$

У силу леми 6.1 для будь-якого $n > n_0$ виконуються нерівності

$$0 < 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{x_n^2}{2}.$$

Тоді за теоремою про двох конвоїрів («Алгебра-10», теорема 45.5) отримуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sin x_n}{x_n}\right) = 0.$

Оскільки послідовність (x_n) обрано довільно, то доходимо висновку, що $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$ тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Цю рівність називають **першою чудовою границею.**

Нескладно показати, що має місце більш загальний факт: якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ і в жодному проколотому δ-околі точки x_0 функція g тотожно не дорівнює нулю, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin g(x)}{g(x)} = 1.$

Рівність $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ показує, що при досить малих значеннях x виконується наближена рівність $\sin x \approx x$. Більш того, з леми 6.1 випливає, що коли $|x| < 1$, то виконується нерівність $|x - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{2}.$ Тому абсолютна похибка наближеної формули

$\sin x \approx x$, де $|x| < 1$, не перевищує $\frac{|x|^3}{2}$. Наприклад, якщо $x = 0{,}1$, то $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$ з точністю не менше ніж $\frac{0{,}1^3}{2} = 0{,}0005$.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$ ●

ПРИКЛАД 2 Обчисліть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$ ●

ПРИКЛАД 3 Обчисліть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = 6 \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 6 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2} = \frac{6}{1^2} = 6.$$ ●

ПРИКЛАД 4 Обчисліть границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{x}{\arcsin x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin (\arcsin x)}{\arcsin x}} = 1.$$ ●

Вправи

6.1.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{\sin \frac{x}{3}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2}$.

6.2.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{6x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin\dfrac{x}{4}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\dfrac{x}{3}}{3x^3}$.

6.3.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 13x}{\sin^2 x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}x(\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x)$.

6.4.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 2x}{1-\cos 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos x}{4x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x}{\sin 6x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} 5x-\operatorname{ctg} x)\,x$.

6.5.° Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$.

6.6.° Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\arccos x)}{\arccos x}$.

6.7.° Нехай $x_n = n\sin\dfrac{1}{n}$. Знайдіть границю послідовності (x_n).

6.8.° Нехай $x_n = \dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{1}{n}}{n^2}$. Знайдіть границю послідовності (x_n).

6.9.° У коло радіуса R послідовно вписують правильні n-кутники, $n \geqslant 3$. Використовуючи першу чудову границю, покажіть, що:

1) послідовність периметрів цих многокутників прямує до числа $2\pi R$;

2) послідовність площ цих многокутників прямує до числа πR^2.

6.10.° Навколо кола радіуса r послідовно описують правильні n-кутники, $n \geqslant 3$. Використовуючи першу чудову границю, покажіть, що:

1) послідовність периметрів цих многокутників прямує до числа $2\pi r$;

2) послідовність площ цих многокутників прямує до числа πr^2.

6.11.** Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 3x}$;   2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\sin 3x}$;   3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$.

6.12.** Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 5x}$;   2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$;   3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{4x - \pi}{3 \arcsin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

6.13.** Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \dfrac{\pi}{2}}$;   2) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{5}} \dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{5} + x\right)}{(5x + \pi)^2}$;   3) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$.

6.14.** Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to -\frac{3\pi}{2}} \dfrac{2x + 3\pi}{\cos x}$;   2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 - \sqrt{2} \cos x}$;   3) $\lim\limits_{x \to -2} (x + 2) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}$.

6.15.** При яких значеннях параметра a функція f є неперервною в точці $x_0 = 0$?

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 3ax}{2x^2}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 2a^2 + a, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

6.16.** При яких значеннях параметра a є неперервною в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos ax}{x^2}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } x = 0? \end{cases}$

6.17.** Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \sin \sin x}{x}$.

6.18.** Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{tg} \operatorname{tg} x^2}$.

6.19.* Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$.

6.20.* Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

6.21.* Послідовність (a_n) задано такими умовами: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$.

7. Асимптоти графіка функції

На рисунку 7.1 зображено графік функції $y=\operatorname{arctg} x$. Якщо значення аргументу x обирати все більшими й більшими, то відповідні значення функції $y=\operatorname{arctg} x$ усе менше й менше відрізнятимуться від числа $\dfrac{\pi}{2}$.

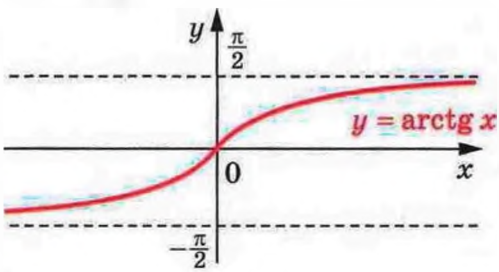


Рис. 7.1

Іншими словами, якщо довільна послідовність значень аргументу необмежено зростає, то відповідна послідовність значень функції $y=\operatorname{arctg} x$ прямує до числа $\dfrac{\pi}{2}$.

У такому випадку говорять, що число $\dfrac{\pi}{2}$ є *границею функції* $y=\operatorname{arctg} x$ *при* $x\to+\infty$. Цей факт записують так: $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}$ (використовують і такий запис: $\operatorname{arctg} x\to\dfrac{\pi}{2}$ при $x\to+\infty$).

Можна також сказати, що $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Мають місце і такі рівності: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ (рис. 7.2), $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg} x=\pi$ (рис. 7.3).

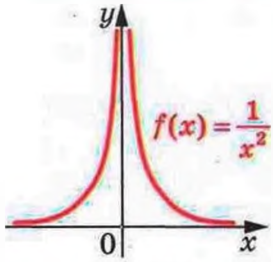


Рис. 7.2

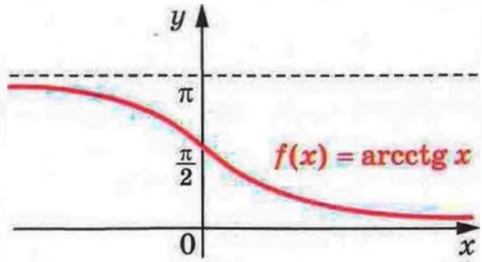


Рис. 7.3

Тепер, коли ви отримали уявлення про границю функції при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), перейдемо до формування строгого означення.

Розглянемо, наприклад, послідовність (a_n) таку, що $a_n = n^2$. Легко зрозуміти, що для довільного додатного числа C знайдеться такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $a_n > C$, тобто члени послідовності (a_n), починаючи з деякого номера, стають більшими за будь-яке наперед задане додатне число. У такому випадку пишуть: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

Також можна записати: $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n + (-1)^n\right) = +\infty$.

Зазначимо, що послідовності із загальними членами $x_n = 2^n$, $y_n = n + (-1)^n$ є розбіжними.

Запис $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$ не означає, що послідовність (a_n) має границю.

Нехай послідовність (a_n) має таку властивість: для довільного від'ємного числа C знайдеться такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $a_n < C$, тобто члени послідовності (a_n), починаючи з деякого номера, стають меншими від будь-якого наперед заданого від'ємного числа. У такому випадку пишуть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

Наприклад, $\lim\limits_{n \to \infty} (-n) = -\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$.

Зазначимо, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$ тоді і лише тоді, коли $\lim\limits_{n \to \infty} (-a_n) = -\infty$.

Також легко показати (зробіть це самостійно), що коли $a_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то з умови $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$ або з умови $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Наприклад, $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} = +\infty$, тоді $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

$$\lim_{n \to \infty} (-n^2) = -\infty, \text{ тоді } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{-n^2} = 0.$$

Розглянемо функцію f, область визначення якої містить таку послідовність (x_n), що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Означення. **Число a називають границею функції f при $x \to +\infty$, якщо для будь-якої послідовності (x_n) значень аргументу функції f такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції збігається до числа a.**

Пишуть: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

Тепер розглянемо функцію f, область визначення якої містить таку послідовність (x_n), що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Означення. **Число a називають границею функції f при $x \to -\infty$, якщо для будь-якої послідовності (x_n) значень аргументу функції f такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції збігається до числа a.**

Пишуть: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

Користуючись означенням, покажемо, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = \frac{1}{x}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Тоді послідовність $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, ..., $\frac{1}{x_n}$, ... є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Сказане означає, що $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Також нескладно показати, що $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Зауважимо, що коли $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, то пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Границі функції при $x \to \infty$ притаманні властивості, аналогічні властивостям границі функції в точці. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення.

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$, то:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)\,g(x)) = ab$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Довести ці рівності можна аналогічно тому, як були доведені теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці.

Зауважимо, що такі самі властивості виконуються і для границі функції при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$.

ПРИКЛАД Обчисліть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{1-0}=2. \bullet$$

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$, то при при $x\to+\infty$ відстань від точки M до прямої $y=\frac{\pi}{2}$ прямує до нуля (рис. 7.4). У цьому разі говорять, що пряма $y=\frac{\pi}{2}$ **є горизонтальною асимптотою графіка функції** $y = \operatorname{arctg} x$ при $x\to+\infty$. Також можна показати, що пряма $y=-\frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ при $x\to-\infty$.

Означення. Пряму $y = a$ називають **горизонтальною асимптотою** графіка функції f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a\right)$.

Так, прямі $y = 0$ і $y = \pi$ є горизонтальними асимптотами графіка функції $y = \operatorname{arcctg} x$ відповідно при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ (рис. 7.5).

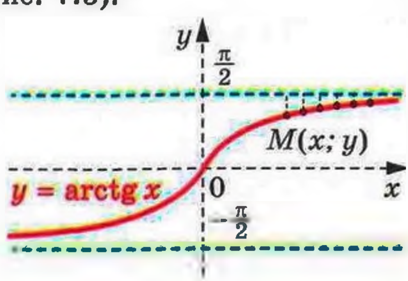


Рис. 7.4

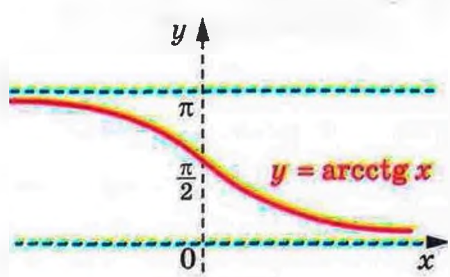


Рис. 7.5

Приклад, розглянутий вище, показує, що пряма $y = 2$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$. Графік цієї функції зображено на рисунку 7.6.

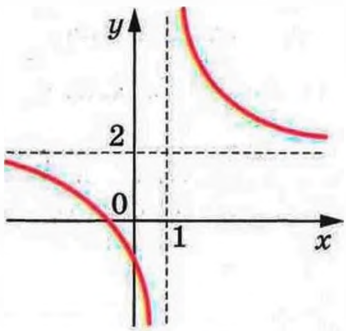


Рис. 7.6

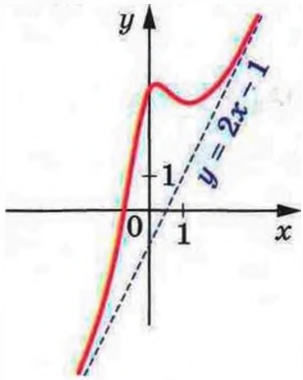


Рис. 7.7

Розглянемо функцію $f(x)=2x-1+\dfrac{6}{x^2+1}$. Очевидно, що при $x \to +\infty$ значення функції f все менше і менше відрізняються від відповідних значень лінійної функції $y = 2x - 1$, тобто $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-1))=0$ (рис. 7.7). Це означає, що при $x \to +\infty$ відстань від точки графіка функції f до відповідної точки прямої $y = 2x - 1$ прямує до нуля.

У цьому разі говорять, що пряма $y = 2x - 1$ є **похилою асимптотою** графіка функції $f(x)=2x-1+\dfrac{6}{x^2+1}$ при $x \to +\infty$. Також пряма $y = 2x - 1$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to -\infty$.

Означення. Пряму $y = kx + b$ називають **похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)**, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-b)=0\right)$.

Коли в рівнянні $y = kx + b$ похилої асимптоти $k=0$, то з означення випливає рівність $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-b)=0$. Звідси $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$. Тому пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Таким чином, горизонтальну асимптоту можна розглядати як окремий випадок похилої асимптоти.

Для графіка функції $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ пряма $y = x$ є його похилою асимптотою при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$. Справді, $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x)-x)=$ $=\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x-1}=0$. Але якщо розглядувану функцію $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ подано у вигляді $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, то здогадатися, що пряма $y = x$ є похилою асимптотою її графіка, досить важко. Пошук похилої асимптоти полегшує така теорема.

Теорема 7.1. ***Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності***

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x)-kx)=b. \tag{2}$$

Доведення. Нехай числа k і b задовольняють рівності (1) і (2). Доведемо, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f.

Маємо: $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-kx-b)=\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-kx)-\lim\limits_{x \to +\infty}b=b-b=0.$

Це означає, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f.

Нехай пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Тоді $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Звідси $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-kx)=b$. Крім цього, маємо:

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to +\infty}\frac{kx+(f(x)-kx)}{x}=$$

$$=\lim_{x \to +\infty}k+\lim_{x \to +\infty}(f(x)-kx)\cdot\lim_{x \to +\infty}\frac{1}{x}=k+b\cdot 0=k. \blacktriangle$$

Теорема 7.1 дозволяє шукати похилі (горизонтальні) асимптоти графіка функції f при $x \to +\infty$ за такою схемою.

1. Знайти число k, де $k=\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x}$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \to +\infty$ не має похилої асимптоти.
2. Знайти число b, де $b=\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-kx)$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \to +\infty$ не має похилої асимптоти.

3. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$.

Аналогічна схема працює для пошуку похилої (горизонтальної) асимптоти при $x \to -\infty$.

Повертаючись до розглянутого вище прикладу, покажемо, як працює ця схема для пошуку похилої асимптоти графіка функції $f(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x^2 + 1}$ при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.

Маємо: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x(x^2 + 1)} \right) = 2;$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to \infty} \left(-1 + \frac{6}{x^2 + 1} \right) = -1.$$

Отже, пряма $y = 2x - 1$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.

На рисунку 7.8 зображено графік функції $y = f(x)$. Розглянемо функцію f при $x > x_0$. Якщо такі значення аргументу x обирати все ближче й ближче до точки x_0, то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими і можуть стати більшими від будь-якого наперед заданого додатного числа. Іншими словами, якщо послідовність (x_n) аргументів функції f задовольняє умови $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ і $x_n > x_0$, де $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$. Цей факт записують так: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$. У цьому випадку пряму $x = x_0$ називають **вертикальною асимптотою** графіка функції f, коли x прямує до x_0 справа.

Міркуючи аналогічно, можна сказати, що $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$. Тому пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції f, коли x прямує до x_0 зліва.

Наприклад, $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{1 - x} = -\infty$ і $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{1}{1 - x} = +\infty$ (рис. 7.9). Тому $x = 1$ — вертикальна асимптота графіка функції $y = \frac{1}{1 - x}$, коли x прямує до $x_0 = 1$ як справа, так і зліва.

Наведемо ще кілька прикладів.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 2-} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to 2+} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$ (у таких випадках пишуть $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$), то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x)=\frac{1}{|x-2|}$ при $x \to 2+$ і при $x \to 2-$ (рис. 7.10).

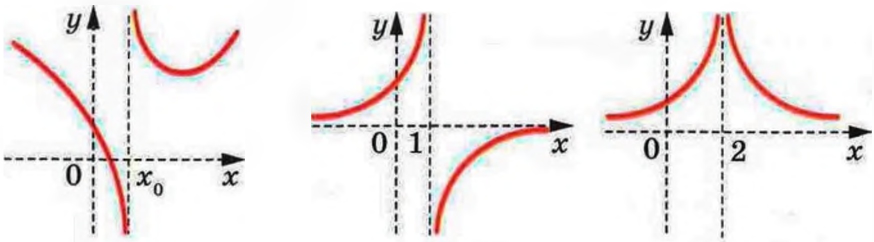


Рис. 7.8 Рис. 7.9 Рис. 7.10

Оскільки $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, то пряма $x = \frac{\pi}{2}$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}-$ і при $x \to \frac{\pi}{2}+$. Ураховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, можна стверджувати, що кожна з прямих $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2} + \pi k +$ і при $x \to \frac{\pi}{2} + \pi k -$ (рис. 7.11).

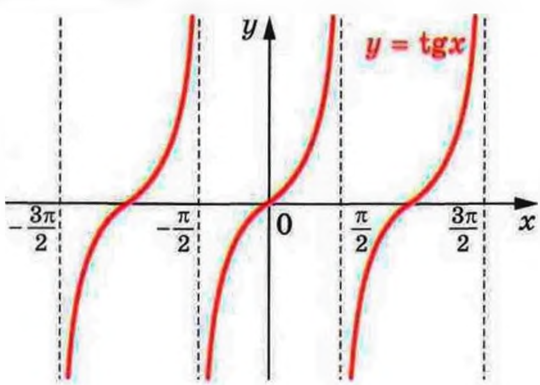


Рис. 7.11

Інших вертикальних асимптот графік функції $y = \operatorname{tg} x$ не має, оскільки вона неперервна в кожній точці x_0, відмінній від $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Узагалі, *якщо функція неперервна в точці* x_0, *то пряма* $x = x_0$ *не є вертикальною асимптотою її графіка.*

Вправи

7.1.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ для послідовностей із загальним членом:

1) $a_n = -2n$;
2) $a_n = \frac{n+1}{n}$;
3) $a_n = \sqrt{n}$;
4) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;
5) $a_n = \sin n$.

7.2.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ для послідовностей із загальним членом:

1) $a_n = n^3$;
2) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
3) $a_n = \frac{2n-1}{n}$;
4) $a_n = \frac{2n^2+3}{n+1}$;
5) $a_n = \cos n$.

7.3.° Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 - \frac{5}{x}\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{x-2}$;
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5x+1}{x^2+5x+10}$;
6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-1}{x^3+x^2+x+1}$.

7.4.° Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + \frac{3}{x}\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+3}$;
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$;
6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^4+2x^2-1}{3x^5+2x^3-1}$.

7.5.° Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y = \frac{3x+5}{4x-1}$;
2) $y = \frac{x^2-1}{2x^2+x-1}$;
3) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

7.6.° Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y = \frac{2-x}{3x+2}$;
2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-x+2}$;
3) $y = \frac{x^2+1}{x^3+2}$.

7.7.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ для функції:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $x_0 = \pi$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

7.8.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ для функції:

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^4}$, $x_0 = -3$;

2) $f(x) = -|\operatorname{tg} x|$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+7}\right)^5$, $x_0 = -7$.

7.9.° Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{|x+\sqrt{2}|}$;

4) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{\arccos x}$.

7.10.° Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$;

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg} x$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$.

7.11.° Обчисліть $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$.

7.12.° Обчисліть $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$.

7.13.° Чи може графік функції мати дві різні похилі асимптоти при $x \to +\infty$?

7.14.° Знайдіть похилі асимптоти графіка функції:

1) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x-1}$;

3) $f(x) = \dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$;

4) $f(x) = \dfrac{x^4 - 8}{(x+1)^4}$.

7.15.° Знайдіть похилі асимптоти графіка функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

7.16.** Графік функції f має асимптоту. Чи може бути так, що графік функції f перетинає асимптоту нескінченну кількість разів?

7.17.** Зростаюча функція f така, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=0$. Чи обов'язково графік функції f має горизонтальну асимптоту при $x\to+\infty$?

7.18.** Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції

$$y=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x+2}.$$

7.19.** Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2-x}.$$

7.20.** Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y=-x-\sqrt{x^2-x+2}$;

2) $y=\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$.

7.21.** Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

2) $y=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+2x}$.

7.22.** Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x)=\sqrt{x^2+x}+2x$.

7.23.** Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

7.24.** Василь Заплутайко шукає асимптоту графіка функції $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ при $x\to+\infty$ так:

1) при $x>0$ виконуються рівності $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}=x\cdot\sqrt{1+\dfrac{x+1}{x^2}}$;

2) оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1$, то при $x\to+\infty$ графік функції f майже не відрізняється від прямої $y=x$;

3) тому пряма $y=x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x\to+\infty$.

Чи погоджуєтеся ви з міркуваннями Василя?

7.25.* Про функцію f відомо, що $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. Чи обов'язково пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою її графіка?

7.26.* Графіки функцій f і g є рівними фігурами. Чи обов'язково графік функції g має асимптоту, якщо графік функції f має асимптоту?

7.27.* Функція f така, що при кожному $x > 0$ виконується рівність $\lim\limits_{n \to \infty} f(nx) = 0$. Чи обов'язково $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

7.28.* Числа a, b, c такі, що при кожному $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $an^2 + bn + c$ є четвертим степенем натурального числа. Доведіть, що $a = b = 0$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Дивні функції

У підручнику 9-го класу ви могли ознайомитися з історією розвитку поняття функції. Термін «функція» з'явився наприкінці XVII ст. і ще до недавніх часів уточнювався й удосконалювався. У чому ж причина такої багаторічної дискусії науковців? Чому «ламали списи» Ейлер і Д'Аламбер? Розкажемо про один аспект цього складного питання.

Наочною ілюстрацією функції є її графік, тому, знайомлячись з поняттям функції, часто наводять приклади графіків функцій (рис. 7.12).

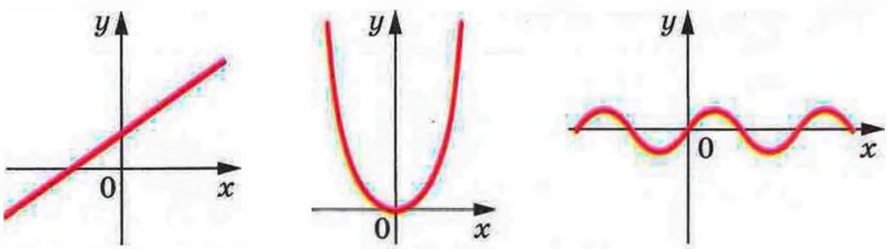


Рис. 7.12

Саме такі «гарні» криві намагалися описати вчені, даючи перші означення функції. Проте час від часу в дослідженнях науковців виникала необхідність і в менш «привабливих» кривих, графіки яких мали злами або складалися з кількох окремих частин (рис. 7.13).

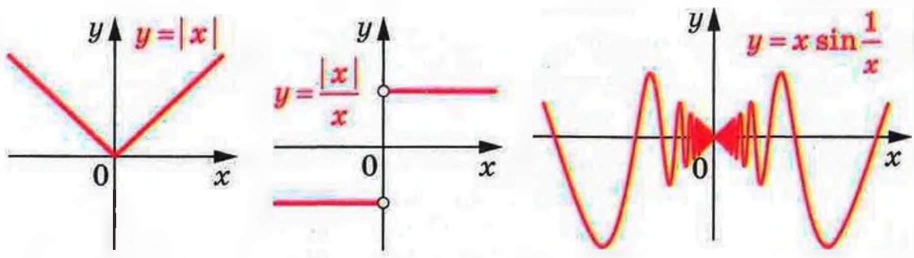


Рис. 7.13

Слід відзначити, що в ті часи функцію розглядали насамперед як модель певного реального процесу. Питання про існування в реальному світі явищ, які коректно описувати кривими, зображеними на рисунку 7.13, є глибокими, істотними та непростими для природознавців. Тому одна частина вчених відмовлялася вважати такі рисунки графіками функцій, інша ж — навпаки.

Перемогла друга точка зору, яка узаконила функції на кшталт модуля, цілої та дробової частин тощо. На початку XIX сторіччя з'явилося майже сучасне означення функції. Функції почали вивчати як самостійні і незалежні від реальних процесів об'єкти.

Такий підхід сприяв розвитку математики і, як це не дивно, фізики та інших природничих наук, оскільки дозволив віднайти та описати нові та складні явища.

Сучасне означення залучає до множини функцій доволі дивні об'єкти.

Так, ви вже добре знайомі з функцією Діріхле

$$\mathfrak{D}(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\in\mathbb{Q},\\ 0, \text{ якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

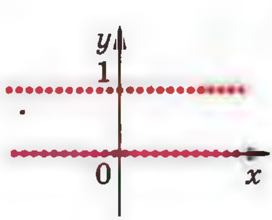


Рис. 7.14

Якщо подивитися на зображення графіка функції Діріхле (рис. 7.14), то може помилково здатися, що графік складається з двох прямих $y=0$ і $y=1$, тобто одному значенню аргументу відповідає одразу два значення функції, що взагалі суперечить означенню функції. Насправді кожна з цих «прямих» має безліч «дірок».

Виявляється, серед функцій, що задовольняють сучасному означенню, існують ще більш дивні створіння. Якщо зображенням графіка функції Діріхле є ніби дві прямі, то існують функції, для зображення графіка яких треба позначити, так би мовити, усю площину! Точне формулювання таке: існує функція, що кожний круг на площині містить точки її графіка. Оскільки згаданий круг може мати як завгодно малий радіус і довільний центр, то зображення графіка такої функції не залишить на площині жодної як завгодно малої «частини» без своїх точок.

У цьому оповіданні побудуємо таку функцію f, яка визначена на проміжку $[0;1)$ і на кожному інтервалі $(a;b)\subset[0;1)$ набуває всіх значень з $[0;+\infty)$.

Графік такої функції f «зафарбовує» смугу, яка задається системою нерівностей $\begin{cases}0<x<1,\\0\leqslant y.\end{cases}$

Нехай $x=0,a_1a_2a_3\ldots$ — десятковий запис[1] числа $x\in[0;1)$, де a_i — цифри цього запису. Значення функції $f(x)$ залежатиме від того, чи буде періодичним десятковий дріб $0,a_1a_3a_5\ldots$, утворений з цифр числа x, що стоять на непарних місцях.

У випадку, коли x — таке число, що десятковий дріб $0,a_1a_3a_5\ldots$ неперіодичний, покладемо $f(x)=0$.

Якщо ж $0,a_1a_3a_5\ldots$ — періодичний десятковий дріб з довжиною періоду l і передперіодом $0,a_1a_3\ldots a_{2k-1}$, то десятковий запис $f(x)$ матиме вигляд:

$$f(x)=a_{2k}a_{2(k+1)}\ldots a_{2(k+l-1)},a_{2(k+l)}a_{2(k+l+1)}\ldots$$

Наприклад, обчислимо $f(x_0)$ для числа $x_0=0{,}52431114111519\ldots$. Для цього виділимо цифри (червоні), що стоять на непарних місцях. Утворився періодичний десятковий дріб $0{,}541111111\ldots$ з періодом завдовжки $l=1$ і передперіодом $0{,}54$. Запишемо цифри (блакитні), що стоять на парних місцях, починаючи з останньої цифри передперіоду $(0{,}54)$ червоного числа. Маємо

$$314159\ldots$$

Поставивши кому після першої (довжина періоду червоного числа $l=1$) блакитної цифри, отримаємо

$$f(x_0)=3{,}14159\ldots$$

[1] Як відомо, деякі раціональні числа мають по два записи у вигляді нескінченних десяткових дробів, наприклад $0{,}5000\ldots=0{,}4999\ldots$. Якщо далі за числом x треба буде знайти його десятковий запис, то домовимося розглядати лише перший варіант запису.

Неважко зрозуміти, що наведене обчислення $f(x_0)$ можна виконати у «зворотному порядку», тобто за даним числом $y_0 \in [0; +\infty)$ і проміжком $(a; b) \subset [0; 1)$ можна знайти таке число x_0, що $f(x_0) = y_0$ і $x_0 \in (a; b)$.

Наприклад, для інтервалу $(a; b) = (0{,}361; 0{,}364)$ і значення $y_0 = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ число x_0 можна обрати так:

$$x_0 = 0{,}3611242124222\ldots$$

Тут непарні (червоні) цифри утворюють періодичний десятковий дріб $0{,}31222222\ldots$ з періодом завдовжки $l = 1$ і передперіодом $0{,}31$. Блакитні цифри задають значення числа $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ (перша блакитна цифра йде наступною за останньою цифрою передперіоду червоного числа).

За число x_0 можна було б обрати і, наприклад, таке число:

$$x_0 = 0{,}363114111414121\ldots$$

(тут непарні (червоні) цифри утворюють періодичний дріб $0{,}33111111\ldots$ з періодом завдовжки $l = 1$ і передперіодом $0{,}33$); або таке число:

$$x_0 = 0{,}362{*}711411114121\ldots$$

(тут зірочкою * позначено довільну цифру, непарні (червоні) цифри утворюють періодичний дріб $0{,}3271111111\ldots$ з періодом завдовжки $l = 1$ і передперіодом $0{,}327$).

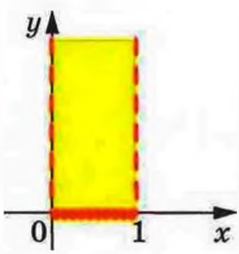


Рис. 7.15

Таким чином, функцію f побудовано. Рисунок 7.15 дає уявлення про графік функції f.

Зауважимо, що графік побудованої функції f можна «поширити» на всю координатну площину, тобто побудувати таку визначену на $\mathbb{R}$ функцію g, яка на кожному інтервалі $(a; b) \subset \mathbb{R}$ набуває всіх значень з $\mathbb{R}$.

§ 2. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

8. Приріст функції. Задачі, які приводять до поняття похідної

Якщо функція є математичною моделлю реального процесу, то часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках. Наприклад, позначимо через $f(t)$ і $f(t_0)$ суми коштів, які накопичилися на депозитному[1] рахунку вкладника до моментів часу t і t_0. Тоді різниця $f(t) - f(t_0)$, де $t > t_0$, показує прибуток, який отримає вкладник за час $t - t_0$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x — довільна точка області визначення функції f така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають **приростом аргументу функції f у точці x_0** і позначають Δx (читають: «дельта ікс»)[2]. Маємо:

$$\Delta x = x - x_0. \text{ Звідси}$$
$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорять, що аргумент **отримав приріст** Δx у точці x_0.

Зазначимо, що приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx, то значення функції f змінилося на величину $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Цю різницю називають **приростом функції f у точці x_0** і позначають Δf (читають: «дельта еф»).

---

[1] Депозит (банківський вклад) — кошти, які вкладник передає банку на деякий строк, за що банк виплачує вкладнику проценти.

[2] Говорячи про приріст аргументу функції f у точці x_0, тут і далі будемо припускати, що в будь-якому інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ є точки області визначення функції f, відмінні від x_0.

Маємо:

$$\Delta f = f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0) \text{ або}$$
$$\Delta f = f\,(x) - f\,(x_0).$$

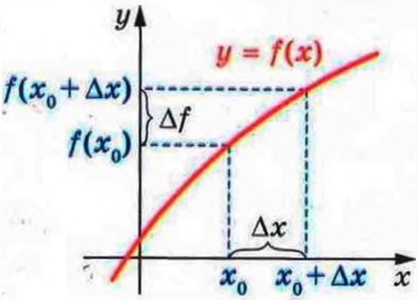


Рис. 8.1

Для приросту функції $y = f\,(x)$ також прийнято позначення Δy, тобто

$$\Delta y = f\,(x) - f\,(x_0) \text{ або}$$
$$\Delta y = f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0).$$

Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції показано на рисунку 8.1.

Зазначимо, що для фіксованої точки x_0 приріст функції f у точці x_0 є функцією з аргументом Δx.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть приріст функції $y = x^2$ у точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Відповідь: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Задача про миттєву швидкість

Нехай автомобіль, рухаючись прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях у 120 км. Тоді його середня швидкість руху дорівнює $v_{\text{сер}} = \frac{120}{2} = 60$ (км/год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших — повільніше, інколи міг зупинятися.

Разом з цим у будь-який момент часу спідометр автомобіля показував деяку величину — швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти більш повно характеризує рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s\,(t)$. Тим самим задано функцію $y = s\,(t)$, яка дозволяє визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху** точки.

З курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою $s(t)=s_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$, де s_0 — координата точки на початку руху (при $t=0$), v_0 — початкова швидкість, a — прискорення.

Нехай, наприклад, $s_0=0$, $v_0=1$ м/с, $a=2$ м/с^2. Тоді $s(t)=t^2+t$.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в точці t_0 приріст Δt, тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs, де

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\underbrace{(t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)}-\underbrace{(t_0^2+t_0)}_{s(t_0)}=$$

$$=t_0^2+2t_0\Delta t+\Delta t^2+t_0+\Delta t-t_0^2-t_0=2t_0\Delta t+\Delta t+\Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{сер}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ дорівнює відношенню

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2t_0\Delta t+\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}=2t_0+1+\Delta t,\text{ тобто } v_{сер}(\Delta t)=2t_0+1+\Delta t.$$

Позначення для середньої швидкості $v_{сер}(\Delta t)$ наголошує, що при заданому законі руху $y=s(t)$ і фіксованому моменті часу t_0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt.

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0+\Delta t$, то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості $v_{сер}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{сер}(\Delta t)$ середньої швидкості майже не змінюється. Чим менше Δt, тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0. Іншими словами, якщо при $\Delta t\to 0$ значення $v_{сер}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0.

У нашому прикладі, якщо $\Delta t\to 0$, то значення виразу $2t_0+1+\Delta t$ прямують до числа $2t_0+1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}(2t_0+1+\Delta t)=2t_0+1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y=s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}v_{сер}(\Delta t),\text{ тобто}$$

$$\boxed{v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}}$$

Задача про дотичну до графіка функції

Відоме означення дотичної до кола як прямої, яка має з колом тільки одну спільну точку, незастосовне у випадку довільної кривої.

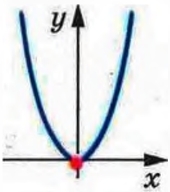


Рис. 8.2

Наприклад, вісь ординат має з параболою $y = x^2$ тільки одну спільну точку (рис. 8.2). Проте інтуїція підказує, що неприродно вважати цю пряму дотичною до вказаної параболи. Разом з тим у курсі алгебри ми нерідко казали, що парабола $y = x^2$ дотикається до осі абсцис у точці $x_0 = 0$.

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M — деяка точка, яка лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (рис. 8.3). Уявимо собі, що точка M, рухаючись по параболі, наближається до точки O. При цьому січна OM буде повертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM і віссю абсцис ставатиме все меншим і меншим, і січна OM прагнутиме зайняти положення осі абсцис.

Пряму, положення якої прагне зайняти січна OM при наближенні точки M до точки O, називатимемо дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O.

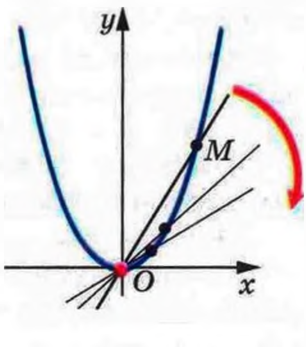


Рис. 8.3

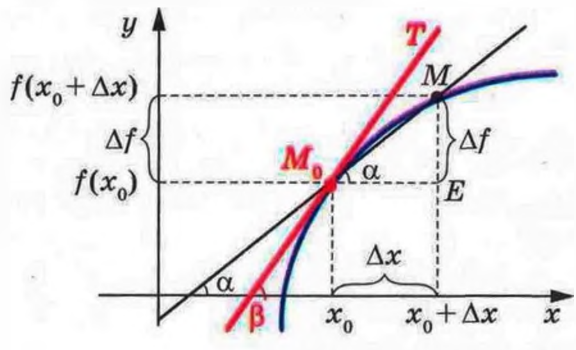


Рис. 8.4

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку M_0 $(x_0; f(x_0))$. У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку M $(x; f(x))$, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 8.4).

З рисунка видно, що коли Δx стає все менше і менше, то точка M, рухаючись по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta x \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої (на рисунку 8.4 це пряма M_0T), то таку пряму називають **дотичною до графіка функції f у точці M_0.**

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α. Як відомо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$, тобто $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, що $\angle MM_0E = \alpha$ (рис. 8.4). Тоді з $\Delta\ MM_0E$ отримуємо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уведемо позначення $k_{\text{січн}}(\Delta x)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим наголошуючи, що для даної функції f і фіксованої точки x_0 кутовий коефіцієнт січної M_0M визначається через приріст Δx аргументу.

Маємо: $k_{\text{січн}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β ($\beta \neq 90°$). Тоді її кутовий коефіцієнт $k\ (x_0)$ дорівнює $\operatorname{tg}\beta$.

Природно вважати, що чим менше Δx, тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січн}}\ (\Delta x) \to k\ (x_0)$.

Узагалі, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 визначають за допомогою формули

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{січн}}\ (\Delta x), \text{ тобто}$$

$$\boxed{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0. Який кут з додатним напрямом осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -\dfrac{1}{2}$?

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - \left(-x_0^2\right) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2.$$

Тоді, скориставшись формулою для обчислення кутового коефіцієнта дотичної, можна записати:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0.$$

Ця формула дозволяє обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -x^2$ у будь-якій точці, зокрема в точці з абсцисою $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Маємо: $k\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$

Нехай дотична до параболи в точці з абсцисою $x_0=-\frac{1}{2}$ утворює кут α ($0 \leqslant \alpha < \pi$ і $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) з додатним напрямом осі абсцис. Тоді її кутовий коефіцієнт дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Вище ми встановили, що $k\left(-\frac{1}{2}\right)=1$. Звідси $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

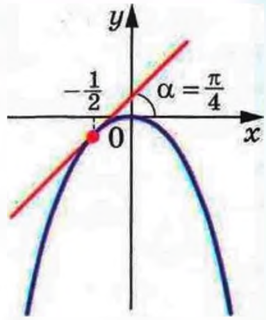


Рис. 8.5

Оскільки $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha=\frac{\pi}{4}$ (рис. 8.5). ●

Вправи

8.1.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x)=\frac{6}{x}$, $x_0 = 1{,}2$, $\Delta x = -0{,}3$.

8.2.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

8.3.° Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо: 1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

8.4.° Для функції $f(x) = x^3$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$.

8.5.° Для функції $f(x) = x^2 - x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

8.6.° Для функції $f(x) = 5x + 1$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

8.7.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.

8.8.° Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 5t^2$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть: 1) середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с; 2) миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 1$ с.

8.9.° Електронагрівач від початку роботи за час t виділив $Q(t) = t^2 + 2t$ одиниць теплової енергії, де $0 \leqslant t \leqslant T$. Знайдіть:

1) середню потужність[1] нагрівача на проміжку часу від 0 до T;
2) кількість теплової енергії, яку виділив нагрівач за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
3) середню потужність нагрівача за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
4) потужність нагрівача в момент часу t_0.

8.10.° Під час хімічної реакції з речовин A і B утворюється речовина C. Через час t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ від початку реакції кількість речовини C, що утворилася, дорівнює $f(t) = 4t - t^2$. Знайдіть:

1) середню швидкість хімічної реакції[2] на проміжку часу від 0 до T;
2) кількість речовини C, яка утворилася за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
3) середню швидкість хімічної реакції за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
4) миттєву швидкість хімічної реакції в момент часу t_0.

8.11.° Кількість продукції, виготовленої робітником від початку роботи до моменту часу t $(0 \leqslant t \leqslant T)$, дорівнює $f(t) = 10t - 3t^2$. Знайдіть:

1) середню продуктивність[3] праці робітника на проміжку часу від 0 до T;
2) кількість продукції, яку виготовив робітник за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;

---

[1] Середня потужність нагрівача, який за проміжок часу t виділив Q одиниць теплової енергії, дорівнює $P = \frac{Q}{t}$.

[2] Середня швидкість хімічної реакції за продуктом реакції, під час якої за час t утворилося M одиниць речовини, дорівнює $v_R = \frac{M}{t}$.

[3] Середня продуктивність праці робітника, який за проміжок часу t виготовив S одиниць продукції, дорівнює $\frac{S}{t}$.

3) середню продуктивність праці робітника за проміжок часу між t_0 і $t_0+\Delta t$;

4) продуктивність праці робітника в момент часу t_0.

8.12.• На координатній прямій лежить стержень OA, площа перерізу якого дорівнює S. Кінці стержня O і A мають координати $x=0$ і $x=a$ відповідно. Відомо, що маса частини стержня, яка лежить на відрізку $[0; x]$ координатної прямої, дорівнює $m(x)=2aSx-Sx^2$, де $x\in[0; a]$. Знайдіть:

1) середню густину[1] речовини, з якої виготовлено стержень;

2) масу частини стержня між точками x_0 та $x_0+\Delta x$;

3) середню густину речовини, з якої виготовлено частину стержня між точками x_0 та $x_0+\Delta x$;

4) густину речовини, з якої виготовлено стержень, у точці x_0.

8.13.• Тіло рухалося по координатній прямій від початку координат до точки $x=a$ під дією сили, яка виконувала при цьому роботу $A(x)=x^3$, де $x\in[0; a]$ — координата тіла. Знайдіть:

1) середню величину сили[2], яка діяла на тіло під час його руху від початку координат до точки $x=a$;

2) виконану роботу під час руху тіла між точками з координатами x_0 та $x_0+\Delta x$;

3) середню величину сили, яка діяла на тіло під час його руху між точками з координатами x_0 та $x_0+\Delta x$;

4) величину сили, яка діяла на тіло тоді, коли воно мало координату x_0.

8.14.• Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y=x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0=1$ і $x_1=1{,}6$;

2) дотичної до графіка функції $y=x^2$ у точці з абсцисою $x_0=1$.

8.15.• Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y=x^3$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0=2$ і $x_1=1$;

2) дотичної до графіка функції $y=x^3$ у точці з абсцисою $x_0=2$.

---

[1] Середня густина речовини, з якої виготовлено тіло масою m і об'ємом V, дорівнює $\rho=\frac{m}{V}$.

[2] Середня величина сили, яка виконала роботу A, перемістивши тіло на відстань x, дорівнює $F=\frac{A}{x}$.

