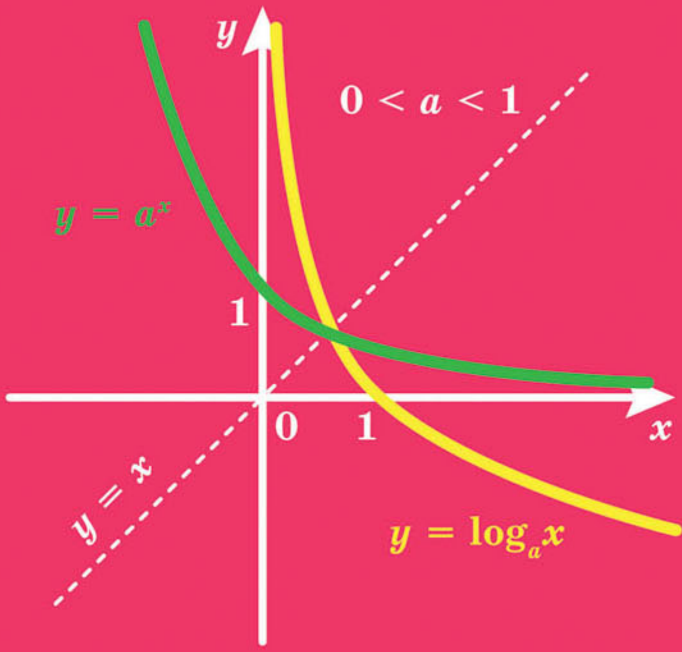
11

АЛГЕБРА

І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

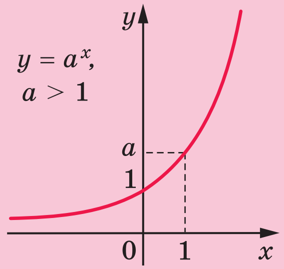
Форзац 1

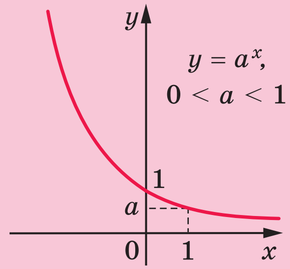
«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Форзац 2

Графік показникової функції





Властивості логарифмів

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a 1 = 0,\quad \log_a a = 1,$$

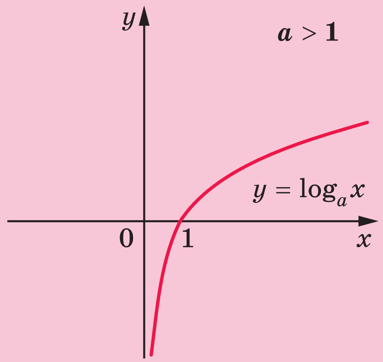
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

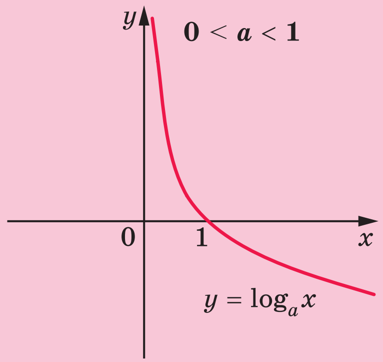
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x,\quad \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta}\log_a x,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Графік логарифмічної функції





АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Авторський колектив:
Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с. : іл.
ISBN 978-966-474-324-9.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-324-9

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу, і ми сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією. Маємо надію, що в цьому вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Бажаємо успіхів!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° — завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

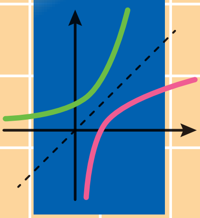
◀ — закінчення доведення теореми, розв’язання задачі;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв’язування інших задач;

рубрика «Коли зроблено уроки»;

1.5. — зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи;

1.6. — синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв’язування усно.



§ 1. Показникова та логарифмічна функції

1. **Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція**
2. **Показникові рівняння**
3. **Показникові нерівності**
4. **Логарифм і його властивості**
5. **Логарифмічна функція та її властивості**
6. **Логарифмічні рівняння**
7. **Логарифмічні нерівності**
8. **Похідні показникової та логарифмічної функцій**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником.
- Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв'язувати показникові рівняння і нерівності.

1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\ .$$

Розглянемо послідовність раціональних чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками:

$$2^3,\ 2^{3{,}1},\ 2^{3{,}14},\ 2^{3{,}141},\ 2^{3{,}1415},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Можна показати, що члени послідовності (2) зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел α_1, α_2, α_3, ... Далі розглядають послідовність b^{α_1}, b^{α_2}, b^{α_3}, ... степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел α_1, α_2, α_3, ... Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ та будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$;
2) $x^{\alpha} : x^{\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$;
5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha} = \dfrac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: $\left(x^{\alpha_n}\right)$, $\left(x^{\beta_n}\right)$ і $\left(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}\right)$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\alpha_n} = x^{\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\beta_n} = x^{\beta}$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це, вивчаючи властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n+\beta_n}$.

Послідовність раціональних чисел $\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_2+\beta_2$, $\alpha_3+\beta_3$, ... збігається до числа $\alpha+\beta$. Тому можна записати, що $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = x^{\alpha+\beta}$.

$$x^{\alpha}\cdot x^{\beta} = \lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty}x^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n+\beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1.$$ ◄

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задамо функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$, тому область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x = b$.

- Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *Показникова функція є неперервною.*
- Покажемо, що *при* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою.* Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо $a > 1$ і $x > 0$, то $a^x > 1$; якщо $0 < a < 1$ і $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.***

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$, тобто $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

- Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*
- Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму.*
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.1 і 1.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

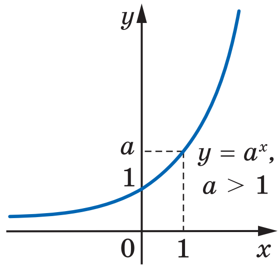


Рис. 1.1

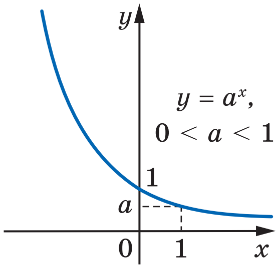


Рис. 1.2

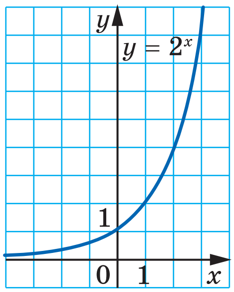


Рис. 1.3

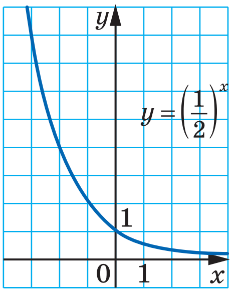


Рис. 1.4

Зокрема, на рисунках 1.3 і 1.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Зауважимо, що при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t = 0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t = 1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t) = a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t) = a^t$.

З фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0;\ +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4;\ 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4;\ 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;\,3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$
$$\max_{[-4;\,3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^0 = 1$. Водночас $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0. ◄

1. Сформулюйте властивості степеня з дійсним показником.
2. Яких значень набуває вираз x^{α}, де $\alpha > 0$, при $x > 1$? при $0 < x < 1$?
3. Яку функцію називають показниковою?
4. Яка область визначення показникової функції?
5. Яка область значень показникової функції?
6. Скільки нулів має показникова функція?
7. При яких значеннях a показникова функція $y = a^x$ є зростаючою? спадною?
8. Чи має показникова функція точки екстремуму?
9. Який вигляд має графік функції $y = a^x$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

1.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;   3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;

2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;   4) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$;   2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;   3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3.° Доведіть, що:

1) $\dfrac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;   3) $\dfrac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}$.

2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = \left(16^{\sqrt{3}}\right)^{-2}$;

1.4.° Порівняйте із числом 1 степінь:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;   3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;   5) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\pi}$;

2) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;   4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;   6) $\left(\dfrac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.5.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$;   2) $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$;   3) $7^{-\sqrt{2}}$;   4) $0{,}3^{-\pi}$.

1.6.° Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$;   2) $y = \sqrt[6]{x}$;   3) $y = 6^x$;   4) $y = 6$?

1.7.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.8.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.9.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

1.10.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

1.11.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.12.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0,8^m < 0,8^n$; 2) $3,2^m > 3,2^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.13.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}} + 2\right)\left(a^{\sqrt{5}} - 2\right) - \left(a^{\sqrt{5}} + 3\right)^2$; 3) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}\right)^2} + 1$;

2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$; 4) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}} - 1}{a^{\sqrt[3]{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}} + 1}{a^{\sqrt[3]{3}} + 1}$.

1.14.• Спростіть вираз:

1) $\frac{\left(a^{2\sqrt{6}} - 1\right)\left(a^{\sqrt{6}} + a^{2\sqrt{6}} + a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}} - a^{\sqrt{6}}}$; 2) $\left((a^{\pi} + b^{\pi})^2 - (a^{\pi} - b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.15.• Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0,2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;
4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16?

1.16.$^{\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.17.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 3]$.

1.18.$^{\bullet}$ На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

1.19.$^{\bullet}$ На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

1.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.21.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.22.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$; 5) $y = -2^x$;

2) $y = 2^{x-1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; 6) $y = 5 - 2^x$.

1.23.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; 5) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

2) $y = 3^{x+1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; 6) $y = -3^x - 1$.

1.24.$^{\bullet}$ Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?

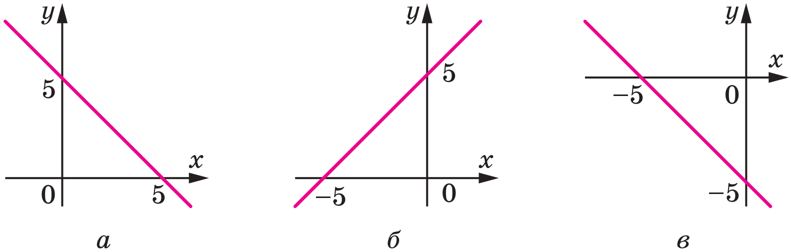


Рис. 1.5

1.25.° На рисунку 1.6 укажіть графік функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

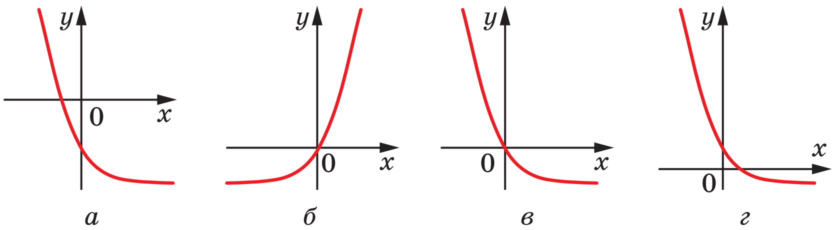


Рис. 1.6

1.26.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.27.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.28.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^{|x|}$; 3) $y = |2^x - 1|$;

2) $y = 2^{|x|} + 1$; 4) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$.

1.29.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = |3^x - 1|$.

1.30.•• Порівняйте $(7 + 4\sqrt{3})^{-5,2}$ і $(7 - 4\sqrt{3})^{5,6}$.

1.31.•• Порівняйте $(2 + \sqrt{3})^{-\pi}$ і $(2 - \sqrt{3})^{\pi}$.

1.32.•• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.33.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = |2^{-|x|} - 1|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.

1.34.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = |1 - 3^{|x|}|$; 2) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

1.35.•• Знайдіть область значень функції $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

1.36.•• Знайдіть область значень функції $f(x) = 3^{|\sin x \cos x|}$.

1.37.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$; 2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

1.38.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; 2) $2^{|x|} = \cos x$.

1.39.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.

1.40.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} > \cos x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant x^2 + 1$.

1.41.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$; 2) $y = \left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x$.

1.42.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$; 2) $y = \left(\sqrt{2} + 1\right)^x - \left(\sqrt{2} - 1\right)^x$.

1.43.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

1.44.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x - 9}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.45. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

1.46. Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

1.47. Спростіть вираз:

1) $7^{x+1} + 7^x$; 3) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$;

2) $2^{x+1} + 2^{x-4}$; 4) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.48. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$; 2) $f(x) = \sqrt{16x - x^3}$.

1.49. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 12 - 4x - x^2$;
2) $f(x) = 3 + \sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$.

1.50. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \frac{x-1}{2x}$;
2) $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{4 - x^2}$.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь**.

Теорема 2.1. ***При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.***

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ◄

Наслідок. ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доведення. Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 2.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні. ◄

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0{,}125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$. Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-3x = 7.$$

Звідси $x = -\frac{7}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{3}$. ◀

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями степеня, подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 10. Маємо:

$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3};$$

$$10^{x^2-3} = 10^{3x-5}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння:

$$x^2 - 3 = 3x - 5.$$

Звідси $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Відповідь: 1; 2. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280.$$

Розв'язання. Маємо: $2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280;$

$$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2^1 - 1) = 1280;\ 2^{12x-4} \cdot 5 = 1280;$$

$$2^{12x-4} = 256;\ \ 2^{12x-4} = 2^8;$$

$$12x - 4 = 8;\ x = 1.$$

Відповідь: 1. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5 + 4);\quad 3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9;$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{15};\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5};\ x = 1.$$

Відповідь: 1. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x = t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси $t = 1$ або $t = -5$.