9. Поняття похідної

У попередньому пункті, розв'язуючи дві різні задачі про миттєву швидкість матеріальної точки і про кутовий коефіцієнт дотичної, ми дійшли до однієї і тієї самої математичної моделі: границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

До аналогічних формул приводить розв'язання багатьох задач фізики, хімії, біології, економіки тощо. Це свідчить про те, що розглядувана модель заслуговує на особливу увагу. Її варто присвоїти назву, увести позначення, вивчити її властивості і навчитися їх застосовувати.

Означення. Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «еф штрих від ікс нульового»). Тоді можна записати:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

або

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Похідну функції f у точці x_0 можна обчислити за такою схемою:

1) надавши в точці x_0 аргументу приріст Δx, знайти відповідний приріст Δf функції:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) знайти відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто знайти границю $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції $f(x)=\frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотримуючись вищенаведеної схеми, запишемо:

1) $\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{1+\Delta x}-\frac{1}{1}=\frac{-\Delta x}{1+\Delta x}$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-\frac{1}{1+\Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значення виразу $-\frac{1}{1+\Delta x}$ прямують до числа -1, тобто $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{1+\Delta x}\right)=-1$.

Відповідь: -1.

Зазначимо, що, знайшовши значення $f'(1)$, ми тим самим знайшли кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дотичної, проведеної до графіка функції $f(x)=\frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$. Він дорівнює -1, тобто $k(1) = -1$. Тоді, позначивши через α кут, утворений цією дотичною з додатним напрямом осі абсцис, можемо записати: $\operatorname{tg}\alpha = -1$. Звідси $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ (рис. 9.1).

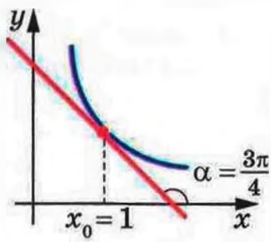


Рис. 9.1

Узагалі, можна зробити такий висновок: *кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, дорівнює похідній функції f у точці x_0*, тобто

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної.**

Також зрозуміло, що *коли $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює похідній функції $y = s(t)$ у точці t_0*, тобто

$$\boxed{v(t_0)=s'(t_0)}$$

Ця рівність виражає **механічний зміст похідної.**

Якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають **диференційовною в точці x_0.**

Нехай функція f диференційовна в точці x_0. З геометричного змісту похідної випливає, що до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести *невертикальну* дотичну (рис. 9.2). І навпаки, якщо до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну, то функція f диференційовна в точці x_0.

На рисунку 9.3 зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив або «злом». До їх графіків у точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичну. Ці функції не диференційовні в точці x_0.

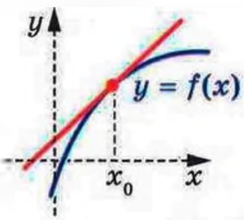


Рис. 9.2

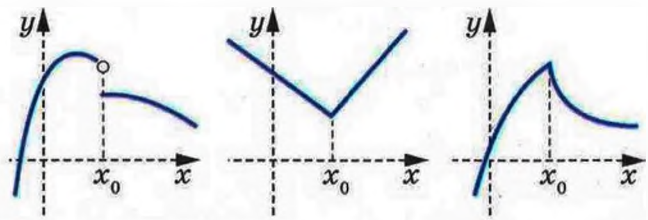


Рис. 9.3

На рисунку 9.4 зображено графіки функцій, які в точці з абсцисою x_0 мають вертикальну дотичну. Тому ці функції не диференційовні в точці x_0.

Рис. 9.4

Покажемо, наприклад, що функція $f(x) = |x|$, графік якої має «злом» у точці $x_0 = 0$, не є диференційовною в цій точці. Маємо:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$;

3) у прикладі 3 пункту 1 було показано, що функція $g(t) = \dfrac{|t|}{t}$ не має границі в точці $t_0 = 0$; це означає, що не існує границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, тобто функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Теорема 9.1. ***Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці.***

Доведення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0, то можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Останню рівність можна подати у вигляді $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що функція f є неперервною в точці x_0. ▲

Зазначимо, що неперервна в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в цій точці. Тому неперервність функції в точці є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції в цій точці (рис. 9.5).

Нехай M — множина точок, у яких функція f диференційовна. Кожному числу $x \in M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Тим самим задано функцію з областю визначення M. Цю функцію називають **похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f' або $y' = f'(x)$.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M, то говорять, що вона **диференційовна на множині** M. Наприклад, на рисунку 9.6 зображено графік функції, диференційовної на інтервалі I. На інтервалі I цей графік не має розривів і зломів.

Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають **диференційовною**.

Рис. 9.5

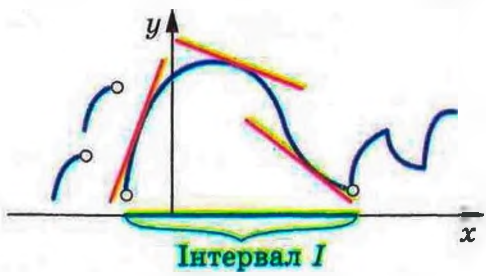


Рис. 9.6

Знаходження похідної функції f називають **диференціюванням** функції f.

ПРИКЛАД 2 Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) за означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то остання рівність означає, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = k$. ●

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k, також прийнято записувати таким чином:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (1)$$

Якщо у формулу (1) підставити $k = 1$ і $b = 0$, то отримаємо

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Якщо ж у формулі (1) покласти $k = 0$, то отримаємо

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Остання рівність означає, що похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x. \ ●$$

Останню рівність також прийнято записувати у вигляді

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (2)$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right) =$
$= \Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right)$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right)}{\Delta x} = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2$;

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right) = 3x_0^2$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 3x^2. \bullet$$

Останню рівність можна записати так:

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad (3)$$

Формули (2) і (3) є окремими випадками більш загальної формули:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \qquad (4)$$

Наприклад, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що похідна функції $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, дорівнює nx^{n-1}.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n$;

2) Нагадаємо, що $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Тоді можна записати:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1})}{\Delta x} =$$
$$= (x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1};$$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} ((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}) =$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1}}_{n \text{ доданків}} = nx_0^{n-1}.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = nx^{n-1}. \bullet$$

Формула (4) залишається справедливою для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ і $x \neq 0$, тобто

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}} \qquad (5)$$

Доведіть це твердження самостійно.

Наприклад, скористаємося формулою (5) для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ або

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

ПРИКЛАД 6 Продиференціюйте функцію $f(x) = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Нехай x_0 — довільна точка області визначення функції f, тобто $x_0 \geqslant 0$.

1) $\Delta f = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

2) Маємо: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} =$

$$= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. При $x_0 > 0$ маємо, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

При $x_0 = 0$ маємо, що $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$. Тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$. Звідси випливає, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Таким чином, функція $f(x) = \sqrt{x}$ є диференційовною на множині $(0; +\infty)$, причому $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. ●

Отже, для $x > 0$ можна записати: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ або

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Формулу (5) також можна узагальнити для будь-якого $r \in \mathbb{Q}$ і $x > 0$:

$$(x^r)' = rx^{r-1}, r \in \mathbb{Q} \tag{6}$$

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$ на множині $(0; +\infty)$, скориставшись формулою (6). Маємо:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Зазначимо, що знаходити похідну функції $y = \sqrt[3]{x}$, заміняючи її на функцію $y = x^{\frac{1}{3}}$, не можна, оскільки у цих функцій різні області визначення. Покажемо, як можна отримати формулу для знаходження похідної функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Маємо:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)}{\Delta x\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)}.$$

Зрозуміло, що коли $x_0 = 0$, то цієї границі не існує і функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не диференційовна в точці $x_0 = 0$.

Якщо $x_0 \neq 0$, то можна записати

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ або

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Узагалі, похідну функції $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можна знаходити за формулою

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (7)$$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (7) дозволяє знаходити похідну функції f у всіх точках x таких, що $x \neq 0$.

Якщо n — парне натуральне число, то формула (7) дозволяє знаходити похідну функції f для всіх додатних значень x.

Звернемося до тригонометричних функцій $y=\sin x$ і $y=\cos x$. Ці функції є диференційовними, і їх похідні знаходять за такими формулами:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Доведемо це.

Нехай $f(x) = \sin x$.

Для довільної точки x_0 маємо:

1) $\Delta f = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}$;

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right).$$

Скориставшись першою чудовою границею $\lim\limits_{t \to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ і неперервністю функції $y=\cos x$, можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Отже, формулу $(\sin x)' = \cos x$ доведено.

Формулу $(\cos x)' = -\sin x$ доводять аналогічно.

При обчисленні похідних зручно користуватися таблицею похідних, розміщеною на форзаці 2.

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } x<1, \\ 2x-1, & \text{якщо } x\geqslant 1, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 1$. Знайдіть $f'(1)$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0)=f(1)=2\cdot 1-1=1.$

Якщо $\Delta x < 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x.$

Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2.$

Якщо $\Delta x > 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{(2(1+\Delta x)-1)-1}{\Delta x} = 2.$

Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=2.$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=2.$

Тепер зрозуміло, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=2,$ тобто $f'(1) = 2.$ ●

У пункті 3 (приклад 3) було показано, що функція $f(x) = x\mathfrak{D}(x)$, де $\mathfrak{D}$ — функція Діріхле, будучи визначеною на $\mathbb{R}$, є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$, причому $\lim\limits_{x\to 0} x\mathfrak{D}(x)=0.$

Цікаво з'ясувати, чи є функція f диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Маємо: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{(0+\Delta x)\,\mathfrak{D}(0+\Delta x)-0}{\Delta x}=\mathfrak{D}(\Delta x).$

Оскільки функція Діріхле не має границі в жодній точці області визначення, то не існує границі $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathfrak{D}(\Delta x).$ Отже, функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Розв'язуючи вправу 3.29, ви показали, що функція $g(x) = x^2\mathfrak{D}(x)$ також є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$.

Дослідимо на диференційовність функцію g у точці $x_0 = 0$.

Маємо:

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2\,\mathfrak{D}(0+\Delta x)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\,\mathfrak{D}(\Delta x)=0.$$

Отже, похідна функції g в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює нулю.

Зауважимо, що $g(x) = x^2\mathfrak{D}(x)$ — це приклад функції, яка визначена на $\mathbb{R}$ і диференційовна рівно в одній точці.

Вправи

9.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \frac{1-x}{3}$; 3) $y = 9$.

9.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^4$; 3) $y = x^{-15}$; 5) $y = x^{-2,8}$;

2) $y = x^{20}$; 4) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 6) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

9.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^{10}$; 3) $y = \frac{1}{x^8}$; 5) $y = x^{\frac{7}{6}}$;

2) $y = x^{-6}$; 4) $y = 8 - 3x$; 6) $y = x^{-0,2}$.

9.4.° Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

9.5.° Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

9.6.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

9.7.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

9.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$; 3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 16$;

2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$, $x_0 = 64$.

9.9.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 256$; 2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$.

9.10.° Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$.

9.11.° Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

9.12.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

9.13.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

9.14.° Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 9.7) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

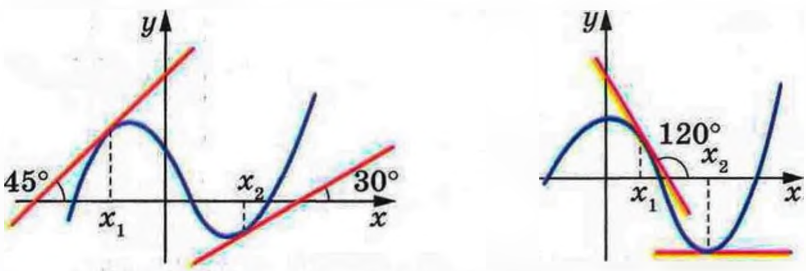


Рис. 9.7

9.15.° Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 9.8) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

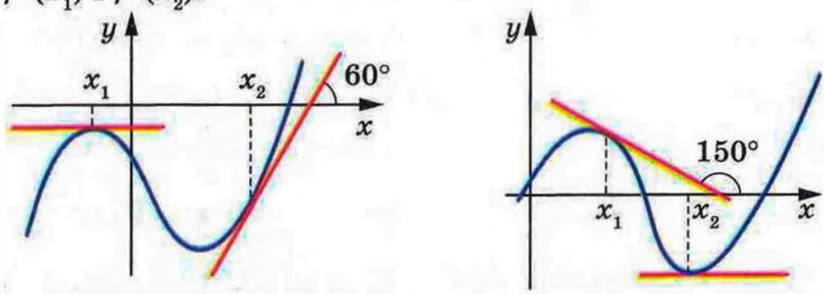


Рис. 9.8

9.16.° На рисунку 9.9 зображено графік функції f. Укажіть кілька значень аргументу x, для яких:

1) $f'(x) > 0$;
2) $f'(x) < 0$;
3) $f'(x) = 0$.

9.17.° До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 9.10). Знайдіть $f'(x_0)$.

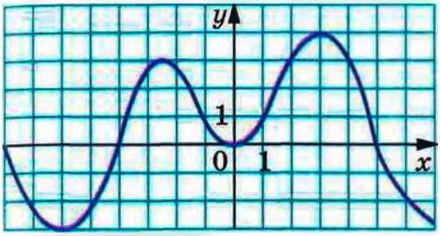


Рис. 9.9

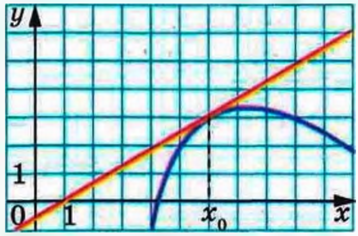


Рис. 9.10

9.18.° До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 9.11). Знайдіть $f'(x_0)$.

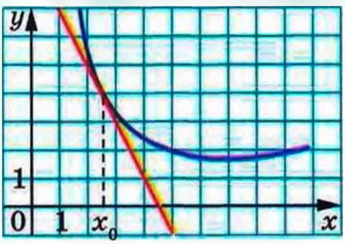


Рис. 9.11

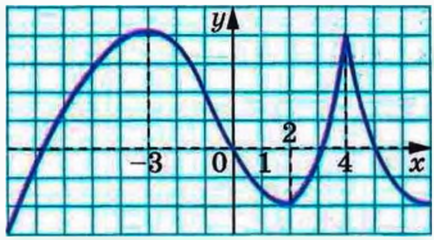


Рис. 9.12

9.19.° На рисунку 9.12 зображено графік функції f. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

9.20.° На рисунку 9.13 зображено графік функції f. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

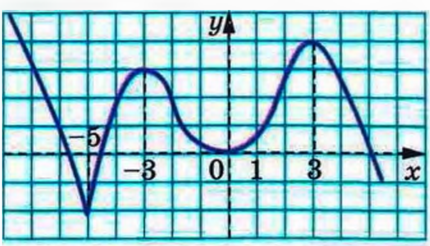


Рис. 9.13

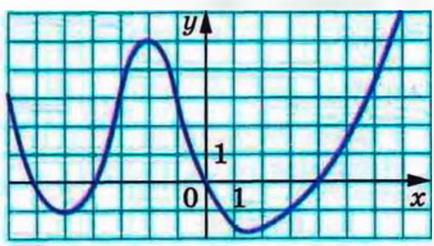


Рис. 9.14

9.21.° На рисунку 9.14 зображено графік функції f. Порівняйте:

1) $f'(-5)$ і $f'(1)$;
2) $f'(-1)$ і $f'(6)$;
3) $f'(-2)$ і $f'(4)$;
4) $f'(0)$ і $f'(5)$.

9.22.$^{\bullet}$ Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

1) $f(x) = x^3$, $k = 3$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;

4) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

9.23.$^{\bullet}$ Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

1) $f(x) = x^4$, $k = -32$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $k = \frac{1}{27}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $k = -\frac{1}{27}$;

4) $f(x) = \cos x$, $k = 1$.

9.24.$^{\bullet}$ Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2$. Знайдіть $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

9.25.$^{\bullet}$ Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3$. Знайдіть $s'(2)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

9.26.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

9.27.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

9.28.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x^4}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Знайдіть її похідну в цій точці.

9.29.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = x\,|x|$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

9.30.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2\,|x|$ у точці $x_0 = 0$.

9.31.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, користуючись означенням, що функція

$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Проілюструйте отриманий результат графічно.

9.32.** Знайдіть похідну функції $f(x)=\begin{cases}x^2-2, \text{ якщо } x\leqslant 2,\\ 4x-6, \text{ якщо } x>2,\end{cases}$ у точці $x_0=2$.

9.33.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ якщо } x\geqslant 0,\\ x, \quad \text{ якщо } x<0,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=0$.

9.34.** Знайдіть такі числа k, b, що функція

$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+2, \text{ якщо } x\leqslant 3,\\ kx+b, \quad \text{ якщо } x>3,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=3$.

9.35.** Знайдіть такі числа k, b, що функція

$f(x)=\begin{cases}kx+b, \text{ якщо } x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ якщо } x>2,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=2$.

9.36.** Доведіть, користуючись означенням, що функція f не є диференційовною в точці x_0:

1) $f(x)=\begin{cases}3x+2, \text{ якщо } x<0,\\ 2x, \quad \text{ якщо } x\geqslant 0,\end{cases}$ $x_0=0$;

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x\geqslant 1,\\ 1, \quad \text{ якщо } x<1,\end{cases}$ $x_0=1$.

9.37.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $y=|x-2|$ не є диференційовною в точці $x_0=2$.

9.38.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $y=\sqrt{1-x^2}$ не є диференційовною в точках $x_1=-1$ і $x_2=1$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

9.39.** Доведіть, користуючись означенням, що функція

$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 0, \quad \text{ якщо } x=0,\end{cases}$ не є диференційовною в точці $x_0=0$.

9.40.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 0, \quad \text{ якщо } x=0,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=0$, і знайдіть $f'(0)$.

9.41.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=0$.

9.42.** Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=0$, і знайдіть $f'(0)$.

9.43.** Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ -x^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ є диференційовною рівно в одній точці $x_0=0$. Наведіть приклад функції, що є диференційовною в усіх точках координатної прямої, крім точки $x_0=0$.

9.44.** Наведіть приклад функції, диференційовної рівно у двох точках.

9.45.* Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і диференційовна в точці x_0. Знайдіть границю послідовності (a_n), яка задана формулою загального члена:

1) $a_n=n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)$;

2) $a_n=n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n^2}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{n}\right)\right)$.

9.46.* Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і диференційовна в точці x_0. Знайдіть границю послідовності (a_n), яка задана формулою загального члена $a_n=n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{n}\right)\right)$.

9.47.* Доведіть, користуючись означенням, що функція

$f(x)=\begin{cases} \frac{x-\sin x}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0=0$.

10. Правила обчислення похідних

Знайдемо, користуючись означенням, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ у точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0+\Delta x)^2 + (x_0+\Delta x)}_{f(x_0+\Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} =$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x - x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$

3) якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $2x_0 + \Delta x + 1$ прямують до числа $2x_0 + 1$. Отже, при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2 + x$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x + 1,$$

тобто

$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

З попереднього пункту вам відомо, що $(x^2)' = 2x$ і $(x)' = 1$. Таким чином, отримуємо

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Отже, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ можна було знайти, не користуючись означенням похідної.

Справедливою є така теорема[1].

Теорема 10.1 (похідна суми). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних.*

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

[1] Умовами теорем 10.1–10.4 передбачено таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0, то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ і $y = f(g(x))$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0.

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0. Маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}\right).$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0) + g'(x_0)$. ▲

Теорему 10.1 можна поширити на будь-яку скінченну кількість доданків:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Використовуючи метод математичної індукції, доведіть цей факт самостійно.

Дві теореми, наведені нижче, також спрощують знаходження похідної.

Теорема 10.2 (похідна добутку). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x)\, g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x).$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x)\, g(x)$ у точці x_0. Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)\, g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\, g(x_0) =$$
$$= (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)\, g(x_0) =$$
$$= f(x_0)\, g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)\, g(x_0) =$$
$$= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Тепер можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0).$$

Таким чином, функція $y = f(x)\ g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$. ▲

Наслідок. ***У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: *постійний множник можна виносити за знак похідної.*

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)'\, f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).\ ▲$$

Теорема 10.3 (похідна частки). ***У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними і значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{(g(x))^2}.$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

З доведенням теореми 10.3 ви можете ознайомитися на заняттях математичного гуртка.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$;
2) $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$;
3) $y = x^3 \cos x$;
4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$;
5) $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$.

Розв'язання. 1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідком з теореми про похідну добутку, отримуємо:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) За теоремою про похідну добутку маємо:

$$g'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x - 3) + (5x - 3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x - 3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3 - 5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3 - 5x + 10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3 + 5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Маємо: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$
$= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$

4) За теоремою про похідну частки отримуємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}\right)' = \frac{(2x^2 + 1)'(3x - 2) - (3x - 2)'(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x - 2) - 3(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x - 2)^2}.$$

5) Маємо:

$$h'(x) = \left(\sqrt[3]{x} \sin x\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' \sin x + \sqrt[3]{x}(\sin x)' = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cos x.$$

Проте помилковим було б вважати, що отриманий результат є відповіддю до даної задачі.

Річ у тім, що при обчисленні похідних спиратися на теорему про похідну добутку двох функцій можна лише тоді, коли обидві ці функції є диференційовними. У даному прикладі функція $f(x)=\sqrt[3]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$, а в усіх інших точках координатної прямої і функція $f(x)=\sqrt[3]{x}$, і функція $g(x)=\sin x$ є диференційовними. Це означає, що теорему про похідну добутку було коректно застосовано для обчислення похідної функції $h(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ для всіх $x\neq 0$. Застосовувати ж цю теорему для обчислення похідної добутку функцій $f(x)=\sqrt[3]{x}$ і $g(x)=\sin x$ у точці $x_0 = 0$ не можна. Проте це ще не означає, що розглядувана функція $h(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ не диференційовна в точці $x_0 = 0$. У таких випадках звертаються до означення похідної.

Маємо: $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}=\dfrac{h(0+\Delta x)-h(0)}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}\sin\Delta x}{\Delta x}$.

Тоді $h'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt[3]{\Delta x}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt[3]{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=0\cdot 1=0$.

Таким чином, функція $h(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$, причому $h'(0) = 0$.

Маємо відповідь: $h'(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}\cos x, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що:

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\\ (\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}\end{gathered}}$$

Справді, $(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$

$=\dfrac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Формулу $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ доведіть самостійно.

Розглянемо функцію $y=\sin^2 x$. Обчислити похідну цієї функції нескладно, якщо подати її у вигляді $y=\sin x\cdot\sin x$ і застосувати теорему про похідну добутку. Але для обчислення похідної, наприклад, функції $y=\sin^7 x$ цей підхід не є ефективним. Функція $y=\sin^7 x$ є складеною функцією $y=f(g(x))$, де $f(t)=t^7$, $g(x)=\sin x$.

Знаходити похідну складеної функції можна за допомогою такої теореми.

Теорема 10.4 (похідна складеної функції). ***Якщо функція $t=g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y=f(t)$ диференційовна в точці t_0, де $t_0=g(x_0)$, то складена функція $h(x)=f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0, причому***

$$h'(x_0)=f'(t_0)\cdot g'(x_0).$$

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 113.

Наприклад, функція $h(x)=\sin^7 x$ є складеною функцією $h(x)=f(g(x))$, де $f(t)=t^7$, $g(x)=\sin x$. Обчислимо похідну цієї складеної функції у точці $x_0\in\mathbb{R}$. Маємо: $t_0=g(x_0)=\sin x_0$. Оскільки $f'(t_0)=7t_0^6=7\sin^6 x_0$, $g'(x_0)=\cos x_0$, то за теоремою про похідну складеної функції $h'(x_0)=7\sin^6 x_0\cdot\cos x_0$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть похідну функції:

1) $y=(3x-7)^6$;

2) $y=\sqrt{4x^2+1}$;

3) $y=\sin\frac{x}{2}$;

4) $y=\operatorname{tg}^3 5x$.

Розв'язання. 1) Дана функція $y=(3x-7)^6$ є складеною функцією $y=f(g(x))$, де $f(t)=t^6$, $g(x)=3x-7$. Оскільки $f'(t)=6t^5$, а $g'(x)=3$, то за теоремою про похідну складеної функції можна записати:

$$y'=6t^5\cdot 3 \text{ при } t=3x-7,$$

тобто

$$y'=6(3x-7)^5\cdot 3=18(3x-7)^5.$$

Розв'язання цієї задачі можна оформити і так:

$$y'=((3x-7)^6)'=6(3x-7)^5\cdot(3x-7)'=$$
$$=6(3x-7)^5\cdot 3=18(3x-7)^5.$$

2) $y'=\left(\sqrt{4x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot(4x^2+1)'=\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}.$

3) $y' = \left(\sin\frac{x}{2}\right)' = \cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}.$

4) $y' = (\text{tg}^3\, 5x)' = 3\,\text{tg}^2\, 5x\cdot(\text{tg}\, 5x)' = 3\,\text{tg}^2\, 5x\cdot\frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{15\,\text{tg}^2\, 5x}{\cos^2 5x}.$ ●

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення похідної функції $h(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Дана функція є складеною функцією $h(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt[3]{t}$, $g(x) = x^2 \sin x$. Функція g є диференційовною в точці $x_0 = 0$, але функція f не є диференційовною в точці $t_0 = g(0) = 0$. Отже, теорему 10.4 для пошуку похідної складеної функції h у точці $x_0 = 0$ застосувати не можна.

Скориставшись означенням похідної, отримуємо:

$$h'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2 \sin \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} = 1.$$

Отже, незважаючи на недиференційовність функції f у точці $t_0 = 0$, похідна складеної функції в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює 1. ●

Розглянемо неперервну і оборотну функцію f, область визначення якої — деякий проміжок (рис. 10.1). Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то до графіка цієї функції в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, можна провести дотичну. Нехай ця дотична не є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) \neq 0$.

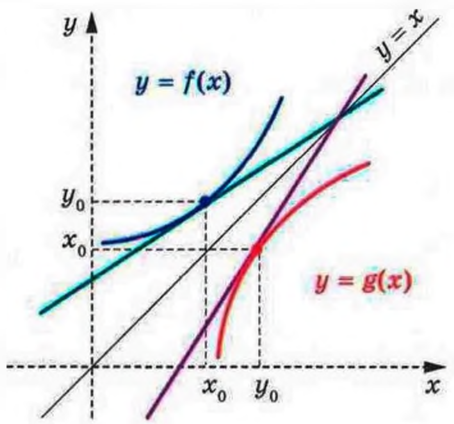


Рис. 10.1

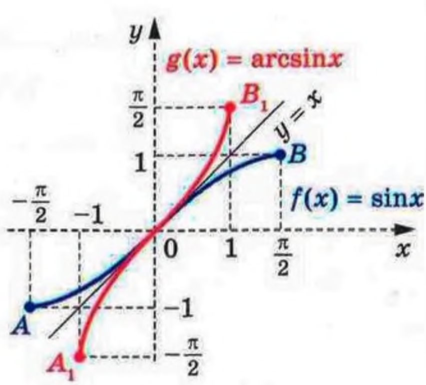


Рис. 10.2

Позначимо через g функцію, обернену до f. Ви знаєте, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Вони є рівними фігурами, а отже, мають багато однакових геометричних властивостей. Має місце таке твердження: якщо неперервна і оборотна функція f визначена на деякому проміжку і графік функції f має негоризонтальну дотичну в точці $(x_0; y_0)$, то графік оберненої функції g в точці $(y_0; x_0)$ має невертикальну дотичну (рис. 10.1). Це означає, що обернена функція g є диференційовною в точці y_0.

Розглянемо неперервну і оборотну функцію $f(x) = \sin x$, $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 10.2). У точках $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ і $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ графік функції f має горизонтальні дотичні. Це означає, що графік оберненої функції $g(x) = \arcsin x$ у точках $A_1\left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$ і $B_1\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ має вертикальні дотичні. Тому функція $g(x) = \arcsin x$ не є диференційовною в точках -1 і 1.

У точках, відмінних від A і B, графік функції f має негоризонтальні дотичні. Тому графік функції g у точках, відмінних від A_1 і B_1, має невертикальні дотичні. Отже, функція $g(x) = \arcsin x$ диференційовна на інтервалі $(-1; 1)$.

Знайдемо похідну функції $g(x) = \arcsin x$.

Маємо: $\sin(\arcsin x) = x$. Диференціюючи обидві частини цієї рівності, отримуємо

$$\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1.$$

Оскільки $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ і $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$ для всіх $x \in (-1; 1)$, то

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

З курсу алгебри 10 класу ви знаєте, що $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Оскільки функція $y = \arcsin x$ не є диференційовною в точках -1 і 1, то функція $y = \arccos x$ також не є диференційовною в точках -1 і 1. Для будь-якого $x \in (-1; 1)$ можна записати:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Отже,
$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Міркуючи аналогічно, ви можете самостійно довести диференційовність функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ та вивести такі формули:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Зв'язок між похідними взаємно обернених функцій установлює така теорема.

Теорема 10.5. *Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0, де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція g диференційовна в точці y_0 і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 114.

Вправи

10.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;
2) $y = x^{-6} + 20\sqrt{x}$;
3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4\sin x - 5\cos x$;
5) $y = -\frac{1}{6}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x$;
6) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
7) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} + 2$;
8) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

10.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = -3\sin x + 2\cos x$;
3) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 7x$;
4) $y = x - \frac{5}{x}$;
5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$;
6) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

10.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;
2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$.

10.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$; 3) $y = x^4 \cos x$;

2) $y = (x + 5)(1 - x^3)$; 4) $y = x \operatorname{tg} x$.

10.5.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; 4) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$; 7) $y = \dfrac{3-x^2}{4+2x}$;

2) $y = \dfrac{2x-3}{4-5x}$; 5) $y = \dfrac{5x^2-x-2}{x}$; 8) $y = \dfrac{x^2-5x}{x-7}$.

3) $y = \dfrac{5}{3x-2}$; 6) $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$;

10.6.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \dfrac{3x+5}{x-8}$; 3) $y = \dfrac{2x^2}{1-6x}$; 5) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

2) $y = \dfrac{7}{10x-3}$; 4) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; 6) $y = \dfrac{x^2+6x}{x+2}$.

10.7.° Чому дорівнює значення похідної функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 6$, $x_0 = -1$; 5) $f(x) = (1+3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

2) $f(x) = \dfrac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$; 6) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+2}$, $x_0 = -3$; 7) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\cos x$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2} - 2\sin x$, $x_0 = 0$; 8) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

10.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \dfrac{1}{4}$; 3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-x}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$.

10.9.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (2x + 3)^5$; 5) $y = 3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$; 9) $y = \dfrac{1}{4x+5}$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{3}x - 6\right)^{18}$; 6) $y = \sqrt{2x^2+2x+1}$; 10) $y = (6 - 7x)^{-4}$;

3) $y = \cos 2x$; 7) $y = \sqrt[3]{1+x^2}$; 11) $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;

4) $y = \sin^2 x$; 8) $y = \sqrt[5]{-1-x-x^2}$; 12) $y = \sqrt{2+\sin x}$.

10.10.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (3x - 5)^6$;
2) $y = (2x^2 - 3x + 4)^3$;
3) $y = \sin\frac{x}{3}$;
4) $y = \cos^2 x$;
5) $y = 2\ \mathrm{tg}\ 4x$;
6) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
7) $y = \sqrt{2 + x^2}$;
8) $y = \sqrt{-2x^2 - x - 2}$;
9) $y = (9x - 2)^{-3}$;
10) $y = \sqrt{3 - \cos x}$.

10.11.° Василь Заплутайко знаходить похідну функції $y = \sin 2x$ так:

1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = \sin t$;
2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

У чому полягає помилка Василя?

10.12.° Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла в момент часу $t_0 = 5$ с.

10.13.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = (t + 2)^2 (t + 5)$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.

10.14.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = -3$;
2) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

10.15.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \mathrm{tg}\ 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
3) $f(x) = \mathrm{ctg}^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

10.16.˙ Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 7$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$;
4) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$.

10.17.˙ Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$;
2) $f(x) = x^4 + 2x^2$;
3) $f(x) = 2\sin x + 1$;
4) $f(x) = x - \cos x$.

10.18.˙ Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$;
2) $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5}$;
3) $y = x\sqrt{2x^2 + x + 1}$;
4) $y = \sin x \cos 2x$;
5) $y = \operatorname{tg} x \sin(2x + 5)$;
6) $y = \frac{\cos 3x}{x - 1}$;
7) $y = (x + 1)^3 (x - 2)^4$;
8) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

10.19.˙ Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}$;
2) $y = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^6}$;
3) $y = x\sqrt{x^2 + 3}$;
4) $y = \sin 2x \cos x$;
5) $y = (x + 2)^5 (x - 3)^4$;
6) $y = \frac{2x - 3}{\sin \frac{x}{4}}$.

10.20.˙ Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо:

1) $f(x) = \frac{2x + 5}{x + 2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$;
3) $f(x) = (x - 2)^2 (x + 3)$;
4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
5) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}\, x$;
6) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{3}$.

10.21.˙ Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = \frac{2x}{1 - x}$;
2) $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$;
3) $f(x) = \frac{4}{x} + 2x$;
4) $f(x) = (x + 2)^2 (x - 3)$;
5) $f(x) = \cos 2x$;
6) $f(x) = 2x - \cos 4x$.

10.22.$^{\bullet}$ Василь Заплутайко знаходить похідну функції $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ на її області визначення так:

$$f'(x) = (\arcsin x + \arccos x)' = (\arcsin x)' + (\arccos x)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

для всіх $x \in D(f)$.

Чи погоджуєтеся ви з розв'язанням Василя? Чи правильну відповідь отримав Василь?

10.23.$^{\bullet}$ Знайдіть похідну функції $y = \operatorname{arctg} 4x + \operatorname{arcctg} 4x$.

10.24.$^{\bullet}$ Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $p(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

10.25.$^{\bullet}$ Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.

10.26.$^{\bullet}$ Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Визначте координату тіла в момент часу, коли його кінетична енергія дорівнює нулю.

10.27.$^{\bullet}$ Знайдіть похідну функції:

1) $y = \cos^3 2x$; 2) $y = \sqrt{2 + \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}$; 3) $y = \left(\sin\frac{x}{3} - 5\right)^6$.

10.28.$^{\bullet}$ Обчисліть:

1) $f'(0)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$;

2) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \sin^2\frac{x}{2}$;

3) $f'(0)$, якщо $f(x) = (\cos 3x + 6)^3$.

10.29.$^{\bullet}$ Знайдіть похідну функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x^3$;

2) $y = \frac{\arccos x}{x^2 - 1}$;

3) $y = \operatorname{arcctg}(x^2 - 1)$;

4) $y = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$.

10.30.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^2 \operatorname{arcctg} x$;
2) $y = \dfrac{\arcsin \sqrt{x}}{x^2 - x}$;
3) $y = x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$;
4) $y = \operatorname{arctg}^2 3x$.

10.31.** У точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;
2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

10.32.** У точках $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$ знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$;
2) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

10.33.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, якщо $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 18x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$;

2) $f'(x)\, g'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - 6x^2$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{3}$.

10.34.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, якщо $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;

2) $f'(x)\, g'(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2\sqrt{x}$.

10.35.** Про функцію f відомо, що $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$. Знайдіть $g'(1)$, якщо:

1) $g(x) = f(x^2)$;
2) $g(x) = f^3(x)$;
3) $g(x) = \dfrac{\sin \dfrac{\pi x}{2}}{\cos(\pi f(x))}$;
4) $g(x) = f(f(x) + 2x)$.

10.36.** Про функцію f відомо, що $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$. Знайдіть $g'(2)$, якщо:

1) $g(x) = xf(x)$;
2) $g(x) = (f(x) - 2x)^5$;
3) $g(x) = f\left(1 + \sqrt{f(x)}\right)$.

10.37.** Про диференційовну функцію f відомо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f^3(x) + x^2 f(x) + 1 = x$. Знайдіть $f'(1)$.

10.38.** Про диференційовну функцію f відомо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $x^2 f^3(x) + f(x) = x$. Знайдіть $f'(0)$.

10.39.** Доведіть, що похідна періодичної функції є періодичною функцією. Наведіть приклади.

10.40.** Доведіть, що похідна парної функції є непарною функцією. Наведіть приклади.

10.41.** Доведіть, що похідна непарної функції є парною функцією. Наведіть приклади.

10.42.** Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про диференційовність функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0, якщо:

1) f є диференційовною в точці x_0, а g — ні;
2) f і g не диференційовні в точці x_0?

10.43.** Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про диференційовність функції $y = f(x)\, g(x)$ у точці x_0, якщо:

1) f є диференційовною в точці x_0, а g — ні;
2) f і g не диференційовні в точці x_0?

10.44.** Наведіть приклад функцій f і g таких, щоб функція $f(g(x))$ була диференційовною в точці x_0, причому:

1) f є диференційовною в точці $g(x_0)$, а g не є диференційовною в точці x_0;
2) g є диференційовною в точці x_0, а f не є диференційовною в точці $g(x_0)$;
3) f не є диференційовною в точці $g(x_0)$ і g не є диференційовною в точці x_0.

10.45.** Василь Заплутайко шукає похідну функції $y=\sqrt[3]{x^5}$ так:

1) розглядає функцію $y=\sqrt[3]{x^5}$ як складену функцію $y=f(g(x))$, де $f(t)=\sqrt[3]{t}$, $g(x)=x^5$;
2) використовуючи теорему про похідну складеної функції, записує

$$y'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^5)^2}}\cdot(x^5)'=\frac{5x^4}{3\cdot\sqrt[3]{x^{10}}}=\frac{5\sqrt[3]{x^{12}}}{3\cdot\sqrt[3]{x^{10}}};$$

3) далі при $x\neq 0$ отримує висновок, що $y'=\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$, а в точці $x=0$ дана функція не є диференційовною.

Чи погоджуєтеся ви з Василем?

10.46.** Знайдіть похідну функції $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,\operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

10.47.** Знайдіть похідну функції $f(x)=\sqrt[3]{\sin^4 x+x^4}$.

10.48.* Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x)=(x+1)(x+2)\ldots(x+10)\sin x$.

10.49.* Обчисліть суму $S=100\cdot 3^{99}+98\cdot 3^{97}+96\cdot 3^{95}+\ldots+2\cdot 3$.

10.50.* Обчисліть суму $S=4^{30}-2\cdot 4^{29}+3\cdot 4^{28}-\ldots+29\cdot 4^2-30\cdot 4$.

10.51.* Знайдіть усі такі многочлени P, що $P(P(x))=x^{100}$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

10.52.* Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є диференційовною на $\mathbb{R}$, але функція $y=f'(x)$ не є неперервною.

10.53.* На дошці написано функції $y=(x-1)^2$ і $y=\dfrac{x}{x^2+1}$. Якщо на дошці записано функції f і g, то дозволяється дописати будь-яку з функцій $y=f^2(x)$, $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)g(x)$, $y=f(g(x))$, $y=f(x)+c$, $y=cf(x)$, де c — довільна стала. Чи може в результаті виконання декількох таких дій на дошці з'явитися функція $y=\dfrac{1}{x^2+1}$?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Доведення теорем про похідні складеної та оберненої функцій

Лема 10.1. ***Нехай функція f визначена на деякому проміжку, що містить точку x_0. Функція f диференційовна в точці x_0 тоді і лише тоді, коли існує така неперервна в точці x_0 функція φ, що для всіх $x\in D(f)$ виконується рівність $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\varphi(x)$. При цьому $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.***

Доведення. Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Тоді існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, яка дорівнює $f'(x_0)$. Розглянемо функцію

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{якщо } x\neq x_0,\\ f'(x_0), & \text{якщо } x=x_0.\end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x_0) = \varphi(x_0)$, то функція φ неперервна в точці x_0. Тепер очевидно, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. Тим самим доведено першу частину леми.

Нехай тепер існує така неперервна в точці x_0 функція φ, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. Тоді для всіх $x \in D(f)$, $x \neq x_0$, можна записати

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Оскільки функція φ неперервна в точці x_0, то існує границя

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Це означає, що функція f диференційовна в точці x_0 і $\varphi(x_0) = f'(x_0)$. ▲

Доведення теореми про похідну складеної функції

Доведемо, що складена функція $h(x) = f(g(x))$, де функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y = f(t)$ диференційовна в точці $t_0 = g(x_0)$, є диференційовною в точці x_0, причому

$$h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

Доведення. Оскільки функція $y = f(t)$ диференційовна в точці t_0, то за лемою 10.1 існує неперервна в точці t_0 функція $y = \varphi(t)$ така, що для всіх $t \in D(f)$ виконується рівність

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)\varphi(t) \qquad (1)$$

і $f'(t_0) = \varphi(t_0)$.

Зробивши в рівності (1) підстановки $t = g(x)$, $t_0 = g(x_0)$, отримаємо рівність

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (g(x) - g(x_0))\varphi(g(x)), \qquad (2)$$

яка виконується для всіх x з області визначення складеної функції $h(x) = f(g(x))$.

Оскільки функція $t = g(x)$ є диференційовною в точці x_0, то за лемою 10.1 для неї існує неперервна в точці x_0 функція $t = \varphi_1(x)$ така, що для всіх $x \in D(g)$ виконується рівність

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\varphi_1(x) \qquad (3)$$

і $g'(x_0) = \varphi_1(x_0)$.

З урахуванням рівності (3) рівність (2) можна переписати так:

$$f(g(x))-f(g(x_0))=(x-x_0)\,\varphi_1(x)\,\varphi(g(x)).$$

Функція $y=\varphi_1(x)\,\varphi(g(x))$ є неперервною в точці x_0 (доведіть це самостійно). Тому за лемою 10.1 складена функція $h(x)=f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0 і $h'(x_0)=$ $=\varphi_1(x_0)\,\varphi(g(x_0))=\varphi_1(x_0)\,\varphi(t_0)=g'(x_0)\,f'(t_0)$. ▲

Доведення теореми про похідну оберненої функції

Нехай функція $y=f(x)$ є диференційовною в точці x_0 і $f'(x_0)\neq 0$. Доведемо, що коли функція $x=g(y)$, обернена до функції $y=f(x)$, є неперервною в точці $y_0=f(x_0)$, то вона є диференційовною в цій точці.

Доведення. Оскільки функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0, то за лемою 10.1 існує неперервна в точці x_0 функція $y=\varphi(x)$ така, що для всіх $x\in D(f)$ виконується рівність

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,\varphi(x) \qquad (4)$$

і $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

Зробивши в рівності (4) підстановки $x=g(y)$, $x_0=g(y_0)$, отримаємо рівність

$$f(g(y))-f(g(y_0))=(g(y)-g(y_0))\,\varphi(g(y)),$$

$$y-y_0=(g(y)-g(y_0))\,\varphi(g(y)), \qquad (5)$$

яка виконується для всіх $y\in D(g)$. З рівності (5) випливає, що $\varphi(g(y))\neq 0$ при всіх $y\in D(g)$, де $y\neq y_0$. Крім цього, $\varphi(g(y_0))=$ $=\varphi(x_0)=f'(x_0)\neq 0$. Тому $\varphi(g(y))\neq 0$ для всіх $y\in D(g)$. Тоді рівність (5) можна переписати так:

$$g(y)-g(y_0)=\frac{1}{\varphi(g(y))}(y-y_0).$$

Функція $x=\dfrac{1}{\varphi(g(y))}$ є неперервною в точці y_0 (доведіть це самостійно). Тому за лемою 10.1 функція $x=g(y)$ є диференційовною в точці y_0 і

$$g'(y_0)=\frac{1}{\varphi(g(y_0))}=\frac{1}{\varphi(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}. \ ▲$$

11. Рівняння дотичної

Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Тоді до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис. 11.1).

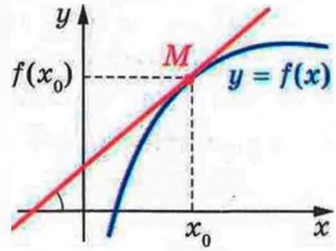


Рис. 11.1

З курсу геометрії 9 класу ви знаєте, що рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої.

Виходячи з геометричного змісту похідної, отримаємо $k = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної можна записати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Ця пряма проходить через точку $M\ (x_0;\ f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1). Маємо:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тоді рівняння (1) можна переписати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0**, має вигляд:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Наприклад, знайдемо рівняння дотичної до прямої $f(x) = kx + b$ у точці з абсцисою x_0. Маємо: $f(x_0) = kx_0 + b$; $f'(x) = k$; $f'(x_0) = k$. Підставивши знайдені значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = k(x - x_0) + kx_0 + b$. Звідси $y = kx + b$.

Оскільки x_0 обрано довільно, то можна зробити такий висновок: дотична до прямої у будь-якій її точці збігається із самою прямою.

Цей приклад показує, що дотична до графіка функції може мати з графіком не одну, а навіть нескінченну кількість спільних точок.

ПРИКЛАД 1 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$; $f'(x) = -4 - 6x$; $f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$. Підставивши знайдені числові значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = 8(x + 2) - 2$, тобто $y = 8x + 14$.

Відповідь: $y = 8x + 14$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{x+4}{x-4}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x)=\frac{(x+4)'(x-4)-(x-4)'(x+4)}{(x-4)^2}=\frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2}=-\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Якщо дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює -2.

Оскільки $f'(x_0) = k$, де x_0 — абсциса точки дотику шуканої прямої до графіка функції f, то $f'(x_0) = -2$, тобто $-\frac{8}{(x_0-4)^2}=-2$. Звідси

$$(x_0 - 4)^2 = 4; \quad \left[\begin{array}{l} x_0-4=2, \\ x_0-4=-2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_0=6, \\ x_0=2. \end{array}\right.$$

Отже, на графіку функції $f(x)=\frac{x+4}{x-4}$ є дві точки, дотичні в яких паралельні даній прямій.

При $x_0 = 6$ маємо: $f(x_0) = 5$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2(x - 6) + 5$; $y = -2x + 17$.

При $x_0 = 2$ отримуємо: $f(x_0) = -3$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2(x - 2) - 3$; $y = -2x + 1$.

Відповідь: $y = -2x + 17$ і $y = -2x + 1$.

ПРИКЛАД 3 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, яка проходить через точку $M(-1; -1)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $f(-1) \neq -1$. З цього випливає, що точка $M(-1; -1)$ не належить графіку функції f.

Нехай $A(x_0; f(x_0))$ — точка дотику шуканої прямої до графіка функції f. Оскільки $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$ і $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то рівняння дотичної має вигляд

$$y=(-2x_0-5)(x-x_0)+\left(-x_0^2-5x_0-6\right).$$

Урахувавши, що координати точки $M(-1; -1)$ задовольняють отримане рівняння, маємо:

$$-1=(-2x_0-5)(-1-x_0)+\left(-x_0^2-5x_0-6\right).$$

Звідси, розкривши дужки і розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$. Таким чином, через точку M проходять дві дотичні до графіка функції f: $y = -5x - 6$ і $y = -x - 2$.

Відповідь: $y = -5x - 6$, $y = -x - 2$.

У пункті 3 ви ознайомилися з методом простої ітерації для наближеного розв'язування рівнянь. Матеріал цього пункту дозволяє розглянути ще один прийом пошуку наближених значень коренів рівнянь.

Розглянемо рівняння $f(x)=0$, де функція f має на $\mathbb{R}$ неперервну похідну f', відмінну від нуля. Для наближеного розв'язування рівняння $f(x)=0$ в математиці використовують так званий **метод дотичних**. Розв'язуючи рівняння цим методом, спочатку обирають довільне число x_1 (початкове наближення). У точці з абсцисою x_1 до графіка функції f проводять дотичну (рис. 11.2). Точку перетину цієї дотичної з віссю абсцис позначають x_2 і повторюють описану процедуру: у точці з абсцисою x_2 до графіка функції f проводять дотичну і так далі. Таким чином будують послідовність наближень (x_n).

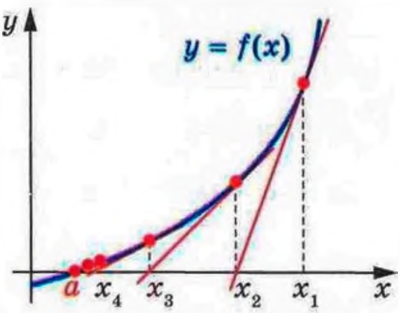


Рис. 11.2

Знайдемо розрахункові формули для методу дотичних. Рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_n має вигляд

$$y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n).$$

З рівності $0=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$ знайдемо точку перетину дотичної з віссю абсцис. Маємо $x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Таким чином, кожний наступний член послідовності наближень (x_n) шукають за формулою

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (2)$$

Якщо побудована послідовність (x_n) виявиться збіжною, то її границею буде корінь рівняння $f(x)=0$. Справді, перейдемо до границі в рівності (2). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=a$. Крім цього, з неперервності функції $y=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$. Таким чином, має місце рівність

$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Звідси $f(a) = 0$, тобто доведено, що число a є коренем рівняння $f(x) = 0$.

Продовжуючи вивчати цей метод у вищому навчальному закладі, ви ознайомитесь з умовами, які гарантують збіжність побудованої послідовності (x_n), а також дозволяють оцінити різницю $|x_n - a|$.

Покажемо, як працює цей метод при розв'язуванні вже розглянутого в пункті 3 рівняння $x - \cos x = 0$ (нагадаємо, що це рівняння має єдиний корінь a = 0,7390851332...). Покладемо $f(x) = x - \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді $f'(x) = 1 + \sin x$. Для функції f формула (2) набуває вигляду

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}.$$

Нехай $x_1 = 0$. Використовуючи метод дотичних, маємо:

$$x_2 = 0 - \frac{0 - \cos 0}{1 + \sin 0} = 1,$$

$$x_3 = 1 - \frac{1 - \cos 1}{1 + \sin 1} = 0{,}7503638678\ldots,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - \cos x_3}{1 + \sin x_3} = 0{,}7391128909\ldots,$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 - \cos x_4}{1 + \sin x_4} = 0{,}7390851333\ldots .$$

Як бачимо, уже п'ятий член послідовності має дев'ять десяткових знаків після коми, які збігаються з відповідними десятковими знаками кореня a = 0,7390851332... рівняння $\cos x = x$.

Узагалі, можна показати, що побудована послідовність (x_n) є збіжною і в кожному наступному члені послідовності кількість правильних десяткових знаків зростає в рази.

Вправи

11.1.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = x^3 - 27$, $x_0 = 2$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=\frac{1}{2}$;

4) $f(x)=4\sqrt{x}-3$, $x_0=9$;

5) $f(x)=\sin x$, $x_0=0$;

6) $f(x)=\cos x$, $x_0=\pi$;

7) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

8) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $x_0=-2$;

9) $f(x)=\sqrt{2x+5}$, $x_0=2$.

11.2.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x)=2x^3-3x$, $x_0=1$;

2) $f(x)=0{,}5x^2-2x+2$, $x_0=0$;

3) $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

4) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{5\pi}{2}$;

5) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $x_0=-\frac{\pi}{2}$;

6) $f(x)=\sqrt{4x^2+3x}$, $x_0=-1$;

7) $f(x)=\frac{x^2-4x}{x-2}$, $x_0=3$.

11.3.° Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1) $f(x)=x^2-3x-3$;

2) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

11.4.° Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1) $f(x)=2x^3-5x+2$;

2) $f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

11.5.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x)=8x^3-1$;

2) $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

11.6.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$;

2) $f(x)=3x-x^2$.

11.7.° Знайдіть координати точки параболи $y=2x^2-x+1$, у якій дотична до неї паралельна прямій $y=7x-8$.

11.8.° У яких точках дотичні до графіка функції $y=\frac{1}{x}$ паралельні прямій $y=-x$?

11.9.° До графіка функції $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведено дотичні в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Яке взаємне розміщення цих дотичних?

11.10.° Знайдіть таку точку графіка функції f, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;
2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}\,x - 2$, $\alpha = 60°$;
3) $f(x) = \sqrt{3x+2}$, $\alpha = 45°$;
4) $f(x) = \frac{x+7}{x-2}$, $\alpha = 135°$.

11.11.° Знайдіть таку точку графіка функції f, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$;
2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

11.12.° Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$;
2) $f(x) = \frac{5-x}{x-3}$.

11.13.° Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$;
2) $f(x) = \frac{4}{1-x}$.

11.14.° Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$.

11.15.° Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

11.16.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = x^2 - 5x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -x$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.

11.17.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -7x + 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$.

11.18.° Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

11.19.° Установіть, чи є пряма $y = x$ дотичною до графіка функції $y = \sin x$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

11.20.° Установіть, чи є пряма $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ дотичною до графіка функції $y = \sqrt{x}$. У разі позитивної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

11.21.° Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

11.22.° Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

11.23.° Знайдіть площу трикутника, утвореного прямою $y = 2 - x$, віссю абсцис і дотичною до параболи $y = 1 + 2x - x^2$ у точці її перетину з віссю ординат.

11.24.° Знайдіть площу трикутника, обмеженого віссю x, прямою $x = 4$ і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 2x + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.

11.25.° Василь Заплутайко шукає дотичну до графіка функції $f(x) = 3x - 1 + \sin x$ у точці $x_0 = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, то біля точки $x_0 = 0$ графік функції f поводиться майже так само, як і графік лінійної функції $y = 3x - 1$. Тому пряма $y = 3x - 1$ є дотичною до графіка функції f у точці $x_0 = 0$. Чи погоджуєтеся ви з міркуваннями Василя?

11.26.° На графіку функції $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ знайдіть точку, дотична в якій перпендикулярна до прямої $y - 2x + 1 = 0$.

11.27.° Чи існують дотичні до графіка функції $f(x) = x^3 + 2x - 1$, які перпендикулярні прямій $y = -x$?

11.28.•• При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 4x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?

11.29.•• При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці A (1; 5)?

11.30.•• Парабола з вершиною на осі x дотикається до прямої, яка проходить через точки A (1; 2) і B (2; 4), у точці B. Знайдіть рівняння параболи.

11.31.•• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -2x^4 + 1$, якщо ця дотична проходить через точку $M\left(-\frac{5}{4}; 17\right)$.

11.32.•• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^3 + 2$, якщо ця дотична проходить через точку M (0; −2).

11.33.•• У якій точці графіка функції $f(x) = \frac{4x-1}{x}$ потрібно провести дотичну, щоб ця дотична проходила через початок координат?

11.34.•• У якій точці графіка функції $y = x + \frac{3}{x}$ потрібно провести дотичну, щоб ця дотична перетнула вісь ординат у точці (0; 6)?

11.35.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^5 + 3x - 1$. Складіть рівняння дотичної до графіка функції g у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

11.36.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^3 + 6x + 5$. Складіть рівняння дотичної до графіка функції g у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

11.37.•• Скільки розв'язків має система $\begin{cases} y = x^4, \\ y + 8 = a\left(x + \frac{5}{4}\right) \end{cases}$ залежно від значення параметра a?

11.38.•• Скільки розв'язків має система $\begin{cases} y = x^3, \\ y = ax + a - 5 \end{cases}$ залежно від значення параметра a?

11.39.•• Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ перетинаються в точці A, яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A.

11.40.•• Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}$ перетинаються в точці A, яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A.

11.41.•• Знайдіть диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f таку, що $f(x)=\frac{1}{x-3}$ для всіх $x\in(-\infty;\ 2)$.

11.42.•• Знайдіть диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f таку, що $f(x)=\sqrt{3x-5}$ для всіх $x\in[3;+\infty)$.

11.43.•• При яких значеннях a пряма $y = ax + 1$ є дотичною до графіка функції $f(x)=\sqrt{4x+1}$?

11.44.•• При яких значеннях a пряма $y = 2x + a$ є дотичною до графіка функції $f(x)=\sqrt{4x-1}$?

11.45.•• Знайдіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 - 2x + 5$ і $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

11.46.•• Знайдіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 + 4x + 8$ і $g(x) = x^2 + 8x + 4$.

11.47.* На координатній площині зображено графік функції $f(x)=\frac{k}{x}$, на якому позначено точку A. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте дотичну до графіка функції f у точці A.

11.48.* На координатній площині зображено графік функції $f(x) = ax^2$, на якому позначено точку A. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте дотичну до графіка функції f у точці A.

11.49.* Знайдіть рівняння прямої, яка дотикається до графіка функції $f(x)=x^4-2x^3+x^2+x-1$ у двох точках.

11.50.* Нехай P — многочлен степеня n і A — точка на координатній площині. Доведіть, що існує не більше ніж n прямих, які проходять через точку A і дотикаються до графіка многочлена P.

11.51.* Про диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що вона в раціональних точках набуває раціональних значень, а в ірраціональних — ірраціональних. Чи обов'язково графіком функції f є пряма?

11.52.* До графіка функції f у точці A проведено дотичну. Графік функції g отримано з графіка функції f у результаті перетворення руху, а точка B є образом точки A. Чи обов'язково в точці B до графіка функції g можна провести дотичну?

12. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа

Розглянемо функцію f і таку точку x_0 інтервалу $(a;\ b)$, що $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 12.1, *а*). На рисунку 12.1, *б* зображено графік функції g такої, що $\min\limits_{[a;b]} g(x) = g(x_0)$.

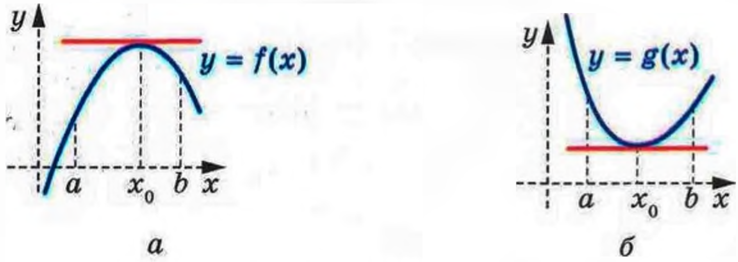


Рис. 12.1

Нехай функції f і g диференційовні в точці x_0. Тоді до графіків цих функцій у точці з абсцисою x_0 можна провести дотичні. З наочних міркувань очевидно, що ці дотичні будуть горизонтальними прямими. Оскільки кутовий коефіцієнт горизонтальної прямої дорівнює нулю, то $f'(x_0) = 0$ і $g'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, і функція $y = s(t)$ набуває в точці $t_0 \in (a; b)$ найбільшого (найменшого) значення, то це означає, що в момент часу t_0 матеріальна точка змінює напрям руху на протилежний. Зрозуміло, що в цей момент часу швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 12.1 (теорема Ферма). ***Нехай функція f, визначена на проміжку $[a; b]$, у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.***

Доведення. Розглянемо випадок, коли $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (випадок $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ розглядають аналогічно).

Нехай $x \in [a; b]$, тоді $\Delta f = f(x) - f(x_0) \geqslant 0$. Якщо $\Delta x = x - x_0 > 0$ (рис. 12.2), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$.

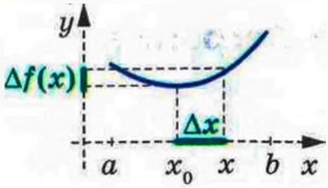


Рис. 12.2

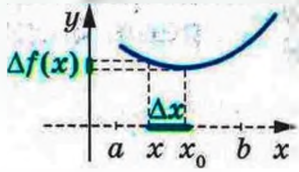
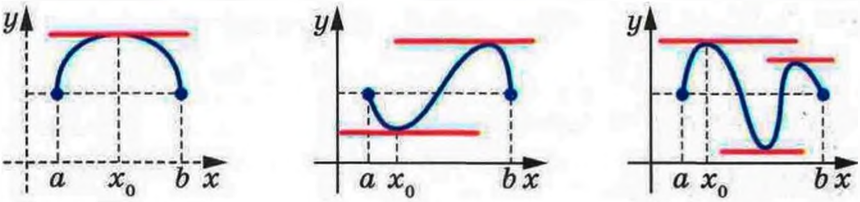


Рис. 12.3

Якщо $\Delta x < 0$ (рис. 12.3), то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$.

Оскільки функція f є диференційовною в точці x_0, то існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Тоді $0 \leqslant \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$, тобто $f'(x_0) = 0$. ▲

На рисунку 12.4 зображено графік функції f, неперервної на відрізку $[a; b]$ і диференційовної на інтервалі $(a; b)$. Функція f у точках a і b набуває однакових значень.



а *б* *в*

Рис. 12.4

З рисунка видно: існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a; b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то рівність $s(a) = s(b)$ означає, що в момент часу $t = b$ матеріальна точка повернулася в початкове положення. Отже, у деякий момент часу $t_0 \in (a; b)$ вона змінила напрям руху на протилежний, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 12.2 (теорема Ролля). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна на інтервалі $(a; b)$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Оскільки функція неперервна на відрізку $[a; b]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса на відрізку $[a; b]$ існують такі значення аргументу, при яких функція f досягає своїх найбільшого та найменшого значень. Іншими словами, існують такі числа m і M, що $\min\limits_{[a;b]} f(x) = m$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = M$. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Якщо $m = M$, то функція f є константою на проміжку $[a; b]$. Отже, $f'(x) = 0$ для будь-якого $x \in (a; b)$.

Розглянемо випадок, коли $m \neq M$. Тоді функція f не може на одному кінці відрізка $[a; b]$ набувати найбільшого значення, а на іншому — найменшого. Справді, $f(a) = f(b)$, а $m \neq M$. Отже, існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що функція в цій точці набуває свого найбільшого або найменшого значення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0, то за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ▲

ЗАДАЧА Диференційовна на $\mathbb{R}$ функція f має n нулів. Доведіть, що функція f' має не менше ніж $n - 1$ нулів.

Розв'язання. Нехай $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — нулі функції f. На кожному з $(n-1)$ відрізків $[x_i; x_{i+1}]$ функція f задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому на кожному з інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ є щонайменше один нуль функції f'. ●

ПРИКЛАД 1 Рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$ має чотири різних дійсних корені. Доведіть, що $a^2 > \frac{32}{9}b$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину даного рівняння через $f(x)$. За умовою рівняння $f(x) = 0$ має чотири різних дійсних корені. Тоді за допомогою ключової задачі цього пункту встанов-

Мішель Ролль
(1652–1719)

Французький математик, член Паризької академії наук.

Основні праці присвячені методам чисельного розв'язування рівнянь. Більшість наукових здобутків М. Ролля не були помічені за його життя; їх оцінили значно пізніше.

люємо, що рівняння $f'(x) = 0$, тобто рівняння $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$, має три різних дійсних корені. Це рівняння має корінь $x = 0$. Отже, квадратне рівняння $4x^2 + 3ax + 2b = 0$ має два різних дійсних корені. Його дискримінант $D = 9a^2 - 32b$. Оскільки $D > 0$, то $a^2 > \frac{32}{9}b$. ●

На рисунку 12.5 зображено графік функції, неперервної на відрізку $[a; b]$ і диференційовної на інтервалі $(a; b)$.

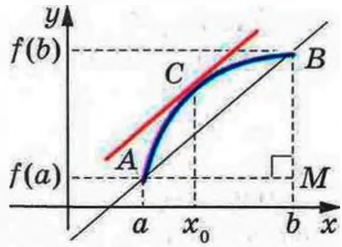


Рис. 12.5

Проведемо пряму AB. З трикутника AMB можна знайти кутовий коефіцієнт цієї прямої: $\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
З рисунка видно: на дузі AB існує така точка C, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB.

Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB, тобто існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Цей висновок ілюструє також механічна інтерпретація.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то середня швидкість руху дорівнює

$$v_{\text{сер}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Зрозуміло, що під час руху є такий момент $t_0 \in (a; b)$, коли миттєва швидкість дорівнює середній, тобто

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 12.3 (теорема Лагранжа). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна на інтервалі $(a; b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що***

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $g(x) = f(x) - \lambda x$, де $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Легко перевірити (зробіть це самостійно), що

$g(a) = g(b)$. Тепер очевидно, що функція g задовольняє всі умови теореми Ролля.

Таким чином, існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g'(x_0) = 0$. Оскільки $g'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(x_0) - \lambda = 0$. Звідси

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacktriangle$$

Зауважимо, що теорема Лагранжа є узагальненням теореми Ролля. Справді, якщо $f(a) = f(b)$, то за теоремою Лагранжа

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Звернемо увагу, що теореми Ролля і Лагранжа не вказують, як знайти точку x_0. Вони лише гарантують, що існує точка з певною властивістю.

ПРИКЛАД 2 Доведіть нерівність $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} < \frac{1}{36}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою Лагранжа для функції $f(x) = \cos x$ на відрізку $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Тоді $\cos\frac{1}{3} - \cos\frac{1}{4} = -\sin x_0 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, де $x_0 \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

Звідси $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} = \frac{\sin x_0}{12}$.

Оскільки $\sin x_0 < x_0 < \frac{1}{3}$, то $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} < \frac{1}{36}$. ●

Жозеф Луї Лагранж
(1736–1813)

Французький математик, механік і астроном, президент Берлінської академії наук, член Паризької академії наук. Основні праці — у галузі математичного аналізу, варіаційного числення, алгебри, теорії чисел, диференційних рівнянь, механіки. Кавалер ордена Почесного легіону.

Вправи

12.1.° Відомо, що функція f у точці x_0 набуває найбільшого або найменшого значення. Перевірте рівність $f'(x_0)=0$, якщо:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

12.2.° Відомо, що функція f у точці x_0 набуває найбільшого або найменшого значення. Перевірте рівність $f'(x_0)=0$, якщо:

1) $f(x) = 5 - x^2$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

12.3.° Проілюструйте графічно (зобразіть графік функції f) таке твердження: для кожного числа $x_0 \in (a; b)$ існує така неперервна на $[a; b]$ і диференційовна на $(a; b)$ функція f, що $f(a)=f(b)$ і $f'(x)=0$ лише при $x = x_0$.

12.4.° Проілюструйте графічно (зобразіть графік функції f) таке твердження: для кожного числа $x_0 \in (a; b)$ існує така неперервна на $[a; b]$ і диференційовна на $(a; b)$ функція f, що $f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ лише при $x = x_0$.

12.5.° Запишіть теорему Лагранжа для функції f і відрізка $[1; 2]$. На інтервалі $(1; 2)$ знайдіть таку точку x_0, для якої виконується рівність $f(2)-f(1)=f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}$; 3) $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$.

12.6.° Запишіть теорему Лагранжа для функції f і відрізка $[1; 3]$. На інтервалі $(1; 3)$ знайдіть таку точку x_0, для якої виконується рівність $\frac{f(3)-f(1)}{2}=f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{4}$.

12.7.° Використовуючи теорему Ферма, доведіть, що функція f не набуває в точці x_0 ні найбільшого, ні найменшого значення, якщо:

1) $f(x)=x^4+x+1$, $x_0=-0{,}5$;

2) $f(x)=\frac{1}{1-x}-x-\frac{1}{x}$, $D(f) = (1; 3)$, $x_0 = 2$;

3) $f(x)=\sin x+\cos x^2$, $D(f) = [1; 2]$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

12.8.° Доведіть, що функція f не набуває в точці x_0 ні найбільшого, ні найменшого значення, якщо:

1) $f(x)=(x^2+6x+8)(x^2+14x+48)$, $x_0=-3$;

2) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2+\frac{1}{x+3}$, $D(f)=(0;+\infty)$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\cos x-\sin x^2$, $D(f)=[0;2]$, $x_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

12.9.° Функція f, $D(f)=[a;b]$, неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$, причому $f'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$. Доведіть, що функція f є оборотною.

12.10.° Функція f диференційовна на відрізку $[0;1]$, причому $f'(x)\neq 1$ для всіх $x\in[0;1]$. Доведіть, що $f(1)\neq f(0)+1$.

12.11.° Використовуючи теорему Лагранжа, доведіть нерівність $n(b-a)a^{n-1}\leqslant b^n-a^n\leqslant n(b-a)b^{n-1}$, де $0<a<b$, $n\in\mathbb{N}$.

12.12.° Доведіть нерівність $\frac{x-y}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}<\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}<\frac{x-y}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$, де $0<y<x$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

12.13.° Доведіть нерівність:

1) $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$;

2) $|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|\geqslant|x-y|$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

12.14.° Доведіть нерівність:

1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

2) $|\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} y|\geqslant|x-y|$, $x\in(0;\pi)$, $y\in(0;\pi)$.

12.15.° Доведіть, що $\sin\frac{6}{5}-\sin\frac{7}{6}<\frac{1}{60}$.

12.16.° Доведіть, що $\operatorname{tg}\frac{5}{6}-\operatorname{tg}\frac{4}{5}>\frac{1}{15}$.

12.17.° Про диференційовну на $[1;3]$ функцію f відомо, що $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$. Доведіть існування такого x_0, що $f'(x_0)=0$.

12.18.° Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Для довільного x доведіть існування такого c, що $f(x)=f(0)+xf'(c)$.

12.19.°° Нехай $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. Для довільного $x\neq 0$ доведіть існування такого c, що $f(x)=1+xf'(c)$.

12.20.** Нехай $f(x)=x\operatorname{ctg} x$. Для довільного $x\in(0;\pi)$ доведіть існування такого c, що $f(x)=1+xf'(c)$.

12.21.** Числа a і b такі, що рівняння $\sin x=ax+b$ має принаймні два розв'язки. Доведіть, що рівняння $\cos x=a$ має безліч розв'язків.

12.22.** Доведіть, що рівняння $x^n+ax+b=0$ має не більше ніж три корені.

12.23.** Числа a і b такі, що рівняння $\operatorname{tg} x=ax+b$ має принаймні два розв'язки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Доведіть, що рівняння $\cos x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ має безліч розв'язків.

12.24.** Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Скориставшись теоремою Ролля для функції $g(x)=f(x)\sin x$, доведіть, що рівняння $f'(x)\sin x+f(x)\cos x=0$ має принаймні один корінь на відрізку $[0;\pi]$.

12.25.** Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Доведіть, що рівняння $f'(x)=f(x)\operatorname{tg} x$ має принаймні один корінь на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

12.26.** Василь Заплутайко хоче довести, що похідна функції $f(x)=|x|$ у точці $x_0=0$ дорівнює нулю. Він міркує так. Маємо: $f(-1)=f(1)$. Тому за теоремою Ролля існує точка $x_0\in(-1;1)$ така, що $f'(x_0)=0$. Але на інтервалі $(0;1)$ такої точки x_0 не існує, бо на цьому проміжку $f(x)=x$ і $f'(x)=1$. Так само її немає на інтервалі $(-1;0)$. Виходить, що $x_0=0$. Отже, $f'(x_0)=f'(0)=0$. Чи правий Василь?

12.27.* Чи існує така диференційовна на $\mathbb{R}$ функція f, що $f'(x)\geqslant 1$ для всіх $x>0$ і $f'(x)\leqslant -1$ для всіх $x<0$?

12.28.* Доведіть, що коли $a_0+\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=0$, то рівняння $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$ має щонайменше один корінь.

12.29.* Доведіть, що при будь-яких дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рівняння $a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\ldots+a_1\cos x=0$ має щонайменше один корінь.

12.30.* Натуральне число n не є точним квадратом. Доведіть, що $\{\sqrt{n}\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, де через $\{a\}$ позначено дробову частину числа a.

12.31.* Послідовність (x_n) задовольняє умови: $x_1 \in [0;1]$ і $x_{n+1} = \cos x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведіть збіжність цієї послідовності.

12.32.* Функція f диференційовна на відрізку $[-2; 2]$. Доведіть існування такого значення $x \in [-2; 2]$, що $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} < 1$.

12.33.* Про диференційовну на $[1; 3]$ функцію f відомо, що $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$. Для довільного $a \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ доведіть існування такого $x \in [1; 3]$, що $f'(x) = a$.

12.34.* Про диференційовну на $[1; 3]$ функцію f відомо, що $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$. Для довільного $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ доведіть існування такого $x \in [1; 3]$, що $f'(x) = a$.

12.35.* Функція f диференційовна на $[0; 1]$, $f(0) = 0$ і $f(x) > 0$ для всіх $x \in (0; 1)$. Доведіть існування такого $x \in (0; 1)$, що $f(x) < f'(x)$.

13. Ознаки зростання і спадання функції

Ви знаєте, що коли функція є константою, то її похідна дорівнює нулю. Виникає запитання: якщо функція f така, що для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то чи є функція f константою на проміжку I?

Звернемося до механічної інтерпретації.

Нехай $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій. Якщо в будь-який момент часу t від t_1 до t_2 виконується рівність $s'(t) = 0$, то протягом розглядуваного проміжку часу миттєва швидкість дорівнює нулю, тобто точка не рухається і її координата не змінюється. Це означає, що на розглядуваному проміжку функція $y = s(t)$ є константою.

Ці міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 13.1 (ознака сталості функції). ***Якщо для всіх x з проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.***

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_1 < x_2$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Звідси $f(x_2) = f(x_1)$. Ураховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція f є константою на проміжку I. ▲

На рисунку 13.1 зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Цей графік має таку властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс гострого кута є додатним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, можна зробити такий висновок: для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

З рисунка 13.1 видно, що функція f зростає на розглядуваному проміжку.

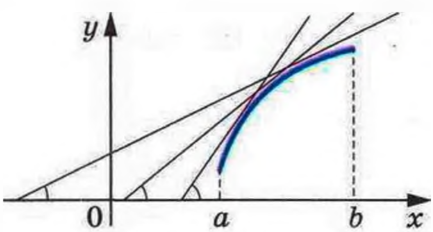


Рис. 13.1

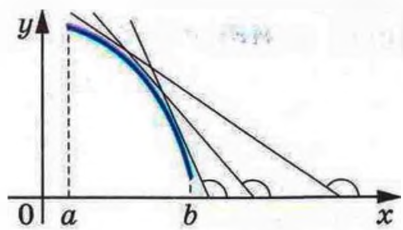


Рис. 13.2

На рисунку 13.2 зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс тупого кута є від'ємним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є від'ємним. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

З рисунка 13.2 видно, що функція f спадає на розглядуваному проміжку.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому проміжку I пов'язаний з тим, чи є ця функція зростаючою (спадною) на проміжку I.

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції можна виявити і за допомогою механічної інтерпретації. Якщо швидкість, тобто похідна функції $y = s\ (t)$, є додатною, то точка на координатній прямій рухається вправо (рис. 13.3). Це означає, що з нерівності $t_1 < t_2$ випливає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s\ (t)$ є зростаючою. Аналогічно, якщо швидкість є від'ємною, то точка рухається вліво, тобто функція $y = s\ (t)$ є спадною.

Рис. 13.3

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції установлюють такі теореми.

Теорема 13.2 (ознака зростання функції). ***Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.***

Теорема 13.3 (ознака спадання функції). ***Якщо для всіх x з проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.***

Доведемо теорему 13.2 (теорему 13.3 доводять аналогічно).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_2 > x_1$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція f зростає на I. ▲

Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Оскільки $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ для всіх $x \in (0; +\infty)$, то з теореми 13.2 випливає, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ зростає на проміжку $(0;+\infty)$.

Водночас теорема 13.2 не дозволяє стверджувати, що функція $f(x)=\sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Узагалі, якщо функція f визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і для всіх $x \in (a;+\infty)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то це не означає, що вона зростає на проміжку $[a;+\infty)$ (рис. 13.4).

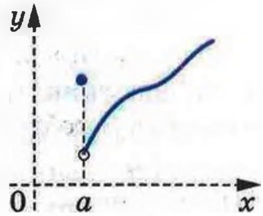


Рис. 13.4

Довести зростання функції $f(x)=\sqrt{x}$ на проміжку $[0;+\infty)$ можна за допомогою такого твердження: *якщо функція f неперервна в точці a і для всіх $x \in (a;+\infty)$ виконується нерівність $f'(x)>0$, то функція f зростає на проміжку $[a;+\infty)$.*

Використовуючи теорему Лагранжа, доведіть це твердження самостійно.

У такий самий спосіб можна обґрунтувати зростання (спадання) функції f на проміжках іншого виду, наприклад на $[a; b)$, $(-\infty; b]$, $[a; b]$.

Якщо диференційовна на проміжку I функція є зростаючою (спадною), то помилковим було б вважати, що вона обов'язково має додатну (від'ємну) похідну на цьому проміжку. Наприклад, функція $y=x^3$ є зростаючою, але її похідна в точці $x_0=0$ дорівнює нулю.

Теорема 13.4 (властивість зростаючої функції і спадної функції). ***Якщо диференційовна на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).***

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли функція f є зростаючою (для випадку, коли функція f є спадною, доведення аналогічне).

Нехай x_0 — довільна точка, яка належить проміжку I. Надамо аргументу функції f приріст $\Delta x = x - x_0$ у точці x_0. Ураховуючи зростання функції f, отримуємо $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$. Тому $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0$. ▲

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+x-100$ зростає на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$. Оскільки $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то функція f зростає на множині дійсних чисел. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;   3) $f(x) = \dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$;

2) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$;   4) $f(x) = \sqrt{x^2-3x}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$.

Дослідивши знак похідної методом інтервалів (рис. 13.5) і врахувавши неперервність функції f у точках $x = -3$ і $x = 1$, отримуємо, що вона зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$ та спадає на проміжку $[-3; 1]$.

2) Маємо: $f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x-2)^2$.

Дослідивши знак похідної (рис. 13.6), доходимо висновку, що функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на кожному з проміжків $[0; 2]$ і $[2; +\infty)$, тобто спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

3) Маємо: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Знайшовши похідну функції f, отримуємо: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

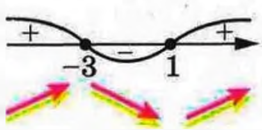


Рис. 13.5

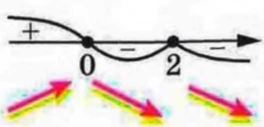


Рис. 13.6

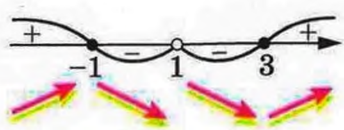


Рис. 13.7

Дослідимо знак функції $y = f'(x)$ (рис. 13.7). Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[3; +\infty)$ та спадає на кожному з проміжків $[-1; 1)$ і $(1; 3]$.

4) Маємо $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Знайдемо похідну функції f на множині $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2-3x}\right)' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$. Зауважимо, що в точках $x = 0$ та $x = 3$ функція f є неперервною.

Нерівність $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} > 0$ рівносильна системі $\begin{cases} 2x-3>0, \\ x^2-3x>0. \end{cases}$

Розв'язавши її, отримуємо, що множиною розв'язків розглядуваної нерівності є проміжок $(3; +\infty)$.

Далі легко встановити (зробіть це самостійно), що множиною розв'язків нерівності $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} < 0$ є проміжок $(-\infty; 0)$.

Рис. 13.8

Отже, якщо $x < 0$, то $f'(x) < 0$; якщо $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 13.8).

Урахувавши неперервність функції f у точках 0 і 3, можна зробити висновок: функція f зростає на проміжку $[3; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. ●

Якщо функція f є зростаючою (спадною), то з рівності $f(a) = f(b)$ випливає, що $a = b$. Розглянемо приклад, у якому використовується цей факт.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) = \cos 2y - \cos 2x, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо: $\begin{cases} 2x^2 + \cos 2x = 2y^2 + \cos 2y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$

Розглянемо функцію $f(t) = 2t^2 + \cos 2t$. Тоді перше рівняння отриманої системи можна подати у вигляді $f(x) = f(y)$.

З другого рівняння системи випливає, що $x > 0$ і $y > 0$. Тому будемо розглядати функцію f на множині $(0; +\infty)$.

Маємо: $f'(t) = 4t - 2\sin 2t = 2(2t - \sin 2t)$.

У пункті 3 було доведено, що $t > \sin t$ при $t > 0$. Тоді $f'(t) > 0$ при всіх $t \in (0; +\infty)$. Отже, функція f зростає на $(0; +\infty)$. Тому з рівності $f(x) = f(y)$ отримуємо, що $x = y$.

Маємо: $\begin{cases} x = y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}, \\ y = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{9}\right)$.

Під час доведення нерівностей часто використовують міркування такого роду: *якщо диференційовні на* $[a; +\infty)$ *функції* f *і* g *задовольняють умови* $f(a) = g(a)$ *і* $f'(x) > g'(x)$ *для всіх* $x > a$, *то* $f(x) > g(x)$ *для всіх* $x > a$. Справді, розглянемо функцію $h(x) = f(x) - g(x)$, $D(h) = [a; +\infty)$. Маємо: $h(a) = f(a) - g(a) = 0$. Оскільки $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ для всіх $x \in (a; +\infty)$ і функція h неперервна в точці $x_0 = a$, то функція h є зростаючою. Тому

$h(x) > h(a) = 0$ для всіх $x > a$, тобто $f(x) - g(x) > 0$ для всіх $x > a$.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що для всіх $x < 1$ виконується нерівність $x^9 + 4x < 3 + 2x^5$.

Розв'язання. Для доведення даної нерівності скористаємося таким твердженням: *якщо диференційовні на* $(-\infty; a]$ *функції* f *і* g *задовольняють умови* $f(a) = g(a)$ *і* $f'(x) > g'(x)$ *для всіх* $x < a$, *то* $f(x) < g(x)$ *для всіх* $x < a$.

Розглянемо функції $f(x) = x^9 + 4x$ і $g(x) = 3 + 2x^5$. Маємо $f(1) = g(1)$. Обчислимо похідні функцій f і g: $f'(x) = 9x^8 + 4$, $g'(x) = 10x^4$. Розглянемо нерівність $f'(x) > g'(x)$, тобто нерівність $9x^8 - 10x^4 + 4 > 0$. Квадратний тричлен $9t^2 - 10t + 4$ має від'ємний дискримінант. Тому нерівність $9x^8 - 10x^4 + 4 > 0$ виконується при всіх $x \in \mathbb{R}$. Звідси $f'(x) > g'(x)$ для всіх $x < 1$. Тому при $x < 1$ виконується нерівність $x^9 + 4x < 3 + 2x^5$. ●

У цьому пункті ви ознайомилися з ознакою сталості функції. Цю теорему можна використовувати для доведення тотожностей. Так, якщо вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x_0 \in I$ виконується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) = A$ для всіх $x \in I$.

ПРИКЛАД 5 Для всіх $x \in (-1; 1)$ доведіть тотожність

$$2 \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}, \quad D(f) = (-1; 1).$$

Маємо:

$$f'(x) = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}}} \cdot \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{1 + x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^2 - 4x^2}} \times$$

$$\times \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2}{1 + x^2} - \frac{1 + x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2}} \cdot \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = 0.$$

Отже, функція $f(x)$ є константою на $(-1; 1)$. Знайти цю константу можна, обчисливши значення функції f у «зручній» точці проміжку $(-1; 1)$. Наприклад, $f(0) = 0$. ●

Вправи

13.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
5) $f(x) = x^3 + 4x - 8$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

13.2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;
4) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

13.3.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
3) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 6$;
4) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
5) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
6) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;
7) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$;
8) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

13.4.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4$;
2) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
3) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
5) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

13.5.° На рисунку 13.9 зображено графік похідної функції f, диференційовної на $\mathbb{R}$. Укажіть проміжки спадання функції f.

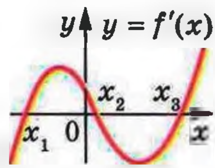


Рис. 13.9

13.6.° На рисунку 13.10 зображено графік функції $y = f(x)$, диференційовної на $\mathbb{R}$. Серед наведених на рисунку 13.11 графіків укажіть той, який може бути графіком функції $y = f'(x)$.