Якщо $t = 1$, то $5^x = 1$. Звідси $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Якщо $t = -5$, то $5^x = -5$. Оскільки $5^x > 0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Відповідь: 0. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Розв'язання. Маємо: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Оскільки $3^{2x} \neq 0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини рівняння на 3^{2x}, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0; \quad 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тоді можна записати:

$$4t^2 - t - 18 = 0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Маємо: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при будь-якому x, то перше рівняння сукупності розв'язків не має. Друге рівняння сукупності перепишемо так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Звідси $x = -2$.

Відповідь: -2. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x, отримаємо:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також спадна, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо: $t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$. Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a має один корінь або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності повинно або не мати коренів, або мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Якщо $a \leqslant 1$, тобто $a - 1 \leqslant 0$, то рівняння $2^x = a - 1$ коренів не має.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leqslant 1$ або $a = 5$. ◄

?

1. Наведіть приклади показникових рівнянь.
2. Яка рівність випливає з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$, де $a > 0$ і $a \neq 1$?
3. Якому рівнянню рівносильне рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$ і $a \neq 1$?

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$;	3) $0{,}6^{2x-3} = 1$;	5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$;
2) $3^x = \frac{1}{81}$;	4) $10^{-x} = 0{,}001$;	6) $8^x = 16$;

7) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;

8) $\sqrt{5^x} = 25$;

9) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;

10) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$;

11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;

12) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;

13) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;

14) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;

15) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$;

3) $0{,}7^x = 2\frac{2}{49}$;

4) $9^{-x} = 27$;

5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;

6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;

7) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;

8) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$;

9) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;

10) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;

11) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;

12) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;

2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;

3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;

4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;

5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;

6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;

2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;

3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;

4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;

2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;

3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;

4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;

2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

2.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;

3) $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$;

4) $0{,}25\cdot 2^{x^2}=\sqrt[3]{0{,}25\cdot 4^{2x}}$;

5) $5^{x-1}=10^{x}\cdot 2^{-x}\cdot 5^{x+1}$;

6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

2.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sqrt{32}}{16^{x^2}}=8^{3x}$;

2) $9\cdot 3^{\sin x}=\sqrt{27}$;

3) $2^{x-1}=12^{2x}\cdot 3^{-2x}\cdot 2^{x+1}$;

4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\dfrac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x}+2^{x-1}+2^{x-2}=56$;

2) $6\cdot 5^{x}-5^{x+1}-3\cdot 5^{x-1}=10$;

3) $2\cdot 7^{x}+7^{x+2}-3\cdot 7^{x-1}=354$;

4) $4^{x-2}-3\cdot 2^{2x-1}+5\cdot 2^{2x}=228$;

5) $4\cdot 9^{1{,}5x-1}-27^{x-1}=33$;

6) $0{,}5^{5-2x}+3\cdot 0{,}25^{3-x}=5$;

7) $2^{2x+1}+4^{x}-\left(\dfrac{1}{16}\right)^{1-0{,}5x}=47$;

8) $4\cdot 3^{x}-5\cdot 3^{x-1}-6\cdot 3^{x-2}=15\cdot 9^{x^2-1}$.

2.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=31$;

2) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$;

3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;

4) $2\cdot 3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot 3^{2x}=36$;

5) $6^{x-2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246$;

6) $5\cdot 2^{x-1}-6\cdot 2^{x-2}-7\cdot 2^{x-3}=8^{x^2-1}$.

2.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1}-5\cdot 2^{x}+2=0$;

2) $4^{x+1}+4^{1-x}=10$;

3) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$;

4) $9^{x}-6\cdot 3^{x-1}=3$;

5) $3^{x+1}+3^{2-x}=28$;

6) $\dfrac{9}{2^{x}-1}-\dfrac{21}{2^{x}+1}=2$.

2.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1}-10\cdot 3^{x}+3=0$;

2) $2^{3-2x}-3\cdot 2^{1-x}+1=0$;

3) $5^{x}-0{,}2^{x-1}=4$;

4) $4^{x+0{,}5}+7\cdot 2^{x}=4$;

5) $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$;

6) $\dfrac{5}{3^{x}-6}+\dfrac{5}{3^{x}+6}=2$.

2.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;

3) $7^x - 5^{x+2} = 2\cdot 7^{x-1} - 118\cdot 5^{x-1}$.

2.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8\cdot 7^{x-2}$;

2) $5^x - 2\cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2}$;

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

2.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3\cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;

5) $5\cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

2.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;

3) $2^{\cos 2x} - 3\cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

2.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 6^x + 2\cdot 3^{2x} = 0$;

2) $2^{2x+1} - 7\cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;

3) $7\cdot 49^x + 3\cdot 28^x = 4\cdot 16^x$;

4) $9^x + 4^x = 2\cdot 6^x$.

2.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0$;

2) $5\cdot 2^x + 2\cdot 5^x = 7\cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

2.19.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4\cdot 2^x - 7}$.

2.20.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3\cdot 3^x}$.

2.21.•• Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2.22.•• Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

2.23.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \dfrac{1}{2^x}\right)$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} + \dfrac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x})$.

2.24.•• При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a+1)\cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

2.25.•• При яких значеннях параметра a рівняння $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не має коренів?

2.26.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^x - (a+1)\cdot 2^x + 2a - 2 = 0$$

має два різних корені?

2.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x = 3 - x$;
2) $3^x + 4^x = 5^x$;
3) $7^{6-x} = x + 2$;
4) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$.

2.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 11 - x$;
2) $8^{5-x} = x + 4$;
3) $4^{x-2} + 6^{x-3} = 100$;
4) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

2.29.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x} - a\right)\left(3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3\right) = 0$$

має два різних корені?

2.30.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x} - a\right)\left(2^{2x} - 10\cdot 2^x + 16\right) = 0$$

має два різних корені?

2.31.* Розв'яжіть рівняння $4^x - (19 - 3x)\cdot 2^x + 34 - 6x = 0$.

2.32.* Розв'яжіть рівняння $9^x - (14 - x)\cdot 3^x + 33 - 3x = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.33. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{(x+4)f'(x)}{x-6} \leqslant 0$, де $f(x) = x^3 - 12x + 9$?

2.34. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$.

2.35. Якого найменшого значення може набувати вираз

$$\cos^4\alpha + \sin^4\alpha?$$

3. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

Під час розв'язування багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 3.1. ***При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть цей наслідок самостійно.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Розв'язання. Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2} і 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

Звідси $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$; $2^{2x-4} \cdot 13 > 52$;

$$2^{2x-4} > 4;\ 2^{2x-4} > 2^2;\ 2x - 4 > 2;\ x > 3.$$

Відповідь: $(3; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0.$

Розв'язання. Маємо: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0;$

$$2^{-2x+1}-7\cdot 2^{-x}-4<0;\ \ 2\cdot 2^{-2x}-7\cdot 2^{-x}-4<0.$$

Нехай $2^{-x}=t$. Тоді $2t^2-7t-4<0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо: $-\frac{1}{2}<t<4$. Звідси $-\frac{1}{2}<2^{-x}<4.$

Оскільки $2^{-x}>0$, то $2^{-x}>-\frac{1}{2}$ при всіх x. Тому достатньо розв'язати нерівність $2^{-x}<4$. Маємо: $2^{-x}<2^2$; $-x<2$; $x>-2$.

Відповідь: $(-2; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $4^x-2\cdot 5^{2x}+10^x>0.$

Розв'язання. Маємо: $2^{2x}-2\cdot 5^{2x}+2^x\cdot 5^x>0$. Оскільки $5^{2x}>0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x}, отримуємо рівносильну нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-2+\left(\frac{2}{5}\right)^x>0.$

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x=t$. Тоді $t^2+t-2>0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\left[\begin{array}{l}t>1,\\ t<-2.\end{array}\right.$ Звідси:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}\right)^x>1,\\ \left(\frac{2}{5}\right)^x<-2.\end{array}\right.$$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x>1$ знаходимо, що $x<0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x<-2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $3^x+4^x>5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>1.$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$. Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$. ◄

?

1. Наведіть приклади показникових нерівностей.
2. Яка нерівність випливає з нерівності $a^{x_1} > a^{x_2}$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?
3. Якій нерівності рівносильна нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

3.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;

2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$?

3.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;

2) $5^x < \frac{1}{5}$;

3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;

4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;

5) $2^{x^2-1} < 8$;

6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;

7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;

8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;

9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

3.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$;

2) $10^x < 0{,}001$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;

4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;

5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;

6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4.° Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$;

2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$;

3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

3.5.° Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;

2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$; 2) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{3^{x+2}-27}}$.

3.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x-16}$; 2) $f(x)=\sqrt{1-6^{x-4}}$.

3.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2}>\left(\frac{1}{4}\right)^5$;

2) $125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}\geqslant\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;

3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}}<1$;

4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5}>\sqrt{2}$;

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}\leqslant\frac{9}{4}$;

6) $4\cdot0{,}5^{x(x+3)}\geqslant0{,}25^{2x}$.

3.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x}<\frac{9}{49}$;

2) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2}\leqslant\left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}}>1$;

4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1}>9^{-0{,}5}$.

3.10.• Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2}-14\cdot7^x>5$;

2) $9\cdot3^{x-1}+3^x<36$;

3) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}>56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\geqslant26$;

5) $2\cdot6^x+3\cdot6^{x+3}\leqslant650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x-\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}>\frac{3}{16}$.

3.11.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2}-4\cdot3^x<45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant3$;

3) $5^x+5^{x-1}-5^{x-2}>145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}<1\frac{2}{3}$.

3.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x}-4\cdot3^x-45>0$;

2) $4^x+2^{x+3}-20<0$;

3) $49^x-8\cdot7^x+7\leqslant0$;

4) $0{,}25^x-12\cdot0{,}5^x+32\geqslant0$;

5) $6^{2x-1}-\frac{1}{3}\cdot6^x-4\leqslant0$;

6) $25^x+5^x-30\geqslant0$.

3.13.° Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;
2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;
4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

3.14.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;
2) $\frac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

3.15.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;
2) $\frac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

3.16.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;
2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

3.17.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;
2) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} \leqslant 120$.

3.18.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$;
2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;
3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

3.19.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7$;
2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

3.20.•• Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

3.21.•• Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

3.22.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$;
2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.23.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$;
2) $2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

3.24.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$;
2) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

3.25.•• Розв'яжіть нерівність $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

3.26.•• Розв'яжіть рівняння $|3^x - 1| + |3^x - 9| = 8$.

3.27.•• Розв'яжіть рівняння $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$.

3.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x > 6 - x$; 2) $5^x + 12^x < 13^x$.

3.29.•• Розв'яжіть нерівність $10^{4-x} > 7 + x$.

3.30.•• Розв'яжіть нерівність $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$.

3.31.•• Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

3.32.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geqslant 0$.

3.33.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leqslant 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.34. Чому дорівнює значення виразу $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{5}$?

3.35. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, якщо $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

3.36. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \mathrm{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{5\pi}{48}$.

4. Логарифм і його властивості

Рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$ розв'язати легко. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці A (x_0; 5). Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0.

Проте графічний метод не дозволяє встановити точне значення x_0.

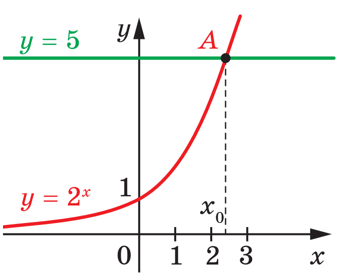


Рис. 4.1

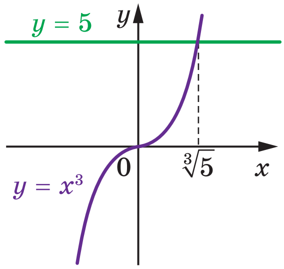


Рис. 4.2

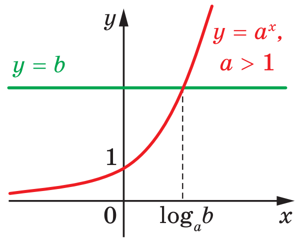


Рис. 4.3

З подібною ситуацією ми зустрічалися, розв'язуючи в 10 класі рівняння $x^3 = 5$. Графічна інтерпретація також показує, що це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.2). Потреба називати й записувати цей корінь свого часу призвела до нового поняття «кубічний корінь» і позначення $\sqrt[3]{5}$.

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа** 5 **з основою** 2 та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Розглянемо рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ це рівняння не має розв'язків. Якщо $b > 0$, то це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.3). Його називають логарифмом числа b з основою a та позначають $\log_a b$.

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, оскільки $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, оскільки $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$\log_{17} 17 = 1$, оскільки $17^1 = 17$;

$\log_{100} 1 = 0$, оскільки $100^0 = 1$.