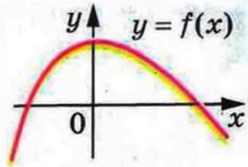
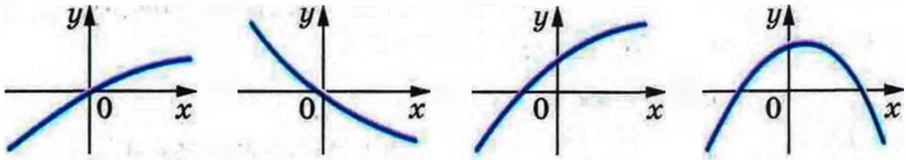


Рис. 13.10



а *б* *в* *г*

Рис. 13.11

13.7.° На рисунку 13.12 зображено графік похідної функції f, диференційовної на $\mathbb{R}$. Укажіть проміжки зростання функції f.

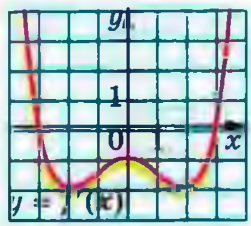
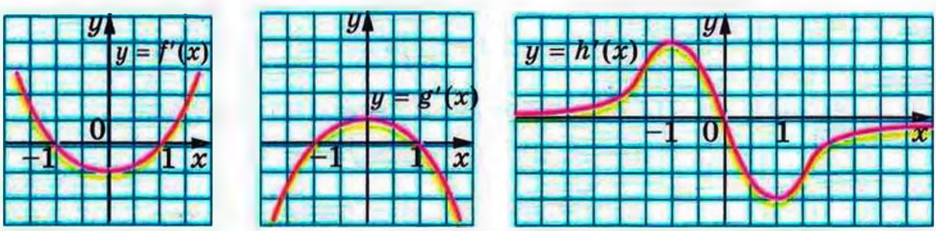


Рис. 13.12

13.8.° На рисунку 13.13 зображено графіки похідних функцій f, g і h, диференційовних на $\mathbb{R}$. Яка з функцій f, g, h спадає на відрізку $[-1; 1]$?



а *б* *в*

Рис. 13.13

13.9.° На рисунку 13.14 зображено графіки похідних функцій f, g і h. Яка з функцій f, g, h спадає на $\mathbb{R}$?

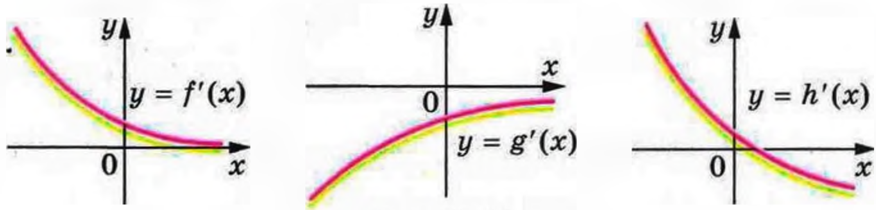


Рис. 13.14

13.10.° Доведіть, що функція спадає на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$;

2) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 10x + 80$;

3) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

13.11.° Доведіть, що функція зростає на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$;

2) $f(x) = \cos 3x + 4x$.

13.12.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$;

2) $f(x) = x - \cos x$;

3) $y = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

13.13.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sin x - x$;

2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$;

3) $f(x) = \sin^2 x - \frac{x}{2}$.

13.14.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$; 2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

13.15.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

13.16.° На рисунку 13.15 зображено графіки функцій f і g, визначених на $\mathbb{R}$. Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність: 1) $f'(x) \leqslant 0$; 2) $g'(x) \geqslant 0$.

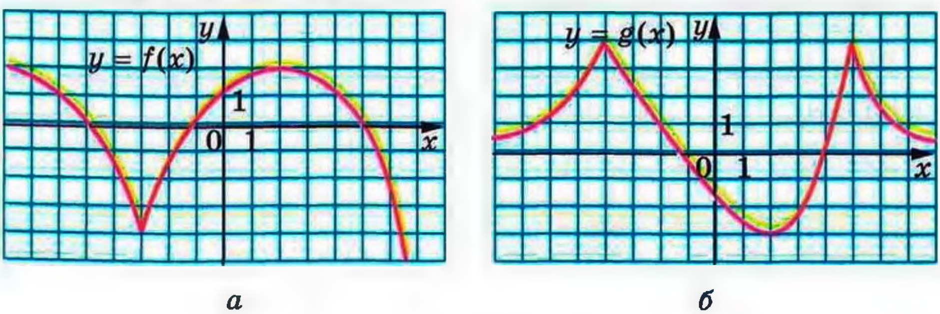


Рис. 13.15

13.17.° На рисунку 13.16 зображено графіки функцій f і g, визначених на $\mathbb{R}$. Використовуючи їх, розв'яжіть нерівність: 1) $f'(x) \geqslant 0$; 2) $g'(x) \leqslant 0$.

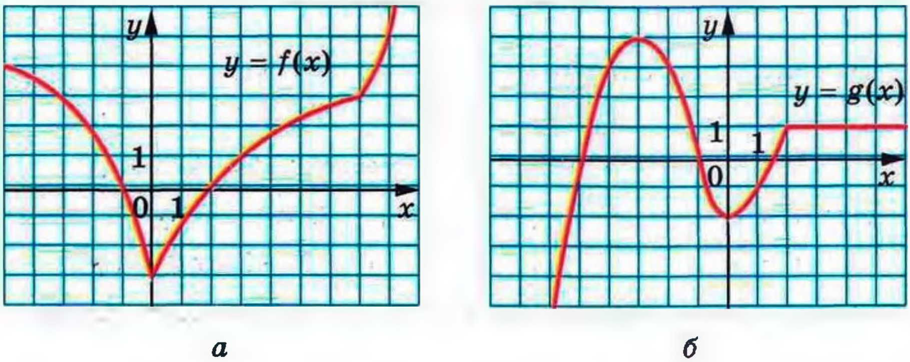


Рис. 13.16

13.18.° Функція f неперервна на проміжку I і диференційовна на множині $I \setminus \{x_0\}$, де x_0 — деяка точка, яка належить проміжку I. Відомо, що $f'(x) = 0$ для всіх $x \in I \setminus \{x_0\}$. Чи можна стверджувати, що функція f є константою на проміжку I?

13.19.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2x.$$

13.20.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції

$$f(x) = \operatorname{ctg} x + 4x.$$

13.21.° При яких значеннях параметра a є зростаючою функція:

1) $y = x^3 - ax$;
2) $y = 3 \sin 4x + ax$;
3) $y = -2\sqrt{1 - x} + ax$;
4) $y = \frac{x^3}{3} + 2(a + 1)x^2 - 9x - 4$?

13.22.° При яких значеннях параметра a є спадною функція:

1) $y = ax - x^5$;
2) $y = 2 \cos 3x + ax$;
3) $y = -2\sqrt{x + 3} + ax$;
4) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 4x + 21$?

13.23.•• Розв'яжіть рівняння $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

13.24.•• Розв'яжіть рівняння $x^3 + 6x + 2\sqrt{10 + x} = \cos \pi x$.

13.25.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

13.26.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

13.27.•• Розв'яжіть нерівність $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

13.28.•• Розв'яжіть нерівність $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

13.29.•• Доведіть нерівність $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

13.30.•• Доведіть нерівність $x < \operatorname{tg} x$, де $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

13.31.•• Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

13.32.•• Доведіть нерівність $\operatorname{arctg} x < x$ для всіх $x > 0$.

13.33.•• Доведіть нерівність $\arcsin x > x$ для всіх $x \in (0; 1]$.

13.34.•• Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x + \sin x > 2x$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

13.35.•• Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x + 2 \sin x > 3x$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

13.36.•• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\arccos x = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

13.37.•• Доведіть тотожність:

1) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\arcsin x + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2}$.

13.38.•• При яких значеннях параметра c функція

$$f(x) = (c - 12)\,x^3 + 3\,(c - 12)\,x^2 + 6x + 7$$

зростає на $\mathbb{R}$?

13.39.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = (a + 3)\,x^3 + 3\,(a + 3)\,x^2 - 5x + 12$$

спадає на $\mathbb{R}$?

13.40.•• Знайдіть усі значення параметра b, при кожному з яких функція

$$f(x) = \sin 2x - 8\,(b + 2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)\,x$$

спадає на $\mathbb{R}$.

13.41.•• Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких функція

$$f(x) = \sin 2x - 8\,(a + 1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)\,x$$

зростає на $\mathbb{R}$.

13.42.•• При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \sin x - a \sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$$

зростає на $\mathbb{R}$?

13.43." При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin x\,(a+\cos x)+(1-2a)\,x-2$$

спадає на $\mathbb{R}$?

13.44.* Доведіть нерівність

$$\sin A+\sin B+\sin C+\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C>2\pi,$$

де A, B, C — кути гострокутного трикутника.

13.45.* Спростіть вираз $\arccos x-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

13.46.* Спростіть вираз $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

13.47.* Порівняйте значення виразів $\frac{\pi}{100}\sin\frac{\pi}{101}$ і $\frac{\pi}{101}\sin\frac{\pi}{100}$.

13.48.* Порівняйте значення виразів $\frac{1}{20}\operatorname{tg}\frac{1}{21}$ і $\frac{1}{21}\operatorname{tg}\frac{1}{20}$.

13.49.* Знайдіть усі такі функції f, що для всіх дійсних x і y виконується нерівність $|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$.

13.50.* Знайдіть усі такі диференційовні на $\mathbb{R}$ функції f, що для всіх дійсних x і y виконується рівність $f(x)+f(y)=f(x+y)$.

13.51.* Про диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що $f'(x_0)>0$. Чи обов'язково знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що функція f є зростаючою в цьому околі?

14. Точки екстремуму функції

Знайомлячись з такими поняттями як границя і неперервність функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, в її околі.

Означення. Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають **околом** точки x_0.

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок $(-1; 3)$ — один з околів точки 2,5. Разом з цим цей проміжок не є околом точки 3.

На рисунку 14.1 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0)\geqslant f(x)$.

Означення. **Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

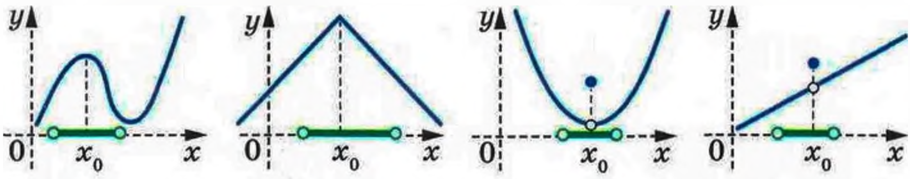


Рис. 14.1

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$ (рис. 14.2). Пишуть $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

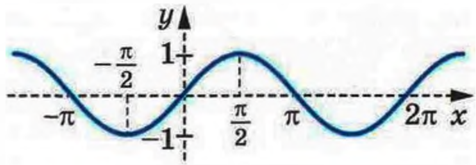


Рис. 14.2

На рисунку 14.1 $x_{\max} = x_0$.

Означення. **Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 14.2). Пишуть $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 14.3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.

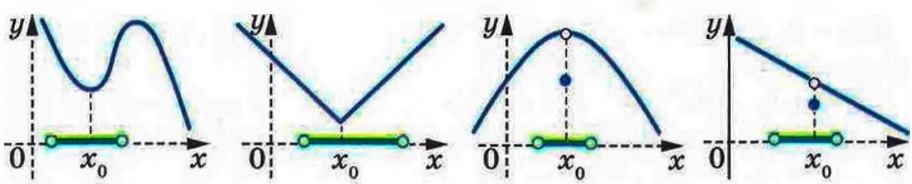


Рис. 14.3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму функції** (від латинського *extremum* — крайній).

На рисунку 14.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 є точками екстремуму функції f.

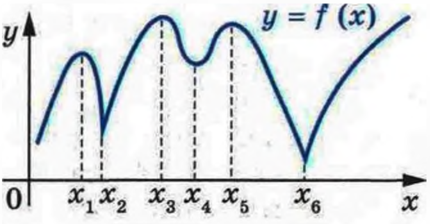


Рис. 14.4

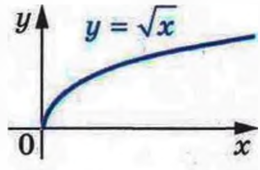


Рис. 14.5

З означень точок максимуму і мінімуму випливає, що точки екстремуму є внутрішніми точками[1] області визначення функції. Тому, наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 14.5), а точка $x_0 = 1$ не є точкою максимуму функції $y = \arcsin x$ (рис. 14.6). Разом з тим найменше значення функції $y = \sqrt{x}$ на множині $[0; +\infty)$ дорівнює нулю, тобто

$$\min_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0, \text{ а } \max_{[-1;1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

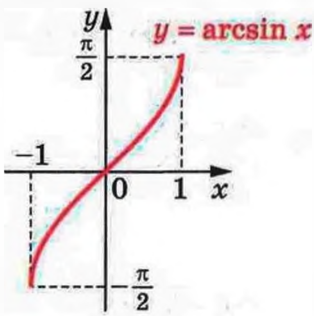


Рис. 14.6

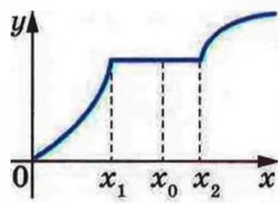


Рис. 14.7

На рисунку 14.7 зображено графік деякої функції f, яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою.

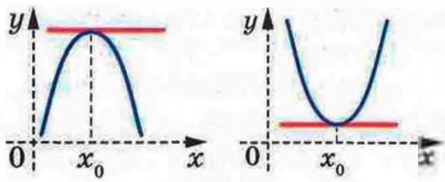
Точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка інтервалу $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f.

Зауважимо, що також буває доцільним виділяти точку *строгого максимуму*, тобто таку точку x_0, для якої існує проколотий δ-окіл такий, що для всіх x із цього проколотого δ-околу викону-

[1] Точку $x_0 \in M$ називають *внутрішньою* точкою множини M, якщо існує окіл точки x_0, який є підмножиною множини M.

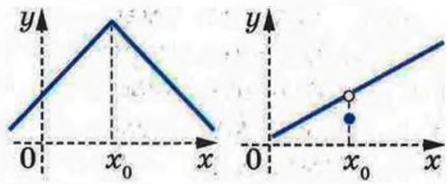
ється строга нерівність $f(x_0) > f(x)$. Аналогічно означають і точку *строгого мінімуму*. Наприклад, на рисунку 14.4 кожна точка максимуму (мінімуму) є також точкою строгого максимуму (мінімуму). На рисунку 14.7 жодна з точок відрізка $[x_1; x_2]$ не є точкою строгого максимуму або строгого мінімуму.

Графіки функцій, зображених на рисунках 14.8 і 14.9, показують, що точки екстремуму можна поділити на два види: ті, у яких похідна дорівнює нулю (на рисунку 14.8 дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою), і ті, у яких функція недиференційовна (рис. 14.9).



а *б*

Рис. 14.8



а *б*

Рис. 14.9

Дійсно, справедливою є така теорема.

Теорема 14.1. ***Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0.***

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує?

Відповідь на це запитання заперечна.

Наприклад, на рисунку 14.10 зображено графік функції, недиференційовної в точці x_0. Проте точка x_0 не є точкою екстремуму.

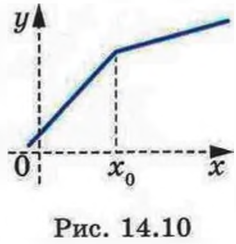


Рис. 14.10

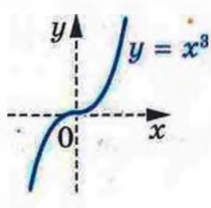


Рис. 14.11

Наведемо ще один приклад. Для функції $f(x) = x^3$ маємо: $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(0) = 0$. Проте точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму функції f (рис. 14.11).

Ці приклади показують, що рівність нулю похідної в точці x_0 або недиференційовність функції в цій точці є необхідною, але не достатньою умовою існування екстремуму в точці x_0.

Означення. **Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.**

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є критичною точкою функцій $y = x^3$ і $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є критичною точкою функції $y = \sin x$.

Рис. 14.12

Із сказаного вище випливає, що *кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму*. Іншими словами, *точки екстремуму слід шукати серед критичних точок*. Цей факт проілюстровано на рисунку 14.12.

На рисунку 14.13 зображено графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою.

На рисунках 14.13, *а–г* критична точка x_0 є точкою екстремуму, на рисунках 14.13, *ґ*, *д* критична точка x_0 не є точкою екстремуму.

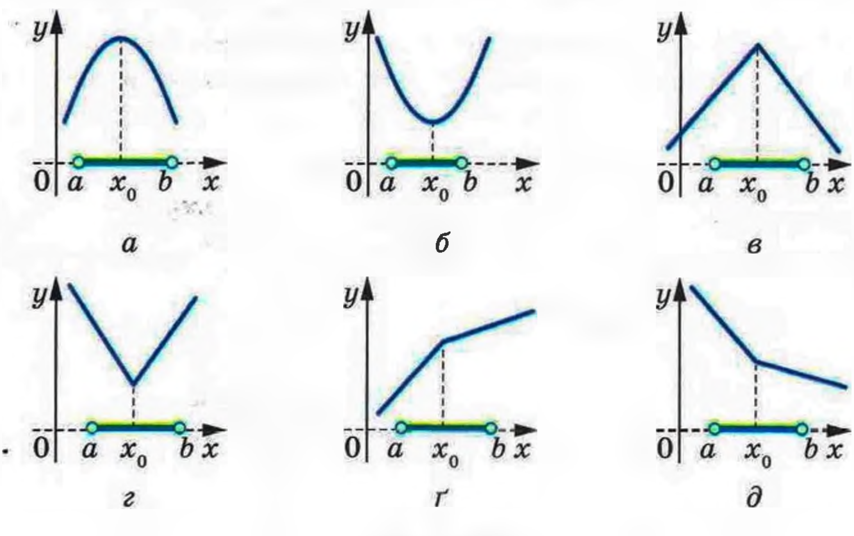


Рис. 14.13

Наявність екстремуму функції в точці x_0 пов'язана з поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках 14.13, *а–г*, маємо: функція **зростає** (**спадає**) на проміжку $(a; x_0]$ і **спадає** (**зростає**) на проміжку $[x_0; b)$.

Функції, графіки яких зображено на рисунках 14.13, *ґ*, *д*, такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$, друга спадає на цих проміжках.

Узагалі, якщо область визначення неперервної функції розбито на скінченну кількість проміжків зростання і спадання, то легко знайти всі точки екстремуму (рис. 14.14).

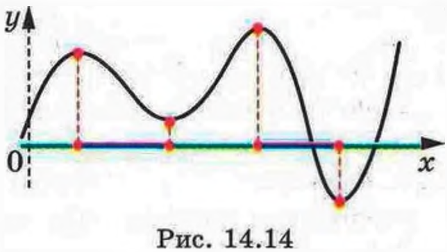


Рис. 14.14

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 14.2 (ознака точки максимуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f*** (рис. 14.13, *а*, *в*).

Теорема 14.3 (ознака точки мінімуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ і неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f*** (рис. 14.13, *б*, *г*).

Доведемо теорему 14.2 (теорему 14.3 доводять аналогічно).

Доведення. Нехай x — довільна точка проміжку $(a; x_0)$. За теоремою Лагранжа для функції f на відрізку $[x; x_0]$ можна записати:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(c),$$

де $c \in (x; x_0)$. За умовою теореми $f'(c) \geqslant 0$, тому $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Аналогічно доводимо, що для довільного $x \in (x_0; b)$ також виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. Отже, для будь-якого $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. Таким чином, x_0 — точка максимуму. ▲

Інколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: *якщо при переході через точку x_0, у якій функція є неперервною, похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму; якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму.*

Зазначимо, що вимога неперервності функції f у точці x_0 в умовах теорем 14.2 і 14.3 є суттєвою. На рисунку 14.15 похідна функції f при переході через критичну точку x_0 змінює знак з мінуса на плюс, при цьому точка x_0 є точкою максимуму; на рисунку 14.16 похідна функції f при переході через критичну точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, при цьому точка x_0 не є точкою екстремуму.

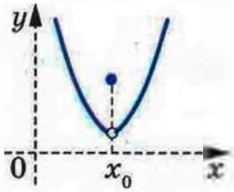


Рис. 14.15

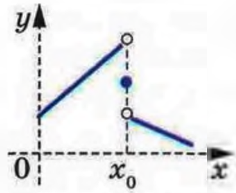


Рис. 14.16

Для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$.

2) Дослідити знак похідної в околах критичних точок.

3) Користуючись відповідними теоремами, стосовно кожної критичної точки з'ясувати, чи є вона точкою екстремуму.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$;

4) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$;

5) $f(x) = 3\,|x|\,(x + 2) - 4x^3$.

Розв'язання. 1) Маємо: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$. Методом інтервалів дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 14.17). Отримуємо, що $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$.

Рис. 14.17

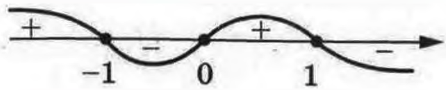


Рис. 14.18

2) $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$.

Дослідивши знак похідної (рис. 14.18), отримуємо: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$ і $x_{max} = 1$.

3) Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

Дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 14.19). Маємо, що $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$.

4) Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x + 2)' \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x + 2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x + 2)}{x} =$$

$$= \frac{2x - (x + 2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 2}{2x\sqrt{x}}.$$

Якщо $0 < x < 2$, то $f'(x) < 0$; якщо $x > 2$, то $f'(x) > 0$. Отже, критична точка $x = 2$ є точкою мінімуму, тобто $x_{min} = 2$.

5) Якщо $x < 0$, то $f(x) = -4x^3 - 3x^2 - 6x$. Якщо $x > 0$, то $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 6x$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty; 0)$ маємо $f'(x) = -12x^2 - 6x - 6$, а для будь-якого $x \in (0; +\infty)$ маємо $f'(x) = -12x^2 + 6x + 6$.

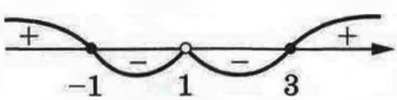


Рис. 14.19

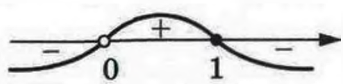


Рис. 14.20

На рисунку 14.20 показано результат дослідження знака похідної на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Функція f є неперервною в точках $x = 0$ і $x = 1$. Тепер можна зробити висновок: $x = 0$ — точка мінімуму, $x = 1$ — точка максимуму. ●

ПРИКЛАД 2 Знайдіть точки екстремуму функції

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}.$$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}+2\pi k, \\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 4\pi k, \\ x = -\frac{4\pi}{3}+4\pi k. \end{array}\right.$$

Функція $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ є періодичною з періодом $T = 4\pi$. Методом інтервалів дослідимо її знак на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$ завдовжки в період. Цьому проміжку належать дві критичні точки:

$$x = 0 \text{ і } x = -\frac{4\pi}{3}.$$

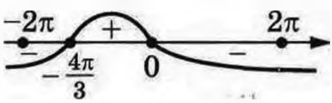


Рис. 14.21

На рисунку 14.21 показано результат дослідження знака похідної на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$. Тепер можна зробити висновок: $x_{max} = 0$, $x_{min} = -\frac{4\pi}{3}$.

Узагальнюючи отриманий результат, дістаємо відповідь:

$$x_{max} = 4\pi k, \; x_{min} = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}. \bullet$$

Вправи

14.1.° На рисунку 14.22 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-10; 9]$. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

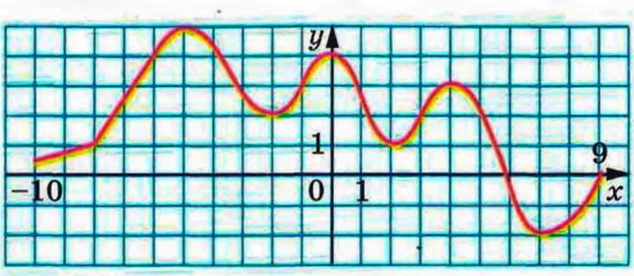


Рис. 14.22

14.2.° На рисунку 14.23 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

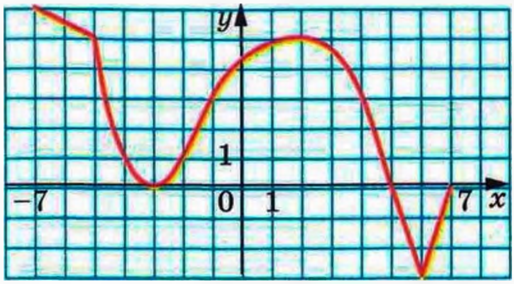


Рис. 14.23

14.3.° На рисунку 14.24 укажіть графік функції, для якої точка x_0 є точкою мінімуму.

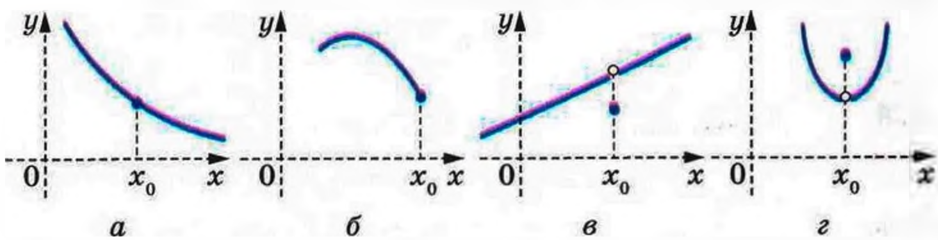


Рис. 14.24

14.4.° Чи має критичні точки функція:

1) $f(x) = x$;
3) $f(x) = 5$;
5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
2) $f(x) = x^5 + 1$;
4) $f(x) = \sin x$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$?

14.5.° На рисунку 14.25 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Чи є правильною рівність:

1) $f'(-3) = 0$;
3) $f'(0) = 0$;
5) $f'(2) = 0$;
2) $f'(-2) = 0$;
4) $f'(1) = 0$;
6) $f'(3) = 0$?

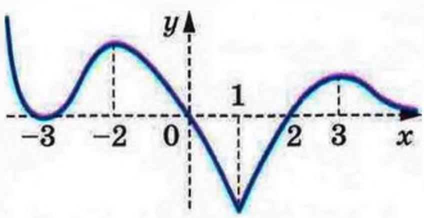


Рис. 14.25

14.6.° Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 14.26 зображено графік її похідної. Укажіть точки максимуму і мінімуму функції $y = f(x)$.

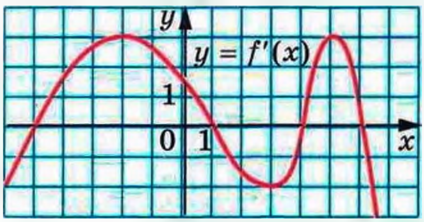


Рис. 14.26

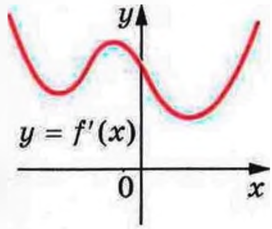


Рис. 14.27

14.7.° Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 14.27 зображено графік функції $y = f'(x)$. Скільки точок екстремуму має функція $y = f(x)$?

14.8.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;
5) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
6) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

14.9.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$;
6) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

14.10.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$;
2) $f(x) = (x - 1)^3 (x - 2)^2$;
3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

14.11.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$; 2) $f(x) = (x + 4)^4 (x - 3)^3$.

14.12.° Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$; 2) $f(x) = \sin x - x$.

14.13.° Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$; 2) $f(x) = \cos x + x$.

14.14.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;
4) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}$;
5) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$;
6) $f(x)=-\dfrac{1}{(x-3)^2}$;
7) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-16}$;
8) $f(x)=2\sqrt{x}-x$.

14.15.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-6x}{x+2}$;
2) $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{16-x^2}$;
6) $f(x)=2x-\sqrt{x}$.

14.16.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$;
2) $f(x)=(1-x)\sqrt{x}$;
3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;
4) $f(x)=\dfrac{2x-7}{\sqrt{3-x}}$.

14.17.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x)=x^2\sqrt{x+2}$;
2) $f(x)=(x-2)^2\sqrt{x}$;
3) $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$.

14.18.° Чи є правильним твердження:

1) значення функції в точці максимуму може бути меншим від значення функції в точці мінімуму;
2) функція в точці екстремуму може бути недиференційовною;
3) якщо похідна в деякій точці дорівнює нулю, то ця точка є точкою екстремуму функції?

14.19.° Чи є правильним твердження:

1) у точці екстремуму похідна функції дорівнює нулю;
2) якщо функція в деякій точці недиференційовна, то ця точка є точкою екстремуму функції?

14.20.° Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх $x<x_0$ виконується нерівність $f'(x)>0$, а для всіх $x>x_0$ виконується нерівність $f'(x)<0$. Чи може точка x_0 бути точкою мінімуму?

14.21.° Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх u і v таких, що $u < x_0$ і $v > x_0$, виконується нерівність $f'(u)f'(v) < 0$. Чи обов'язково точка x_0 є точкою екстремуму?

14.22.° Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх u і v таких, що $u < x_0$ і $v > x_0$, виконується нерівність $f'(u)f'(v) > 0$. Чи може точка x_0 бути точкою екстремуму?

14.23.° Доведіть, що многочлен степеня n має не більше ніж $(n-1)$ точку екстремуму.

14.24.•• Для кожного $n \in \mathbb{N}$ доведіть існування многочлена степеня n, що має $(n-1)$ точку екстремуму.

14.25.•• Доведіть, що між довільними двома точками мінімуму (максимуму) неперервної на $\mathbb{R}$ функції є точка максимуму (мінімуму).

14.26.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$; 2) $f(x) = \cos 2x - x\sqrt{3}$.

14.27.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$; 2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{2}$.

14.28.•• Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x|x-1| - 5x^3$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-1)$.

14.29.•• Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3|x|(x-3) - x^3$; 2) $f(x) = x\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

14.30.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$$

має тільки одну критичну точку?

14.31.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$$

має тільки одну критичну точку?

14.32.•• Чи є правильним твердження: якщо $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in M$, і функція f диференційовна в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$?

14.33.•• Чи може мати тільки одну точку екстремуму: 1) парна функція; 2) непарна функція; 3) періодична функція?

14.34.•• Для всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) \geqslant f(x_0)$. 1) Чи є правильним твердження, що x_0 — точка мінімуму функції f? 2) Чи зміниться відповідь, якщо $D(f) = \mathbb{R}$?

14.35.** Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x)=\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x-\frac{\sin 2x}{4}-\frac{1-\sqrt{3}x}{2}$;

2) $f(x)=\sin x-\cos x+x$; 4) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$.

14.36.** Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x)=\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $f(x)=5\sin x+12\cos x-13x$.

2) $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x-x$;

14.37.** При яких значеннях параметра a функція

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x-17$$

має додатну точку мінімуму?

14.38.** При яких значеннях параметра a функція

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{3a-1}{2}x^2+(2a^2-a)x+19$$

має додатну точку мінімуму?

14.39.** При яких значеннях параметра a точка $x_0=1$ є точкою мінімуму функції $y=\frac{x^3}{3}+ax^2+(a^2-4)x+7$?

14.40.** При яких значеннях параметра a точка $x_0=0$ є точкою максимуму функції $y=\frac{x^3}{3}-ax^2+(a^2-1)x-9$?

14.41.** При яких значеннях параметра a точка $x_0=1$ є точкою екстремуму функції $y=x^3-ax^2+(a^2-2a)x-7$?

14.42.** При яких значеннях параметра a точка $x_0=2$ є точкою екстремуму функції $y=x^3-2ax^2+(2a^2-2a)x+9$?

14.43.** Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $x^3-3px^2+p=0$ має три різних корені.

14.44.** При яких значеннях параметра a нерівність $2(x-a)^4\leqslant 1-x$ має хоча б один розв'язок?

14.45.* При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=x(1-a)+3(1-2a)\sin\frac{x}{3}+\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3}$$

має не більше двох точок екстремуму на проміжку $(\pi;\ 5\pi)$?

14.46.* Про диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що x_0 — її точка мінімуму. Чи обов'язково знайдеться такий окіл I точки x_0, що для всіх $x<x_0$, $x\in I$ виконується нерівність $f'(x)\leqslant 0$, а для всіх $x>x_0$, $x\in I$ виконується нерівність $f'(x)\geqslant 0$?

14.47.* Чи можна стверджувати, що x_0 — точка мінімуму визначеної на $\mathbb{R}$ функції f, якщо у будь-якому інтервалі координатної прямої знайдеться така точка x, що $f(x_0) < f(x)$?

14.48.* Чи існує визначена на $(-1;\ 1)$ функція така, що кожна точка інтервалу $(-1;\ 1)$ є точкою строгого максимуму цієї функції?

15. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Яку кількість продукції має випустити підприємство, щоб отримати найбільший прибуток? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час? Як організувати доставку товару по торговельних точках так, щоб витрати палива були найменшими?

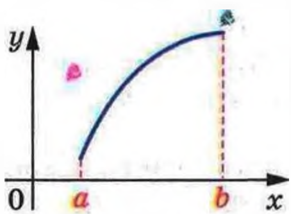


Рис. 15.1

Такі й подібні задачі на пошук найкращого або, як говорять, оптимального розв'язку займають значне місце в практичній діяльності людини.

Уявімо, що відомо функцію, яка описує, наприклад, залежність прибутку підприємства від кількості виготовленої продукції. Тоді задача звелася до пошуку аргументу, при якому функція набуває найбільшого значення.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a;\ b]$. Обмежимося розглядом лише неперервних функцій.

Зауважимо, що точка, у якій функція набуває свого найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму. Наприклад, на рисунку 15.1 $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення. На рисунку 15.2, *а* точка x_2 — єдина точка мінімуму, а найменше значення $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ досягається в точці a.

Аналогічне зауваження стосується і точок максимуму та точок, у яких функція досягає найбільшого значення.

На рисунку 15.2 подано різні випадки розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

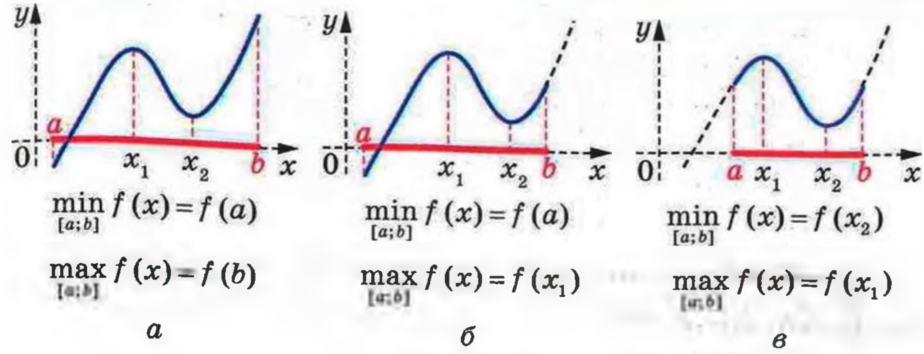


Рис. 15.2

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: функція набуває в точці x_0 найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в усіх точках деякого, можливо, дуже малого околу точки x_0. Тому, якщо хочуть наголосити на цьому факті, то точки екстремуму ще називають **точками локального максимуму** або **точками локального мінімуму** (від латинського *locus* — місце).

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень[1] або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 15.2).

Тоді для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції f, які належать відрізку $[a; b]$.

2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.

3. З усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a; b]$.

Зазначимо, що коли визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких слід шукати значення функції, може бути зменшена. Проте виявлення точок екстремуму, як правило, потребує більшої технічної роботи, ніж пошук значень функції в критичних точках.

---

[1] Нагадаємо, що існування найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції гарантує друга теорема Вейєрштрасса (теорема 5.4).

ПРИКЛАД 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}.$$

Отже, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2; 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Маємо: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Відповідь: $\frac{37}{4}$; -38.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на проміжку $[0; \pi]$.

Розв'язання. Маємо:

$f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) = 16\sin 3x \sin x$.

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$\sin 3x \sin x = 0;$$

$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ або } x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Звідси $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отже, точки виду $x = \frac{\pi k}{3}$ є критичними точками функції f, з них проміжку $[0; \pi]$ належать чотири точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. Маємо:

$$f(0) = f(\pi) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3};\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Таким чином,

$$\max_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3},$$

$$\min_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}$.

ПРИКЛАД 3 Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб сума куба першого числа і квадрата другого була найменшою.

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює $8 - x$. З умови випливає, що $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, визначену на відрізку $[0; 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{8}{3}.$$

Серед знайдених чисел проміжку $[0; 8]$ належить тільки число 2. Маємо:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R, якщо площа прямокутника набуває найбільшого значення.

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABCD$, вписаний у коло радіуса R (рис. 15.3). Нехай $AB = x$, тоді $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Звідси площа прямокутника $ABCD$ дорівнює $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. З умови задачі випливає, що значення змінної x задовольняють нерівність $0 < x < 2R$, тобто належать проміжку $(0; 2R)$. Таким чином, задача звелася до знаходження найбільшого значення функції $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі $(0; 2R)$. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(f) = [0; 2R]$, і будемо шукати її найбільше значення на відрізку $[0; 2R]$.

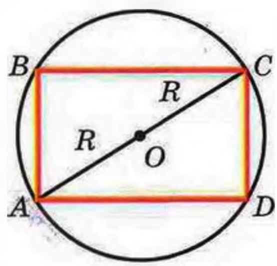


Рис. 15.3

Знайдемо критичні точки функції f:

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot (4R^2 - x^2)' =$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Функція f має одну критичну точку $x = R\sqrt{2}$.

Маємо: $f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$, $f(0) = f(2R) = 0$. Отже,

$$\max_{[0;\,2R]} f(x) = f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2.$$

Звідси отримуємо, що функція $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі $(0;\ 2R)$ набуває найбільшого значення при $x = R\sqrt{2}$. Тоді $AB = R\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Отже, серед прямокутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$. ●

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$, $D(f) = [2;\ 4]$. Для всіх $x \in (2;\ 4)$ маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$. Запишемо:

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0.$$

Звідси легко знайти, що $x = 3$. Отримали, що функція f на відрізку $[2;\ 4]$ має єдину критичну точку $x = 3$.

Оскільки функція f є неперервною на відрізку $[2;\ 4]$, то її найбільше і найменше значення знаходяться серед чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$. Маємо: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Отже, $\max\limits_{[2;\,4]} f(x) = f(3) = 2$, причому найбільшого значення функція f набуває лише при $x = 3$.

Оскільки нам потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 2$, то отримуємо, що $x = 3$ є його єдиним коренем.

Відповідь: 3.

ПРИКЛАД 6 Пункти A, B і C розміщені у вершинах прямокутного трикутника ($\angle ACB = 90°$), $BC = 3$ км, $AC = 5$ км. З пункту A в пункт C веде шосейна дорога. Турист починає рухатися з пункту A по шосе. На якій відстані від пункту A турист має звернути з шосе, щоб за найменший час дійти з пункту A до пункту B, якщо швидкість туриста по шосе дорівнює 5 км/год, а поза шосе — 4 км/год?

Розв'язання. Позначимо через D точку, у якій турист має звернути з шосе, щоб найшвидше подолати шлях (рис. 15.4).

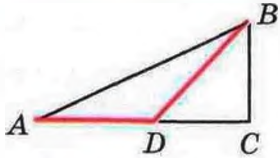


Рис. 15.4

Нехай $AD = x$ км. Маємо: $DC = 5 - x$, $DB=\sqrt{DC^2+BC^2}=\sqrt{(5-x)^2+9}$. Тоді час, за який турист подолає шлях, дорівнює $\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$. Тепер зрозуміло, що для розв'язання задачі достатньо знайти найменше значення функції $f(x)=\frac{x}{5}+\frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$, заданої на відрізку $[0; 5]$. Маємо: $f'(x)=\frac{1}{5}-\frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}}$. Розв'язавши рівняння $\frac{1}{5}-\frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}}=0$ (зробіть це самостійно), установлюємо, що число $x = 1$ є його єдиним коренем. Порівнюючи числа $f(0)=\frac{\sqrt{34}}{4}$, $f(1)=\frac{29}{20}$ і $f(5)=\frac{7}{4}$, установлюємо, що $f(1)=\frac{29}{20}$ — найменше значення функції f на відрізку $[0; 5]$.

Відповідь: 1 км.

Вправи

15.1.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 3$, $[1; 3]$;
4) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
5) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x - 7$, $[-1; 3]$;
6) $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

15.2.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x)=\frac{x^4}{4}-8x^2$, $[-1; 2]$.

15.3.° Доведіть нерівність $-20 \leqslant x^3 - 3x^2 \leqslant 16$, де $x \in [-2; 4]$.

15.4.° Доведіть нерівність $0 \leqslant x^3 - 2x^2 + x \leqslant 2$, де $x \in [0; 2]$.

15.5.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;
2) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 3x + 5}$, $[2; 4]$;
3) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2$, $[-2; 4]$;
4) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

15.6.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{9 + 8x - x^2}$, $[0; 7]$;
2) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2; 4]$;
3) $f(x) = (x - 1)^2(x + 5)^2$, $[-3; 2]$;
4) $f(x) = -x - \frac{9}{x}$, $[-6; -1]$.

15.7.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$;
3) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

15.8.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$.

15.9.° Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток куба одного з цих чисел на друге число був найбільшим.

15.10.° Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного з цих чисел на подвоєне друге число був найбільшим.

15.11.°° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;
2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;
3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

15.12.'' Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

15.13.'' Розбийте число 180 на три невід'ємних доданки так, щоб два з них відносились як 1 : 2, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.

15.14.'' Подайте число 18 у вигляді суми трьох невід'ємних чисел так, щоб два з них відносились як 8 : 3, а сума кубів цих трьох чисел була найменшою.

15.15.'' У трикутник ABC вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на стороні AC, а дві інші – на сторонах AB і BC. Знайдіть найбільше значення площі такого прямокутника, якщо $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, де BD — висота трикутника ABC.