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю.**

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Розглянемо рівність $a^c = b$.

Ви знаєте, що дію знаходження числа b за даними числами a і c називають піднесенням числа a до степеня c.

Дію знаходження числа c за даними числами a і b, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням числа b за основою a.** Справді, $c = \log_a b$.

Зазначимо, що при $a > 0$ ліва частина рівності $a^c = b$ є додатною. Отже, $b > 0$, тому при $b \leqslant 0$ вираз $\log_a b$ не має змісту.

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 4.1 (логарифм добутку). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.*

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

Теорема 4.2 (логарифм частки). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.*

Скориставшись ідеєю доведення теореми 4.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3 (логарифм степеня). ***Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Доведення. Розглянемо два вирази $a^{\log_a x^\beta}$ і $a^{\beta \log_a x}$. Доведемо, що вони рівні.

Маємо: $a^{\log_a x^\beta} = x^\beta$;

$$a^{\beta \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = x^\beta.$$

Отже, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Звідси за теоремою 4.1 отримуємо:

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x. \ ◄$$

Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доведення. Розглянемо вираз $\log_a b \cdot \log_c a$. Перетворимо його, скориставшись теоремою 4.3 при $\beta = \log_a b$. Маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Отже, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Оскільки $a \neq 1$, то легко показати, що $\log_c a \neq 0$. Тепер можна записати: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ◄

Наслідок 1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Доведіть цей наслідок самостійно.

Наслідок 2. ***Якщо*** $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, ***то для будь-якого*** $\beta \neq 0$ ***виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Доведення. У виразі $\log_{a^\beta} b$ перейдемо до основи a:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta\log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3 При якому значенні x виконується рівність:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Розв'язання. 1) Вираз $\log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $\log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\dfrac{1}{2}\log_{36} 9 + \dfrac{1}{3}\log_{36} 8$.

Розв'язання. 1) Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2(20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Маємо: $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_{36} 3^2 + \frac{1}{3}\log_{36} 2^3 =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\log_{36} 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}$. ◄

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $f(x) = 5^{\log_5 (x-3)}$.

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$. Оскільки $5^{\log_5 (x-3)} = x - 3$ для всіх значень $x \in D(f)$, то доходимо висновку, що графіком функції f є частина прямої $y = x - 3$ (рис. 4.4). ◄

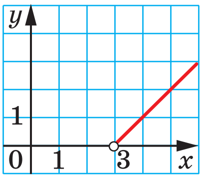


Рис. 4.4

ПРИКЛАД 6 Відомо, що $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайдіть $\lg 56$.

Розв'язання. Маємо: $\lg 56 = \lg(8\cdot 7) = \lg 8 + \lg 7 =$

$$= \lg 2^3 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3\lg 2 + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba.$$ ◄

?

1. Що називають логарифмом?
2. Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
3. Чому дорівнює $\log_a 1$? $\log_a a$?
4. Поясніть, що називають логарифмуванням числа b за основою a.
5. При яких значеннях a і b має зміст вираз $\log_a b$?
6. Сформулюйте теорему про логарифм добутку.
7. Сформулюйте теорему про логарифм частки.
8. Сформулюйте теорему про логарифм степеня.
9. Запишіть формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

ВПРАВИ

4.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -3$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 7) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$;

2) $\log_{25} 5 = 2$; 5) $\log_{0,01} 10 = 2$; 8) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$?

3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 6) $\lg 0,0001 = -4$;

4.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 1; 2) 10; 3) 100; 4) 1000; 5) 0,1; 6) 0,01; 7) 0,00001; 8) 0,000001.

4.7.° Чому дорівнює логарифм числа 10 000 з основою:

1) 10; 2) 100; 3) $\sqrt{10}$; 4) 0,1; 5) 1000; 6) 0,0001?

4.8.° Знайдіть логарифм числа 729 з основою:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x = -1$;
2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$;
3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$;
4) $\log_2 x = 0$;
5) $\log_x 9 = 2$;
6) $\log_x 0{,}25 = -2$;
7) $\log_x 2 = 2$;
8) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$.

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$;
2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$;
3) $\log_{0,2} x = -3$;
4) $\log_x 6 = 5$;
5) $\log_x 81 = 4$;
6) $\log_x 11 = -1$.

4.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x = 2$;
2) $5^x = 10$;
3) $0{,}4^x = 9$;
4) $2^{x-3} = 5$;
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;
6) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

4.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.13.° Обчисліть значення виразу:

1) $2^{\log_2 32}$; 2) $5^{\log_5 0,45}$; 3) $7^{2\log_7 2}$; 4) $64^{0,5\log_2 12}$;

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 6) $6^{1+\log_6 5}$; 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$; 8) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

4.14.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 3) $4^{\log_2 9}$; 5) $10^{2+\lg 8}$;

2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

4.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3+\log_6 2$; 4) $\log_2 5-\log_2 35+\log_2 56$;

2) $\log_5 100-\log_5 4$; 5) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

3) $\log_{49} 84-\log_{49} 12$; 6) $2\lg 5+\frac{1}{2}\lg 16$.

4.16.° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8+\lg 12{,}5$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$;

2) $\log_3 162-\log_3 2$; 4) $3\log_6 2+\frac{3}{4}\log_6 81$.

4.17.• Подайте:

1) число 2 у вигляді степеня числа 5;

2) число $\frac{1}{9}$ у вигляді степеня числа 10;

3) число $\sqrt{14}$ у вигляді степеня числа 7;

4) число 0,17 у вигляді степеня числа 18.

4.18.• Подайте:

1) число 3 у вигляді степеня числа 8;

2) число $\sqrt[3]{6}$ у вигляді степеня числа $\frac{1}{2}$.

4.19.• Подайте:

1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;

2) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;

3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;

4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

4.20.• Подайте:

1) число 4 у вигляді логарифма з основою $\frac{1}{3}$;

2) число -2 у вигляді логарифма з основою $\sqrt{2}$.

4.21.• Обчисліть значення виразу:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;
2) $8^{1-\log_2 3}$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;
4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;
5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;
6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;
7) $\lg(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6})$;
8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.22.• Обчисліть значення виразу:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;
3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;
4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;
5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;
6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;
7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;
8) $5^{\log_5 4\,\cdot\,\log_2 3}$.

4.23.• Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49} 343$;
3) $\log_9\log_2 8$;
4) $\log_2\sin 135°$;
5) $\log_3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 315°$;
7) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}$;
8) $\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}(-120°)$.

4.24.• Обчисліть значення виразу:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;
3) $\log_6\operatorname{tg} 225°$;
4) $\log_{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

4.25.• Знайдіть x, якщо:

1) $\log_7 x=2\log_7 8-4\log_7 2$;
2) $\lg x=2+\lg 3-\lg 5$;
3) $\log_3 x=\frac{2}{3}\log_3 216+\frac{1}{2}\log_3 25$;
4) $\lg x=\frac{2}{3}\lg 32-\frac{1}{3}\lg 128+1$;
5) $\log_2 x=3\log_2 5-2\log_2 25-\lg 10$.

4.26.• Знайдіть x, якщо:

1) $\log_a x=3\log_a 2+2\log_a 3$;
2) $\log_a x=\frac{1}{4}\log_a 16+3\log_a 0,5$;
3) $\lg x=\frac{2}{5}\lg 32-\frac{1}{3}\lg 64+1$.

4.27.• Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$; 2) $\dfrac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$.

4.28.• Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$; 2) $\dfrac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$.

4.29.• Обчисліть значення виразу:

1) $\log_7 \sin\dfrac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$; 2) $\log_3 \cos^2\dfrac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.30.• Спростіть вираз:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$; 2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.31.•• Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

4.32.•• Обчисліть значення виразу $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27} - 12\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.

4.33.•• Спростіть вираз $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

4.34.•• Спростіть вираз $\dfrac{\log_a ab(\log_b a - 1 + \log_a b)}{1 + \log_a^3 b}$.

4.35.•• Доведіть, що значення виразу $\log_{7+4\sqrt{3}}(7 - 4\sqrt{3})$ є цілим числом.

4.36.•• Доведіть, що значення виразу $\log_{9-4\sqrt{5}}(9 + 4\sqrt{5})$ є цілим числом.

4.37.•• При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $\log_2(1 - x^2) = \log_2(1 - x) + \log_2(1 + x)$;

2) $\lg\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lg(x^2 - 2x + 1) - \lg(x^2 + 1)$;

3) $\log_5(x^2 - 4x + 4) = 2\log_5(2 - x)$;

4) $\log_5(x^2 - 4x + 4) = 2\log_5|x - 2|$?

4.38.•• Чому дорівнює значення виразу:

1) $\lg\sin 1° \cdot \lg\sin 2° \cdot \lg\sin 3° \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89° \cdot \lg\sin 90°$;

2) $\lg \operatorname{tg} 10° \cdot \lg \operatorname{tg} 15° \cdot \lg \operatorname{tg} 20° \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 75° \cdot \lg \operatorname{tg} 80°$;

3) $\lg(\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 32° \cdot \operatorname{tg} 34° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 58° \cdot \operatorname{tg} 60°)$;

4) $\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 2° + \lg \operatorname{tg} 3° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 88° + \lg \operatorname{tg} 89°$?

4.39.•• Спростіть вираз $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$.

4.40.•• Обчисліть значення виразу $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.41.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$;
2) $y = \log_x 1$;
3) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;
4) $y = 5^{-\log_5 x}$;
5) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;
6) $y = 2^{\log_2 x^2}$;
7) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;
8) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{3-x} (3-x)^4$;
9) $y = 2^{\log_4 x^2}$.

4.42.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;
2) $\dfrac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$;
3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;
4) $y = \log_x x$;
5) $y = \dfrac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$;
6) $y = x^{\log_x 2x}$;
7) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;
8) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \dfrac{1}{3}$.

4.43.•• Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg xy = \lg x + \lg y$;
2) $\lg xy = \lg(-x) + \lg(-y)$;
3) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2 \lg |x| + 2 \lg |y|$;
4) $\log_{x^2} y^2 = \log_x (-y)$.

4.44.•• Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg \dfrac{x}{y} = \lg(-x) - \lg(-y)$;
2) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2 \lg x + 2 \lg(-y)$;
3) $\log_{x^2} y^2 = \log_x y$.

4.45.•• Члени геометричної прогресії є додатними числами. Доведіть, що логарифми послідовних членів цієї прогресії з будь-якою основою утворюють арифметичну прогресію.

4.46.•• Виразіть $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ і $\log_b x$.

4.47.•• Доведіть, що $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

4.48.•• Знайдіть $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$.

4.49.•• Знайдіть $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

4.50.* Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;
2) $\log_5 6$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

4.51.* Знайдіть $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.52. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\sin 75° + \sin 45°}{\sin 255°}$;
2) $\dfrac{\cos 15° - \cos 105°}{\cos 315°}$.

4.53. Спростіть вираз $\left(\dfrac{a^{0,5} + 3b^{0,5}}{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b} + \dfrac{a^{0,5} - 3b^{0,5}}{a - b}\right) \cdot \dfrac{a^{0,5} - b^{0,5}}{2}$.

4.54. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$;
2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3$.

5. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число y таке, що $y = \log_a x$. Тим самим буде задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0;\ +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}).

Це означає, що *областю значень логарифмічної функції є множина* $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = (0;\ +\infty)$;
$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0;\ +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції $y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ (рис. 5.1).

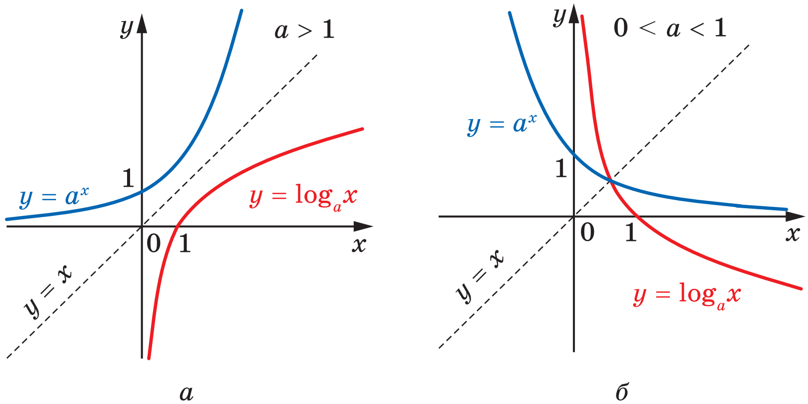


Рис. 5.1

- *Функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$.
- *Функція* $y = \log_a x$ *має два проміжки знакосталості.*

  Якщо $a > 1$, *то* $y < 0$ *на проміжку* $(0;\ 1)$; $y > 0$ *на проміжку* $(1;\ +\infty)$;

  якщо $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на проміжку* $(1;\ +\infty)$; $y > 0$ *на проміжку* $(0;\ 1)$.

Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція також зростаюча (спадна). Показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *та спадною при* $0 < a < 1$.
- Оскільки логарифмічна функція є зростаючою (при $a > 1$) або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

Ви знаєте, що коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною та неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *є неперервною.*
- *Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 8.
- *Графік функції* $y = \log_a x$ *має вертикальну асимптоту* $x = 0$, *коли* x *прямує до нуля справа*.

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$(0;\ +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на $(0;\ 1)$, $y > 0$ на $(1;\ +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1;\ +\infty)$, $y > 0$ на $(0;\ 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

ПРИКЛАД 1 Порівняйте з одиницею основу a логарифма, коли відомо, що $\log_a 5 < \log_a 4$.

Розв'язання. Якщо припустити, що $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ є зростаючою. Тому $\log_a 5 > \log_a 4$. Але за умовою це не так. Отже, $a < 1$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$; 2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$; 3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ або $x > 0$.

Отже, $D(f) = (-\infty;\ -3) \cup (0;\ +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звернувшись до рисунка 5.2, доходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

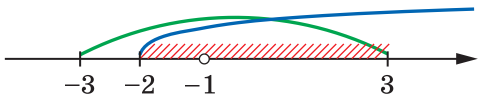


Рис. 5.2

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Порівняйте: 1) $\log_2 6$ і $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_6 7$ і $\log_7 6$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ і −2.

Розв'язання. 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_2 x$ є зростаючою, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Маємо: $\log_6 7 > \log_6 6$, тобто $\log_6 7 > 1$. Разом з тим $\log_7 7 > \log_7 6$, тобто $1 > \log_7 6$. Отже, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

4) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

5) Маємо: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$. Оскільки $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ◄

1. Яку функцію називають логарифмічною?
2. Яка область визначення логарифмічної функції?
3. Яка область значень логарифмічної функції?
4. До якої функції є оберненою функція $y = \log_a x$?
5. Яке взаємне розміщення графіків функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$?
6. Скільки нулів має логарифмічна функція?
7. При яких значеннях аргументу функція $y = \log_a x$, де $a > 1$, набуває додатних значень? від'ємних значень?
8. При яких значеннях аргументу функція $y = \log_a x$, де $0 < a < 1$, набуває додатних значень? від'ємних значень?
9. Зростаючою чи спадною є функція $y = \log_a x$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

5.1.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{0,1} x$; 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 7) $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$;
2) $y = \log_3 x$; 4) $y = \lg x$; 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$; 8) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$?

5.2.° Спираючись на яку властивість логарифмічної функції можна стверджувати, що:

1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3.° Порівняйте:

1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$; 4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ і $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$;
2) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$; 5) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$; 6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,4$ і $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,3$.

5.4.° Порівняйте:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ і $\log_{0,9} \sqrt{2}$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ і $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
2) $\log_7 \frac{2}{3}$ і $\log_7 \frac{1}{2}$; 4) $\lg \frac{\pi}{3}$ і $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$; 3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$; 4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.6.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

5.7.° Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$;
2) $\log_{0,3} 3$;
3) $\log_2 0,27$;
4) $\log_\pi 3$?

5.8.° Порівняйте з нулем:

1) $\log_4 5$;
2) $\log_2 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;
4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

5.9.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.10.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.11.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює -1?

5.12.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює -1, а найменше дорівнює -2?

5.13.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$;
2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$;
3) $f(x) = \log_4 (-x)$;
4) $f(x) = \lg x^2$;
5) $f(x) = \log_5 (x^2 + x + 1)$;
6) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;
7) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;
8) $f(x) = \log_2 \frac{2x - 3}{x + 7}$.

5.14.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;
2) $f(x) = \log_{12} |x|$;
3) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$;
4) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;
5) $f(x) = \lg (x + 2) - 2 \lg (x + 5)$;
6) $f(x) = \lg \frac{2x + 1}{x - 1}$.

5.15.° Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = \log_2 \frac{1}{x}$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

5.16.° Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

5.17.• Порівняйте:
1) $\log_9 2$ і 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6;
4) $\log_{16} 0{,}1$ і $-\frac{3}{4}$.

5.18.• Порівняйте:
1) $\log_{0,1} 12$ і 1;
2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$;
3) $\frac{2}{3}$ і $\log_{125} 30$.

5.19.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:
1) $\log_3 10$;
2) $\log_2 5$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$;
4) $\log_{0,1} 2$?

5.20.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.21.• Порівняйте:
1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$;
2) $\log_{1,5} 1{,}3$ і $\log_{1,3} 1{,}5$;
3) $\log_{0,7} 0{,}8$ і $\log_{0,8} 0{,}7$;
4) $\log_{0,2} 0{,}1$ і $\log_{0,1} 0{,}2$.

5.22.• Порівняйте:
1) $\log_{1,7} 1{,}8$ і $\log_{1,8} 1{,}7$;
2) $\log_{0,2} 0{,}3$ і $\log_{0,3} 0{,}2$.

5.23.• Знайдіть область визначення функції:
1) $f(x) = \frac{1}{\lg x}$;
2) $f(x) = \frac{4}{\log_5 (10 - x)}$;
3) $f(x) = \log_2 \cos x$;
4) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$.

5.24.• Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \frac{5}{\lg (x + 3)}$;
2) $y = \lg \sin x$.

5.25.• Побудуйте графік функції:
1) $y = \log_2 (x - 1)$;
2) $y = \log_2 (x + 3)$;
3) $y = \log_2 x - 1$;
4) $y = \log_2 x + 3$;
5) $y = -\log_2 x$;
6) $y = \log_2 (-x)$.

5.26.• Побудуйте графік функції:
1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$;
2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;
3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$;
5) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;
6) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

5.27.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$.

5.28.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.29.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.30.• Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

5.31.•• Порівняйте $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2.

5.32.•• Доведіть, що $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_4 \frac{1}{3} < -2$.

5.33.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg x^2$;
2) $y = \lg(1 - \sin x)$;
3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1 + x^2)}$;
4) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;
5) $y = \frac{1}{\log_6 (x - 3)} + \sqrt{6 - x}$;
6) $y = \frac{4}{\lg(x + 2)} + \lg(3 - x)$;
7) $y = \sqrt{\frac{(x + 1)(3 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$;
8) $y = \log_5 (x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5 (7 - x)}$;
9) $y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3 - x)}$;
10) $y = \log_{x+3} (x^2 + x)$.

5.34.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\lg(x^2 + 1)}$;
2) $y = \lg(1 + \sin x)$;
3) $y = \sqrt{\lg(1 + x^2)}$;
4) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;
5) $y = \lg(x + 8) - \frac{5}{\lg(-x - 1)}$;
6) $y = \lg(10x - x^2) - \frac{1}{\lg(8 - x)}$;
7) $y = \frac{x}{\lg(4 - x^2)}$;
8) $y = \lg(9x - x^2) - \frac{1}{\lg(5 - x)}$;
9) $y = \log_{2-x} (8 + 7x - x^2)$;
10) $y = \sqrt{\frac{(x + 5)(2 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$.

5.35.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;

3) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y = \sqrt{\log_3^2 x}\,\log_x 3$.

5.36.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$; 3) $y = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

5.37.•• Знайдіть найбільше значення функції:

1) $y = \log_{0,1}(x^2 + 100)$;

2) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 14)$.

5.38.•• Знайдіть найменше значення функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^2 + 8}$;

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x^2 - 4x + 7}$.

5.39.•• Дослідіть на парність функцію $y = \lg\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

5.40.•• Дослідіть на парність функцію $y = \lg\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.41. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2 + 15} = x + 1$;

2) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2$;

3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt{x + 1} + \sqrt[4]{x + 1} - 6 = 0$;

5) $3\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$;

6) $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$.

6. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням**.

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 6.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b. Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

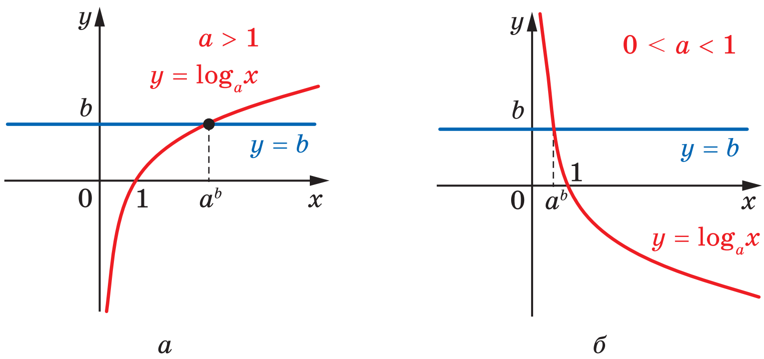


Рис. 6.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\log_3(3x-1)=2$.

Розв'язання. За означенням логарифма можна записати: $3x-1=3^2$. Звідси $3x-1=9$; $x=\dfrac{10}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{10}{3}$. ◄

Розв'язане рівняння є окремим випадком рівняння виду $\log_a f(x)=b$, де $a>0$, $a\neq 1$. Міркуючи, як у прикладі 1, можна показати, що це рівняння рівносильне рівнянню $f(x)=a^b$.

Під час розв'язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 6.1. ***Нехай $a>0$, $a\neq 1$. Якщо $\log_a x_1=\log_a x_2$, то $x_1=x_2$, і навпаки, якщо $x_1>0$, $x_2>0$ і $x_1=x_2$, то $\log_a x_1=\log_a x_2$.***

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою або спадною, то для доведення цієї теореми можна скористатися ідеєю доведення теореми 2.1. Переконайтеся в цьому самостійно.

Наслідок. ***Нехай $a>0$, $a\neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем***

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x)>0$ чи $g(x)>0$, розв'язати легше.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть наслідок з теореми 6.1 самостійно.

Тепер розв'язання рівняння прикладу 1 можна подати й так:

$$\log_3(3x-1)=2\log_3 3;$$
$$\log_3(3x-1)=\log_3 3^2;$$
$$3x-1=3^2;\ \ x=\frac{10}{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\lg(x^2-4x+2)=\lg(2x-3)$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-4x+2=2x-3, \\ 2x-3>0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2-6x+5=0, \\ x>\dfrac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=5, \end{array}\right. \\ x>\dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Звідси $x=5$.

Відповідь: 5. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$.

Розв'язання. Природно перетворити це рівняння так:

$$\log_3((2x-1)(x-2))=3.$$

Звідси $(2x-1)(x-2)=3^3$; $2x^2-5x-25=0$; $x=5$ або $x=-\frac{5}{2}$.

Легко переконатися, що число $-\frac{5}{2}$ не є коренем даного рівняння (не входить до його області визначення), а число 5 є коренем даного рівняння.

Таким чином, дане рівняння розв'язано методом наслідків.

Відповідь: 5. ◄

Звернемо увагу, що зроблений під час розв'язання прикладу 3 перехід від рівняння $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ до рівняння $\log_3((2x-1)(x-2))=3$ не був рівносильним і призвів до появи стороннього кореня.

Справді, область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} 2x-1>0, \\ x-2>0, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $(2;+\infty)$. Замінивши вираз $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)$ на вираз $\log_3((2x-1)(x-2))$, ми розширили область визначення початкового рівняння, оскільки область визначення рівняння $\log_3((2x-1)\times$ $\times(x-2))=3$ задається нерівністю $(2x-1)(x-2)>0$, множиною розв'язків якої є $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $(2;+\infty)$ до множини $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$ і стало причиною появи стороннього кореня $-\frac{5}{2}$.

Насправді рівняння $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ рівносильне системі

$$\begin{cases}\log_3((2x-1)(x-2))=3,\\ 2x-1>0,\\ x-2>0.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}(2x-1)(x-2)=3^3,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-5x-25=0,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-\frac{5}{2},\end{array}\right.\\ x>2.\end{cases}$

Отримуємо ту саму відповідь: $x=5$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\log_2 x+\log_x 2=\frac{5}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=\frac{5}{2}.$$

Нехай $\log_2 x=t$. Тоді отримуємо: $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$.

Звідси $\begin{cases}2t^2-5t+2=0,\\ t\neq 0.\end{cases}$ Отже, $\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2},\\ t=2.\end{array}\right.$

Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l}\log_2 x=\frac{1}{2},\\ \log_2 x=2.\end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{1}{2}},\\ x=2^2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2},\\ x=4.\end{array}\right.$

Відповідь: $\sqrt{2}$; 4. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{\lg x+2}{3}} = 10^{2+\lg x}$.

Розв'язання. Оскільки на області визначення рівняння, тобто на множині $(0; +\infty)$, обидві його частини набувають додатних значень, то можемо записати рівняння, рівносильне даному:

$$\lg x^{\frac{\lg x+2}{3}} = \lg 10^{2+\lg x}.$$

Далі маємо: $\dfrac{\lg x+2}{3}\cdot\lg x = 2+\lg x$.

Нехай $\lg x = t$. Тоді $\dfrac{(t+2)t}{3} = 2+t$. Звідси $\left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \lg x=-2, \\ \lg x=3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=10^{-2}, \\ x=10^{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0{,}01, \\ x=1000. \end{array}\right.$

Відповідь: 0,01; 1000. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що перехід від рівняння (1) до рівняння

$$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0 \qquad (2)$$

може призвести до втрати розв'язків.