15.16.'' У прямокутний трикутник з гіпотенузою 16 см і гострим кутом 30° вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

15.17.'' У півколо радіуса 20 см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть сторони прямокутника.

15.18.'' У півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

15.19.'' Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 12 - x^2$, $D(y) = \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$, а дві інші — осі абсцис. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

15.20.'' Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = \left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$, а дві інші — прямій $y = 9$. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

15.21.'' Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи трикутника, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?

15.22.** Василь Заплутайко вирішив знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на відрізку $[-1; 1]$. Він знайшов похідну $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ і встановив, що рівняння $-\frac{1}{x^2}=0$ не має розв'язків. Порівнявши значення $f(-1)=-1$ і $f(1)=1$, Василь стверджує, що найбільше значення функції f на відрізку $[-1; 1]$ дорівнює 1, а найменше дорівнює -1. Чи правильно міркує Василь?

15.23.** У трапеції менша основа і бічні сторони дорівнюють a. Знайдіть більшу основу трапеції, при якій її площа набуває найбільшого значення.

15.24.** У рівнобедрений трикутник вписано коло радіуса r. Яким має бути кут при основі трикутника, щоб його площа була найменшою?

15.25.** Яким має бути кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?

15.26.** На колі радіуса R позначено точку A. На якій відстані від точки A треба провести хорду BC, паралельну дотичній у точці A, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

15.27.** Фігуру обмежено графіком функції $y=\sqrt{x}$, прямою $y = 2$ і віссю ординат. У якій точці графіка функції $y=\sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$ треба провести дотичну, щоб вона відтинала від вказаної фігури трикутник найбільшої площі?

15.28.** На координатній площині розміщено прямокутний трикутник ABC ($\angle ABC = 90°$). Вершина A має координати $(-2; 0)$, вершина B належить відрізку $[2; 3]$ осі абсцис, а вершина C — параболі $y = x^2 - 4x + 1$. Якими мають бути координати точки C, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

15.29.** Пункти A, B і C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A і C зв'язує залізниця. У яку точку відрізка AC слід провести ґрунтову дорогу з пункту B, щоб час перебування в дорозі від пункту A до пункту B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею дорівнює 52 км/год, а ґрунтовою дорогою — 20 км/год?

15.30.•• Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, яка йде в місто B, і на відстані 130 км від міста B. Під яким кутом до залізниці слід провести шосе від заводу A, щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення по шосе у 2 рази більша, ніж залізницею?

15.31.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = -5x^3 + x|x - 1|$ на проміжку $[0; 2]$.

15.32.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - x|x - 2|$ на проміжку $[0; 3]$.

15.33.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}=x^2-8x+18$.

15.34.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7}+\sqrt{1-x}=x^2+6x+13$.

15.35.* Знайдіть усі такі значення параметра a, при яких найменше значення функції $f(x)=-x^4+\frac{2ax^3}{9}+\frac{a^2x^2}{3}$ на відрізку $[-1; 0]$ досягається в точці $x = -1$.

15.36.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких найменше значення функції $y = x^3 - 2ax^2 + 1$ на відрізку $[0; 1]$ досягається в точці $x = 1$.

16. Друга похідна. Поняття опуклості функції

Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Тоді миттєва швидкість $v(t)$ у момент часу t визначається за формулою

$$v(t) = s'(t).$$

Розглянемо функцію $y = v(t)$. Її похідну в момент часу t називають прискоренням руху і позначають $a(t)$, тобто

$$a(t) = v'(t).$$

Таким чином, функція прискорення руху — це похідна функції швидкість руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху є **другою похідною функції** $y = s(t)$. Пишуть:

$$a(t) = s''(t)$$

(запис $s''(t)$ читають: «ес два штрихи від те»).

Наприклад, якщо закон руху матеріальної точки задано формулою $s(t) = t^2 - 4t$, то маємо:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Ми отримали, що матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням. Як ви знаєте з курсу фізики, такий рух називають рівноприскореним.

Узагальнимо сказане.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовну на деякій множині M. Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною у деякій точці $x_0 \in M$, то похідну функції f' у точці x_0 називають **другою похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0** і позначають $f''(x_0)$. Саму функцію f називають **двічі диференційовною в точці x_0**.

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f'' або $y'' = f''(x)$.

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Якщо функція f є двічі диференційовною в кожній точці множини M, то її називають **двічі диференційовною на множині M**. Якщо функція f двічі диференційовна на $D(f)$, то її називають **двічі диференційовною**.

Ви знаєте, що функцію характеризують такі властивості як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є опуклість угору або вниз.

Звернемося до прикладів.

Про функції $y = x^2$, $y = |x|$ кажуть, що вони є опуклими вниз (рис. 16.1), а функції $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ є опуклими вгору (рис. 16.2). Функція $y = \sin x$ є опуклою вгору на проміжку $[0; \pi]$ і опуклою вниз на проміжку $[\pi; 2\pi]$ (рис. 16.3).

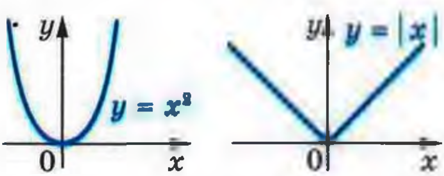


Рис. 16.1

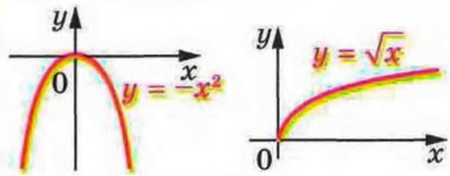


Рис. 16.2

Надалі, вивчаючи поняття опуклості функції на проміжку I, обмежимося випадком, коли функція f диференційовна[1] на цьому проміжку.

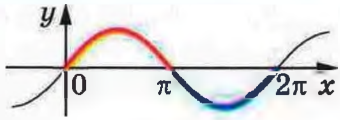


Рис. 16.3

Нехай функція f диференційовна на проміжку I. Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку I розміщений не вище будь-якої такої дотичної (рис. 16.4), то функцію f називають **опуклою вгору на проміжку I**; якщо ж графік на проміжку I розміщено не нижче від кожної такої дотичної (рис. 16.5) — **опуклою вниз на проміжку I**.

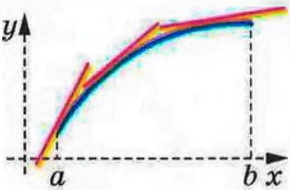


Рис. 16.4

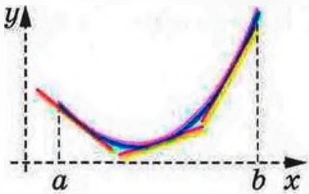


Рис. 16.5

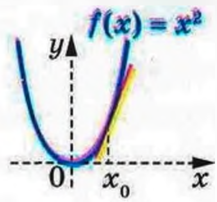


Рис. 16.6

Наприклад, доведемо, що функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Проведемо дотичну до графіка функції $f(x) = x^2$ у точці з абсцисою x_0 (рис. 16.6). Рівняння цієї дотичної має вигляд:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2.$$

Розглянемо різницю

$$f(x) - (2x_0(x - x_0) + x_0^2) = x^2 - (2x_0(x - x_0) + x_0^2) =$$
$$= x^2 - 2x_0x + x_0^2 = (x - x_0)^2.$$

Оскільки ця різниця набуває лише невід'ємних значень, то це означає, що графік функції f лежить не нижче будь-якої дотичної. Отже, $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

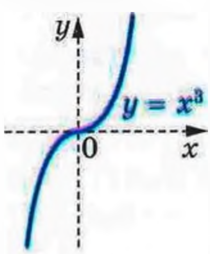


Рис. 16.7

Аналогічно можна довести, що функція $y = x^3$ є опуклою вгору на проміжку $(-\infty; 0]$ і опуклою вниз на проміжку $[0; +\infty)$ (рис. 16.7).

Кожна лінійна функція є як опуклою вгору, так і опуклою вниз на $\mathbb{R}$.

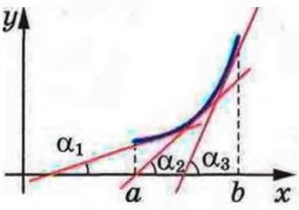
Зауважимо, що також буває доцільним виділяти строго опуклі функції.

[1] У вищій школі поняття опуклості узагальнюють і на більш широкі класи функцій, наприклад неперервні.

Розглянемо графік функції f, опуклої вгору на проміжку I. Проведемо дотичну до нього в точці з абсцисою $x \in I$. Якщо графік на проміжку I має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку, то говорять, що функція f є *строго опуклою вгору на проміжку I*. Аналогічно означають функцію, *строго опуклу вниз на проміжку I*.

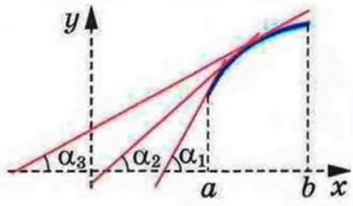
Наприклад, функція $y = x^2$ є строго опуклою вниз на $\mathbb{R}$. Жодна лінійна функція не є строго опуклою.

На рисунку 16.8 зображено графік функції $y = f(x)$, яка є опуклою вниз на проміжку $[a; b]$. З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на проміжку $[a; b]$.



$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$

Рис. 16.8



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$

Рис. 16.9

Нехай функція $y = f(x)$ є опуклою вгору на проміжку $[a; b]$ (рис. 16.9). З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' спадає на проміжку $[a; b]$.

Ці приклади показують, що характер опуклості функції f на деякому проміжку I пов'язаний зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому проміжку.

Для двічі диференційовної на проміжку I функції f зростання (спадання) функції f' визначається знаком другої похідної функції f на проміжку I. Таким чином, характер опуклості двічі диференційовної функції пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 16.1 (ознака опуклості функції вниз). ***Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geqslant 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I.***

Теорема 16.2 (ознака опуклості функції вгору). ***Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \leqslant 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I.***

Доведемо теорему 16.1 (теорему 16.2 доводять аналогічно).

Доведення. У точці з абсцисою $x_0 \in I$ проведемо дотичну до графіка функції f. Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

Значення цієї функції показують, наскільки відрізняється ордината точки графіка функції f від ординати відповідної точки, яка лежить на проведеній дотичній (рис. 16.10).

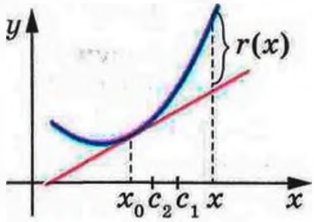


Рис. 16.10

Якщо ми покажемо, що $r(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in I$, то таким чином доведемо, що на проміжку I графік функції f лежить не нижче проведеної до нього дотичної.

Нехай $x \in I$ і $x > x_0$ (випадок, коли $x \leqslant x_0$, розгляньте самостійно).

Маємо: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функції f і відрізка $[x_0; x]$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$.

Звідси $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$;

$$r(x) = (f'(c_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Оскільки функція $y = f'(x)$ є диференційовною на відрізку $[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа: $f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, де $c_2 \in (x_0; c_1)$.

Звідси $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунку 16.10 показано розміщення точок c_1 і c_2.

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_1 < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in I$, то з урахуванням умови теореми отримуємо: $f''(c_2) \geqslant 0$. Звідси для всіх $x \in I$ виконується нерівність $r(x) \geqslant 0$. Тому функція f є опуклою вниз на проміжку I. ▲

Також можна довести, що *коли функція f є опуклою вниз (угору) і двічі диференційовною на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$.*

ПРИКЛАД 1 Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Звідси $f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Нерівність $f''(x) \geqslant 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 16.11).

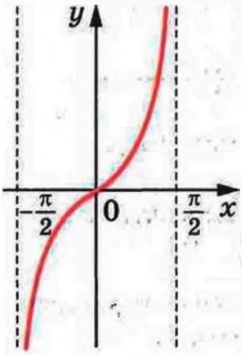


Рис. 16.11

Нерівність $f''(x) \leqslant 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вгору на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 16.11). ●

Нагадаємо, що функція тангенс є періодичною з періодом $T = \pi$. Ми дослідили її на опуклість на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції. Отже, можна зробити висновок, що функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на кожному з проміжків виду $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ і опуклою вгору на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

На рисунку 16.12 зображено графіки функцій та дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0. Ці функції на проміжках $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$ мають різний характер опуклості. Тому на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У цьому разі говорять, що точка x_0 є **точкою перегину** функції.

Рис. 16.12

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$ (рис. 16.7); точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є точками перегину функції $y = \cos x$ (рис. 16.13).

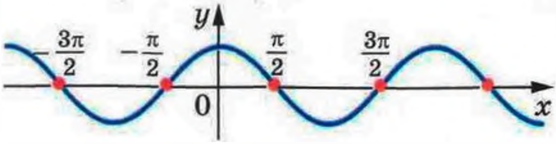


Рис. 16.13

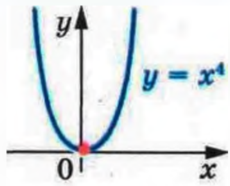


Рис. 16.14

Теорема 16.3. ***Якщо x_0 є точкою перегину функції f і в цій точці функція двічі диференційовна, то $f''(x_0) = 0$.***

Наведемо ідею доведення цієї теореми (за бажання ви зможете відновити всі пропущені кроки доведення самостійно).

Розглянемо випадок, коли на проміжку $[x_0; b)$ графік функції f розташований не нижче дотичної, а на проміжку $(a; x_0]$ — не вище дотичної (рис. 16.12, *а*). Тоді, використовуючи рівняння дотичної, можна показати, що для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'(x_0).$$

Звідси за теоремою Лагранжа $f'(c) \geqslant f'(x_0)$. Тоді $\frac{f'(c) - f'(x_0)}{c - x_0} \geqslant 0$.

Тепер неважко встановити, що $f''(x_0) \geqslant 0$. Розглядаючи проміжок $(a; x_0)$, аналогічно встановлюємо, що $f''(x_0) \leqslant 0$. Тому $f''(x_0) = 0$. ▲

Зазначимо, що коли в точці x_0 друга похідна дорівнює нулю, то не обов'язково ця точка є точкою перегину функції. Наприклад, для функції $f(x) = x^4$ маємо: $f''(x) = 12x^2$. Тоді $f''(0) = 0$. Проте $x_0 = 0$ не є точкою перегину (рис. 16.14).

ПРИКЛАД 2 Дослідіть характер опуклості і знайдіть точки перегину функції $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$;

$$f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1).$$

Використовуючи метод інтервалів, дослідимо знак функції $y = f''(x)$ (рис. 16.15).

Рис. 16.15

Маємо, що функція f опукла вгору на проміжку $(-\infty; 1]$ і опукла вниз на проміжку $[1; +\infty)$.

Функція f на проміжках $(-\infty; 1]$ і $[1; +\infty)$ має різний характер опуклості. У точці з абсцисою $x_0 = 1$ до графіка функції f можна провести дотичну. Отже, $x_0 = 1$ є точкою перегину функції f. ●

Відповідь: 1.

Вправи

16.1.° Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^2 - 2x + 5$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \sqrt{x}$;
5) $y = \cos x$;
6) $y = (2x - 1)^5$;
7) $y = \sin 3x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin \frac{x}{4}$;
10) $y = x \sin x$.

16.2.° Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^6$;
2) $y = 3 - 5x + x^3$;
3) $y = \frac{1}{x-1}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = (1 - 3x)^3$;
6) $y = \cos 2x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = x \cos x$.

16.3.° На рисунку 16.16 зображено графік функції f. Укажіть кілька значень аргументу x, для яких:

1) $f''(x) \geqslant 0$;
2) $f''(x) \leqslant 0$.

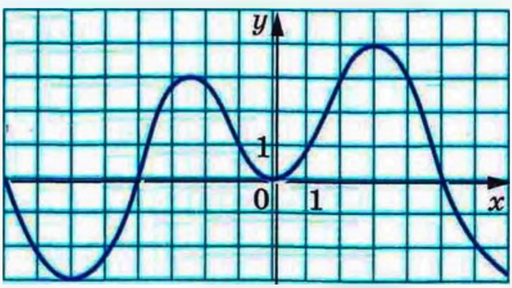


Рис. 16.16

16.4.° Доведіть, що функція $y = f(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I тоді і лише тоді, коли функція $y = -f(x)$ є опуклою вгору (униз) на проміжку I.

16.5.° Двічі диференційовні на проміжку I функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є опуклими вниз (угору) на проміжку I. Доведіть, що функція $y = f(x) + g(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I.

16.6.° Чому дорівнює значення другої похідної функції $y = 5\sin x - 3\cos 4x$ у точці: 1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2}$?

16.7.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть її прискорення в момент часу $t_0 = 2$ с.

16.8.° Одне тіло рухається по координатній прямій за законом $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а друге — за законом $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть прискорення кожного тіла в момент часу, коли їх швидкості рівні.

16.9.° Тіло масою 5 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 6t + 4$ (переміщення вимірюється в метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, що діє на тіло через 3 с після початку руху.

16.10.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = x^3 - 3x + 2$;
2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

16.11.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$;
2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4$.

16.12.° Знайдіть точки перегину функції

$$y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3.$$

16.13.° Знайдіть точки перегину функції

$$y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4.$$

16.14.° Доведіть, що функція $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ є опуклою вниз на $\mathbb{R}$.

16.15.° Доведіть, що функція $f(x) = \sin^2 x - 2x^2$ є опуклою вгору на $\mathbb{R}$.

16.16.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = \frac{x}{1+x^2}$;
2) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

16.17.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;
2) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$.

16.18.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 + 4\sin x$.

16.19.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 - 4\cos x$.

16.20.° Знайдіть другу похідну функції $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

16.21.° Знайдіть другу похідну функції $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ 1, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$

16.22.° Функція f двічі диференційовна на $\mathbb{R}$. На рисунку 16.17 зображено графік похідної функції f. Укажіть проміжки опуклості та точки перегину функції f.

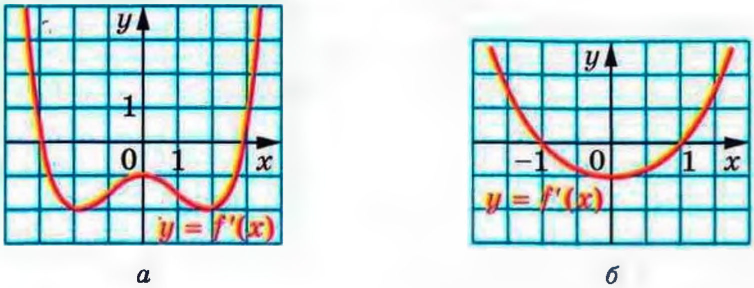


Рис. 16.17

16.23.° Функція f двічі диференційовна на R. На рисунку 16.18 зображено графік похідної функції f. Укажіть проміжки опуклості та точки перегину функції f.

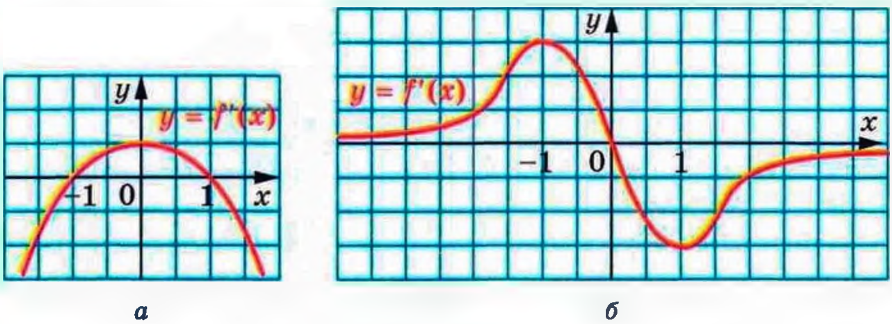


Рис. 16.18

16.24.•• На рисунку 16.19 зображено графік другої похідної функції f. Відомо, що $f'(x_0)=0$. З'ясуйте, чи є x_0 точкою екстремуму функції f, якщо: 1) $x_0=-1{,}5$; 2) $x_0=0$; 3) $x_0=1$.

16.25.•• На рисунку 16.20 зображено графік другої похідної функції f. Відомо, що $f'(x_0)=0$. З'ясуйте, чи є x_0 точкою екстремуму функції f, якщо: 1) $x_0=-1$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=0$.

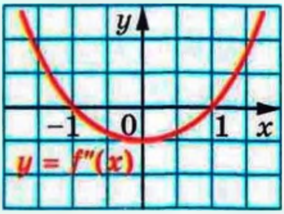


Рис. 16.19

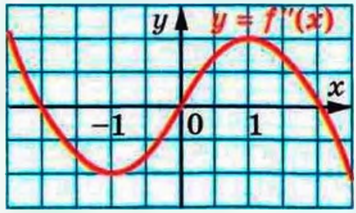


Рис. 16.20

16.26.•• На рисунку 16.21 зображено графік функції

$$f(x)=x^4+ax^2+bx+c.$$

Знайдіть знаки чисел a, b і c.

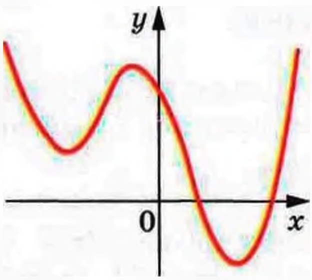


Рис. 16.21

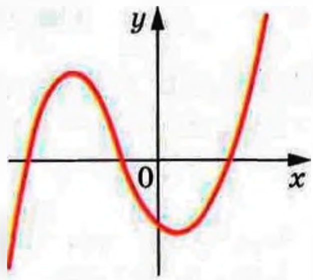


Рис. 16.22

16.27.•• На рисунку 16.22 зображено графік функції

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c.$$

Знайдіть знаки чисел a, b і c.

16.28.•• Для всіх $x \in \mathbb{R}$ доведіть нерівність $\cos x \leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

16.29.•• Для всіх $x \geqslant 0$ доведіть нерівність $\sqrt{1+x} \geqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$.

16.30.•• Про функцію f відомо, що $f''(x)>0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ ($f''(x)<0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$). Доведіть, що довільна пряма має з графіком функції f не більше двох спільних точок.

16.31.•• Розв'яжіть рівняння $2x^2+\cos\frac{\pi x}{2}=x+1$.

16.32.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+x}=2x^4+3x+1$.

16.33.* Обчисліть суму

$$S=60\cdot59\cdot2^{58}+59\cdot58\cdot2^{57}+58\cdot57\cdot2^{56}+\ldots+3\cdot2\cdot2^1+2\cdot1\cdot2^0.$$

16.34.* Обчисліть суму $S=1^2\cdot2^{n-1}+2^2\cdot2^{n-2}+3^2\cdot2^{n-3}+\ldots+n^2\cdot2^0$.

16.35.* Доведіть, що функція $y = x\sin x$ не є періодичною.

16.36.* Доведіть, що функція $y = \cos x + \sin\sqrt{2}x$ не є періодичною.

16.37.* Кожне з чисел x, y, z належить відрізку $[1; 2]$. Доведіть нерівність $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \leqslant 5$.

16.38.* Кожне з чисел x, y, z належить відрізку $[1; 2]$. Доведіть нерівність $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqslant 10$.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Нерівність Єнсена

Теорема 16.4. ***Якщо функція f опукла вгору на проміжку I, то для будь-яких a і b з проміжку I виконується нерівність***

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ця теорема має просту геометричну інтерпретацію (рис. 16.23). Якщо функція f є опуклою вгору на відрізку $[a; b]$, то ордината точки M є не меншою, ніж ордината точки M_1.

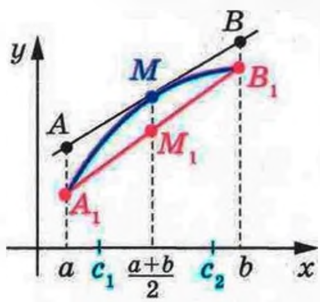


Рис. 16.23

Доведення. Проведемо дотичну до графіка функції f у точці M (рис. 16.23). Оскільки функція f опукла вгору, то точка A лежить не нижче від точки A_1, а точка B — не нижче від точки B_1. Тому середина відрізка AB (точка M) лежить не нижче від середини відрізка A_1B_1 (точка M_1). Це й означає, що ордината точки M є не меншою, ніж ордината точки M_1. ▲

Теорема 16.4 має таке узагальнення.

Теорема 16.5. ***Якщо функція f опукла вгору на проміжку I, то для будь-яких x_1, x_2, ..., x_n з проміжку I виконується нерівність***

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \qquad (1)$$

Нерівність (1) називають **нерівністю Єнсена для опуклої вгору функції.**

Доведемо теорему 16.5.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

З теореми 16.4 випливає, що нерівність (1) є правильною при $n = 2$. Доведемо, що коли нерівність (1) є правильною для $n = k$, $k \geqslant 2$, то вона є правильною для $n = 2k$.

Розглянемо $2k$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$, які належать проміжку I.

Очевидно, що кожне з чисел $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{x_3 + x_4}{2}$, ..., $\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}$ належить проміжку I.

Маємо: $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k}}{2k}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}}{k}\right) \geqslant$

$$\geqslant \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}\right)}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})}{2}}{k} =$$

$$= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2k})}{2k}.$$

Тепер можемо зробити висновок, що нерівність (1) є правильною для $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ і т. д., тобто для всіх натуральних степенів числа 2.

Нехай m — такий степінь числа 2, що $m > n$.

Розглянемо m чисел:

$$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{n \text{ чисел}}, \quad \underbrace{A, A, \ldots, A}_{m - n \text{ чисел}}, \text{ де } A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Для цих m чисел застосуємо доведену нерівність (1):

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + A + A + \ldots + A}{m}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + f(A) + f(A) + \ldots + f(A)}{m}.$$

Звідси $f\left(\frac{nA + (m - n)A}{m}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + (m - n) f(A)}{m}$;

$$mf(A) \geqslant f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + mf(A) - nf(A);$$

$$nf(A) \geqslant f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n);$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \blacktriangle$$

Зауважимо, що для опуклої вниз функції f знак нерівності (1) змінюється на протилежний, тобто *для будь-яких $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з проміжку I виконується нерівність*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Цю нерівність називають **нерівністю Єнсена для опуклої вниз функції.**

ПРИКЛАД 1 Для кутів A, B і C трикутника ABC доведіть нерівність $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D(f)=\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки дана функція опукла вниз на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{3} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}.$$

Звідси

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$. Доведіть нерівність $\frac{1}{3+a^2}+\frac{1}{3+b^2}+\frac{1}{3+c^2} \leqslant \frac{27}{28}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{3+x^2}$, $D(f) = (0; 1)$.

Маємо: $f'(x)=\frac{-2x}{(3+x^2)^2}$, $f''(x)=\frac{6(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$. Отримуємо, що $f''(x) < 0$ для будь-якого $x \in (0; 1)$. Тому функція f є опуклою вгору. Зазначимо, що $a \in (0; 1)$, $b \in (0; 1)$, $c \in (0; 1)$. Для функції f можна застосувати нерівність (1):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3+a^2}+\frac{1}{3+b^2}+\frac{1}{3+c^2}\right) \leqslant \frac{1}{3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}.$$

Звідси $\frac{1}{3+a^2}+\frac{1}{3+b^2}+\frac{1}{3+c^2} \leqslant \frac{3}{3+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{27}{28}$. $\bullet$

Вправи

16.39. Для кутів A, B і C трикутника ABC доведіть нерівність:

1) $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}$.

16.40. Доведіть нерівність

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n},$$

де $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

16.41. Відомо, що $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_n > 0$ і $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Доведіть, що $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{2}$.

16.42. Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Доведіть, що $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

17. Побудова графіків функцій

Коли в молодших класах вам доводилося будувати графіки, ви, як правило, поступали так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім з'єднували їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

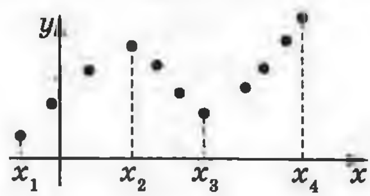


Рис. 17.1

На рисунку 17.1 зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна з'єднати по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 17.2 і 17.3.

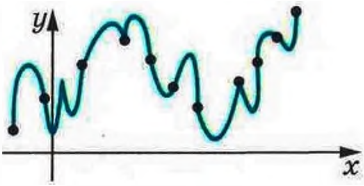


Рис. 17.2

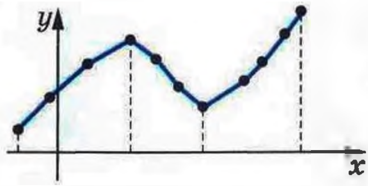


Рис. 17.3

Проте якщо знати, що функція f зростає на кожному з проміжків $[x_1; x_2]$ та $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ і є диференційовною, то, скоріше за все, буде побудовано графік, показаний на рисунку 17.4.

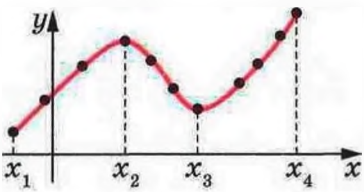


Рис. 17.4

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдалося з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції будемо проводити за таким планом.

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості.
5. Дослідити функцію на неперервність, знайти вертикальні асимптоти.
6. Знайти похилі асимптоти графіка функції.
7. Знайти проміжки зростання і спадання.
8. Знайти точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.
9. Знайти проміжки опуклості функції і точки перегину.
10. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Зауважимо, що наведений план дослідження носить рекомендаційний характер та не є сталим і вичерпним. Важливо при дослідженні функції виявити такі її властивості, які дозволять коректно побудувати графік.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть функцію $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f)=\mathbb{R}$.

2. $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. Звідси $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, тобто функція $y=f(-x)$ не збігається ні з функцією $y=f(x)$, ні з функцією $y=-f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3–4. Маємо: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 та 6 є нулями функції f. Застосувавши метод інтервалів (рис. 17.5), знаходимо проміжки знакосталості функції f, а саме: установлюємо, що $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,6)$ і $f(x)<0$ при $x\in(6;\,+\infty)$.

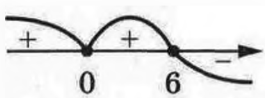


Рис. 17.5

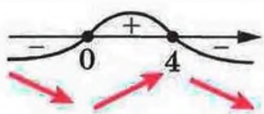


Рис. 17.6

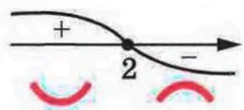


Рис. 17.7

5. Функція f неперервна на $\mathbb{R}$, тому її графік не має вертикальних асимптот.

6. Маємо: $\frac{f(x)}{x}=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2$. Оскільки функція $y=\frac{f(x)}{x}$ не має границі ні при $x\to+\infty$, ні при $x\to-\infty$, то графік функції f не має похилих асимптот.

7–8. Маємо: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Дослідивши знак похідної (рис. 17.6), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0;\,4]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\,0]$ і $[4;\,+\infty)$, $x_{max}=4$, $x_{min}=0$. Маємо: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

9. Маємо: $f''(x)=3-\frac{3x}{2}$. Дослідивши знак другої похідної (рис. 17.7), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty;\,2]$, опуклою вгору на проміжку $[2;\,+\infty)$. Отже, $x_0=2$ є точкою перегину і $f(2)=4$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 17.8). ●

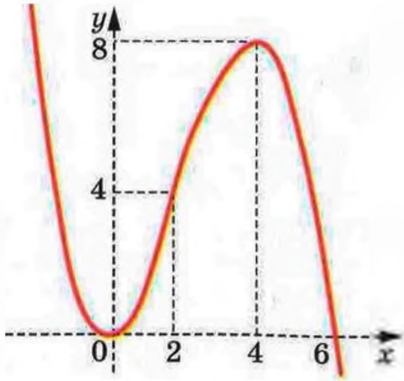


Рис. 17.8

ПРИКЛАД 2 Дослідіть функцію $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4x}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Область визначення функції несиметрична відносно початку координат, отже, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3. Функція не має нулів.

4. $f(x)=\dfrac{4}{x(x+4)}$. Звідси $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 17.9).

5. Функція f неперервна на множині $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$. Тому вертикальними асимптотами графіка функції f можуть бути лише прямі $x = -4$ і $x = 0$. З'ясуємо, чи є ці прямі вертикальними асимптотами графіка функції $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4x}$. Маємо $\lim\limits_{x \to -4-} \dfrac{4}{x^2+4x}=+\infty$, $\lim\limits_{x \to -4+} \dfrac{4}{x^2+4x}=-\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{4}{x^2+4x}=-\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{4}{x^2+4x}=+\infty$. Отже, прямі $x=-4$ і $x=0$ є вертикальними асимптотами графіка функції f. Точки -4 і 0 є точками розриву другого роду функції f.

6. Дослідимо графік функції f на наявність похилих асимптот $y=kx+b$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x(x^2+4x)}=0$. Тому $k=0$. Тепер розглянемо границю $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2+4x}=0$. Отже, $b=0$.

Таким чином, пряма $y=0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$.

7–8. Маємо:

$$f'(x)=\frac{(4)'\cdot(x^2+4x)-4\cdot(x^2+4x)'}{x^2(x+4)^2}=-\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2}=-\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}.$$

Дослідивши знак f' (рис. 17.10), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $[-2;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty;\ -4)$ і $(-4;\ -2]$, $x_{\max}=-2$, $f(-2)=-1$.

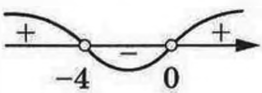


Рис. 17.9

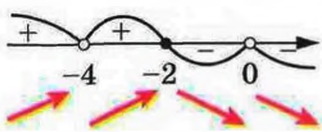


Рис. 17.10

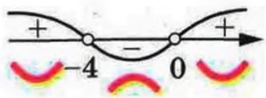


Рис. 17.11

9. Маємо: $f''(x)=-\dfrac{8x^2(x+4)^2-8(x+2)(2x(x+4)^2+2x^2(x+4))}{x^4(x+4)^4}$.

Спростивши дріб, отримаємо $f''(x)=\dfrac{8(3x^2+12x+16)}{x^3(x+4)^3}$.

Дослідивши знак f'' (рис. 17.11), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на кожному з проміжків $(-\infty;\ -4)$ і $(0;\ +\infty)$, є опуклою вгору на проміжку $(-4;\ 0)$, точок перегину не має.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції f (рис. 17.12). ●

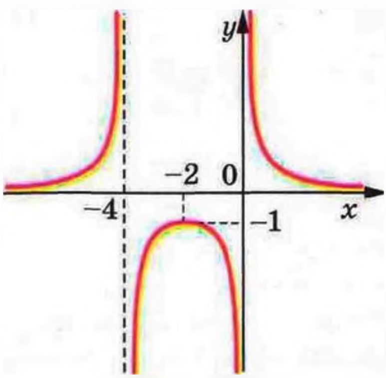


Рис. 17.12

ПРИКЛАД 3 Користуючись графіком функції $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, установіть, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a.

Розв'язання. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.

Маємо: $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$.

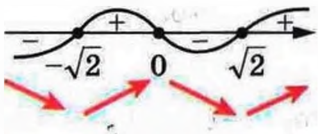


Рис. 17.13

Отже, функція f має три критичні точки: $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$. Дослідивши знак похідної (рис. 17.13), отримуємо: функція f зростає на кожному з проміжків $\left[-\sqrt{2}; 0\right]$ і $\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$, спадає на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$ і $\left[0; \sqrt{2}\right]$, $x_{min} = -\sqrt{2}$, $x_{min} = \sqrt{2}$, $x_{max} = 0$. Маємо

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = -1, \ f(0) = 3.$$

Враховуючи отримані результати, будуємо графік функції f (рис. 17.14).

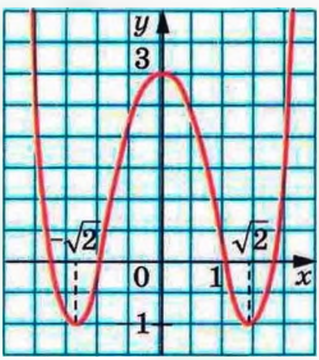


Рис. 17.14

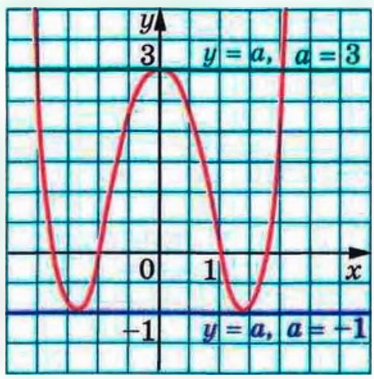


Рис. 17.15

Користуючись побудованим графіком, установлюємо кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a (рис. 17.15):

якщо $a < -1$, то коренів немає;

якщо $a = -1$ або $a > 3$, то 2 корені;

якщо $a = 3$, то 3 корені;

якщо $-1 < a < 3$, то 4 корені.

Зауваження. Під час розв'язування даної задачі було вилучено пункти 2–6, 9, 10 плану дослідження властивостей функції. Властивості функцій, які досліджуються в цих пунктах, не використовують при з'ясуванні кількості коренів даного рівняння $f(x) = a$. ●

ПРИКЛАД 4 Дослідіть функцію $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-2}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup$ $\cup\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. Розв'язавши рівняння $\dfrac{x^4}{x^3-2}=0$, установлюємо, що $x=0$ — єдиний нуль даної функції.

4. $f(x)>0$ при $x\in\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$, $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$.

5. Функція f неперервна на множині $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$. Тому вертикальною асимптотою графіка функції f може бути лише пряма $x=\sqrt[3]{2}$. Маємо: $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}-}\dfrac{x^4}{x^3-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}+}\dfrac{x^4}{x^3-2}=+\infty$. Отже, пряма $x=\sqrt[3]{2}$ — вертикальна асимптота графіка даної функції. Точка $\sqrt[3]{2}$ є точкою розриву другого роду функції f.

6. Дослідимо графік функції f на наявність похилих асимптот $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x^3}}=1.$$

Тому $k=1$. Маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^3-2}-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^3-2}=0$. Отже, $b=0$.

Таким чином, пряма $y=x$ — похила асимптота графіка даної функції при $x\to+\infty$ та при $x\to-\infty$.

7–8. Маємо:

$$f'(x)=\frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}.$$

Рис. 17.16

Дослідивши знак f' (рис. 17.16), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $\left[0;\sqrt[3]{2}\right)$ і $\left(\sqrt[3]{2};2\right]$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty;0]$ і $[2;+\infty)$, $x_{min}=2$, $f(2)=\dfrac{8}{3}$, $x_{max}=0$, $f(0)=0$.

Рис. 17.17

9. Маємо: $f''(x)=\dfrac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Дослідивши знак f'' (рис. 17.17), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\sqrt[3]{4}\right]$ і $\left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$, опуклою вгору на $\left[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$, $x_0 = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегину і $f\left(-\sqrt[3]{4}\right) = -\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 17.18). ●

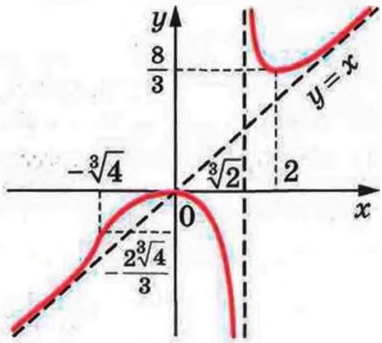


Рис. 17.18

ПРИКЛАД 5 Дослідіть функцію $f(x) = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. Нулями даної функції є числа 0 і 3.

4. Маємо: $f(x) > 0$ при $x \in (0; 3) \cup (3; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

5. Функція f неперервна на $\mathbb{R}$, тому її графік не має вертикальних асимптот.

6. Дослідимо графік функції f на наявність похилих асимптот $y = kx + b$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = 1.$$ Тому $k = 1$.

Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-3)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x(x-3)^2} - x\right)\left(\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2\right)}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{9}{x} - 6\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2} + 1\right)} = -2.$$ Отже, $b = -2$.

Таким чином, пряма $y = x - 2$ — похила асимптота графіка даної функції при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$.

7–8. Функція f є недиференційовною в точках $x = 0$ і $x = 3$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Для будь-якого $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$ маємо:

$$f'(x) = \frac{(x-3)^2 + 2x(x-3)}{3\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}.$$

Дослідивши знак f' (рис. 17.19) і врахувавши неперервність функції f, доходимо висновку, що функція f зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на проміжку $[1; 3]$, $x_{max} = 1$, $f(1) = \sqrt[3]{4}$, $x_{min} = 3$, $f(3) = 0$.

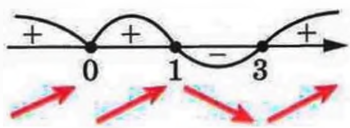


Рис. 17.19

Рис. 17.20

9. Маємо: $f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt[3]{x^8(x-3)^4}}$. Дослідивши знак f'' (рис. 17.20), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; 0)$ і опуклою вгору на кожному з проміжків $(0; 3)$ і $(3; +\infty)$, $x_0 = 0$ — точка перегину.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 17.21). ●

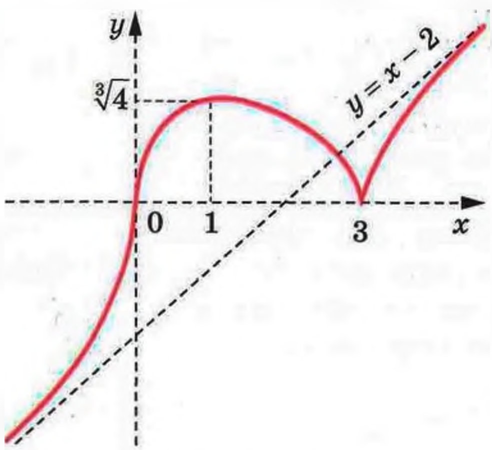


Рис. 17.21

Вправи

17.1.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$;
6) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
7) $f(x) = (x + 3)^2 (x - 1)^2$.