Справді, областю визначення початкового рівняння є множина $(2; 4)\cup(4; +\infty)$, а область визначення рівняння (2) — це множина $(4; +\infty)$. Отже, такий перехід звужує область визначення початкового рівняння на множину (2; 4), яка може містити корені рівняння (1).

Насправді рівняння (1) рівносильне такому рівнянню:

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Звідси $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$.

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2<x<4, \\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>4, \\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Далі маємо: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2<x<4, \\ \log_3((x-2)(4-x))=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x>4, \\ \log_3((x-2)(x-4))=0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2<x<4, \\ (x-2)(4-x)=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x>4, \\ (x-2)(x-4)=1; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ x^2 - 6x + 9 = 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ x^2 - 6x + 7 = 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 < x < 4,\\ x = 3,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 4,\\ \left[\begin{array}{l}x = 3 - \sqrt{2},\\ x = 3 + \sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 3,\\ x = 3 + \sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 3; $3 + \sqrt{2}$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Розв'язання. Перейдемо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Оскільки з умови випливає, що $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$. Далі маємо:

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3.$$

Нехай $\log_2 x = t$, тоді отримаємо: $\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3$.

Звідси $t = 2$ або $t = -\frac{1}{3}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = 2,\\ \log_2 x = -\frac{1}{3};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 2^2,\\ x = 2^{-\frac{1}{3}}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$. ◄

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\log_7 (x+8) = -x$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \log_7 (x+8)$ і $g(x) = -x$. Функція f є зростаючою, функція g — спадною. Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше ніж один корінь. Оскільки $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: -1. ◄

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}\log_3 (x-2) = 0$.

Розв'язання. Помилково вважати, що рівняння виду $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l}f(x) = 0,\\ g(x) = 0.\end{array}\right.$ При такому переході існує небезпека отримати у відповіді сторонні корені. Наприклад, немає гарантії, що всі корені рівняння $f(x)=0$ належать області визначення функції g.

Насправді рівняння $f(x)\cdot g(x)=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\ g(x)=0,\end{array}\right.\\ x\in D(f),\\ x\in D(g).\end{cases}$$

Скориставшись цим, запишемо систему, рівносильну рівнянню $\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}\log_3(x-2)=0$:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3(x-2)=0,\\ \sin x=\frac{1}{2},\end{array}\right.\\ x>2,\\ \sin x\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Єдиним коренем першого рівняння сукупності є число 3. Оскільки $\sin 3<\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ (рис. 6.2), то $x=3$ не є коренем початкового рівняння.

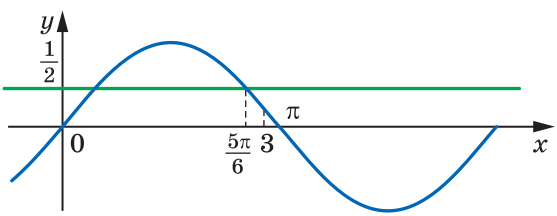


Рис. 6.2

Усі числа виду $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, є коренями другого рівняння сукупності. Серед них потрібно вибрати лише ті, які задовольняють умову $x>2$. Для цього достатньо вимагати, щоб $n\in\mathbb{N}$.

Відповідь: $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{N}$. ◄

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y). \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}} = 2^5, \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1. \end{cases}$

З першого рівняння системи випливає, що $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$. Звідси $\frac{x}{y}=2$ або $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$. Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1. \end{cases}$

Маємо: $\log_3 y + \log_3 3y = 1$; $\log_3 y + (\log_3 3 + \log_3 y) = 1$; $2\log_3 y = 0$; $y = 1$. Тоді $x = 2$.

2) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1. \end{cases}$

Легко переконатися (зробіть це самостійно), що ця система розв'язків не має.

Відповідь: (2; 1). ◄

1. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним рівнянням?
2. Скільки коренів має найпростіше логарифмічне рівняння?
3. Яка рівність випливає з рівності $\log_a x_1 = \log_a x_2$?
4. Якщо додатні числа x_1 і x_2 рівні, то яким співвідношенням пов'язані вирази $\log_a x_1$ і $\log_a x_2$?
5. Якій системі рівносильне рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$?

ВПРАВИ

6.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(x-1) = 1$;
2) $\log_3(2x+1) = 3$;
3) $\lg(3-2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}}(4x-8) = -2$;
5) $\log_7(x^2-2x-8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5) = -4$.

6.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{5}}(x+7)=-3;$

2) $\log_4(2x-5)=0,5;$

3) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5x-3)=2;$

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)=-1.$

6.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_\pi(x+1)=\log_\pi(4x-5);$

2) $\log_5(3x-5)=\log_5(x-3);$

3) $\lg(x^2+2)=\lg(3x+6).$

6.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_9(4x-6)=\log_9(x-2);$

2) $\log_{\frac{1}{4}}(x+7)=\log_{\frac{1}{4}}(x^2+5).$

6.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\frac{1}{x}=6;$

2) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11;$

3) $\log_6 x+2\log_{36} x+3\log_{216} x=3;$

4) $\log_7\log_4(x-2)=0;$

5) $\log_4\log_3\log_2 x=\frac{1}{2}.$

6.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3\frac{1}{x}+\log_3\sqrt[3]{x}=\frac{4}{3};$

2) $\log_5 x-\log_{25} x+\log_{625} x=\frac{3}{4};$

3) $\lg\lg\lg x=0.$

6.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(3^{5x-3}+1)=2;$

2) $\log_3(3^{x-1}+6)=x;$

3) $\log_2(2^x+7)=3-x;$

4) $\log_6(6^{-x}-5)=x+1.$

6.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(6^{x+1}-30)=x;$

2) $\log_5(6-5^x)=1-x.$

6.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(x^2-2x)=\lg(2x+12);$

2) $\log_4(x-1)=\log_4(x^2-x-16);$

3) $\log_{0,5}(x^2+3x-10)=\log_{0,5}(x-2);$

4) $\log_6(x^2-x-2)=\log_6(2-x);$

5) $2\log_{0,4} x=\log_{0,4}(2x^2-x);$

6) $2\log_7(-x)=\log_7(x+2);$

7) $2\log_8(1-x)=\log_8(2,5x+1);$

8) $2\log_3 x=1+\log_3(x+6).$

6.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(9-x^2)=\log_6(1-2x);$

2) $\lg(x^2+2x-3)=\lg(2x^2-2);$

3) $\log_{0,7}(2x^2-9x+4)=2\log_{0,7}(x+2)$;
4) $2\log_2(-x)-\log_2(3x+8)=1$.

6.11.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{1}{2}\log_6(5x+1)=\log_6(x-1)$;
2) $\log_5(25^x-2\cdot5^x)=2\log_{25}15$;
3) $\log_{\sqrt{5}}(16^x-6)=2+\log_{\sqrt{5}}(4^x-2)$;
4) $x\lg3-1=2\lg3-\lg(3^x+1)$.

6.12.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(2x+3)-\log_{0,1}(2x-3)=0$;
2) $\log_3(2^{2x}+2^x)=2\log_9 12$;
3) $x-\lg5=x\lg5+2\lg2-\lg(1+2^x)$.

6.13.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_4(x-3)+\log_4 x=1$;
2) $\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(x-1)=-1$;
3) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg5$;
4) $\log_3(2x-1)+\log_3(x-4)=2$;
5) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg0{,}18$;
6) $\lg(x-1)+\lg(x-3)=\lg(1{,}5x-3)$;
7) $\log_2(5-x)-\log_2(x-1)=1-\log_2(x+2)$;
8) $2\log_5(x+1)-\log_5(x+9)=\log_5(3x-17)$.

6.14.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_7 x+\log_7(x+6)=1$;
2) $\log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{0,5}3{,}5$;
4) $\log_{0,6}(x+2)+\log_{0,6}(6-x)=\log_{0,6}(x+8)$;
5) $\log_2(2x-1)-\log_2(x+2)=2-\log_2(x+1)$;
6) $2\lg(x+1)-\lg(4x-5)=\lg(x-5)$.

6.15.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3(5^x+2)+\log_3(5^x-1)=2+\log_3 2$;
2) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$.

6.16.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_{\sqrt{3}}(2^x-3)+\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)=2$;
2) $\lg(3^x-4)+\lg(3^x-2)=1$.

6.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0;$
2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0;$
3) $\lg^2 x - 2\lg x^2 + 3 = 0;$
4) $\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5;$
5) $2\log_{\frac{1}{6}} x + 3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x} - 5 = 0;$
6) $\dfrac{2}{\lg(x+2)-3} + \dfrac{4}{\lg(x+2)+1} = 1.$

6.18.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\log_8^2(-x) - 2\log_8(-x) - 1 = 0;$
2) $2\log_7 2\log_7\sqrt{x} = \log_7^2 x - 6;$
3) $3\log_3 x + 3\log_x 3 = 10;$
4) $\dfrac{\lg x}{\lg x + 2} - \dfrac{2}{\lg x - 1} = 1.$

6.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x-7)} = 1;$
2) $\dfrac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)} = 0;$
3) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2;$
4) $\log_{x+1}(x+3) = 2;$
5) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2.$

6.20.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)} = 1;$
2) $\dfrac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)} = 0;$
3) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1;$
4) $\log_x(x+6) = 2;$
5) $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2.$

6.21.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(x-5)^2 - 2\log_2(x+2) = 2;$
2) $\dfrac{1}{2}\lg x^2 + \lg(x+7) = 1.$

6.22.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{4}\log_2 x^4 + \log_2(x+10) = 3 + \log_2 3;$
2) $\dfrac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6(5-x) = 1.$

6.23.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0;$
2) $\lg(10x^2)\cdot\lg x = 1;$
3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4\dfrac{16}{x} = 2;$
4) $\log_2(4x)\cdot\log_2(0{,}25x) = 5;$
5) $\lg^2(100x) + 2\lg x = 20;$
6) $\log_5^2(5x) + \log_5\dfrac{x}{25} = 3;$
7) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 0;$
8) $2\lg(\lg x) = \lg(2\lg x + 8).$

6.24.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$;
2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \frac{x}{27} + 4 = 0$;
3) $\log_7 (7x) \cdot \log_7 \frac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1$;
4) $\lg^2 (10x) + \lg (10x) = 6 + 3\lg x$;
5) $\log_6^2 (36x) + \log_6 \frac{x^2}{216} = 8$;
6) $\log_5 (\log_2 x) + \log_5 (\log_2 x^3 - 14) = 1$.

6.25.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_5 x} = 5$; 2) $x^{\lg x + 2} = 1000$; 3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$; 4) $x^{\log_6 x} = 216x^2$.

6.26.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_3 x} = 81$;
2) $x^{\lg x} = 100x$;
3) $x^{\log_2 x - 2} = 256$;
4) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x} = 10^{6 + \lg x}$.

6.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;
2) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$;
3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;
4) $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$;
5) $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x$;
6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0$.

6.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x (9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4$;
2) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;
3) $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12} (x+2)} - 1 = \dfrac{\log_6 (8 - x)}{\log_6 (x+2)}$;
4) $\log_{x+1} (x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1} (x+1) = 3$.

6.29.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$;
2) $\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$;
3) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

6.30.•• Доведіть, що при $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$ виконується рівність $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

6.31.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg 5} + 5^{\lg x} = 250$;
2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18$.

6.32.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200$;
2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

6.33.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg(2y - 3x) = \lg(4 - 4x + y); \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x+2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x-2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2} y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

6.34.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x-2y) = \lg(5+x-3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x (3x+2y) = 2, \\ \log_y (2x+3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2 (x+y), \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x+y) = x - y. \end{cases}$

6.35.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 (x+8) = -x;$

2) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x.$

6.36.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}} (x-5) = x - 9;$

2) $\log_3^2 x + (x-1)\log_3 x = 12 - 3x.$

6.37.•• Розв'яжіть рівняння $\lg^2 (x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2\lg^2 (x-1).$

6.38.•• Розв'яжіть рівняння

$$2\lg^2 (2x-1) = \lg^2 (2x+1) - \lg(2x-1) \cdot \lg(2x+1).$$

6.39.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4;$

2) $\lg\sqrt{1+x} + 3\lg\sqrt{1-x} - 2 = \lg\sqrt{1-x^2}.$

6.40.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x\log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}} (x+1) = \dfrac{x-4}{x};$

2) $\log_{1+x+\sin x} (x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x} (3x+2).$

6.41.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3 - x) = 0$.

6.42.•• Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x+1) - 3)\sqrt{x - a} = 0$ залежно від значення параметра a?

6.43.•• Скільки розв'язків має рівняння $(\log_3(x-2) - 2)\sqrt{x - a} = 0$ залежно від значення параметра a?

6.44.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a)\log_2(3x - 7) = 0$$

має єдиний розв'язок?