17.2.° Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$;
5) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$.

17.3.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{4 - x}{x + 2}$;
2) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$;
3) $f(x) = \frac{6x - 6}{x^2 + 3}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$;
7) $f(x) = \frac{2(x - 1)}{x^2}$;
8) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

17.4.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$;
3) $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
5) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$;
6) $f(x) = \frac{2x}{(x + 1)^2}$.

17.5.•• Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 (2x - 3)$ і встановіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a.

17.6.•• Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2 (x^2 - 4)$ і встановіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від значення параметра a.

17.7.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;
4) $f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$.

17.8.** Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; 3) $f(x)=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

17.9.** Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

17.10.** Побудуйте графік функції $f(x)=2+\sqrt[3]{x-4}$.

17.11.** Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \sin 2x - x$; 2) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$.

17.12.** Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}x$; 2) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

17.13.** При яких значеннях параметра a рівняння $x^3 + ax + 2 = 0$ має три корені?

17.14.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^3-ax+2a+32=0$$

має три корені?

§ 3. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

18. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі шкільного курсу. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\,.$$

Розглянемо послідовність (α_n) раціональних чисел:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\,. \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність (2^{α_n}) степенів з раціональними показниками:

$$2^{3},\ 2^{3{,}1},\ 2^{3{,}14},\ 2^{3{,}141},\ 2^{3{,}1415},\ \ldots\,. \qquad (2)$$

• Доведемо збіжність цієї послідовності. Розглянемо відношення степенів з раціональними показниками: $\frac{2^{\alpha_{n+1}}}{2^{\alpha_n}} = 2^{\alpha_{n+1}-\alpha_n}$. Оскільки $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ — додатне раціональне число, то його можна подати у вигляді дробу: $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Маємо

$\frac{2^{\alpha_{n+1}}}{2^{\alpha_n}} = 2^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{2^p} > 1$. Оскільки $2^{\alpha_n} > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то послідовність (2^{α_n}) є зростаючою. Водночас $2^3 \leqslant 2^{\alpha_n} \leqslant 2^4$. Тому послідовність (2^{α_n}) є обмеженою. За теоремою Вейєрштрасса послідовність (2^{α_n}) є збіжною. Границю цієї послідовності називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^{π}.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^{α}, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел (α_n). Далі розглядають послідовність (b^{α_n}) степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел (α_n). Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^{α}.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^{\alpha} = 1$ для всіх дійсних α. Справді, якщо послідовність раціональних чисел (α_n) збігається до числа α, то $1^{\alpha} = \lim\limits_{n \to \infty} 1^{\alpha_n} = \lim\limits_{n \to \infty} 1 = 1$.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^{α} означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^{\alpha} = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^{\pi} = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^{α}, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ і будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha + \beta}$;

2) $x^{\alpha} : x^{\beta} = x^{\alpha - \beta}$;

3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$;

4) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$;

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} \beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n \to \infty} \alpha_n + \lim_{n \to \infty} \beta_n = \lim_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{α_n}), (x^{β_n}) і $(x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n})$.

Маємо: $\lim\limits_{n \to \infty} x^{\alpha_n} = x^{\alpha}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x^{\beta_n} = x^{\beta}$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це в 10 класі, коли вивчали властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n + \beta_n}$.

Тому можна записати:

$$x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = \lim_{n \to \infty} x^{\alpha_n} \cdot \lim_{n \to \infty} x^{\beta_n} = \lim_{n \to \infty} \left(x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n}\right) = \lim_{n \to \infty} x^{\alpha_n + \beta_n} = x^{\alpha + \beta}.$$

Таким чином, властивість 1 доведено.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}} + 1\right)\left(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}} + 1\right)\left(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}} + 1\right)\left(a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}} + 1\right) a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}} + 1\right) a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}} + 1}{a^{3\sqrt{7}} + 1} = 1. \bullet$$

Оберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задано функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$.

Цю функцію називають **показниковою функцією.**

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$.

Доведемо цю властивість для $a > 1$ (випадок $0 < a < 1$ розглядається аналогічно). Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n). Оскільки послідовність (x_n) є збіжною, то вона є обмеженою. Тому існує таке раціональне число r, що $x_n \geqslant r$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Використовуючи властивості степеня з раціональним показником, маємо, що $a^{x_n} \geqslant a^r > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} \geqslant a^r > 0$ (див. теорему 45.4 підручника «Алгебра-10»).

Таким чином, область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x = b$.

Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$.

Показникова функція не має нулів, і проміжок $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*

Покажемо, що *при* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою.* Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо*** $a > 1$ ***і*** $x > 0$***, то*** $a^x > 1$***; якщо*** $0 < a < 1$ ***і*** $x > 0$***, то*** $0 < a^x < 1$**.**

Доведення проведемо для випадку, коли $a > 1$ і $x > 0$ (доведення другої частини леми розгляньте самостійно).

Оскільки $x > 0$, то існує таке раціональне число r, що $x > r > 0$. Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n). З умови $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x > r$ випливає, що, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність $x_n > r$ (див. теорему 45.3, «Алгебра-10»). Оскільки $a > 1$ і числа x_n і r є раціональними, то $a^{x_n} > a^r > 1$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тоді маємо, що $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} \geqslant a^r > 1$. ▲

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Запишемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1)$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) > 0$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*

Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму.*

Показникова функція є неперервною.

Покажемо, як можна довести неперервність показникової функції $f(x) = a^x$ у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Розглянемо випадок $a > 1$ (випадок, коли $0 < a < 1$, розглядається аналогічно).

Нехай (x_n) — довільна збіжна до x_0 послідовність аргументів показникової функції. Оберемо дві послідовності раціональних чисел (y_n) і (z_n), збіжних до x_0 і таких, що $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$. Оскільки $a > 1$, то можна записати $a^{y_n} \leqslant a^{x_n} \leqslant a^{z_n}$. З означення числа a^{x_0}

випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{z_n} = a^{x_0}$. Використовуючи теорему про двох конвоїрів, можна зробити висновок, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. Звідси випливає неперервність функції $f(x) = a^x$ у точці x_0.

Показникова функція є диференційовною. Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 25.

На рисунках 18.1 і 18.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

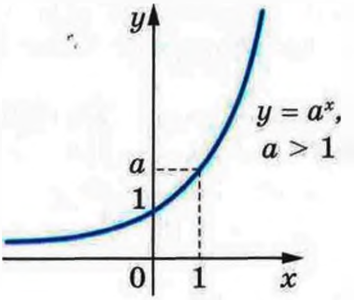


Рис. 18.1

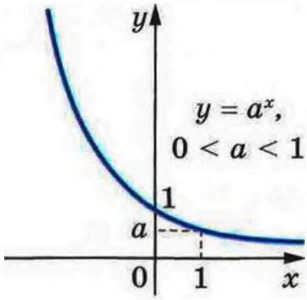


Рис. 18.2

Зокрема, на рисунках 18.3 і 18.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

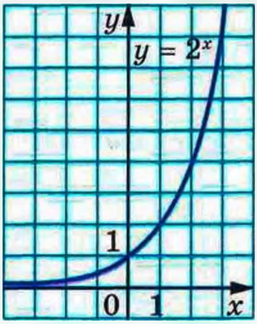


Рис. 18.3

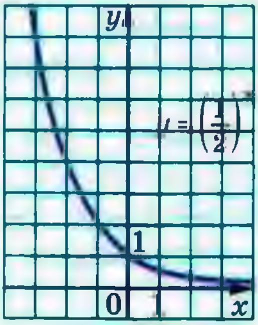


Рис. 18.4

Для показникової функції неважко довести такі твердження: якщо $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; якщо $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. Тому при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

У 10 класі ви дізналися, що функції можна означати, описуючи їх характеристичні властивості. Наприклад, усі показникові функції $f(x)=a^x$ мають таку властивість:

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y, \text{ де } x,\ y \in \mathbb{R},$$

тобто властивість

$$f(x+y)=f(x)f(y), \text{ де } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Нагадаємо, що останню рівність називають функціональним рівнянням Коші (див. «Алгебра-10», с. 46). Можна довести (див. задачі 18.53, 18.54), що серед неперервних функцій, відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x)=a^x$. Тому рівняння Коші можна використовувати для означення показникової функції.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Нехай маса колонії бактерій у момент часу $t=x$ дорівнює $f(x)$. Тоді за проміжок від $t=x$ до $t=x+y$ маса колонії бактерій збільшиться в таку саму кількість разів, як за проміжок часу від $t=0$ до $t=y$, тобто

$$\frac{f(x+y)}{f(x)}=\frac{f(y)}{f(0)}.$$

Якщо в момент часу $t=0$ маса колонії бактерій дорівнювала 1, то останню рівність можна переписати так:

$$f(x+y)=f(x)f(y).$$

Природно вважати, що функція, яка описує залежність маси колонії бактерій від часу, є неперервною.

Тому маса колонії бактерій у момент часу t дорівнює $f(t)=a^t$.

З фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Тому показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою, якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на відрізку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на відрізку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \qquad \max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$; 27.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{2}-1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то $(\sqrt{2}-1)^{|x|} \leqslant (\sqrt{2}-1)^0 = 1$. Водночас $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$ Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0.

Вправи

18.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;

2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

18.2.• Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

18.3.° Порівняйте з числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$;

2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;

3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;

5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;

6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

18.4.• Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1,8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0{,}3^{-\pi}$.

18.5.• Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

18.6.° Порівняйте:

1) $5^{3,4}$ і $5^{3,26}$;

2) $0{,}3^{0,4}$ і $0{,}3^{0,3}$;

3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$;

4) $0{,}17^{-3}$ і 1;

5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

18.7.• Порівняйте з числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$;

3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

5) $0{,}62^{-0,4}$;

6) $3{,}14^{-0,4}$.

18.8.° Порівняйте з числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

18.9.• Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

18.10.° Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$;
2) $\dfrac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$;
3) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;
4) $\dfrac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\dfrac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

18.11.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$;
2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

18.12.° Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1;\ 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5;\ +\infty)$;
4) найменше значення функції $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 2]$ дорівнює 16?

18.13.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$;
2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$;
3) $y = 7^x - 4$;
4) $y = 6^{|x|}$.

18.14.° Знайдіть найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 3]$.

18.15.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

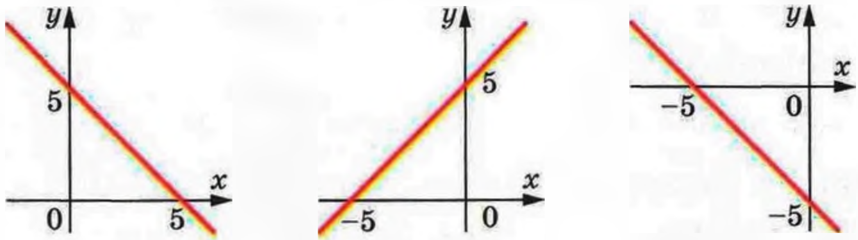
18.16.• На якому проміжку найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

18.17.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$;
2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

18.18.° Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

18.19.° Графік якої з функцій, зображених на рисунку 18.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



а *б* *в*

Рис. 18.5

18.20.° Порівняйте: $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}$ і $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$.

18.21.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

18.22.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

18.23.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |2^x - 1|$; 4) $y = 2^{|x+1|} - 2$; 7) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.

2) $y = |2^{x+1} - 2|$; 5) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$;

3) $y = 2^{|x|} + 1$; 6) $y = \left|2^{-|x|} - 1\right|$;

18.24.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |3^x - 2|$; 3) $y = 3^{|x+1|} - 1$; 5) $y = \left|1 - 3^{|x|}\right|$;

2) $y = 3^{|x|} - 1$; 4) $y = \left|3^x - 1\right|$; 6) $y = \frac{\left|1 - 3^{-x}\right|}{3^{|x|} - 1}$.

18.25.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

18.26.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\sin x} - 2}$.

18.27.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

18.28.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|}+5$.

18.29.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{\operatorname{tg} x} > 0$; 2) $2^{\arcsin x} > -\frac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x} > \arccos x - \pi$.

18.30.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > \sin x - 1$; 2) $2^x > \arcsin x - \frac{\pi}{2}$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x} > \cos x - 1$.

18.31.° Знайдіть область значень функції $f(x)=2^{(\sin x+\cos x)^2}$.

18.32.° Знайдіть область значень функції $f(x)=3^{|\sin x\cos x|}$.

18.33.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x}=x^2+2$; 2) $2^{\sqrt{x}}=\cos x$.

18.34.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=x^2+1$; 2) $2^{|x|}=\cos x$.

18.35.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2}\geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant |\sin x|+1$; 3) $2^{\sqrt{x}}\geqslant 1-x^2$.

18.36.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2}>\cos x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant x^2+1$.

18.37.° Дослідіть на парність функцію $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

18.38.° Дослідіть на парність функцію $y=\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$.

18.39.° Дослідіть на парність функцію $y=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

18.40.° Дослідіть на парність функцію $y=\left(\sqrt{2}+1\right)^x-\left(\sqrt{2}-1\right)^x$.

18.41.° Дослідіть на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву функції:

1) $y=2^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

18.42.° Дослідіть на неперервність та з'ясуйте характер точок розриву функції:

1) $y=5^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$; 2) $y=\left(\frac{\pi}{8}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

18.43.°° Знайдіть область значень функції $y=\frac{2^x-1}{2^x-4}$.

18.44.** Знайдіть область значень функції $y=\dfrac{3^x}{3^x-9}$.

18.45.** Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x)=5^x+\dfrac{25}{5^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде парною?

18.46.** Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x)=3^x-\dfrac{27}{3^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде непарною?

18.47.** При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x) = -\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\dfrac{7}{2}\cdot 3^{-x}-3a^2$ на відрізку $[-1; 0]$ є від'ємним числом?

18.48.** При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=4^{-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}\cdot\frac{5a}{2}+\frac{a^2+12}{6}$$

набуває у всіх точках відрізка $[-1; 1]$ значень, більших за 2?

18.49.** Розв'яжіть у додатних числах систему $\begin{cases} x^y=z, \\ y^z=x, \\ z^x=y. \end{cases}$

18.50.** Розв'яжіть у додатних числах систему $\begin{cases} x^{\frac{1}{y}}=z, \\ y^{\frac{1}{z}}=x, \\ z^{\frac{1}{x}}=y. \end{cases}$

18.51.** Доведіть, що похідна показникової функції $f(x)=a^x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє рівність $f'(x)=a^x\cdot f'(0)$.

18.52.* Чи існують такі ірраціональні числа a і b, що a^b — раціональне число?

18.53.* Про функцію f відомо, що $f(1)=3$ і для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+y)=f(x)f(y)$. Знайдіть:

1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(20)$; 5) $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

18.54.* Про неперервну функцію f відомо, що $f(1)=3$ і для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+y)=f(x)f(y)$. Доведіть, що $f(x)=3^x$.

19. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У всіх цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь**.

Теорема 19.1. *При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.*

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ▲

Наслідок. *Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння*

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (1)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \quad (2)$$

Доведення. Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 19.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і, навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0{,}125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожну з частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$. Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню $-3x = 7$. Звідси $x = -\frac{7}{3}$. ●

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2\cdot 3^{x+2}-3^{x+1}=5^{x+1}+4\cdot 5^{x}$.

Розв'язання. Маємо: $3^x(2\cdot 3^2-3)=5^x(5+4)$; $3^x\cdot 15=5^x\cdot 9$;

$\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{9}{15}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{3}{5}$; $x=1$.

Відповідь: 1.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x=t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2+4t-5=0.$$

Звідси $t=1$ або $t=-5$.

Якщо $t=1$, то $5^x=1$. Звідси $5^x=5^0$; $x=0$.

Якщо $t=-5$, то $5^x=-5$. Оскільки $5^x>0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x=-5$ не має коренів.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$.

Розв'язання. Маємо:

$$3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0. \qquad (3)$$

Якщо зробити заміну $2^x=u$, $3^x=v$, то рівняння (3) набуде такого вигляду: $3u^2-5uv+2v^2=0$.

Оскільки $v=3^x\neq 0$, то, поділивши обидві частини цього рівняння на v^2, отримаємо:

$$3\left(\frac{u}{v}\right)^2-5\left(\frac{u}{v}\right)+2=0.$$

Далі за допомогою заміни $\frac{u}{v}=t$ отримуємо квадратне рівняння $3t^2-5t+2=0$. Звідси $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=1$. Оскільки $t=\frac{u}{v}=\frac{2^x}{3^x}$, то початкове рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=1.\end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Відповідь: 0; 1.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x, отримаємо:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також є спадною, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1.

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a + 3)\,2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо: $t^2 - (a + 3)\,t + 4a - 4 = 0$. Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a або має один корінь, або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності або повинно не мати коренів, або повинно мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Рівняння $2^x = a - 1$ не має коренів при $a - 1 \leqslant 0$, тобто при $a \leqslant 1$.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leqslant 1$ або $a = 5$.

Вправи

19.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}6^{2x-3} = 1$;

2) $8^x = 16$;

3) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;

4) $\sqrt{5^x} = 25$;

5) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;

6) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$;

7) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$;

8) $36^x=\left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;

9) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$;

10) $3^{x-1}=6^x\cdot 2^{-x}\cdot 3^{x+1}$.

19.2.• Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$;

2) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$;

4) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$;

5) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;

6) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot 6^{2x+5}$;

7) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;

8) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$;

9) $16^{5-3x}=0{,}125^{5x-6}$.

19.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2}+3^x=30$;

2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$;

3) $2^{x+4}-2^x=120$;

4) $7^{x+1}+4\cdot 7^x=77$;

5) $5^x+7\cdot 5^{x-2}=160$;

6) $6^{x+1}-4\cdot 6^{x-1}=192$.

19.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x=150$;

2) $2^x+2^{x-3}=18$;

3) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$;

4) $4^x-3\cdot 4^{x-2}=52$.

19.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$;

2) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$;

3) $25^x-5^x-20=0$;

4) $100\cdot 0{,}3^{2x}+91\cdot 0{,}3^x-9=0$.

19.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x}-3\cdot 6^x-18=0$;

2) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4=0$.

19.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $4^x\cdot 3^{x+1}=0{,}25\cdot 12^{3x-1}$;

3) $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$;

4) $0{,}25\cdot 2^{x^2}=\sqrt[3]{0{,}25\cdot 4^{2x}}$;

5) $5^{x-1}=10^x\cdot 2^{-x}\cdot 5^{x+1}$;

6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}}=\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

19.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sqrt{32}}{16^{x^2}}=8^{3x}$;

2) $9\cdot 3^{\sin x}=\sqrt{27}$;

3) $2^{x-1}=12^{2x}\cdot 3^{-2x}\cdot 2^{x+1}$;

4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$.

19.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56;$
2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10;$
3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354;$
4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228;$
5) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33;$
6) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5;$
7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47;$
8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}.$

19.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31;$
2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17;$
3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9;$
4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36;$
5) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246;$
6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}.$

19.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0;$
2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10;$
3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3;$
4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3;$
5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28;$
6) $\frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2.$

19.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$
2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0;$
3) $5^x - 0,2^{x-1} = 4;$
4) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4;$
5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2;$
6) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2.$

19.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2};$
2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1};$
3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}.$

19.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2};$
2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2};$
3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}.$

19.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0;$
2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0;$
3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1;$
4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6;$
5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3;$
6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3;$
7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0.$

19.16.° Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{2x+3}{x}}-32=0$;
2) $5^{\sqrt{x-2}}-5^{1-\sqrt{x-2}}-4=0$;
3) $2^{\cos 2x}-3\cdot 2^{\cos^2 x}+4=0$.

19.17.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cdot 2^{2x}-5\cdot 6^x+2\cdot 3^{2x}=0$;
2) $2^{2x+1}-7\cdot 10^x+25^{x+0,5}=0$;
3) $7\cdot 49^x+3\cdot 28^x=4\cdot 16^x$;
4) $9^x+4^x=2\cdot 6^x$.

19.18.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cdot 9^x-7\cdot 12^x+3\cdot 16^x=0$;
2) $5\cdot 2^x+2\cdot 5^x=7\cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

19.19.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x-2^x-3}=\sqrt{4\cdot 2^x-7}$.

19.20.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+3^x-9^x}=\sqrt{4-3\cdot 3^x}$.

19.21.°° Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$.

19.22.°° Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=8$.

19.23.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\frac{1}{2}}+\frac{2}{4^x}+14=9\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$;
2) $9^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{9^x}+26=16\left(3^x+3^{-x}\right)$.

19.24.°° При яких значеннях параметра a рівняння

$$9^x-(a+1)\cdot 3^x+3a-6=0$$

має єдиний корінь?

19.25.°° При яких значеннях параметра a рівняння

$$25^x+5^{x+1}-a^2+a+6=0$$

не має коренів?

19.26.°° При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^x-(a+1)\cdot 2^x+2a-2=0$$

має два різних корені?

19.27.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x=3-x$;
2) $3^x+4^x=5^x$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4^x$;
4) $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

19.28.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x=11-x$;
2) $3^{x-2}=\frac{9}{x}$;
3) $4^{x-2}+6^{x-3}=100$;
4) $\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(3+\sqrt{7}\right)^x=7^x$.

19.29.°° При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(3^{2x}-4\cdot 3^x+3\right)=0$$

має два різних корені?

19.30.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(2^{2x}-10\cdot 2^{x}+16\right)=0$$

має два різних корені?

19.31.** Розв'яжіть рівняння $4^{x}-(19-3x)\cdot 2^{x}+34-6x=0$.

19.32.** Розв'яжіть рівняння $9^{x}-(14-x)\cdot 3^{x}+33-3x=0$.

19.33.** Розв'яжіть рівняння $4^{\operatorname{tg} x}+4^{\operatorname{ctg} x}=8$.

19.34.** Розв'яжіть рівняння $2^{\cos x}+2^{\sin x}=2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

19.35.* При яких значеннях параметра a рівняння $2^{|x|}=ax^{2}+a^{2}$ має єдиний розв'язок?

19.36.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=\left(a+\frac{1}{3}\right)x^{2}+a^{2}$$

має єдиний розв'язок?

19.37.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{x}=(3a+1)|x|+2a^{2}$$

має єдиний розв'язок?

19.38.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}=2(a-1)x^{2}+\frac{1}{2}a^{2}$$

має єдиний розв'язок?

19.39.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16 \text{ і } |a-9|\cdot 3^{x-2}+a\cdot 9^{x-1}=1$$

рівносильні?

19.40.* При яких значеннях параметра a рівняння $3^{x}+3^{x+3}=3^{x+1}+25$ і $|a-4|2^{x}+a\cdot 4^{x}=4$ рівносильні?

19.41.* Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $(p-4)\,9^{x}+(p+1)\,3^{x}+2p-1=0$ не має розв'язків.

19.42.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a-1)\cdot 3^{2x}-(2a-1)\cdot 3^{x}-1=0$$

має два різних корені?

20. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

При розв'язуванні багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 20.1. ***При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ є спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 19.1, доведіть цей наслідок самостійно.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Розв'язання. Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2}, 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^x \geq \left(\frac{81}{625}\right)^x$.

Розв'язання. Маємо:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^x \geq \left(\frac{81}{625}\right)^x; \quad \left(\frac{4}{49} \cdot \frac{147}{20}\right)^x \geq \left(\frac{81}{625}\right)^x;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\left(\frac{3}{5}\right)^4\right)^x; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}.$$

Оскільки $0<\frac{3}{5}<1$, то остання нерівність рівносильна такій: $x \leqslant 4x$; $x \geqslant 0$.

Відповідь: $[0; +\infty)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0$.

Розв'язання. Маємо:

$$(2^2)^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0; \quad 2^{-2x+1}-7\cdot 2^{-x}-4<0;$$

$$2\cdot 2^{-2x}-7\cdot 2^{-x}-4<0.$$

Нехай $2^{-x}=t$. Тоді $2t^2-7t-4<0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо $-\frac{1}{2}<t<4$. Звідси $-\frac{1}{2}<2^{-x}<4$.

Оскільки $2^{-x}>0$, то нерівність $2^{-x}>-\frac{1}{2}$ виконується при всіх x. Тому достатньо розв'язати нерівність $2^{-x}<4$.

Маємо: $2^{-x}<2^2$; $-x<2$; $x>-2$.

Відповідь: $(-2; +\infty)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $4^x-2\cdot 5^{2x}+10^x>0$.

Розв'язання. Маємо: $2^{2x}-2\cdot 5^{2x}+2^x\cdot 5^x>0$. Оскільки $5^{2x}>0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x}, отримуємо рівносильну нерівність

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-2+\left(\frac{2}{5}\right)^{x}>0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=t$. Тоді $t^2+t-2>0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\left[\begin{array}{l} t>1, \\ t<-2. \end{array}\right.$ Звідси:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^{x}>1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x}<-2. \end{array}\right.$$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}>1$ знаходимо, що $x<0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}<-2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$. Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$. ●

Вправи

20.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;

2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$;

3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;

4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?

20.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;

2) $5^x < \frac{1}{5}$;

3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;

4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;

5) $2^{x^2-1} < 8$;

6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;

7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;

8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;

9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

20.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$;

2) $10^x < 0{,}001$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;

4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;

5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;

6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

20.4.° Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$;

2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$;

3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

20.5.° Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;

2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

20.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$;
2) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{3^{x+2}-27}}$.

20.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x-16}$;
2) $f(x)=\sqrt{1-6^{x-4}}$.

20.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2}>\left(\frac{1}{4}\right)^5$;
2) $125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}\geqslant\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}}<1$;
4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5}>\sqrt{2}$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}\leqslant\frac{9}{4}$;
6) $4\cdot0{,}5^{x(x+3)}\geqslant0{,}25^{2x}$.

20.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x}<\frac{9}{49}$;
2) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2}\leqslant\left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;
3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}}>1$;
4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1}>9^{-0{,}5}$.

20.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2}-14\cdot7^x>5$;
2) $9\cdot3^{x-1}+3^x<36$;
3) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}>56$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\geqslant26$;
5) $2\cdot6^x+3\cdot6^{x+3}\leqslant650$;
6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x-\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}>\frac{3}{16}$.

20.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2}-4\cdot3^x<45$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant3$;
3) $5^x+5^{x-1}-5^{x-2}>145$;
4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}<1\frac{2}{3}$.

20.12.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x}-4\cdot3^x-45>0$;
2) $4^x+2^{x+3}-20<0$;
3) $49^x-8\cdot7^x+7\leqslant0$;
4) $0{,}25^x-12\cdot0{,}5^x+32\geqslant0$;
5) $6^{2x-1}-\frac{1}{3}\cdot6^x-4\leqslant0$;
6) $25^x+5^x-30\geqslant0$.

20.13.° Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;

4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

20.14.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

2) $\frac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

20.15.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;

2) $\frac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

20.16.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

20.17.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;

2) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} \leqslant 120$.

20.18.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$;

2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

20.19.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7$;

2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

20.20.° Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

20.21.° Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

20.22.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$;

2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

20.23.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$;

2) $2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

20.24.•• Розв'яжіть нерівність $\left(5 - \sqrt{24}\right)^x + \left(5 + \sqrt{24}\right)^x \geqslant 98$.

20.25.•• Розв'яжіть нерівність $\left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}\right)^x < 8$.

20.26.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$;

2) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

20.27.** Розв'яжіть нерівність $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

20.28.** Розв'яжіть рівняння $|3^x - 1| + |3^x - 9| = 8$.

20.29.** Розв'яжіть рівняння $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$.

20.30.** Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x > 6 - x$; 2) $5^x + 12^x < 13^x$.

20.31.** Розв'яжіть нерівність $10^{4-x} > 7 + x$.

20.32.** Розв'яжіть нерівність $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$.

20.33.** Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

20.34.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geqslant 0$.

20.35.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leqslant 0$.

20.36.* При яких значеннях параметра a нерівність

$$4^{\cos x} - 2(a - 3) \cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$$

виконується при всіх дійсних x?

20.37.* При яких значеннях параметра m нерівність

$$(m + 2) \cdot 4^{|x-1|} - 2m \cdot 2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$$

виконується при всіх дійсних x?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

1.5. 2) $\frac{5}{4}$; 3) 6; 4) $-\frac{1}{5}$. **1.6.** 3) −4; 4) $-\frac{1}{2}$. **1.7.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 1, \text{ якщо } x=0.\end{cases}$
1.10. 1) *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=-3$. **1.12.** 1) 2; 2) 1. **1.13.** 1) 3. *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 45.9 з підручника «Алгебра-10»; 2) 2. **1.18.** *Вказівка.* Розгляньте дві послідовності: раціональних та ірраціональних чисел, кожна з яких збігається до числа x_0. **1.21.** 1) Так; 2) так. **1.22.** 1. *Вказівка.* Нехай (x_n) — довільна збіжна до нуля послідовність, де $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $t_n=\frac{x_n}{2}$. Тоді послідовність (t_n) також збігається до нуля і $t_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. З умови маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)=1$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2}\right)=1$. **1.23.** 1. **1.24.** Існує. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}\pi, \text{ якщо } x\in\mathbb{Q},\\ 0, \text{ якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$
1.25. Ні. **1.26.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію f таку, що $D(f)=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ і $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}$, де $n \in \mathbb{N}$. **1.27.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію, задану таким чином: $f(x)=1$, якщо $x=\frac{1}{\sqrt{p}}$, де p — просте число, і $f(x)=0$ в інших випадках. Доведемо, що серед членів послідовності (y_n) не може бути більше однієї одиниці. Якщо $x=0$, то це твердження очевидне. Якщо при $x\neq 0$ припустити існування двох членів $f\left(\frac{x}{n}\right)$, $f\left(\frac{x}{m}\right)$, рівних одиниці, то $\frac{x}{n}=\frac{1}{\sqrt{p}}$ і $\frac{x}{m}=\frac{1}{\sqrt{q}}$, де p, q — прості числа. Звідси $\frac{n}{m}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. Отримали суперечність, оскільки $\frac{n}{m}$ — раціональне число, а $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ — ірраціональне.

2.2. 1) 10; 2) 2; 3) −22; 4) 1,5; 5) 1; 6) 28. **2.3.** 1) 4; 2) 0,75; 3) 16; 4) 5. **2.4.** 1) 0,5; 2) 1; 3) 6. *Вказівка.* Розкрийте дужки у виразі $(1+x)^4$; 4) $\frac{5}{3}$. **2.5.** 1) -1; 2) 0,5. **2.6.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{9}$. **2.7.** 9. **2.8.** $-\frac{1}{7}$. **2.9.** 2. **2.10.** 0. **2.15.** 1) $f(x)=\frac{4-x}{2}$; 2) *Вказівка*. Оберіть функцію g таку, що $g(x)\neq 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, причому $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=0$. Знайдіть функцію f з рівняння $\frac{2f(x)-3x}{x+f(x)}=2+g(x)$. **2.17.** $\frac{m}{n}$. **2.18.** $\frac{m}{n}$. **2.19.** 1) Ні. *Вказівка*. Якщо функція h має границю в точці x_0, то й функція $g(x)=h(x)-f(x)$ також буде мати границю в точці x_0; 2) так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, випадок, коли $g(x)=-f(x)$. **2.20.** 1) Так. *Вказівка*. Розгляньте функцію f таку, що $f(x)=0$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}$; 2) так.

3.7. 1) Так; 2) ні. **3.8.** 1) Ні; 2) так. **3.9.** 1) -1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -3. **3.10.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) -2; 3) $\frac{2}{3}$. *Вказівка*. $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{(\sqrt[6]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1)}$. **3.11.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) 3. *Вказівка*. $\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=$ $=\frac{(\sqrt{6-x}-1)(\sqrt{6-x}+1)(3+\sqrt{4+x})}{(3-\sqrt{4+x})(3+\sqrt{4+x})(\sqrt{6-x}+1)}$; 5) 4; 6) 3. *Вказівка*. $\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=$ $=\frac{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$. **3.12.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{56}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{144}$. **3.14.** $\frac{5}{3}$. **3.15.** $-\frac{1}{4}$. **3.16.** $a=0$. **3.17.** $a=0$. **3.18.** $a=-1$. *Вказівка*. Границя даної функції в точці $x_0=0$ існує лише при $a=1$ або $a=-1$. Проте при $a=1$ зазначена границя не збігається зі значенням $f(0)$. **3.19.** $a=0$ або $a=-3$. **3.20.** $a=0$ або $a=2$. **3.21.** 1) Ні. *Вказівка*. Якщо функція h є неперервною в точці x_0, то й функція $g(x)=h(x)-f(x)$ також буде неперервною в точці x_0; 2) так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, випадок, коли $g(x)=-f(x)$. **3.22.** 1) Так. *Вказівка*. Розгляньте функцію f таку, що $f(x)=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$; 2) так. **3.23.** *Вказівка*. Скористайтеся лемою 3.1. **3.25.** $f(x)=x^2$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. *Вказівка*. Нехай $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і (x_n) — збіжна до x_0 послідовність раціональних чисел. Тоді $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=x_0^2$. **3.26.** $(-\infty;+\infty)$. *Вказівка*.

Розгляньте функцію $y = f(x) - g(x)$. **3.28.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ -x, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

3.30. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ **3.31.** $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

3.32. $f(x) = c$, де c — довільна константа. *Вказівка.* Доведіть, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f\left(\dfrac{x+1}{2^n} - 1\right)$.

3.33. Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 1 + x, & \text{якщо } x < -1, \end{cases}$ і обернену до неї функцію g. **3.34.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\max\{a; b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min\{a; b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$. **3.35.** 0. *Вказівка.* Нехай $\sin x_1 \geqslant 0$ (випадок $\sin x_1 < 0$ розглядають аналогічно). Доведіть, що члени послідовності (x_n) задовольняють нерівності $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ для всіх $n > 1$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Переходячи до границі в рівності $x_{n+1} = \sin x_n$ і використовуючи неперервність функції $y = \sin x$, отримуємо $a = \sin a$. Звідси $a = 0$. **3.36.** -1. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $x_n = \cos\left(2\pi\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)\right)$ і $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

4.3. 1) $\lim\limits_{x \to -3-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3+} f(x) = -6$; 2) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \dfrac{3}{2}$. *Вказівка.* $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt[6]{x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1\right)}{\left(\sqrt[6]{x} - 1\right)\left(\sqrt[6]{x} + 1\right)}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 2$; 5) ні лівої, ні правої границі не існує; 6) лівої границі не існує, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$; 7) $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$; 8) ні лівої, ні правої границі не існує. **4.4.** 2) $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \dfrac{7}{9}$; 3) $\lim\limits_{x \to \pi-} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x \to \pi+} f(x) = 2$; 4) лівої границі не існує, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$. **4.5.** 1) Усувний розрив; 2) розрив I роду; 3) розрив I роду; 4) розрив II роду; 5) розрив I роду. **4.6.** 1) Усувний розрив; 2) розрив I роду; 3) розрив II роду. **4.7.** 1) $a = 0$; 2) $a = -2$. **4.8.** 1) $a = 2$; 2) $a = 0$, або $a = -2$, або $a = 2$. **4.9.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ якщо } x \leqslant 0. \end{cases}$ **4.10.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \leqslant 0 \text{ або } x \in \mathbb{Q}, \\ x, \text{ якщо } x > 0 \text{ і } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ **4.11.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x \leqslant 0, \\ 1, \quad \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

5.5. 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[0; \pi]$. **5.6.** 1) $[-5; -3]$; 2) $[2; 4]$; 3) $[0; \pi]$. **5.7.** 1) $\left[0; \frac{1}{6}\right]$; 2) $[0; 1]$. **5.8.** 1) $\left[0; \frac{1}{7}\right]$. *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю $\frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1} \leqslant \frac{x^2}{2\sqrt{4x^4 \cdot 1} + 3x^2}$; 2) $[0; 2]$. **5.9.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **5.10.** $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. **5.11.** Ні. *Вказівка.* Маємо: $E(f) = (-5; 3]$. За другою теоремою Вейєрштрасса неперервна на $[0; 1]$ функція має досягати свого найменшого значення. **5.12.** Ні. *Вказівка.* Скориставшись теоремою про проміжне значення, доведіть, що рівняння $f(x) = a$ має корінь при $a = 3$. **5.14.** Ні. *Вказівка.* Див. рисунок. **5.16.** *Вказівка.* Покажіть, що для будь-якого $M > 0$ знайдеться $x_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $f(x_0) > M$. За x_0 візьміть число виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.17.** *Вказівка.* Припустимо, що функція f є періодичною з періодом $T > 0$. На відрізку $[0; T]$ функція f є неперервною, а тому вона є обмеженою на цьому відрізку. Звідси випливає, що функція f є обмеженою на $\mathbb{R}$. Але її значення при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ утворюють необмежену послідовність. **5.19.** Ні. *Вказівка.* Припустимо, що така функція f існує. З умови випливає, що функція f набуває як додатних, так і від'ємних значень.

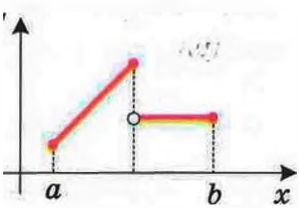


Рис. до задачі 5.14

Тому за першою теоремою Больцано–Коші існує нуль цієї функції. **5.20.** *Вказівка*. Припустимо протилежне. Нехай, наприклад, знайшлися такі числа $x_1 < x_2 < x_3$, що $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ (інші випадки розглядаються аналогічно). Тоді за другою теоремою Больцано–Коші на проміжку $[x_1; x_2]$ знайдеться точка c така, що $f(c) = f(x_3)$. Оскільки $c \neq x_3$, то функція f не є оборотною. **5.22.** Ні. *Вказівка*. Нехай x_0 — корінь рівняння $f(x) = 3$. Розглянемо значення $a_1 = f(x_0 - 1)$, $a_2 = f(x_0 + 1)$. Тоді $a_1 < 3$ і $a_2 < 3$. Якщо припустити, що f — неперервна функція, то на відрізку $[x_0 - 1; x_0]$ функція f набуває всіх значень від a_1 до 3. Аналогічно на відрізку $[x_0; x_0 + 1]$ функція f набуває всіх значень від a_2 до 3. Далі покажіть існування такого значення $a \in (2; 3)$, що рівняння $f(x) = a$ має принаймні два корені. **5.23.** Так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{якщо } x \in [0; 1), \\ 3x - 2, & \text{якщо } x \in (1; 2). \end{cases}$ **5.24.** *Вказівка*. Існують точки x_1 і x_2 такі, що $f(g(x_1)) = 0$ і $f(g(x_2)) = 1$. Далі розгляньте функцію $\varphi(x) = f(g(x)) - g(f(x))$. **5.25.** *Вказівка*. Доведіть, що неперервна функція $g(x) = f(x) - x$ зберігає знак на всій області визначення. Якщо, наприклад, $g(x) > 0$, то з нерівності $f(x) > x$ випливає, що $f(f(x)) > f(x) > x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. **5.26.** Ні. *Вказівка*. Якщо така функція f існує, то функція $\varphi(x) = f(x) - x$ набуває тільки ірраціональних значень. Нехай α_1 і α_2 — два будь-яких значення функції φ. Припустимо, що ці значення різні ($\alpha_1 < \alpha_2$). Оскільки функція φ є неперервною на $\mathbb{R}$, то вона набуває всіх значень з проміжку $[\alpha_1; \alpha_2]$, а отже, серед її значень є раціональні числа. Це суперечить описаній вище властивості функції φ. Отже, $\alpha_1 = \alpha_2$. **5.27.** *Вказівка*. При $x = 3$ отримуємо $f(f(3)) \cdot f(3) = 1$. Звідси $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 1$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$. Оскільки функція f є неперервною на відрізку $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, то вона набуває всіх значень з відрізку $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Тоді існує таке $x_0 \in \mathbb{R}$, що $f(x_0) = 2$. Маємо: $f(f(x_0)) \cdot f(x_0) = 1$. Звідси $f(2) \cdot 2 = 1$; $f(2) = \frac{1}{2}$. **5.28.** 1) Ні. *Вказівка*. Розглянемо відрізок $[a; b]$ такий, що $f(a) = f(b)$. Позначимо $A = f(a) = f(b)$. Щонайменше одне з чисел $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ або $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ не дорівнює числу A. Нехай, наприклад, $\max\limits_{[a;b]} f(x) \neq A$

і $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$, де $x_1 \in (a; b)$. Далі розгляньте точку x_2 таку, що $f(x_1) = f(x_2)$; 2) так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ x-1, & \text{якщо } x \in \mathbb{N}; \end{cases}$ 3) так. *Вказівка.* Див. рисунок. **5.29.** *Вказівка.* Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n)$. Тоді $f(x_1) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \leqslant f(x_n)$. Далі скористайтеся тим, що функція f набуває всіх значень від $f(x_1)$ до $f(x_n)$.

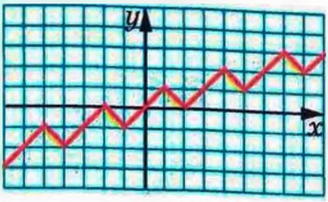


Рис. до задачі 5.28 (3)

5.30. *Вказівка.* Розгляньте функцію $g(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) - f(x)$. Ця функція визначена і неперервна на відрізку $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Маємо, що

$$g\left(\frac{2}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g(0) = \left(f(1) - f\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right) =$$

$= f(1) - f(0) = 0$. Це означає, що серед чисел $g\left(\frac{2}{3}\right)$, $g\left(\frac{1}{3}\right)$, $g(0)$ є принаймні одне невід'ємне та принаймні одне недодатне число. Тому за першою теоремою Больцано–Коші існує така точка x_0, що $g(x_0) = 0$. Тоді відрізок, кінці якого мають координати $(x_0; f(x_0))$ і $\left(x_0 + \frac{1}{3}; f\left(x_0 + \frac{1}{3}\right)\right)$, паралельний осі абсцис і має довжину $\frac{1}{3}$.