6.45.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x + a)\log_3(2x - 5) = 0$$

має єдиний розв'язок?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.46. Знайдіть проміжки зростання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$;
2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$;
4) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

6.47. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, $x_0 = 3$;
2) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

7. Логарифмічні нерівності

Під час розв'язування багатьох логарифмічних нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 7.1. ***При $a > 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $0 < x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\log_2 x > 3$.

Розв'язання. Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то можна записати:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^3$. Звідси $x > 8$.

Відповідь: $(8; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

Розв'язання. Маємо: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$

Відповідь: $(0; 0,3]$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність

$$\log_2^2 (x - 1)^2 - \log_{2^{-1}} (x - 1) - 5 > 0.$$

Розв'язання. Оскільки областю визначення даної нерівності є проміжок $(1; +\infty)$, то виконується рівність

$$\log_2 (x - 1)^2 = 2 \log_2 (x - 1).$$

Тоді дану нерівність можна переписати так:

$$4 \log_2^2 (x - 1) + \log_2 (x - 1) - 5 > 0.$$

Нехай $\log_2(x-1)=t$. Отримуємо: $4t^2+t-5>0$; $\left[\begin{array}{l} t<-\frac{5}{4}, \\ t>1. \end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1)<-\frac{5}{4}, \\ \log_2(x-1)>1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1)<\log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2(x-1)>\log_2 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0<x-1<2^{-\frac{5}{4}}, \\ x-1>2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 1<x<1+\frac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x>3. \end{array}\right.$

Відповідь: $\left(1; 1+\frac{1}{\sqrt[4]{32}}\right)\cup(3;+\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\log_x 3-\frac{5}{2}-\log_{\frac{1}{3}} x>0$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{\log_3 x}-\frac{5}{2}+\log_3 x>0$.

Нехай $\log_3 x=t$. Тоді $\frac{1}{t}-\frac{5}{2}+t>0$. Звідси

$$\frac{2t^2-5t+2}{2t}>0;\quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t}>0.$$

Скориставшись методом інтервалів (рис. 7.1), отримуємо: $\left[\begin{array}{l} 0<t<\frac{1}{2}, \\ t>2. \end{array}\right.$

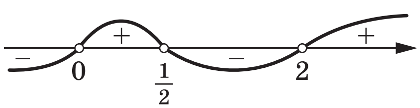


Рис. 7.1

Далі, $\left[\begin{array}{l} 0<\log_3 x<\frac{1}{2}, \\ \log_3 x>2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 1<x<\sqrt{3}, \\ x>9. \end{array}\right.$

Відповідь: $(1;\sqrt{3})\cup(9;+\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1}>0$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так: $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1}>$ $>\log_x 1$. Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x-1 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\dfrac{1}{3} < x < 1.$

2) $\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases}$ $1 < x < 2.$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $\log_3 (x + 7) < 4 - x$.

Розв'язання. Маємо: $\log_3 (x + 7) + x - 4 < 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = \log_3 (x + 7) + x - 4$. Вона зростає на $D(f) = (-7; +\infty)$. Зауважимо, що $f(2) = 0$. Отже, при $x > 2$ отримуємо, що $f(x) > f(2) = 0$, а при $-7 < x < 2$ отримуємо, що $f(x) < f(2) = 0$.

Відповідь: $(-7; 2)$. ◄

?

1. Яка нерівність випливає з нерівності $\log_a x_1 > \log_a x_2$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?
2. Якій системі рівносильна нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

7.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}} (x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}} (x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$.

7.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \dfrac{6}{7}$;
3) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;
5) $\log_{\frac{8}{11}} (2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;
6) $\log_{0,9} (2x + 1) > \log_{0,9} 5$.

7.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x > 2$;
2) $\log_5 x \leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;
5) $\log_2 (5x+1) > 4$;
6) $\log_{0,6} (x-2) < 2$;
7) $\log_3 (2x-1) \leqslant 3$;
8) $\log_7 (9x+4) \leqslant 2$;
9) $\log_{0,5} (2x+1) \geqslant -2$;
10) $\log_{0,2} (x+6) \geqslant -1$.

7.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;
2) $\log_4 x > 2$;
3) $\lg x < 5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}} (2x-3) \geqslant -2$;
6) $\log_9 (5x+6) \leqslant 2$.

7.5.• Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $\log_{0,25} (3x-5) > -3$;
2) $\log_3 (7-x) < 3$?

7.6.• Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

1) $\log_{0,5} (1-x) > -1$;
2) $\log_{36} (x+1) \leqslant 0,5$.

7.7.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg (2x+3) > \lg (x-1)$;
2) $\log_5 2x < \log_5 (x+1)$;
3) $\log_{0,2} (2x-1) > \log_{0,2} (3x-4)$;
4) $\log_{0,4} (x^2-3) < \log_{0,4} (x+3)$;
5) $\log_{0,7} (x^2-2x-3) \leqslant \log_{0,7} (9-x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2+x+31) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} (10x+11)$.

7.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 (2x-3) < \log_2 (x+1)$;
2) $\log_{0,6} (3-2x) > \log_{0,6} (5x-2)$;
3) $\lg (x^2-2) \geqslant \lg (4x+3)$;
4) $\log_{0,1} (10-2x) \geqslant \log_{0,1} (x^2-x-2)$.

7.9.• Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $\log_{\frac{1}{4}} (x+1) > -\frac{3}{2}$;
2) $\log_{\sqrt{3}} (12-x^2) > 2$;
3) $\log_{\frac{1}{7}} (3-x) > -1$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} (2x-5) > \log_{\frac{1}{3}} (x+1)$.

7.10.• Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $\log_{\frac{1}{6}} (x+2) \leqslant 0$;
2) $\log_{\frac{1}{2}} (6-x) > -2$;
3) $\log_{0,3} (4x-3) \geqslant \log_{0,3} (x+3)$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2-2x+1) \geqslant -1$.

7.11.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;
3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;
4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;
5) $\log_2\dfrac{4x-5}{4x+7}>0$;
6) $\lg\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}>0$;
7) $\log_3\dfrac{2x+5}{x+1}\leqslant 1$;
8) $\log_4\dfrac{3x-1}{x}\leqslant 0,5$.

7.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;
2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0,5$;
3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant -2$;
4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;
5) $\log_4\dfrac{3x-1}{x-1}\leqslant 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{3x+1}>1$.

7.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,3}(x^2+x-12)\geqslant\log_{0,3}(6x-6)$;
2) $\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3)$;
3) $\log_{0,8}(1-x^2)>\log_{0,8}(x^2+5x-2)$;
4) $2\log_2(2x+7)\geqslant 5+\log_2(x+2)$;
5) $\log_3(x^2+2x-3)\leqslant\log_3(x+9)$;
6) $\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+1)\geqslant 2\log_{\frac{1}{7}}(1-x)$.

7.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;
2) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant\log_{0,1}(x+1)$;
3) $2\log_2(x+5)\leqslant 3+\log_2(11+x)$;
4) $\lg(2x^2-9x+4)\leqslant 2\lg(x+2)$.

7.15.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x+\lg(x-3)>1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x<-1$;
3) $\log_2 x+\log_2(x+4)<5$;
4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2)\geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;
6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2-\log_3 2+1$.

7.16.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;
4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$.

7.17.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,2}^2 x\leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x\geqslant 4$;
3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;
4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}} x-8\leqslant 0$;
5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;
6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}} x+2\geqslant 0$.

7.18.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}^2 x\geqslant 9$;
2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x-\log_4 x-1<0$;
4) $\log_{0,2}^2 x-\log_{0,2} x-2\leqslant 0$.

7.19.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_2^2(4x)+2\log_2 x-11<0$;
2) $\log_3^2(27x)+3\log_3 x-19\geqslant 0$;
3) $\dfrac{\lg^2 x+\lg x-6}{\lg x}\geqslant 0$;
4) $2\log_5 x-\log_x 5\leqslant 1$.

7.20.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7^2(7x)-\log_7 x\geqslant 3$;
2) $\log_6^2\dfrac{x}{216}+8\log_6 x-12\leqslant 0$;
3) $\dfrac{\log_3^2 x-6\log_3 x+8}{\log_3 x-1}\geqslant 0$;
4) $\log_{0,5} x-2\log_x 0,5\leqslant 1$.

7.21.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{1,6}\log_{0,5}(x^2-x-6)\geqslant 0$;
2) $\log_{0,5}\log_4(2x^2+x-1)<1$;
3) $\log_{\frac{1}{9}}\log_3\dfrac{x}{x-1}\geqslant 0$;
4) $\log_{1,5}\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leqslant 0$.

7.22.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{7}{4}}\log_5(x^2-2x-3)\leqslant 0$;
2) $\log_{0,8}\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}>0$.

7.23.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{2x-3} x>1$;
2) $\log_{x-2}(2x-9)<0$;
3) $\log_{x+1}(5-x)>1$;
4) $\log_{x-2}(2x-7)<1$;
5) $\log_x(x+2)\leqslant 2$;
6) $\log_x(2x^2-3x)\leqslant 1$.

7.24.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{3x-2} x < 1$;
2) $\log_x (x^2 - 7x + 13) > 0$;
3) $\log_{x-1} (4 - x) < 1$;
4) $\log_x (6 - x) \geqslant 2$.

7.25.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2 \cdot 5^x - 1} > 5^x - 2$.

7.26.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt{20 \cdot 3^x - 11} > 3^x - 4$.

7.27.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2 + 7x - 10}\,\log_2 (x - 3) \leqslant 0$;

2) $\sqrt{4 - x^2}\left(\log_3 \dfrac{x+1}{x} + 2\right) \leqslant 0$;

3) $(x^2 - 2{,}8x + 1{,}8)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}} |x - 2|} \geqslant 0$.

7.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5}\,\log_3 (x - 2) \leqslant 0$;
2) $\dfrac{\log^2_{\sqrt{2}} (x - 3)}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0$.

7.29.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(2^x - a)\sqrt{x - 3} \geqslant 0$.

7.30.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(3^x - a)\sqrt{x - 2} \leqslant 0$.

7.31.* Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \log_x (2\sin x + 1) \leqslant 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

7.32.* Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} \log_x (2\cos x + 1) \leqslant 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.33. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на проміжку $[-2;\ 1]$.

7.34. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - x + 2$, яка паралельна прямій $x + y + 2 = 0$.

8. Похідні показникової та логарифмічної функцій

Чи існує функція, похідна якої дорівнює самій функції? Відповісти на це запитання нескладно. Наприклад, функція, яка є нульовою константою, має цю властивість.

А чи можна вказати таку функцію f, визначену на $\mathbb{R}$ і відмінну від нульової константи, що $f'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$? Відповідь на це запитання не є очевидною.

Виявляється, що серед показникових функцій $f(x) = a^x$ існує єдина функція така, що $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Для цієї функції число, яке є основою степеня, позначають буквою e, а сама функція має вигляд $f(x) = e^x$. Отже,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, що число e ірраціональне. Його можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$e = 2{,}71828182845\ldots\ .$$

Функцію $f(x) = e^x$ називають **експонентою.**

Відзначимо одну особливість графіка експоненти.

Маємо: $f'(0) = f(0) = e^0 = 1.$

Отже, дотична до графіка експоненти в точці з абсцисою, рівною нулю, має кутовий коефіцієнт, який дорівнює 1. Тобто ця дотична утворює кут $45°$ з додатним напрямом осі абсцис (рис. 8.1).

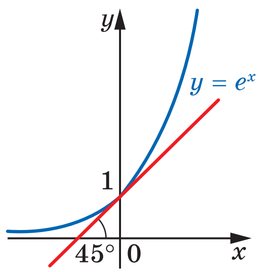


Рис. 8.1

Виведемо формулу для знаходження похідної показникової функції $f(x) = a^x$.

Маємо: $a = e^{\log_e a}$.

Тоді $a^x = e^{x \log_e a}$.

Користуючись правилом обчислення похідної складеної функції, запишемо: $(a^x)' = (e^{x \log_e a})' = e^{x \log_e a} \cdot (x \log_e a)' = a^x \log_e a.$

Логарифм з основою e називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln a$, тобто $\log_e a = \ln a$.

Тоді при $a > 0$, $a \neq 1$ можна записати:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Ця формула показує, що між значенням похідної показникової функції та відповідним значенням самої функції існує пряма пропорційна залежність. Коефіцієнт пропорційності дорівнює $\ln a$.

У п. 5 ми зазначили, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною. Знайдемо формулу для обчислення похідної логарифмічної функції.

Для будь-якого $x > 0$ виконується рівність $x = e^{\ln x}$. Тоді функції $f(x) = x$, $D(f) = (0;\ +\infty)$, і $g(x) = e^{\ln x}$, $D(g) = (0;\ +\infty)$, являють собою одну й ту саму функцію. Тому для будь-якого $x \in (0; +\infty)$ виконується рівність $f'(x) = g'(x)$, тобто $(x)' = (e^{\ln x})'$.

Ліва частина цієї рівності дорівнює 1. У правій частині отримуємо: $(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'$. Тоді $1 = x(\ln x)'$. Звідси

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Маємо: $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Отже,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Покажемо, як похідну показникової функції можна використати для знаходження похідної **степеневої функції** $f(x) = x^{\alpha}$, $D(f) = (0; +\infty)$, де α — довільне дійсне число.

Подамо функцію $f(x) = x^{\alpha}$ у вигляді складеної функції $f(x) = e^{\alpha \ln x}$. Оскільки функції $y = e^x$ і $y = \alpha \ln x$ є диференційовними, то функція f також диференційовна.

Обчислимо похідну функції f. Маємо:

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким чином,

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}}$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції: 1) $y = e^x(x^2 - 4x)$; 2) $y = x^3 \cdot 3^x$; 3) $y = e^{-7x}$; 4) $y = \dfrac{x^4}{\ln x}$; 5) $y = \log_6^2 x$; 6) $y = \log_2(3x - 4)$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи теорему про похідну добутку двох функцій, отримуємо:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$

$$= e^x \cdot (x^2 - 4x) + (2x - 4) \cdot e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Маємо:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2 (3 + x \ln 3).$$

3) Використовуючи теорему про похідну складеної функції, запишемо: $y' = (e^{-7x})' = e^{-7x} \cdot (-7x)' = -7e^{-7x}$.

4) Маємо: $y' = \dfrac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \dfrac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3 (4 \ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

5) Застосувавши теорему про похідну складеної функції, отримуємо:

$$y' = \left(\log_6^2 x\right)' = 2 \log_6 x \cdot (\log_6 x)' = \frac{2 \log_6 x}{x \ln 6}.$$

6) Маємо:

$$y' = (\log_2 (3x - 4))' = \frac{1}{(3x - 4) \ln 2} \cdot (3x - 4)' = \frac{3}{(3x - 4) \ln 2}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x} + x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 4x - 9$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт прямої $y = 4x - 9$ дорівнює 4, то кутовий коефіцієнт шуканої дотичної $k = 4$. Знайдемо абсцису x_0 точки дотику. Маємо: $f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Оскільки $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4$; $3e^{3x_0} = 3$; $e^{3x_0} = 1$; $x_0 = 0$. Звідси $f(x_0) = 1$.

Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 4x + 1$.

Відповідь: $y = 4x + 1$. ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$; 2) $f(x) = x \ln x$; 3) $f(x) = \lg^3 x - 3 \lg x + 2$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = (e^{6x - x^2 + 5})' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6x - x^2 + 5)' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6 - 2x).$$

Дослідивши знак похідної функції f (рис. 8.2), отримуємо, що функція f зростає на проміжку $(-\infty; 3]$, спадає на проміжку $[3; +\infty)$, $x_{\max} = 3$.

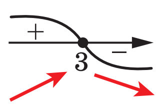


Рис. 8.2

2) Маємо:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Дослідимо знак f' на $D(f) = (0; +\infty)$.

Маємо: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Звідси $x > \dfrac{1}{e}$. Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{e}$.

Отримуємо, що функція f зростає на проміжку $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{e}$ (рис. 8.3).

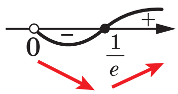


Рис. 8.3

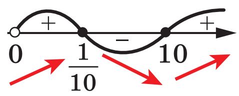


Рис. 8.4

3) Маємо: $f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \frac{1}{x \ln 10} =$

$$= \frac{3\lg^2 x}{x \ln 10} - \frac{3}{x \ln 10} = \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x \ln 10} = \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x \ln 10}.$$

Тоді $f'(x) = 0$ при $\lg x = -1$ або $\lg x = 1$. Отже, дана функція має дві критичні точки: $x = \frac{1}{10}$ і $x = 10$. Дослідивши знак похідної функції f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 8.4), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжках $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і $[10; +\infty)$, спадає на проміжку $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. ◄

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що:

1) показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз;

2) при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору, а при $0 < a < 1$ — опуклою вниз.

Розв'язання. 1) Маємо: $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$.

Оскільки $y'' \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз.

2) Запишемо: $y' = \frac{1}{x \ln a}$, $y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}$.

Якщо $a > 1$, то $\ln a > 0$, тому $y'' \leqslant 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$. Отже, при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору.

При $0 < a < 1$ аналогічно доводимо, що $y'' \geqslant 0$ та логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вниз. ◄

1. Поясніть, яке число позначають буквою e.
2. Яку функцію називають експонентою?
3. Який кут утворює дотична до графіка функції $y = e^x$ у точці з абсцисою, рівною нулю, з додатним напрямом осі абсцис?
4. Що називають натуральним логарифмом?
5. Як позначають натуральний логарифм?
6. Чому дорівнює похідна функції $y = a^x$?
7. Чому дорівнює похідна функції $y = \ln x$? функції $y = \log_a x$?

ВПРАВИ

8.1.° Знайдіть похідну функції:
1) $y = 4e^x$;
2) $y = e^{5x}$;
3) $y = x^3e^x$;
4) $y = e^x \sin x$;
5) $y = \frac{e^x}{x-2}$;
6) $y = e^x + e^{-x}$;
7) $y = 5^x$;
8) $y = 2^{x^2}$;
9) $y = 7^{2x-3}$;
10) $y = x \cdot 3^x$;
11) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$;
12) $y = 0{,}3^{\operatorname{tg} x}$.

8.2.° Знайдіть похідну функції:
1) $y = e^{-2x}$;
2) $y = x^6e^x$;
3) $y = e^x \cos x$;
4) $y = \frac{x+1}{e^x}$;
5) $y = 6^x$;
6) $y = 3^{4x+1}$;
7) $y = 10^{-x}$;
8) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$;
9) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg} x}$.

8.3.° Знайдіть похідну функції:
1) $y = \log_9 x$;
2) $y = \ln 2x$;
3) $y = \lg(x^2 - 4)$;
4) $y = \ln^2 x$;
5) $y = \ln \sin x$;
6) $y = \frac{\ln x}{x^3}$;
7) $y = \log_{0,2}(2x^2 + x - 4)$;
8) $y = \ln(1 - 0{,}2x)$;
9) $y = x^5 \ln x$.

8.4.° Знайдіть похідну функції:
1) $y = \lg x$;
2) $y = \ln(5x - 4)$;
3) $y = \ln^3 x$;
4) $y = \lg \cos x$;
5) $y = \frac{x^5}{\ln x}$;
6) $y = \log_2(x^2 + 6)$.

8.5.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:
1) $f(x) = e^{3x} - 3x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-2x} \cos 2x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 3^{3x - 4x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

8.6.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:
1) $f(x) = e^{5x} + e^{-4x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-x} \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 4^{x^2 - 3x - 4}$, $x_0 = -1$.

8.7.$^{\bullet}$ Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\frac{1}{6}\ln(-12x)$, $x_0=-\frac{1}{6}$;
2) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x^2$, $x_0=4$;
3) $f(x)=\log_5(x^2+3x-2)$, $x_0=-4$;
4) $f(x)=\ln\sin\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

8.8.$^{\bullet}$ Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x)=\ln(6x-5)$, $x_0=3$;
2) $f(x)=8\ln\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{1}{2}$;
3) $f(x)=\lg(x^2-5x+8)$, $x_0=2$;
4) $f(x)=\ln\cos\frac{x}{3}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

8.9.$^{\bullet}$ Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x)=e^{2x+1}$, $x_0=-1$;
2) $f(x)=x-\ln x$, $x_0=3$.

8.10.$^{\bullet}$ Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x)=e^{1-x}$, $x_0=1$;
2) $f(x)=\log_5(x+2)$, $x_0=-1$.

8.11.$^{\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x)=e^{-2x}$, $x_0=0$;
2) $f(x)=e^x+\sin x$, $x_0=0$;
3) $f(x)=x\cdot 2^x$, $x_0=1$;
4) $f(x)=6^{3x+4}$, $x_0=-1$;
5) $f(x)=3x+\ln x$, $x_0=1$;
6) $f(x)=\ln(5+4x)$, $x_0=-1$;
7) $f(x)=\log_3(2x+1)$, $x_0=1$;
8) $f(x)=2\ln(x-2)$, $x_0=4$.

8.12.$^{\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x)=e^{5x}$, $x_0=0$;
2) $f(x)=2e^x-\cos x$, $x_0=0$;
3) $f(x)=3^{2x-3}$, $x_0=2$;
4) $f(x)=4x-\ln 4$, $x_0=1$;
5) $f(x)=\ln(3x-5)$, $x_0=2$;
6) $f(x)=\log_2(x+3)$, $x_0=1$.

8.13.$^{\bullet}$ Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції:

1) $f(x)=e^x+e^{-x}$;
2) $f(x)=(2^x-7)(2^x-9)$.

8.14.$^{\bullet}$ Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x)=(5^x-65)(5^x+15)$.

8.15.$^{\bullet\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x)=e^x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=ex-6$;
2) $f(x)=e^{5x+2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=5x+7$;
3) $f(x)=e^{-2x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=-x$;
4) $f(x)=\ln(3x-2)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=3x-2$.

8.16.$^{\bullet\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x)=e^{6-7x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=5-7x$;
2) $f(x)=e^x-e^{-x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y=2x-3$;

3) $f(x) = 6x - \ln x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$;
4) $f(x) = \ln(1 - x)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 1 - x$.

8.17.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;
7) $f(x) = e^{4x - x^2 + 1}$;
8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$;
9) $f(x) = \dfrac{4x}{e^x}$;
10) $f(x) = x^3 \ln x$;
11) $f(x) = \ln x - x$;
12) $f(x) = x^2 \lg x$;
13) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$;
14) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
15) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;
17) $f(x) = 2\ln^3 x - 3\ln^2 x$;
18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

8.18.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$;
2) $f(x) = e^{x^4 - 2x^2}$;
3) $f(x) = 5^{-x^3 + 3x + 1}$;
4) $f(x) = (4x - 1)e^{2x}$;
5) $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$;
6) $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$;
7) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;
8) $f(x) = x\ln^2 x$;
9) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;
10) $f(x) = \ln x^2 + \dfrac{2}{x}$;
11) $f(x) = \ln^3 x - 12\ln x$;
12) $f(x) = \lg^4 x - 2\lg^2 x$.

8.19.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = e^x + x$ на проміжку $[-1;\ 1]$;
2) $f(x) = x^2 e^{2x}$ на проміжку $[-2;\ 1]$;
3) $f(x) = 7^{x^2 - 2x}$ на проміжку $[0;\ 2]$;
4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ на проміжку $[-1;\ 1]$.

8.20.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ на проміжку $[1;\ 3]$;
2) $f(x) = 5^{x^2 + 2x}$ на проміжку $[-2;\ 1]$.

8.21.•• Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = xe^x$; 3) $f(x) = e^{-x^2}$; 5) $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

2) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$; 4) $f(x) = x^2 - 2\ln x$;

8.22.•• Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$; 2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 3) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$.

8.23.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = e^x - x - 1$ та доведіть, що при $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $e^x \geqslant 1 + x$.

8.24.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = \ln(1 + x) - x$ та доведіть, що при $x > -1$ виконується нерівність $\ln(1 + x) \leqslant x$.

8.25.•• При яких значеннях a функція $y = 4\ln x - ax - 7$ є зростаючою?

8.26.•• При яких значеннях a функція $y = 2 - 3e^x - ax$ є спадною?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.27. Розв’яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \cos x - 1$; 2) $\cos 2x = \sin x$.

8.28. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{8x - 2x^3}$; 2) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x - 7}}$; 3) $f(x) = (x^2 - x - 6)^{\frac{1}{6}}$.

МОЯ ЛЮБОВ — УКРАЇНА І МАТЕМАТИКА

Цей патріотичний вислів видатного українського математика, академіка Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам’ятника науковцеві (див. форзац 1).

Михайло Кравчук народився в с. Човниці на Волині. Закінчивши із золотою медаллю Луцьку гімназію, а потім математичне відділення Київського університету, він залишився працювати в Києві.

Висока наукова продуктивність і працездатність, оригінальність і гнучкість мислення М. П. Кравчука дозволили йому отримати важливі наукові результати в алгебрі та теорії чисел, теорії функцій та математичному аналізі, диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії ймовірностей та статистиці тощо. Відомо, що його науковий доробок був значною мірою використаний американськими вченими під час створення першого комп'ютера.

М. П. Кравчук брав активну участь у створенні української наукової термінології, одним із перших почав писати наукові праці українською мовою, хоча вільно володів російською, французькою, німецькою, італійською, польською та іншими мовами.

Великого значення надавав М. П. Кравчук навчальній роботі з молоддю, зокрема, за його ініціативи в 1935 р. було проведено першу Київську математичну олімпіаду для школярів. Спробуйте свої сили в розв'язанні задач цієї олімпіади.

Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

1. Обчисліть значення виразу $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$ при $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$.

2. Розв'яжіть рівняння $4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20{,}75} = \sqrt{2}$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$

4. Додатні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

5. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Доведіть, що

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

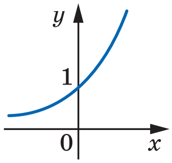
1. Яка область визначення функції $y = \dfrac{7}{7^x - 1}$?