6.1. 1) 2; 2) 9; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{8}$. **6.2.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) 8; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1}{81}$. **6.3.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 8; 3) 4; 4) −10; 5) 84; 6) $\frac{4}{3}$. **6.4.** 1) $\frac{4}{25}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $-\frac{9}{10}$; 4) $-\frac{99}{8}$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $-\frac{4}{5}$. **6.5.** $\sin 1$. **6.6.** Границі не існує. **6.7.** 1. **6.8.** 0. **6.11.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) 2. **6.12.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$. **6.13.** 1) −1; 2) $\frac{1}{50}$; 3) $\frac{2}{\pi}$. **6.14.** 1) −2; 2) 1; 3) $-\frac{4}{\pi}$. **6.15.** 1) $a = \frac{2}{3}$ або $a = -\frac{2}{3}$; 2) $a = -1$ або $a = \frac{1}{2}$. **6.16.** $a = 2$ або $a = -2$. **6.17.** 1. **6.18.** 0. **6.19.** 0. *Вказівка.* Скористайтеся лемою 6.1. **6.20.** π. *Вказівка.* $n \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) =$

$= n\sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right) = n\cdot\frac{\sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right)}{2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}\cdot 2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) =$

$= n\cdot\frac{\sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right)}{2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. **6.21.** $\frac{2}{\pi}$. *Вказівка.* Позначимо $a_1 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$. Тоді $a_2 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4}+1} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$. Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що $a_n = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

7.3. 4) 4; 5) 3; 6) 2. **7.4.** 4) 2; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{3}$. **7.5.** 1) $y=\frac{3}{4}$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y=\frac{1}{2}$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y = 0$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. **7.6.** 1) $y=-\frac{1}{3}$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y = 1$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y = 0$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. **7.11.** $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$. **7.12.** 0. **7.14.** 1) $y = x$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y = x + 4$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y = -x$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 4) $y = 1$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. **7.15.** 1) $y = x$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y = x - 1$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y = x$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. **7.16.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. **7.17.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\sqrt{x}$. **7.18.** $y=-\frac{1}{3}$ при $x\to-\infty$ і $y=\frac{1}{3}$ при $x\to+\infty$. *Вказівка.* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x+2} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{3x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{3+\dfrac{2}{x}} = -\dfrac{1}{3}$. **7.19.** $y = 1$ при $x \to -\infty$ і $y = -1$ при $x \to +\infty$. **7.20.** 1) $y = -\dfrac{1}{2}$ при $x \to -\infty$; 2) $y = -\dfrac{5}{2}$ при $x \to -\infty$ і $y = \dfrac{5}{2}$ при $x \to +\infty$. **7.21.** 1) $y = \dfrac{1}{2}$ при $x \to +\infty$; 2) $y = 1$ при $x \to -\infty$ і $y = -1$ при $x \to +\infty$. **7.22.** $y = x - \dfrac{1}{2}$ при $x \to -\infty$ і $y = 3x + \dfrac{1}{2}$ при $x \to +\infty$. **7.23.** $y = -2x$ при $x \to -\infty$ і $y = 0$ при $x \to +\infty$. **7.24.** Ні. *Вказівка.* Василь подав функцію f у вигляді $f(x) = x \cdot g(x)$, де $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Але з рівності $f(x) = x \cdot g(x)$, узагалі кажучи, не випливає, що $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$. Тому у Василя немає підстав стверджувати, що пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Насправді графік функції f має похилу асимптоту $y = x + \dfrac{1}{2}$ (перевірте це самостійно). **7.25.** Ні.

Вказівка. Розгляньте, наприклад, функцію $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

або функцію $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ і точку $x_0 = 0$. **7.26.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1 \text{ і } x \notin \mathbb{N}, \end{cases}$

і функцію g, обернену до функції f. **7.27.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію f таку, що $f\left(\sqrt{p}\right) = 1$, де p — просте число, $f(x) = 0$ при всіх інших значеннях x. Тоді легко довести, що при будь-якому $x_0 > 0$ серед членів послідовності $(x_0 n)$ числа виду $\sqrt{p}$, де p — просте, зустрінуться не більше одного разу. **7.28.** *Вказівка.* Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{ax^2 + bx + c}$. Тоді

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$. Це означає, що функція f набуває однакових значень при всіх натуральних значеннях $x=n$, де $n\geqslant n_0$.

8.7. 8 м/с. **8.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с. **8.14.** 1) 2,6; 2) 2. **8.15.** 1) 7; 2) 12.

9.6. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **9.7.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.8.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **9.9.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **9.10.** 1) $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$; 2) $f'(x)=-2x$. **9.11.** 1) $f'(x)=\frac{2}{x^2}$; 2) $f'(x)=2x+3$. **9.12.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **9.13.** 1) −32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **9.22.** 1) −1; 1; 2) 4; 3) 2; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.23.** 1) −2; 2) −27; 27; 3) −3; 3; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.24.** 1. Величина $s'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ задає миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0=\frac{1}{2}$ с. **9.25.** 12. **9.34.** $k=1$, $b=-7$. **9.35.** $k=-1$, $b=3$. **9.40.** 0. **9.42.** $\frac{1}{2}$. **9.44.** *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}x^2(x-1)^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ -x^2(x-1)^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ **9.45.** 1) $f'(x_0)$. *Вказівка.* За означенням Гейне, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+x_n)-f(x_0)}{x_n}=f'(x_0)$. Далі розгляньте таку послідовність (x_n), що $x_n=\frac{1}{n}$; 2) $f'(x_0)$. **9.46.** $2f'(x_0)$. **9.47.** *Вказівка.* Скористайтеся лемою 6.1.

10.12. $\frac{17}{9}$ м/с. **10.13.** 105 м/с. **10.16.** 2) (1; 5); 4) усі числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **10.17.** 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **10.18.** 1) $y'=\frac{9}{x^4}-\frac{9}{x^{10}}$; 2) $y'=\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{20}{x^6}$; 3) $y'=\frac{8x^2+3x+2}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$; 4) $y'=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$; 5) $y'=\frac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg}x\cos(2x+5)$; 6) $y'=\frac{3(1-x)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}$; 7) $y'=(x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$; 8) $y'=$

$=-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **10.19.** 1) $y'=-\frac{4}{x^5}-\frac{8}{x^9}$; 2) $y'=\frac{30}{x^7}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^3}$; 3) $y'=\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$; 4) $y'=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$; 5) $y'=(x-3)^3(x+2)^4(9x-7)$; 6) $y'=\frac{2\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{4}(2x-3)\cos\frac{x}{4}}{\sin^2\frac{x}{4}}$. **10.20.** 1) $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$; 2) $[-2;1)\cup$ $\cup(1;4]$; 3) $\left[-\frac{4}{3};2\right]$; 4) $[-1;0)\cup(0;1]$; 5) $-\frac{5\pi}{8}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{12}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **10.21.** 1) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; 2) $(-3;-2)\cup(-2;-1)$; 3) $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$; 4) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\pi+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
10.22. *Вказівка.* Розв'язання Василя є помилковим, а отримана відповідь — правильна. У точках $x=-1$ і $x=1$ функції $y=\arcsin x$ і $y=\arccos x$ не є диференційовними, тому перехід від виразу $(\arcsin x+\arccos x)'$ до виразу $(\arcsin x)'+(\arccos x)'$ не є коректним. Отримана відповідь є правильною, оскільки $f(x)=\arcsin x+$ $+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ для всіх $x\in D(f)$. Тому $f'(x)=0$ для всіх $x\in D(f)$.
10.23. $y'=0$. **10.24.** 16 кг • м/с. **10.25.** 400 Дж. **10.26.** 7 м.
10.27. 1) $y'=-6\cos^2 2x\sin 2x$; 2) $y'=\frac{\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}{10\sqrt{2+\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}}$; 3) $y'=$ $=2\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}-5\right)^5$. **10.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) 0. **10.29.** 1) $y'=\frac{3x^2}{1+x^6}$; 2) $y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-2x\arccos x}{(x^2-1)^2}$; 3) $y'=-\frac{2x}{x^4-2x^2+2}$; 4) $y'=-\frac{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}}{1+x^2}$.
10.30. 1) $y'=2x\,\mathrm{arcctg}\,x-\frac{x^2}{1+x^2}$; 2) $y'=-\frac{\sqrt{x-x^2}+2(2x-1)\arcsin\sqrt{x}}{2(x^2-x)^2}$; 3) $y'=2x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^2+1}$; 4) $y'=-\frac{6\,\mathrm{arctg}\,3x}{1+9x^2}$. **10.31.** 1) 2; 0; 2) −6; 0.
10.32. 1) 2; −2; 2) −10; 2. **10.33.** 1) 3; 2) коренів немає.

10.34. 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$. **10.35.** 1) 4; 2) 6; 3) 0; 4) 8. **10.36.** 3) $\frac{9}{2}$.
10.37. 1. *Вказівка.* Продиференціюйте обидві частини рівності $f^3(x)+x^2 f(x)+1=x$. **10.38.** 1. **10.42.** 1) Не диференційовна; 2) може бути як диференційовною, так і не диференційовною. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функції $f(x)=|x|$, $g(x)=-|x|$. **10.43.** 1) Може бути як диференційовною, так і не диференційовною. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функції $f(x)=0$, $g(x)=|x|$. **10.44.** 1) $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$, $x_0=0$; 2) $g(x)=x^2$, $f(x)=|x|$, $x_0=0$; 3) $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases}-1, \text{ якщо } x<0,\\ 1, \quad \text{якщо } x\geqslant 0,\end{cases}$ $x_0=0$. **10.45.** Ні. *Вказівка.* Оскільки функція $f(t)=\sqrt[3]{t}$ не є диференційовною в точці $t=0$, то для обчислення похідної даної функції в точці $x=0$ (зазначимо, що $g(0)=0$) використовувати теорему про похідну складеної функції не можна. Насправді функція $y=\sqrt[3]{x^5}$ є диференційовною в точці $x=0$ і похідна функції $y=\sqrt[3]{x^5}$ в цій точці дорівнює нулю. **10.46.** $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{tg} x}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\cos^2 x}, \text{ якщо } x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, \qquad\qquad \text{якщо } x=0.\end{cases}$

10.47. $f'(x)=\dfrac{4(\cos x\sin^3 x+x^3)}{3\sqrt[3]{(\sin^4 x+x^4)^2}}$, де $x\neq 0$; $f'(0)=0$. **10.48.** 10!. *Вказівка.* Запишіть $f(x)=\sin x\cdot g(x)$, де $g(x)=(x+1)(x+2)\dots(x+10)$. Тоді $f'(x)=\cos x\cdot g(x)+g'(x)\cdot\sin x$. **10.49.** $\dfrac{798\cdot 3^{101}+6}{64}$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=x^{100}+x^{98}+\ldots+x^2+1=\dfrac{x^{102}-1}{x^2-1}$. Тоді $S=f'(3)$. **10.50.** $\dfrac{4^{32}-616}{25}$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=-1+$ $+x-x^2+x^3-\ldots-x^{30}=-\dfrac{x^{31}+1}{x+1}$. Тоді $S=4^{30}\cdot f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$. **10.51.** $P(x)=x^{10}$.
Вказівка. Легко зрозуміти, що степінь многочлена P дорівнює 10, а степінь многочлена P' дорівнює 9. Продиференціюємо обидві частини рівності $P(P(x))=x^{100}$. Маємо: $P'(P(x))\cdot P'(x)=100x^{99}$. Звідси многочлени $P'(x)$ і $P'(P(x))$ мають вигляд $P'(x)=ax^9$, $P'(P(x))=bx^{90}$, де a і b — деякі сталі. Підставляючи $t=P(x)$ до

рівності $P'(t)=at^9$, отримуємо $P'(P(x))=a(P(x))^9=bx^{90}$. Звідси $P(x)=cx^{10}$, де c — деяка стала. **10.52.** *Вказівка.* На рисунку зображено графік функції f. Обчисліть похідну функції f і доведіть, що функція f' не має границі в точці $x_0=0$. **10.53.** Ні. *Вказівка.* Доведіть, що для кожної записаної на дошці функції f виконується рівність $f'(1)=0$.

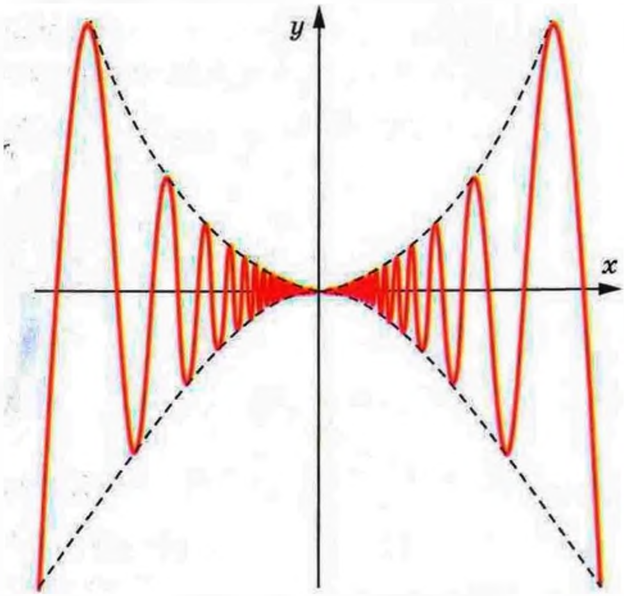


Рис. до задачі 10.52

11.1. 1) $y = x - 1$; 2) $y = 12x - 43$; 3) $y = -4x + 4$; 4) $y=\frac{2}{3}x+3$; 5) $y = x$; 6) $y = -1$; 7) $y = 2x - \pi + 1$; 8) $y = x + 4$; 9) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. **11.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y=-x+\frac{\pi}{2}$; 4) $y = 1$; 5) $y = -2x - \pi - 1$; 6) $y = -2{,}5x - 1{,}5$; 7) $y = 5x - 18$. **11.3.** 1) $y = -3x - 3$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}$. **11.4.** 1) $y = -5x + 2$; 2) $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **11.6.** 1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$. **11.7.** $(2; 7)$. **11.8.** $(1; 1)$, $(-1; -1)$. **11.9.** Дотичні перетинаються. **11.10.** 1) $(4; -9)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{5}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{3}{2}\right)$; 4) $(5; 4)$, $(-1; -2)$. **11.11.** 1) $(0; 0)$; 2) $(0; -1)$, $\left(\frac{4}{3}; -\frac{23}{27}\right)$. **11.14.** 1) $y = -1$, $y = 3$; 2) $y = 1$,

$y=-7$. **11.15.** $y=-5$, $y=\frac{17}{3}$. **11.16.** 1) $y=-x-4$; 2) $y=3x-3$; 3) $y=2x-8$, $y=2x+19$. **11.17.** 1) $y=-7x-9$; 2) $y=x+\frac{1}{4}$. **11.18.** Ні. **11.19.** Так, $x_0=0$. **11.20.** Так, $x_0=1$. **11.21.** 8. **11.22.** 2. **11.23.** $\frac{25}{12}$. **11.24.** 12. **11.25.** Ні. *Вказівка.* Подібні міркування можуть привести, наприклад, до висновку, що і пряма $y=-1$ буде дотичною до графіка функції f, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}(3x+\sin x)=0$. З рівності $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-(kx+b))=0$, на яку спирається Василь, випливає лише те, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=kx_0+b$. **11.26.** (1,5; −2). *Вказівка.* Скористайтеся тим, що прямі $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $k_1k_2=-1$. **11.27.** Ні. **11.28.** $b=c=2$. **11.29.** $a=3$, $b=1$. **11.30.** $y=\frac{1}{4}(x+2)^2$. **11.31.** $y=-8x+7$, $y=64x+97$. **11.32.** $y=6x-2$. **11.33.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **11.34.** (1; 4). **11.35.** $y=\frac{x+5}{8}$. **11.36.** $y=\frac{x-7}{9}$. **11.37.** Якщо $a<-32$ або $a>4$, то два розв'язки; якщо $a=-32$ або $a=4$, то один розв'язок; якщо $-32<a<4$, то розв'язків немає. **11.38.** Якщо $a<3$, то один розв'язок; якщо $a=3$, то два розв'язки; якщо $a>3$, то три розв'язки. **11.39.** $\left(0;\frac{7}{2}\right)$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що у перпендикулярних прямих добуток кутових коефіцієнтів дорівнює −1. **11.40.** (0; −3). **11.41.** Наприклад, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-3}, & \text{якщо } x<2,\\ -x+1, & \text{якщо } x\geqslant 2.\end{cases}$

Вказівка. Розгляньте дотичну до графіка функції $y=\frac{1}{x-3}$ в точці $x_0=2$. **11.42.** Наприклад, $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}, & \text{якщо } x<3,\\ \sqrt{3x-5}, & \text{якщо } x\geqslant 3.\end{cases}$ **11.43.** 2.

11.44. 0. **11.45.** $y=8x-20$. *Вказівка.* Запишіть рівняння дотичних до графіків функцій f і g у точках $A\,(x_1;\,f(x_1))$ і $B\,(x_2;\,g(x_2))$ відповідно, а потім установіть, за яких умов ці дотичні збігаються. **11.46.** $y=8x+4$. **11.47.** *Вказівка.* Доведіть, що коли точка A має координати $(x_0;\ y_0)$, то пряма, яка проходить через точки $M\ (x_0;\ 0)$ і $N\ (0;\ y_0)$, паралельна шуканій дотичній. **11.48.** *Вказівка.* Доведіть, що коли точка A має координати $(x_0;\ y_0)$, то шукана дотична проходить через точки $M\left(\frac{x_0}{2};0\right)$ і $N\ (0;\ -y_0)$. **11.49.** $y=x-1$. *Вказівка.* Якщо пряма $y=kx+b$ дотикається до графіка многочлена P у точці x_0, то многочлен $P(x)-(kx+b)$ можна подати у вигляді $P(x)-(kx+b)=(x-x_0)^2\,Q(x)$, де Q — деякий многочлен. Звідси випливає, що $f(x)-(kx+b)=(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2$, де x_1, x_2 — точки дотику прямої $y=kx+b$ до графіка многочлена f. Значення k і b можна знайти, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях многочленів $f(x)-(kx+b)$ і $(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2$. **11.50.** *Вказівка.* Рівняння дотичної до графіка многочлена P у точці з абсцисою x^* має вигляд $y=P'(x^*)(x-x^*)+P(x^*)$. Ця дотична проходить через точку $A(x_0;y_0)$ тоді і лише тоді, коли $y_0=P'(x^*)(x_0-x^*)+$ $+P(x^*)$. Оскільки $Q(t)=P'(t)(x_0-t)+P(t)-y_0$ — ненульовий многочлен n-го степеня, то рівняння $y_0=P'(x^*)(x_0-x^*)+P(x^*)$, де x^* — шукана змінна, має не більше ніж n коренів. **11.51.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f=\begin{cases}2-x, \text{якщо } x<1,\\ \frac{1}{x}, \quad \text{якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$ Зауважимо, що пряма $y=2-x$ є дотичною до графіка функції $y=\frac{1}{x}$ у точці $x_0=1$. **11.52.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}x, \quad \text{якщо } 0<x<1,\\ x-2, \text{якщо } 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ точку $A(2;0)$ і функцію, обернену до функції f.

12.5. 1) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $2-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$. **12.6.** 1) 2; 2) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. **12.17.** *Вказівка.* На проміжку $(2;3)$ існує така точка c, що $f(c)=2$. Далі скористайтеся теоремою Ролля для функції f на відрізку $[1;c]$. **12.19.** *Вказівка.* Розгляньте неперервну на $\mathbb{R}$ функцію $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 1, \quad \text{ якщо } x=0.\end{cases}$ **12.21.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею пункту 12. **12.22.** *Вказівка*. Розглянемо многочлен $f(x) = x^n + ax + b$, де $n > 3$. Припустимо, що він має не менше ніж чотири корені. Тоді за ключовою задачею пункту 12 функція $y = f'(x)$, тобто функція $y=nx^{n-1}+a$, має не менше трьох нулів. **12.25.** *Вказівка*. Розгляньте функцію $g(x)=f(x)\cos x$. **12.26.** Ні. *Вказівка*. Функція $f(x)=|x|$ не є диференційовною в точці $x_0=0$. Тому застосування теореми Ролля для функції f і відрізка $[-1;1]$ не є коректним. **12.27.** Ні. *Вказівка*. Припустимо, що така функція існує. Маємо $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. За теоремою Лагранжа для функції f на відрізку $[0;x]$, де $x>0$, знайдеться таке x_0, що $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(x_0)\geqslant 1$. Тоді $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\geqslant 1$. Аналогічно доводимо, що $f'(0)\leqslant -1$. Зауважимо, що, скориставшись ідеєю розв'язування цієї задачі, можна довести таке твердження: похідна диференційовної на $\mathbb{R}$ функції не може мати розривів першого роду. **12.28.** *Вказівка*. Розглянемо функцію $F(x)=a_0x+\dfrac{a_1x^2}{2}+\dfrac{a_2x^3}{4}+\ldots+\dfrac{a_nx^{n+1}}{n+1}$. Зауважимо, що $F(0) = F(1) = 0$. Тоді за теоремою Ролля існує число $x_0 \in (0;\ 1)$ таке, що $F'(x_0) = 0$. **12.29.** *Вказівка*. Розгляньте на відрізку $[0;2\pi]$ функцію $F(x)=\dfrac{a_n\sin nx}{n}+\dfrac{a_{n-1}\sin(n-1)x}{n-1}+\ldots+$ $+a_1\sin x$. **12.30.** *Вказівка*. Нехай $k^2<n<(k+1)^2$, $k\in\mathbb{N}$. Скористайтеся теоремою Лагранжа для функції $f(x)=\sqrt{x}$ на відрізку $[k^2;n]$. **12.31.** *Вказівка*. Зазначимо, що $x_n\in[0;1]$. Нехай $x_0\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ — корінь рівняння $x=\cos x$, тобто $x_0=\cos x_0$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Оскільки $|x_{n+1}-x_0|=|\cos x_n-\cos x_0|$, то, використовуючи теорему Лагранжа, отримаємо $|x_{n+1}-x_0|=$ $=|\sin c|\cdot|x_n-x_0|$, де $c\in(0;x_n)\subset(0;1)$. Тому нерівність $|x_{n+1}-x_0|\leqslant$

$\leqslant \sin 1 \cdot |x_n - x_0|$ має місце для всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси $|x_{n+1} - x_0| \leqslant \leqslant \sin 1 \cdot |x_n - x_0| \leqslant \sin^2 1 \cdot |x_{n-1} - x_0| \leqslant \ldots \leqslant \sin^n 1 \cdot |x_1 - x_0|$. Оскільки $\sin^n 1 \cdot |x_1 - x_0| \to 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. **12.32.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$ і скористайтеся для неї теоремою Лагранжа на відрізку $[-2; 2]$. **12.33.** *Вказівка.* Нехай $g(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $D(g) = [2; 3]$. Оскільки $g(2) = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1$, $g(3) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = -\dfrac{1}{2}$, то неперервна функція g набуває всіх значень від $-\dfrac{1}{2}$ до 1. Отже, для довільного $a \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$ знайдеться таке число $c \in [2; 3]$, що $g(c) = \dfrac{f(c) - f(1)}{c - 1} = a$. Якщо скористатися теоремою Лагранжа для функції f на відрізку $[1; c]$, то можна довести існування такого x_0, що $f'(x_0) = a$, де $a \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$. **12.34.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $h(x) = \dfrac{f(3) - f(x)}{3 - x}$, $D(h) = [1; 2]$. **12.35.** *Вказівка.* Розглянемо функцію $g(x) = (1 - x) f(x)$. Вона задовольняє умови теореми Ролля на відрізку $[0; 1]$. Тому існує таке $x_0 \in (0; 1)$, що $g'(x_0) = 0$. Звідси $(1 - x_0) f'(x_0) = f(x_0)$. Оскільки $f(x_0) > 0$, то і $f'(x_0) > 0$. Отже, $f'(x_0) > (1 - x_0) f'(x_0) = f(x_0)$.

13.1. 1) Зростає на $[-2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$; 2) зростає на $(-\infty; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[0; 1]$; 3) зростає на $[-1; 7]$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[7; +\infty)$; 4) зростає на $[-1; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[0; 1]$; 5) зростає на $\mathbb{R}$; 6) зростає на $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 2]$. **13.2.** 1) Зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[-3; 1]$; 3) зростає на $[-2; 0]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$ і $[0; 2]$; 4) зростає на $[-1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **13.3.** 1) Зростає на $[0; 1]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $[1; 2]$; 2) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 1]$; 3) зростає на $(-\infty; -3]$, $[-1; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; -1]$ і $[1; 3]$; 4) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$; 5) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$; 6) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[-1; +\infty)$, спадає на $[-3; -2)$ і $(-2; -1]$; 7) зростає на $[1; 3)$ і $(3; 5]$, спадає на $(-\infty; 1]$ і $[5; +\infty)$; 8) спадає на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ і $(3; +\infty)$. **13.4.** 1) Зростає на $[0; 2]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $[2; 3]$; 2) зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 3) спадає на $(-\infty; 5)$ і $(5; +\infty)$; 4) зростає на $(-\infty; -2]$ і $[10; +\infty)$, спадає на $[-2; 4)$ і $(4; 10]$; 5) зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$; 6) зростає на $(-\infty; -2)$ і $(-2; 0]$, спадає на $[0; 2)$ і $(2; +\infty)$. **13.5.** $(-\infty; x_1]$ і $[x_2; x_3]$. **13.7.** $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$. **13.12.** 1) Зростає на $\mathbb{R}$; 2) зростає на $\mathbb{R}$; 3) зростає на проміжках виду $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \frac{7\pi}{3}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.13.** 1) Спадає на $\mathbb{R}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{12}+\pi k; \frac{5\pi}{12}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi k; \frac{\pi}{12}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.14.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4]$; 2) зростає на $[0; 3]$, спадає на $[3; 6]$. **13.15.** Зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **13.16.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [2; 5)$. **13.17.** 1) $(0; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[-3; 0] \cup (2; +\infty)$. **13.18.** Так. **13.19.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.20.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \pi k\right)$ і $\left(\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.21.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[12; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **13.22.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; -6]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-4; 4]$. **13.23** 0. **13.24.** -1. **13.25.** $(1; 1)$. **13.26.** $(4; 4)$. **13.27.** $x > 1$. **13.28.** $x < 1$. **13.38.** $[12; 14]$. **13.39.** $\left[-\frac{14}{3}; -3\right]$. **13.40.** $b \leqslant -3-\sqrt{3}$ або $b \geqslant \sqrt{3}-1$. *Вказівка*. Маємо: $f'(x) = 2\cos 2x + 8(b+2)\sin x - (4b^2 + 16b + 6)$. Розв'яжемо таку нерівність $2(1 - 2\sin^2 x) + 8(b+2)\sin x - (4b^2 + 16b + 6) \leqslant 0$. Після очевидних перетворень отримуємо $\left(\sin x - \left(b+2+\sqrt{3}\right)\right)\cdot\left(\sin x - \left(b+2-\sqrt{3}\right)\right) \geqslant 0$. Тепер зрозуміло, що шукані значення b — розв'язки сукупності $\left[\begin{array}{l} b+2+\sqrt{3} \leqslant -1, \\ b+2-\sqrt{3} \geqslant 1. \end{array}\right.$ **13.41.** $a < -2-\sqrt{5}$ або $a > \sqrt{5}$.

13.42. $a \geqslant 1$. **13.43.** $a \geqslant 1$. **13.44.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 13.34. **13.45.** $\begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ \pi, \text{ якщо } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$ **13.46.** $\begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, \text{ якщо } x < -1, \\ \frac{\pi}{4}, \quad \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

13.47. $\frac{\pi}{100} \sin \frac{\pi}{101} > \frac{\pi}{101} \sin \frac{\pi}{100}$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. **13.49.** f — будь-яка стала функція. *Вказівка.* З умови задачі випливає нерівність $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leqslant |x - y|$, тобто $-|x - y| \leqslant$ $\leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant |x - y|$. Зафіксуємо значення y і покладемо $x = y + \Delta y$. Маємо $-|\Delta y| \leqslant \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \leqslant |\Delta y|$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta y \to 0} |\Delta y| = 0$, то існує границя $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} = 0$, тобто $f'(y) = 0$ для всіх $y \in \mathbb{R}$. Звідси f — стала функція. За допомогою перевірки переконуємося, що кожна функція, яка є константою, задовольняє умову задачі. **13.50.** $f(x) = kx$, де k — будь-яка стала. *Вказівка.* Розглянемо ліву і праву частини рівності $f(x) + f(y) = f(x + y)$ як функції змінної x (зафіксуємо значення y). Обчисливши похідні цих функцій, отримаємо, що для всіх x і y виконується рівність $f'(x) = f'(x + y)$. Поклавши в останній рівності $y = -x$, маємо, що $f'(x) = f'(0)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тобто $f'(x)$ — функція-константа. Оскільки $f'(x) = k$ для всіх x, то неважко показати, що $f(x) = kx + b$, де k і b — деякі сталі. Справді, якщо розглянути допоміжну функцію $g(x) = f(x) - kx$, то отримаємо, що $g'(x) = (f(x) - kx)' =$ $= f'(x) - k = 0$. Звідси $g(x) = b$ для всіх x. За допомогою перевірки переконуємося, що серед функцій виду $f(x) = kx + b$ умову задачі задовольняють усі функції виду $f(x) = kx$. **13.51.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cos \frac{1}{x}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \qquad\qquad\quad \text{ якщо } x = 0, \end{cases}$ і точку $x_0 = 0$. Доведіть, що $f'(0) = 1$. Припустимо, що існує такий окіл точки $x_0 = 0$, у якому функція f зростає. Тому $f'(x) \geqslant 0$ для всіх x з цього околу. Далі покажіть, що в точках виду $x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, функція $y = f'(x)$ набуває від'ємних значень.

14.7. Жодної. **14.8.** 1) $x_{min} = 0$; 2) $x_{min} = 3$; 3) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 4) $x_{min} = -2$, $x_{min} = 2$, $x_{max} = 0$; 5) $x_{min} = 5$, $x_{max} = -1$; 6) $x_{min} = 0$, $x_{max} = -1$, $x_{max} = 1$. **14.9.** 1) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -1$; 2) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 3) $x_{max} = 2$; 4) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -7$; 5) $x_{min} = \dfrac{3}{2}$; 6) $x_{min} = 0$, $x_{max} = -\dfrac{1}{4}$, $x_{max} = 1$. **14.10.** 1) Зростає на $[6; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 6]$, $x_{min} = 6$; 2) зростає на $\left(-\infty; \dfrac{8}{5}\right]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $\left[\dfrac{8}{5}; 2\right]$, $x_{min} = 2$, $x_{max} = \dfrac{8}{5}$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$. **14.11.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 2) зростає на $(-\infty; -4]$ і $[0; +\infty)$, спадає на $[-4; 0]$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = -4$. **14.14.** 1) Зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$, $x_{min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[1; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{min} = 3$, $x_{max} = 1$; 3) зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$; 4) зростає на $\left[-\sqrt{6}; 0\right)$ і $\left[\sqrt{6}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\sqrt{6}\right]$ і $\left(0; \sqrt{6}\right]$, $x_{min} = -\sqrt{6}$, $x_{min} = \sqrt{6}$; 5) зростає на $(0; 2]$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, $x_{max} = 2$; 6) зростає на $(3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 3)$, точок екстремуму немає; 7) зростає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; 0]$, спадає на $[0; 4)$ і $(4; +\infty)$, $x_{max} = 0$; 8) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$. **14.15.** 1) Зростає на $(-\infty; -6]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[-6; -2)$ і $(-2; 2]$, $x_{max} = -6$, $x_{min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 3$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 4) зростає на $(-\infty; -1)$, спадає на $(-1; +\infty)$, точок екстремуму немає; 5) зростає на $[0; 4)$ і $(4; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; 0]$, $x_{min} = 0$; 6) зростає на $\left[\dfrac{1}{16}; +\infty\right)$, спадає на $\left[0; \dfrac{1}{16}\right]$, $x_{min} = \dfrac{1}{16}$. **14.16.** 1) Зростає на $\left[0; \dfrac{4}{5}\right]$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $\left[\dfrac{4}{5}; 1\right]$, $x_{max} = \dfrac{4}{5}$, $x_{min} = 0$; 2) зростає на $\left[0; \dfrac{1}{3}\right]$, спадає на $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$, $x_{max} = \dfrac{1}{3}$; 3) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 4) зростає на $(-\infty; 2{,}5]$, спадає на $[2{,}5; 3)$, $x_{max} = 2{,}5$. **14.17.** 1) Зростає на $\left[-2; -\dfrac{8}{5}\right]$ і $[0; +\infty)$, спадає на $\left[-\dfrac{8}{5}; 0\right]$, $x_{max} = -\dfrac{8}{5}$,

$x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[0; \frac{2}{5}\right]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{2}{5}; 2\right]$, $x_{\max} = \frac{2}{5}$, $x_{\min} = 2$; 3) зростає на $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$, спадає на $\left(1; \frac{7}{3}\right]$, $x_{\min} = \frac{7}{3}$. **14.20.** Може. *Вказівка.* Див. рисунок. **14.21.** Ні. *Вказівка.* Див. рисунок. **14.22.** Так. *Вказівка.* Див. рисунок.

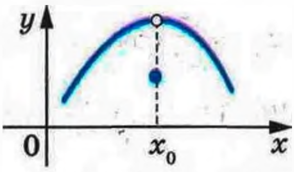


Рис. до задачі 14.20

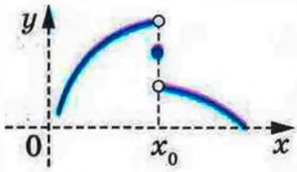


Рис. до задачі 14.21

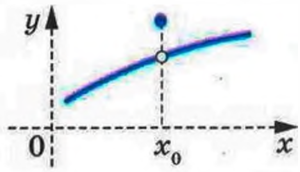


Рис. до задачі 14.22

14.24. *Вказівка.* Нехай x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ — сусідні корені многочлена. Далі, скориставшись другою теоремою Вейєрштрасса для відрізка $[x_1; x_2]$, доведіть, що многочлен має точку екстремуму на інтервалі $(x_1; x_2)$. **14.25.** *Вказівка.* Нехай x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ — точки мінімуму функції f. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ функція f досягає найбільшого значення в точці, відмінній від x_1, x_2. **14.26.** 1) Спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **14.27.** 1) Зростає на проміжках виду $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **14.28.** 1) $x_{\min} = -\frac{1}{3}$, $x_{\max} = \frac{1}{5}$;

2) $x_{min} = \frac{2}{5}$, $x_{max} = 0$. **14.29.** 1) $x_{min} = -3$, $x_{max} = 0$; 2) $x_{min} = -\frac{6}{5}$, $x_{max} = -2$. **14.30.** –3; 3. **14.31.** –1; 1. **14.32.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = x$ на множині $M = [0; 1]$. **14.33.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **14.34.** 1) Ні; 2) так. Якщо $D(f) = \mathbb{R}$, то $x_{min} = x_0$. **14.35.** 1) $x_{min} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $x_{max} = -\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_{max} = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $x_{min} = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_{max} = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $x_{min} = \pi k$, $x_{max} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **14.36.** 1) $x_{min} = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $x_{max} = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $x_{min} = \pi + 2\pi k$, $x_{max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) точок екстремуму немає. **14.37.** $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$. **14.38.** $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. **14.39.** 1. **14.40.** 1. **14.41.** 1. **14.42.** 2. **14.43.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. *Вказівка.* Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 3px^2 + p$. Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 6px = 3x(x - 2p)$. Звідси $x = 0$ і $x = 2p$ — критичні точки. Якщо $p = 0$, то функція f має єдиний нуль. Якщо $p \neq 0$, то функція f має дві точки екстремуму: $x = 0$ і $x = 2p$. Одна з цих точок є точкою максимуму, друга — точкою мінімуму. Тоді достатньо вимагати, щоб $f(0) f(2p) < 0$. **14.44.** $a \leqslant \frac{11}{8}$. **14.45.** $a \leqslant -1$, або $a = -\frac{1}{2}$, або $a \geqslant \frac{1}{2}$. *Вказівка.* Маємо: $f'(x) = (1-a) + (1-2a)\cos\frac{x}{3} + \cos\frac{2x}{3}$, $f'(x) = 2\left(\cos\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{3} - a\right)$. При будь-якому значенні параметра a критичними точками функції f на проміжку $(\pi; 5\pi)$ є 2π і 4π. При $a \neq -\frac{1}{2}$ ці точки є точками екстремуму. **14.46.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$ Доведіть, що $x_0 = 0$ є точкою мінімуму функції f. Далі розгляньте значення функції $y = f'(x)$ у точках виду $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, $k \geqslant 1$, і в точках виду $x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$, $k \leqslant -1$, $k \in \mathbb{Z}$. **14.47.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функ-

цію $f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ і точку $x_0=0$. **14.48.** Ні. *Вказівка.* Нехай $x_0\in(-1;1)$ — точка строгого максимуму. Тоді кожній такій точці $x_0\in(-1;1)$ поставимо у відповідність додатне число δ таке, що $f(x_0)>f(x)$ для всіх x з проколотого δ-околу точки x_0. Нехай x_0' і x_0'' — дві точки з інтервалу $(-1;1)$ такі, що відповідні їм числа $\delta>\frac{1}{2}$. Тоді відстань між такими точками x_0' і x_0'' не може бути меншою від $\frac{1}{2}$ (інакше кожна з цих точок попаде до відповідного проколотого δ-околу іншої точки і одночасно будуть виконуватися нерівності $f(x_0')>f(x_0'')$ і $f(x_0'')>f(x_0')$). Це означає, що на інтервалі $(-1;1)$ існує не більше чотирьох точок, яким відповідають числа $\delta>\frac{1}{2}$. Аналогічно на інтервалі $(-1;1)$ існує не більше восьми точок, яким відповідають числа $\frac{1}{2}\geqslant\delta>\frac{1}{4}$. Узагалі, на інтервалі $(-1;1)$ існує не більше 2^{n+1} точок, яким відповідають числа $\frac{1}{2^{n-1}}\geqslant\delta>\frac{1}{2^n}$. Це означає, що множину всіх точок строгого максимуму функції f можна подати як зліченне об'єднання скінченних множин. Тому множина точок строгого максимуму зліченна.

15.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) 30; 4; 4) −3; −30; 5) 60; −75; 6) −4; −8. **15.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; −2; 3) 48; −6; 4) 0; −28. **15.5.** 1) 10; 6; 2) 5; $\sqrt{13}$; 3) 100; 0; 4) −2; −2,5. **15.6.** 1) 5; 3; 2) 2; −2; 3) 81; 0; 4) 10; 6. **15.7.** 1) $\sqrt{2}$; −1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$. **15.8.** 1) 2; −1; 2) 2; −2. **15.9.** 8 = 6 + 2. **15.10.** 12 = 8 + 4. **15.11.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 2) −3; −4; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; −2. **15.12.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 2) 4; −2. **15.13.** 180 = 40 + 80 + 60. **15.14.** 18 = 8 + 3 + 7. **15.15.** 30 см^2. **15.16.** 8 см і $2\sqrt{3}$ см. **15.17.** $20\sqrt{2}$ см і $10\sqrt{2}$ см. **15.18.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ см, $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ см. **15.19.** 32. **15.20.** $12\sqrt{6}$. **15.21.** 16 см. **15.23.** $2a$. **15.24.** $\frac{\pi}{3}$. **15.25.** $\frac{\pi}{3}$. **15.26.** $1{,}5R$. **15.27.** $\left(\frac{16}{9};\frac{4}{3}\right)$. **15.28.** $\left(\frac{7}{3};-\frac{26}{9}\right)$.

15.29. Шукана точка знаходиться на відстані 25 км від пункту C. **15.30.** 60°. **15.31.** $\frac{3}{25}$; -38. *Вказівка*. Дослідіть функцію на відрізках [0; 1] і [1; 2]. **15.32.** 105; $-\frac{11}{27}$. **15.33.** 4. **15.34.** -3. **15.35.** $\frac{1-\sqrt{28}}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1+\sqrt{28}}{3}$. *Вказівка*. Якщо $a = 0$, то $f(x) = -x^4$. Отже, $a = 0$ задовольняє умову задачі. Розглянемо випадок $a \neq 0$. Маємо: $f'(x) = -4x^3 + \frac{2ax^2}{3} + \frac{2a^2x}{3} = -4x\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)$. Дослідивши знак похідної (див. рисунок), отримуємо, що $x = -\frac{a}{3}$ і $x = \frac{a}{2}$ — точки максимуму функції f, а $x = 0$ — точка мінімуму. Звідси отримуємо, що $f(0) < f\left(-\frac{a}{3}\right)$ $f(0) < f\left(\frac{a}{2}\right)$. Тому під час дослідження даної функції на найменше значення на вказаному відрізку немає потреби розглядати точки $x = -\frac{a}{3}$ і $x = \frac{a}{2}$, достатньо лише вимагати, щоб $f(-1) \leqslant f(0)$. Маємо: $-1 - \frac{2}{9}a + \frac{a^2}{3} \leqslant 0$. **15.36.** $a \geqslant \frac{3}{4}$.

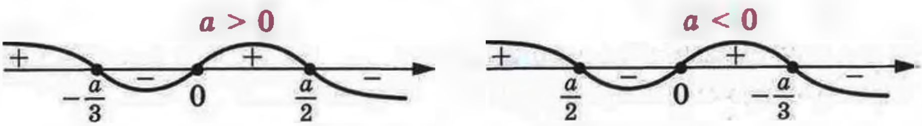


Рис. до задачі 15.35

16.1. 6) $80(2x-1)^3$; 7) $-9\sin 3x$; 8) $-2\cos 2x$; 10) $2\cos x - x\sin x$. **16.2.** 5) $54(1-3x)$; 6) $-4\cos 2x$; 7) $2\cos 2x$; 8) $-2\sin x - x\cos x$. **16.6.** 1) $-26{,}5$; 2) 53. **16.7.** 14 м/с^2. **16.8.** 10 м/с^2, 5 м/с^2. **16.9.** 90 Н. **16.10.** 1) Опукла вгору на $(-\infty; 0]$, опукла вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $[1; 3]$, опукла вниз на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, $x = 1$ і $x = 3$ — точки перегину. **16.11.** 1) Опукла вгору на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, опукла вниз на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $x = \frac{2}{3}$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $[1; 2]$, опукла вниз на $(-\infty; 1]$ і $[2; +\infty)$, $x = 1$ і $x = 2$ — точки перегину. **16.12.** 0. **16.13.** 0. **16.16.** 1) Опукла вгору на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$ і $\left[0; \sqrt{3}\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ і $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на $(-\infty; -2]$, опукла вниз на $[-2; 1)$ і $(1; +\infty)$, $x = -2$ — точка перегину. **16.17.** 1) Опукла вгору на $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, опукла вниз на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ і $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на $(-\infty; -1)$ і $(-1; 2]$, опукла вниз на $[2; +\infty)$, $x = 2$ — точка перегину. **16.18.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **16.19.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **16.22.** *а*) Опукла вгору на кожному з проміжків $(-\infty; -2]$ і $[0; 2]$, опукла вниз на кожному з проміжків $[-2; 0]$ і $[2; +\infty)$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ — точки перегину; *б*) опукла вгору на $(-\infty; 0]$, опукла вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегину. **16.23.** *б*) Опукла вгору на $[-1; 1]$, опукла вниз на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, $x = -1$, $x = 1$ — точки перегину. **16.24.** 1) Так. *Вказівка.* Оскільки $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (-\infty; -1)$, то на проміжку $(-\infty; -1)$ функція f опукла вниз. Тому графік функції f на проміжку $(-\infty; -1)$ розташований не нижче від горизонтальної дотичної, проведеної в точці з абсцисою $x_0 = -1{,}5$; 2) так; 3) ні. **16.26.** $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **16.27.** $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. **16.28.** *Вказівка.* Нехай $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Функції f і g парні; тому нерівність будемо доводити лише для $x \geqslant 0$. Оскільки $f(0) = g(0)$, то для доведення нерівності покажемо, що $f'(x) \leqslant g'(x)$ для всіх $x \geqslant 0$, тобто доведемо нерівність $-\sin x \leqslant -x + \frac{x^3}{6}$ для всіх $x \geqslant 0$. Для доведення останньої нерівності знову скористаємося тими самими міркуваннями. Оскільки $f'(0) = g'(0)$, треба довести нерівність $f''(x) \leqslant g''(x)$ для всіх $x \geqslant 0$.

16.30. *Вказівка.* Припустимо, що рівняння $f(x)=kx+b$ має принаймні три корені. Тоді за ключовою задачею пункту 12 рівняння $f'(x)=k$ має принаймні два корені. Але функція $y=f'(x)$ є зростаючою (спадною). Тому рівняння $f'(x)=k$ має не більше одного кореня. **16.31.** 0; 1. *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 16.30. **16.32.** −1; 0. **16.33.** $107\cdot 2^{64}-2$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=x^{60}+x^{59}+\ldots+x+1=\frac{x^{61}-1}{x-1}$. Тоді $S=f''(2)$. **16.34.** $6\cdot 2^n-n^2-4n-6$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=1+x+$ $+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Тоді $S=2^{n-1}(xf'(x))'$ при $x=\frac{1}{2}$. **16.35.** *Вказівка.* Якщо припустити періодичність даної функції з періодом $T>0$, то функція $y'=x\cos x+\sin x$ також є періодичною з періодом T. З аналогічних міркувань з періодичності функції $y=$ $=x\cos x+\sin x$ випливає періодичність (з тим самим періодом T) функції $y'=-x\sin x+2\cos x$. Якщо додати дві періодичні з періодом T функції $y=x\sin x$ і $y=-x\sin x+2\cos x$, то отримаємо періодичну з періодом T функцію $y=2\cos x$. Звідси T є числом виду $2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$. Залишилося переконатися в тому, що жодне з чисел виду $2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$, не є періодом функції $y=x\sin x$. **16.37.** *Вказівка.* Зафіксуємо змінні y і z. Розглянемо функцію $f(x)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $D(f)=[1;2]$. Оскільки $f''(x)=6x>0$ на $[1;2]$, то функція f є опуклою вниз. Тому найбільше значення функції f дорівнює $f(0)$ або $f(1)$. Аналогічні міркування можна провести і для змінних y і z. Тепер очевидно, що коли значення хоча б однієї зі змінних x, y або z відмінне від чисел 1 і 2, то значення виразу $x^3+y^3+z^3-3xyz$ можна збільшити. Оскільки змінні входять до даної нерівності симетричним чином, то залишилося перевірити цю нерівність для таких наборів (x, y, z): $(1;1;1)$, $(2;1;1)$, $(2;2;1)$ і $(2;2;2)$.

17.1. Рисунок до задачі 17.1. **17.2.** Рисунок до задачі 17.2. **17.3.** Рисунок до задачі 17.3. **17.4.** Рисунок до задачі 17.4. **17.5.** Якщо $a<-1$ або $a>0$, то 1 корінь; якщо $a=-1$ або $a=0$, то 2 корені; якщо $-1<<a<0$, то 3 корені. **17.6.** Якщо $a>4$, то коренів немає; якщо $a=4$ або $a<0$, то 2 корені; якщо $a=0$, то 3 корені; якщо $0<a<4$, то 4 корені. **17.7.** Рисунок до задачі 17.7. **17.8.** Рисунок до задачі 17.8. **17.9.** Рисунок до задачі 17.9.

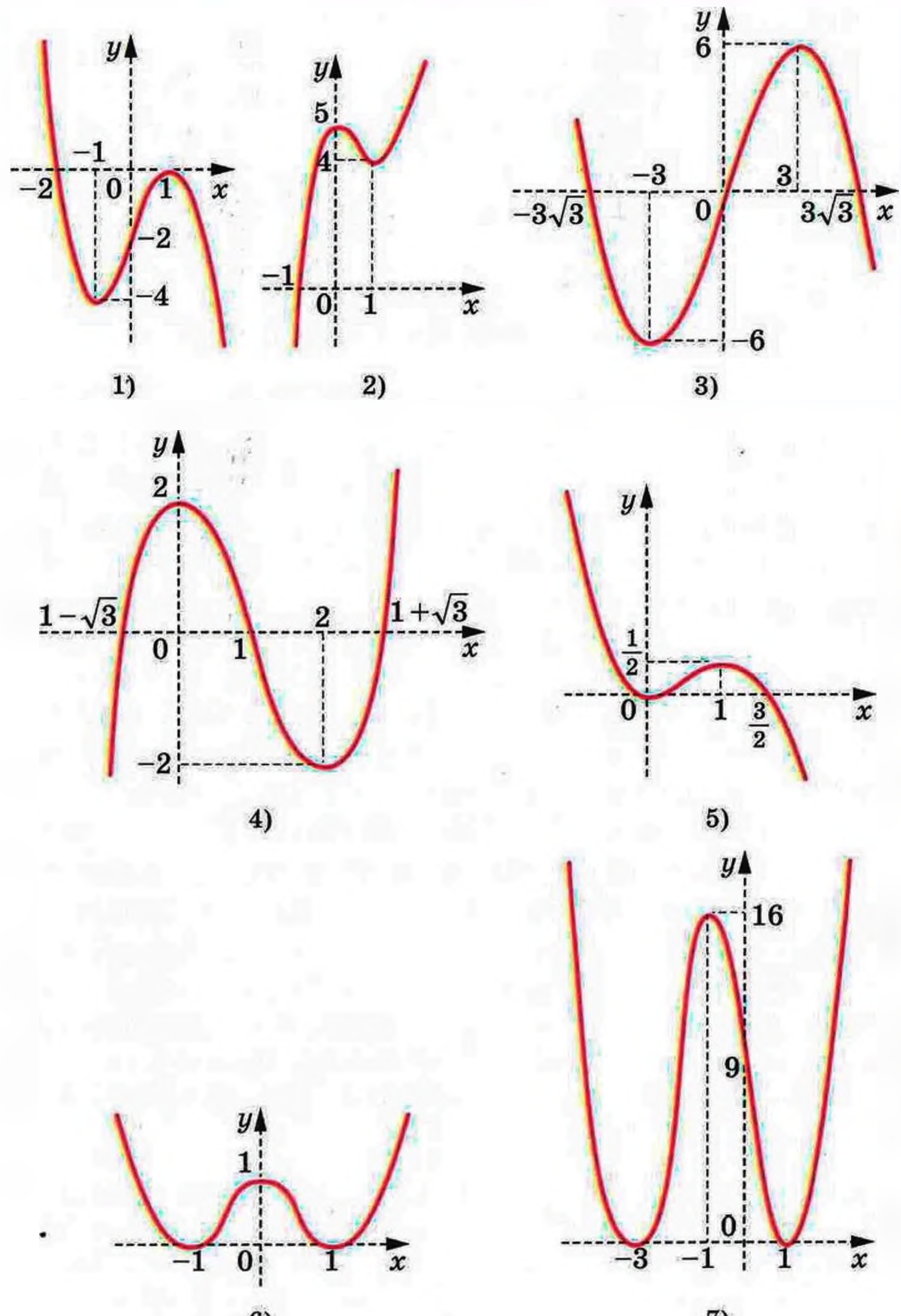


Рис. до задачі 17.1

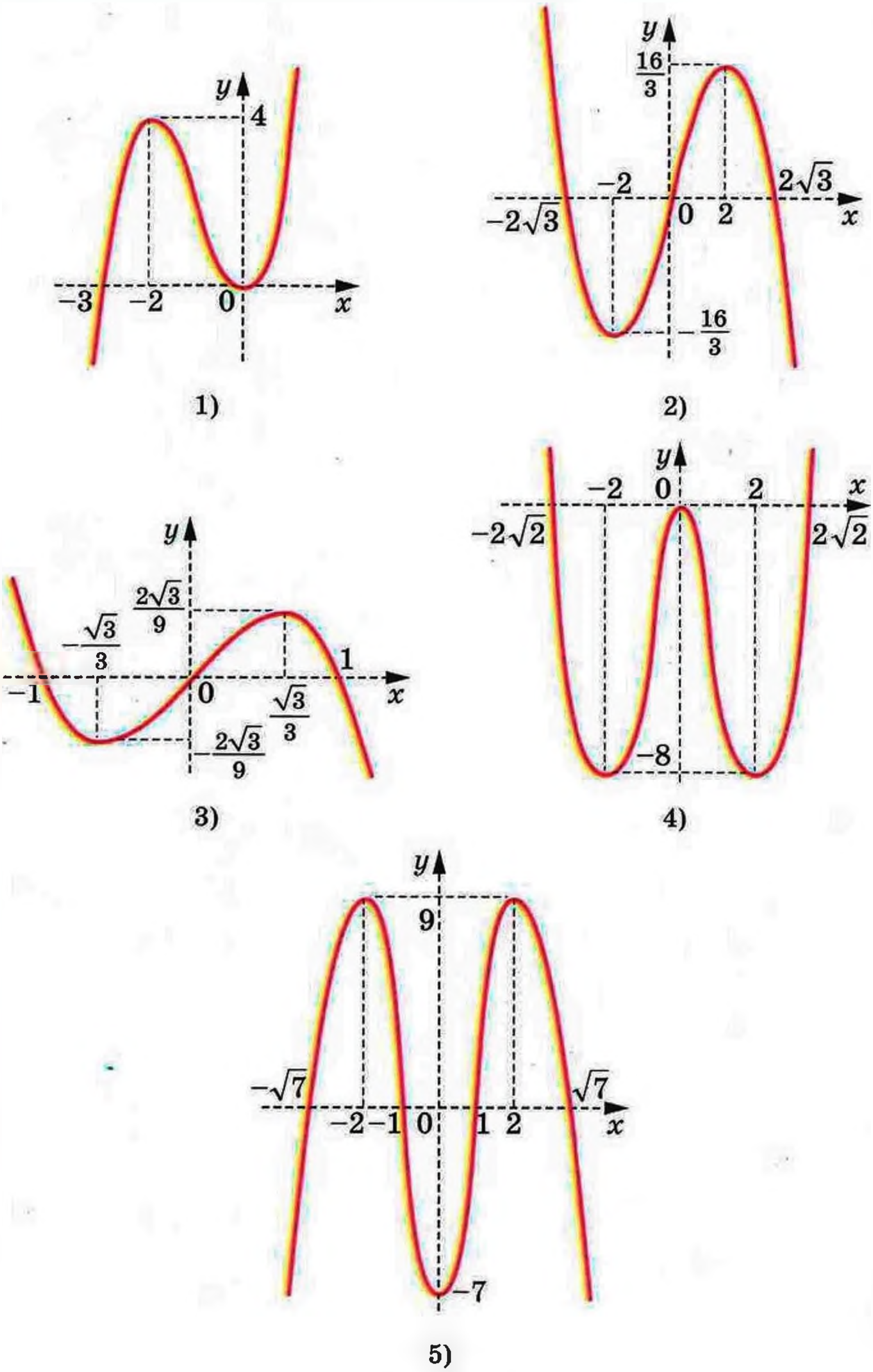


Рис. до задачі 17.2

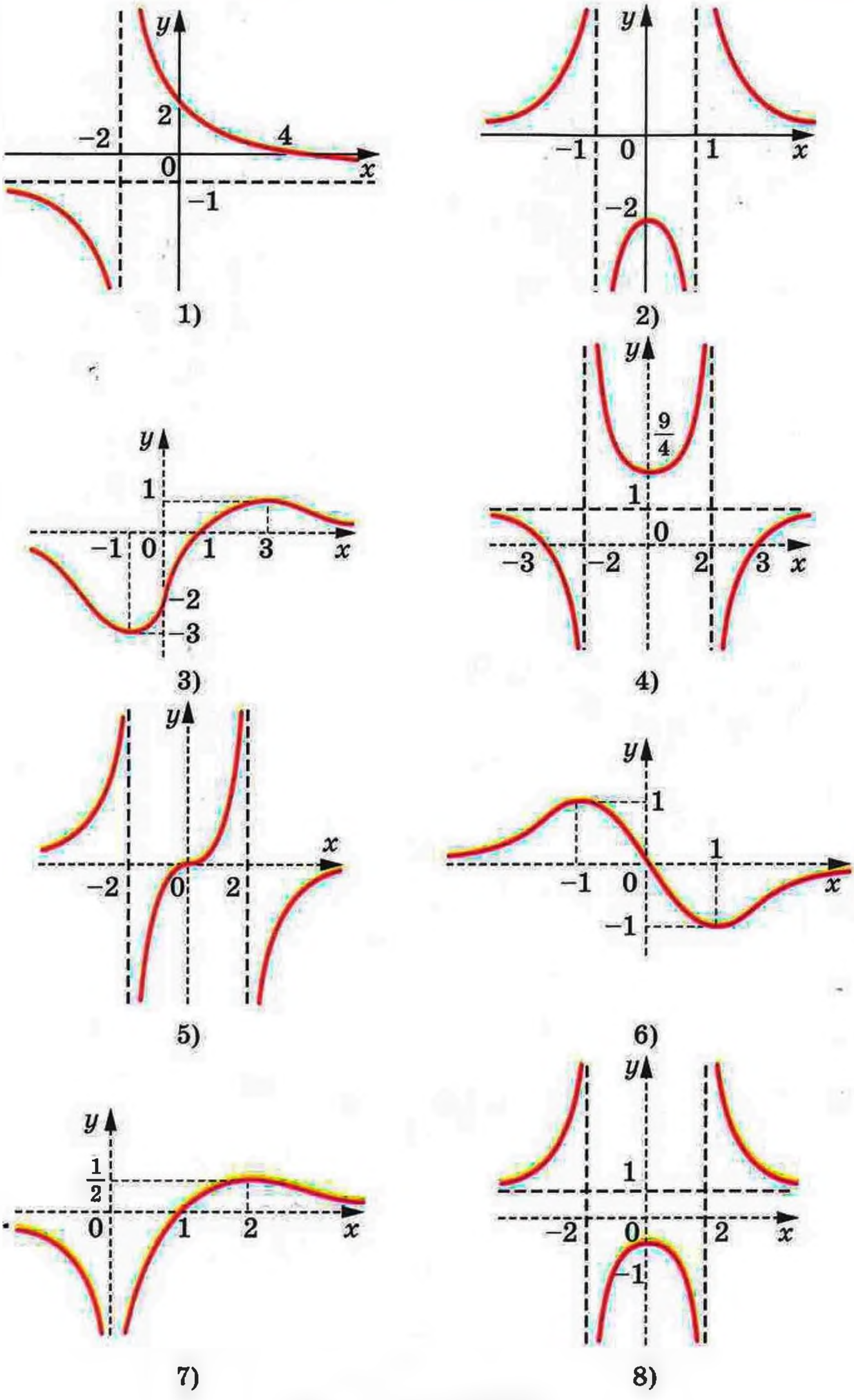


Рис. до задачі 17.3

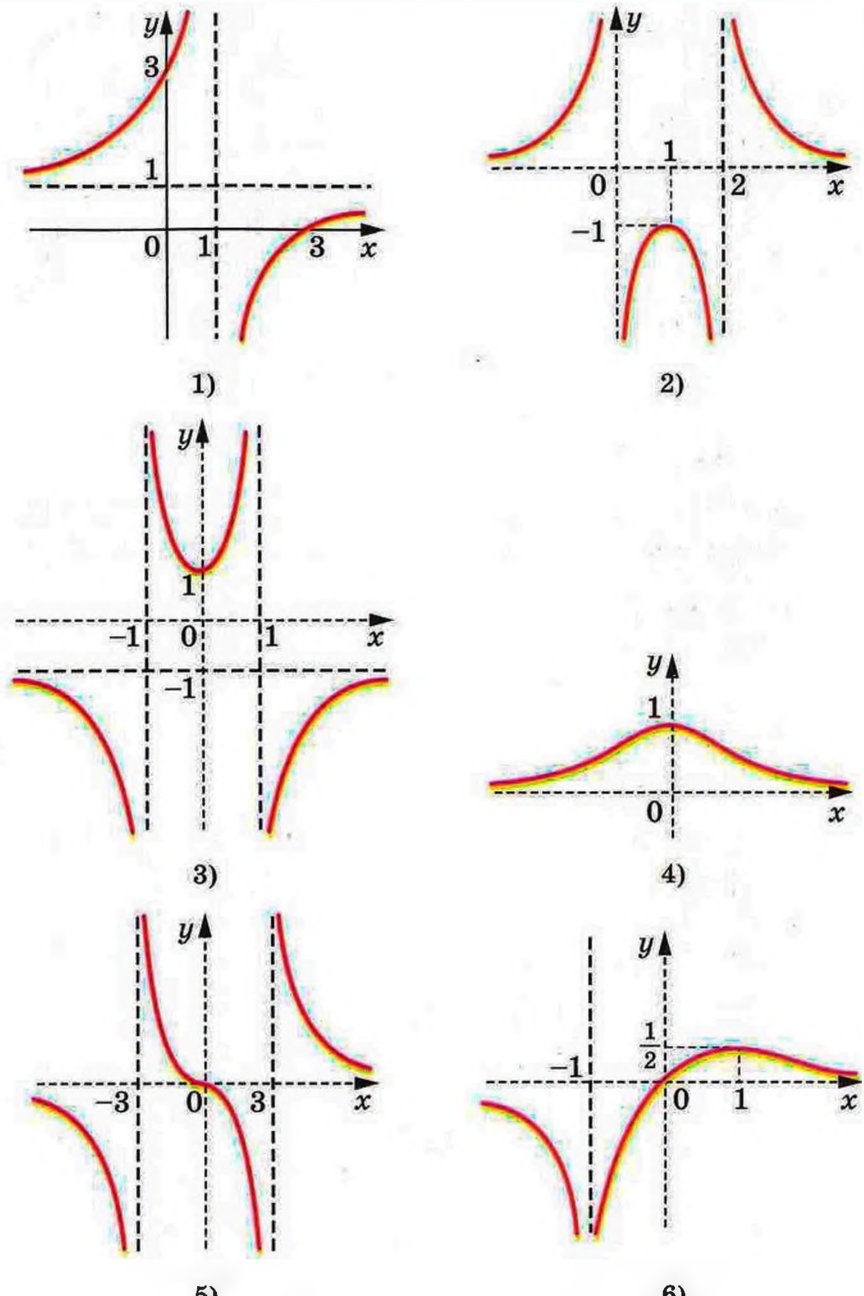


Рис. до задачі 17.4

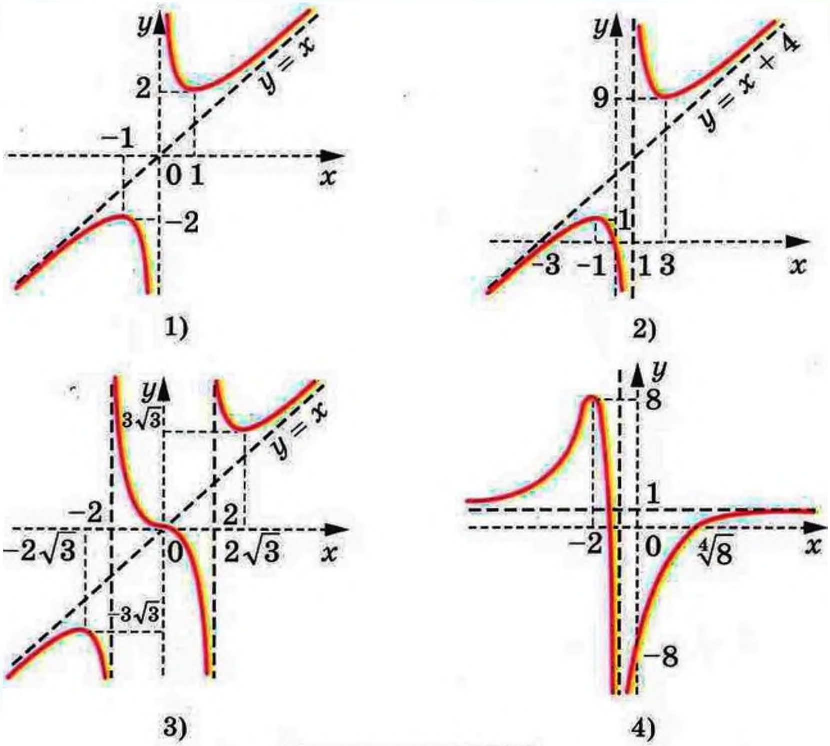


Рис. до задачі 17.7

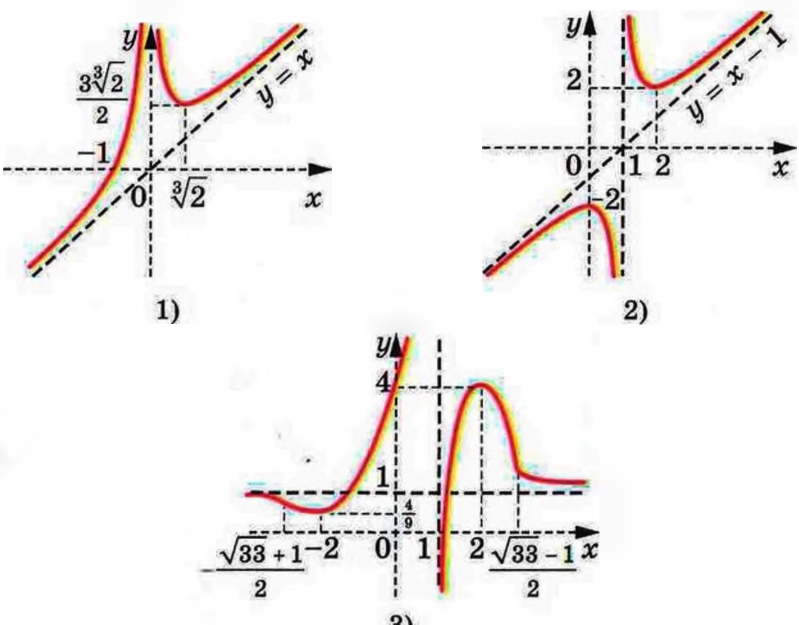


Рис. до задачі 17.8

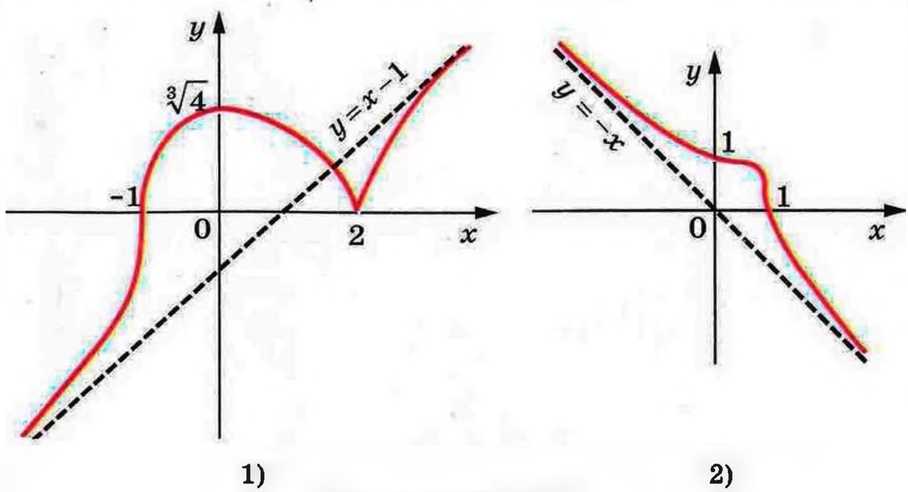


Рис. до задачі 17.9

17.10. Рисунок до задачі 17.10. **17.11.** Рисунок до задачі 17.11.

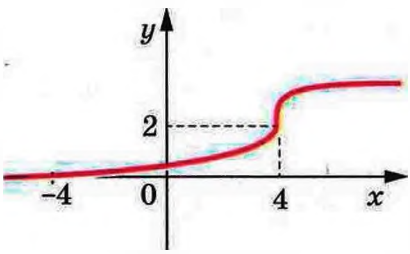


Рис. до задачі 17.10

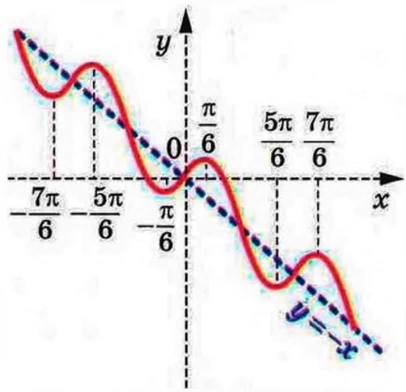


Рис. до задачі 17.11 (1)

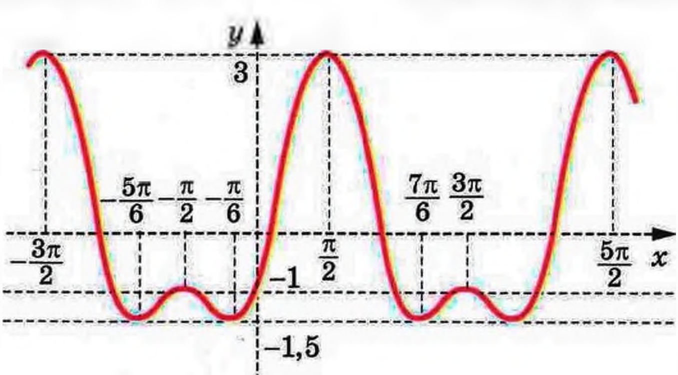


Рис. до задачі 17.11 (2)

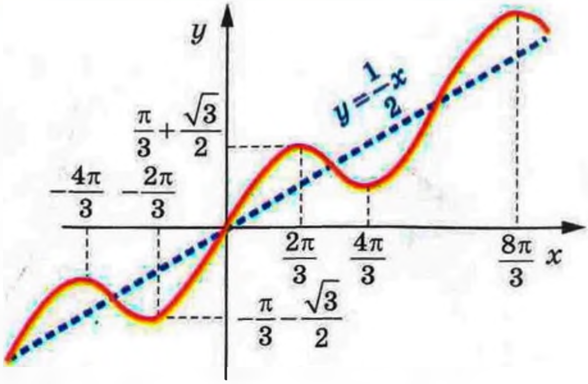


Рис. до задачі 17.12 (1)

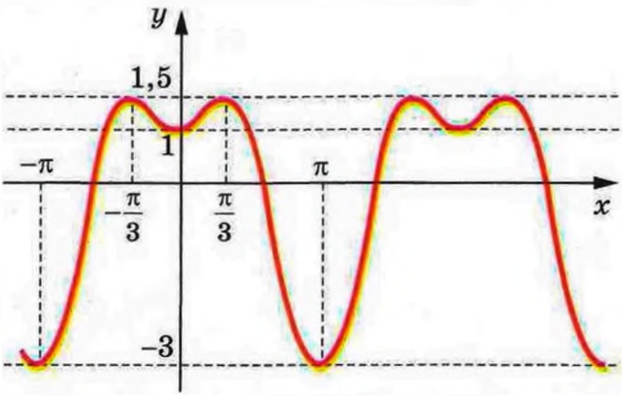


Рис. до задачі 17.12 (2)

17.12. Рисунок до задачі 17.12. **17.13.** $a<-3$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне такому: $-\frac{x^3+2}{x}=a$. Побудуйте графік функції $f(x)=-\frac{x^3+2}{x}$. **17.14.** $a>48$.

18.10. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}}-a^{2\sqrt[3]{3}}$. **18.11.** 1) $a^{\sqrt{6}}+1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **18.12.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **18.13.** 3) $(-4;+\infty)$; 4) $[1;+\infty)$. **18.14.** 36. **18.15.** $[-2;4]$. **18.17.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$. **18.18.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **18.20.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}>\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$. *Вказівка.* Числа $7+4\sqrt{3}$ і $7-4\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **18.21.** 1) Коренів немає; 2) 3 корені; 3) безліч коренів; 4) 2 корені. **18.22.** 1) 1 корінь; 2) безліч коренів; 3) 2 корені. **18.23.** 7) Див. рисунок. **18.25.** *Вказівка.* Знайдіть область визначення даної функції. **18.27.** 1) 4;

$\frac{1}{4}$; 2) 1; −1. **18.28.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **18.29.** 1) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[-1; 1]$. **18.30.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[-1; 1]$; 3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. **18.33.** 1) 0. *Вказівка.* $2^{\cos x} \leqslant 2$, $x^2 + 2 \geqslant 2$; 2) 0. **18.34.** 1) 0; 2) 0. **18.35.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0; +\infty)$. **18.36.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $\{0\}$. **18.37.** Непарна. **18.38.** Непарна. **18.39.** Парна. **18.40.** Непарна. **18.41.** 1) Неперервна на множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $x_0 = 0$ — точка розриву другого роду; 2) неперервна на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, кожна точка виду $x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ — точка розриву першого роду (усувний розрив). **18.42.** 1) Неперервна на множині $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $x_0 = 1$ — точка розриву першого роду (усувний розрив); 2) неперервна на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, кожна точка виду $x_0 = \pi k$ — точка розриву другого роду. **18.43.** $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. *Вказівка.* З'ясуйте, при яких значеннях параметра a рівняння $\frac{t-1}{t-4} = a$ має хоча б один додатний корінь. **18.44.** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **18.45.** $a = 1$. *Вказівка.* Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ має виконуватися рівність $f(x + a) = f(-x + a)$. **18.46.** $a = 1{,}5$. **18.47.** $|a| > \frac{7\sqrt{3}}{12}$. **18.48.** $a < -\frac{\sqrt{129}+15}{2}$ або $a > \frac{\sqrt{129}-15}{2}$. **18.49.** $x = y = z = 1$. *Вказівка.* Нехай $x > 1$. Тоді з першого рівняння системи знаходимо, що $z > 1$, і потім з третього рівняння системи отримуємо, що $y > 1$. Тепер маємо таке: $z = x^y > x^1 = y^z > y^1 = z^x > z^1$. Випадок $0 < x < 1$ розглядається аналогічно. **18.50.** $x = y = z = 1$. **18.51.** *Вказівка.* $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - a^0}{\Delta x} = a^{x_0} f'(0)$. **18.52.** Так. *Вказівка.* Має місце рівність $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Якщо $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — число раціональне, то

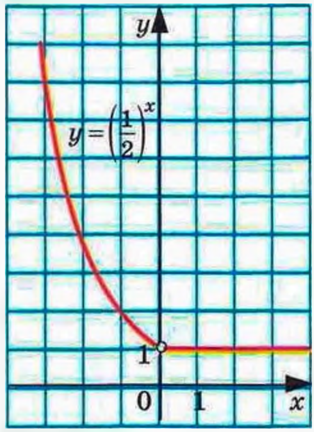


Рис. до задачі 18.23 (7)

$a=b=\sqrt{2}$. Якщо $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — число ірраціональне, то $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$. **18.53.** 1) 1. *Вказівка.* Якщо підставити $x=y=0$, то отримаємо: $f(0)=0$ або $f(0)=1$. Випадок $f(0)=0$ неможливий. Справді, якщо у рівність $f(x+y)=f(x)f(y)$ підставити $y=0$ і $x=1$, то отримаємо таке: $f(1)=f(1)f(0)=0$; 2) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Підставте $x=-y=1$; 3) 9. *Вказівка.* Підставте $x=y=1$; 4) 3^{20}. *Вказівка.* Послідовно підставляючи $x=y$, $x=2y$, $x=3y$, ..., доведіть, що $f(nx)=f^n(x)$; 5) $\sqrt[4]{3}$. *Вказівка.* Підставляючи $x=y=\frac{t}{2}$, отримаємо, що $f(t)=$ $=f^2\left(\frac{t}{2}\right)\geqslant 0$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Далі скористайтеся рівністю $f(x)=f^n\left(\frac{x}{n}\right)$ при $n=4$. **18.54.** *Вказівка.* Скориставшись рівностями $f(nx)=f^n(x)$ і $f\left(\frac{x}{m}\right)=(f(x))^{\frac{1}{m}}$, де $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$, доведіть, що $f(rx)=(f(x))^r$, де $r\in\mathbb{Q}$. При $x=1$ остання рівність набуває вигляду $f(r)=3^r$ для всіх $r\in\mathbb{Q}$. Далі скористайтеся означенням степеня 3^x для $x\in\mathbb{R}$ і неперервністю функції f.

19.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **19.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **19.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **19.6.** 1) 1; 2) −1; 2. **19.7.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) −2; 6) $\frac{1}{10}$. **19.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **19.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **19.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **19.11.** 1) −1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) −1; 2; 6) 1. **19.12.** 1) −1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) −1; 5) 0; 6) 2. **19.13.** 1) 2; 2) −1; 1; 3) 2. **19.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **19.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; −3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **19.16.** 1) 1; 2) 3; 3) πk, $k\in\mathbb{Z}$. **19.17.** 1) 0; 1; 2) 0; −1; 3) −1; 4) 0. **19.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **19.19.** 2. **19.20.** 0. **19.21.** −2; 2. *Вказівка.* Числа $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **19.22.** −2; 2. **19.23.** 1) −1; 0; 1. *Вказівка.* Нехай

$2^x+\frac{1}{2^x}=t$. Тоді $4^x+\frac{1}{4^x}=\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^2-2\cdot 2^x\cdot\frac{1}{2^x}=t^2-2$; 2) -1; 0; 1. **19.24.** $(-\infty; 2] \cup \{5\}$. **19.25.** $[-2; 3]$. **19.26.** $(1; 3) \cup (3; +\infty)$. **19.27.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **19.28.** 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 1. **19.29.** $(-\infty; 0] \cup \{1\}$. **19.30.** $(-\infty; 0)\cup\{1, \sqrt{3}\}$. **19.31.** 1; 3. **19.32.** 1; 2. **19.33.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Якщо $\operatorname{tg} x\leqslant 0$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $\operatorname{tg} x>0$, то $4^{\operatorname{tg} x}+4^{\operatorname{ctg} x}\geqslant 2\sqrt{4^{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}}\geqslant 2\sqrt{4^2}$. **19.34.** $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **19.35.** $a=-1$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що коли це рівняння має корінь x_0, то воно має корінь $-x_0$. **19.36.** $a=1$. **19.37.** $a=-1$. **19.38.** $a=-2$. **19.39.** $[0; 9] \cup \{-9\}$. *Вказівка.* Нескладно встановити, що $x=0$ — єдиний корінь першого рівняння. Підставимо його до другого рівняння. Маємо: $|a-9|\cdot 3^{-2}+a\cdot 9^{-1}=1$; $|a-9|=9-a$. Звідси шукані значення параметра слід шукати серед розв'язків нерівності $a\leqslant 9$. **19.40.** $[0; 4] \cup \{-4\}$. **19.41.** $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right)\cup[4; +\infty)$. *Вказівка.* Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $(p-4)y^2+(p+1)y+2p-1=0$ не має додатних коренів. **19.42.** $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.4. 1) 5; 2) 3; 3) 4. **20.5.** 1) -5; 2) 7. **20.6.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$. **20.7.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 4]$. **20.8.** 1) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$; 5) $(0; 4]$; 6) $[-1; 2]$. **20.9.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]\cup\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$; 4) $(-1; +\infty)$. **20.10.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$; 5) $(-\infty; 0]$; 6) $(-\infty; 1)$. **20.11.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$. **20.12.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[0; 1]$; 4) $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $[1; +\infty)$. **20.13.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup \cup (0; +\infty)$; 4) $[0; 2]$. **20.14.** 1) $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **20.15.** 1) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; 5)$. **20.16.** 1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **20.17.** 1) $(0; 1)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. **20.18.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; 4) $\{0\}$. **20.19.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **20.20.** $[0; 1]$. **20.21.** $[0; 4]$. **20.22.** 1) $(0; 1)$; 2) $(-\infty; -1]\cup(0; +\infty)$. **20.23.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$;

2) $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$. **20.24.** $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **20.25.** $(-3; 3)$. **20.26.** 1) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; 2) $(0; 2)$. **20.27.** $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. **20.28.** $[0; 2]$. **20.29.** $[0; 1]$. **20.30.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$. **20.31.** $(-\infty; 3)$. **20.32.** $[3; +\infty) \cup \{-2\}$. **20.33.** $(-\infty; -2] \cup \{4\}$. **20.34.** Якщо $a \geqslant 1$, то $x = 1$; якщо $a < 1$, то $x \in [a; 1]$. **20.35.** Якщо $a < 1$, то $x \in (-\infty; a] \cup \{1\}$; якщо $a \geqslant 1$, то $x \in (-\infty; 1]$. **20.36.** $a < \frac{19}{3}$. **20.37.** $m > -1{,}5$.

Орієнтовне тематичне поурочне планування

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
1	2	3
	I. Границя та неперервність функції (15 год)	
1	Границя функції в точці	2
2	Теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці	2
3	Неперервність функції в точці. Властивості неперервних функцій	2
4	Односторонні границі функції в точці. Класифікація точок розриву	2
5	Деякі властивості неперервних функцій	2
6	Перша чудова границя	1
7	Асимптоти графіка функції	2
	Контрольна робота № 1	2
	II. Похідна та її застосування (35 год)	
8	Приріст функції. Задачі, які приводять до поняття похідної	2
9	Поняття похідної	3
10	Правила обчислення похідних	4
11	Рівняння дотичної	3
12	Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа	2
	Контрольна робота № 2	2
13	Ознаки зростання і спадання функції	4
14	Точки екстремуму функції	4
15	Найбільше і найменше значення функції на відрізку	3
16	Друга похідна. Поняття опуклості функції	3
17	Побудова графіків функцій	3
	Контрольна робота № 3	2
	III. Показникова і логарифмічна функції (25 год)	
18	Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція	2
19	Показникові рівняння	3
20	Показникові нерівності	3
	Контрольна робота № 4	1
21	Логарифм і його властивості	3
22	Логарифмічна функція та її властивості	2
23	Логарифмічні рівняння	3
24	Логарифмічні нерівності	3
25	Похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій	3
	Контрольна робота № 5	2

1	2	3
	IV. Інтеграл та його застосування (25 год)	
26	Первісна	2
27	Правила знаходження первісної	3
	Контрольна робота № 6	1
28	Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл	5
29	Обчислення об'ємів тіл	2
	Повторення, узагальнення та систематизація навчального матеріалу, розв'язування задач з початків аналізу	10
	Контрольна робота № 7	2
	V. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики (25 год)	
30	Елементи комбінаторики та біном Ньютона	4
31	Частота та ймовірність випадкової події	4
32	Класичне визначення ймовірності	4
33	Операції з випадковими подіями	4
34	Геометрична ймовірність	4
35	Статистичний аналіз даних	3
	Контрольна робота № 8	2
	VI. Комплексні числа і многочлени (25 год)	
36	Множина комплексних чисел	3
37	Комплексна площина. Тригонометрична форма комплексного числа	4
38	Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі. Корінь n-го степеня з комплексного числа	4
	Контрольна робота № 9	2
39	Розв'язування алгебраїчних рівнянь на множині комплексних чисел	2
40	Кратні корені	4
41	Кубічні рівняння	4
	Контрольна робота № 10	2
	Повторення курсу алгебри і початків аналізу (20 год)	
	Повторення курсу алгебри і початків аналізу	18
	Контрольна робота № 11	2

Резервний час — 5 годин.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів
з поглибленим вивченням математики

У двох частинах

Частина 1

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16,00.
Тираж 3 000 прим. Замовлення № 443

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contsct@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003