А) $(-\infty;\ +\infty)$;	В) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$;

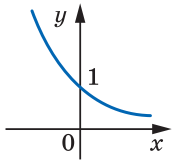
Б) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;	Г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 3^{-x}$. Укажіть цей рисунок.

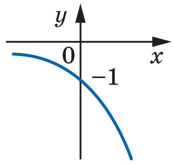
А)



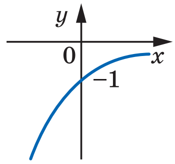
Б)



В)



Г)



3. Чому дорівнює корінь рівняння $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{15}{4}\right)^x = \dfrac{4}{9}$?

А) 2;	Б) −2;	В) 1;	Г) −1.

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $(0{,}6)^{x^2} > 0{,}6$.

А) $(-\infty;\ 1)$;	В) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

Б) $(1;\ +\infty)$;	Г) $(-1;\ 1)$.

5. Розв'яжіть рівняння $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$.

А) 0;	Б) 1;	В) 2;	Г) 3.

6. Обчисліть значення виразу $\log_{0,2} 25 - \log_3 \dfrac{1}{27}$.

А) 1;	Б) −1;	В) 5;	Г) −5.

7. Подайте число 3 у вигляді степеня числа 10.

А) $3 = 10^{\log_3 10}$;	В) $3 = 10^{\lg 3}$;

Б) $3 = 10^{\log_3 3}$;	Г) подати неможливо.

8. Чому дорівнює значення виразу $\log_6 108 - \log_6 3$?

А) −1;	Б) 2;	В) −3;	Г) 4.

9. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 5$.

А) $(-\infty;\ 5)$;	Б) $(5;\ +\infty)$;	В) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$;	Г) $(0;\ 5)$.

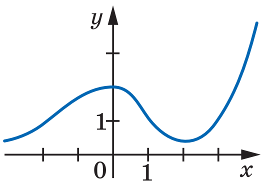
10. Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

А) $(2;\ 1)$;	Б) $(2;\ -1)$;	В) $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$;	Г) $(2;\ 0)$.

11. При яких значеннях a і b виконується рівність $\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)$?

А) $a > 0,\ b < 0$; В) $a < 0,\ b < 0$;
Б) $a < 0,\ b > 0$; Г) таких значень не існує.

12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Скільки коренів має рівняння $\ln f(x) = 0$?



А) Жодного кореня;
Б) два корені;
В) три корені;
Г) визначити неможливо.

13. Укажіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{0,2}(3 - 2x) < -1$.

А) -2; Б) -1; В) 1; Г) такого розв'язку не існує.

14. Яка множина розв'язків нерівності $\log_x \sqrt{x} < 1$?

А) $(-\infty;\ +\infty)$; Б) $(0;\ +\infty)$; В) $(0;1) \cup (1;+\infty)$; Г) $\varnothing$.

15. Розв'яжіть рівняння $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

А) 0; 5; Б) 0; В) 5; Г) 1; 4.

16. Порівняйте числа $\log_4 5$, $\log_6 4$, $\log_{0,2} 3$.

А) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; В) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
Б) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; Г) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Знайдіть похідну функції $y = 5^{2x}$.

А) $y' = 2 \cdot 5^{2x}$; В) $y' = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5$;
Б) $y' = 2x \cdot 5^{2x-1}$; Г) $y' = 5^{2x} \ln 5$.

18. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

А) $(-\infty;\ 0)$, $(1;\ e]$; В) $(0;\ e]$;
Б) $(0;\ 1)$, $(1;\ e]$; Г) $(0;\ 1)$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Логарифм

Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b$$

Основні властивості логарифмів

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконуються рівності:

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

3) $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$ для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$;

4) $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$ для будь-якого $\beta \neq 0$;

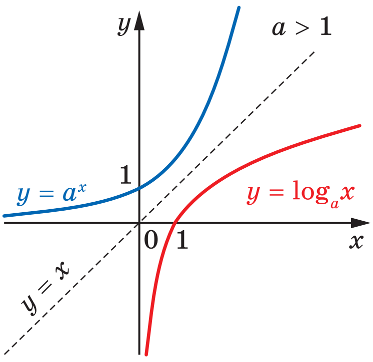
5) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, де $c > 0$, $c \neq 1$.

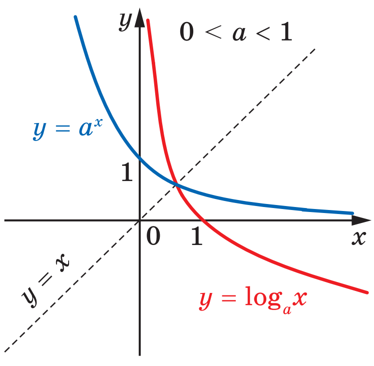
Властивості показникової та логарифмічної функцій

	Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	**Логарифмічна функція** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$(0;\ +\infty)$
Область значень	$(0;\ +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	–	$x = 1$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на $(0;\ 1)$, $y > 0$ на $(1;\ +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1;\ +\infty)$, $y > 0$ на $(0;\ 1)$

	Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	**Логарифмічна функція** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

Графіки показникової та логарифмічної функцій





Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей

Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, рівносильне будь-якій із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

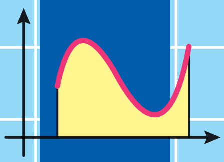
Похідні показникової та логарифмічної функцій

$(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Похідна степеневої функції

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$



§ 2. Інтеграл і його застосування

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з операцією, оберненою до диференціювання, і вивчите властивості цієї операції.
- Ви розширите клас фігур, площі яких зможете знаходити.
- Ознайомитеся з поняттям «визначений інтеграл» і з'ясуєте його геометричний зміст.

9. Первісна

Ви вмієте за заданою функцією знаходити її похідну, знаєте, що похідна має різноманітне застосування. Зокрема, уміючи диференціювати, за заданим законом $y = s(t)$ руху матеріальної точки по координатній прямій можна знайти закон $y = v(t)$ зміни її швидкості, а саме:

$$v(t) = s'(t).$$

У механіці нерідко доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити закон руху за відомим законом зміни швидкості.

Наприклад, із курсу фізики вам відомий такий факт: коли швидкість змінюється за законом $v(t) = gt$ і $s(0) = 0$, то закон руху задається формулою $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

Означення. **Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність**

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних із первісною функції, проміжок I опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Наприклад, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Розглянемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Проте на проміжку $[0; +\infty)$ функція $F(x) = \sqrt{x}$ не є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, оскільки в точці $x_0 = 0$ не виконується рівність $F'(x_0) = f(x_0)$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - \sqrt{2}$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - \sqrt{2}$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

Теорема 9.1 (основна властивість первісної). ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Доведення. Оскільки функція F — первісна функції f на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + C$ є первісною функції f на проміжку I.

Нехай функція G — одна з первісних функції f на проміжку I. Тоді $G'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Маємо:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Згідно з ознакою сталості функції отримуємо, що функція $y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I, тобто $G(x) - F(x) = C$, де C — деяке число.

Звідси $G(x) = F(x) + C$. ◄

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції f на проміжку I.

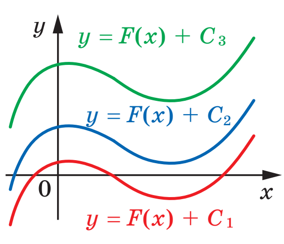


Рис. 9.1

Якщо хочуть наголосити, що запис $F(x) + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних саме функції f, то записують:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C — довільне число.

Запис $\int f(x)dx$ називають **невизначеним інтегралом** функції f (читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$. З теореми 9.1 випливає, що запис $y = x^3 + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції $f(x) = 3x^2$. Тому

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Під час розв'язування задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

Покажемо на прикладах, за допомогою яких міркувань можна обґрунтувати твердження, наведені в таблиці первісних на форзаці 3.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$.

Розв'язання. Оскільки $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тоді згідно з теоремою 9.1 запис $\frac{x^6}{6} + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних. ◄

З розв'язання прикладу 1 випливає, що

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. На проміжку $(0; +\infty)$ має місце рівність $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

на проміжку $(-\infty; 0)$ мають місце рівності $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$.

Отже, функція $y = \ln x$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$, а функція $y = \ln(-x)$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty; 0)$.

Оскільки $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (0; +\infty), \\ \ln(-x), & \text{якщо } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ то на будь-якому проміжку, що не містить точку 0, загальним виглядом первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$ є запис

$$\ln|x| + C, \text{ де } C \text{ — довільне число.}$$ ◄

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = 2\cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Розв'язання. Оскільки $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функція $y = 2\sin x$ є однією з первісних функції $f(x) = 2\cos x$. Отже, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + C$, де C — деяке число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тоді $2\sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Звідси $C = 2$.

Таким чином, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + 2$. ◄

У таблиці на форзаці 3 наведено первісну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Для того щоб знайти цю первісну на проміжку $(0; +\infty)$, часто користуються й такими міркуваннями.

Функція $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, є первісною функції $f(x) = x^{\alpha}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то функція $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ є первісною функції f на проміжку $(0; +\infty)$. Ураховуючи рівності $\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$, можна записати: $F(x) = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

?

1. Яку операцію називають інтегруванням?
2. Яку функцію F називають первісною функції f?
3. Сформулюйте основну властивість первісної.
4. Який запис називають загальним виглядом первісної функції f на проміжку I?

5. Яким є загальний вигляд первісних функції $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -1$? $f(x)=\frac{1}{x}$? $f(x)=\sqrt[n]{x}$? $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$? $f(x)=e^x$? $f(x)=a^x$? $f(x)=\sin x$? $f(x)=\cos x$? $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$? $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$?

ВПРАВИ

9.1.° Установіть, чи є функція F первісною функції f:

1) $F(x)=3x^2+x-2$, $f(x)=6x+1$;
2) $F(x)=x^{-4}$, $f(x)=-4x^{-5}$ на проміжку $(0;+\infty)$;
3) $F(x)=\sin x+3$, $f(x)=\cos x+3$;
4) $F(x)=\cos 2x$, $f(x)=-\sin 2x$;
5) $F(x)=\sqrt{2x+1}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на проміжку $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$;
6) $F(x)=5^x$, $f(x)=5^x\ln 5$.

9.2.° Доведіть, що функція F є первісною функції f на проміжку I:

1) $F(x)=x^4-2x^2+6$, $f(x)=4x^3-4x$, $I=(-\infty;+\infty)$;
2) $F(x)=\frac{1}{x^3}$, $f(x)=-\frac{3}{x^4}$, $I=(-\infty;0)$;
3) $F(x)=5-3\sqrt{x}$, $f(x)=-\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I=(0;+\infty)$;
4) $F(x)=3\operatorname{tg}\frac{x}{3}+6$, $f(x)=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}$, $I=\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

9.3.° Чи є функція $F(x)=\frac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(0;+\infty)$; 2) $(-2;2)$; 3) $(-\infty;0]$; 4) $(-6;0)$?

9.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=5$;
2) $f(x)=x$;
3) $f(x)=x^6$;
4) $f(x)=2^x$;
5) $f(x)=\frac{1}{x^7}$ на проміжку $(-\infty;0)$;
6) $f(x)=\sqrt{x}$ на проміжку $[1;+\infty)$;
7) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ на проміжку $(-\infty;-3)$;
8) $f(x)=x^{-5}$ на проміжку $(0;+\infty)$.

9.5.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = x^8$;
3) $f(x) = \frac{1}{3^x}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^{20}}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;
5) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ на проміжку $(4;\ +\infty)$;
6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ на проміжку $[0{,}5;\ +\infty)$.

9.6.• Перевірте, що:

1) $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C$;
2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \sqrt{x^2+4} + C$,

де C — довільне число.

9.7.• Перевірте, що функція $F(x) = \frac{x-2}{3x-1}$ є первісною функції $f(x) = \frac{5}{(3x-1)^2}$ на кожному з проміжків $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$ і $\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$, та запишіть загальний вигляд первісних функції f на кожному з указаних проміжків.

9.8.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x) = x^2$, $A\ (-1;\ 3)$;
2) $f(x) = \sin x$, $F(\pi;\ -1)$;
3) $f(x) = e^x$, $C\ (0;\ -6)$.

9.9.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1;\ \frac{5}{4}\right)$;
2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5}{2}\right)$;
3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2;\ \frac{9}{\ln 3}\right)$.

9.10.• Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення в указаній точці:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0;\ +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty;\ 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty;\ 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

9.11.• Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення в указаній точці:

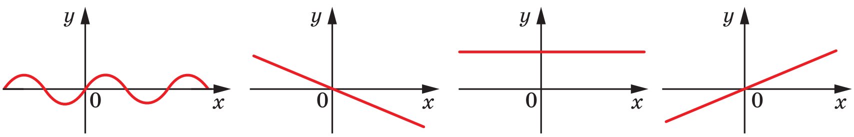
1) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0;\ \pi)$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0;\ +\infty)$, $F(16) = 10$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = (0;\ +\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right) = -2$;

4) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(5) = 1$.

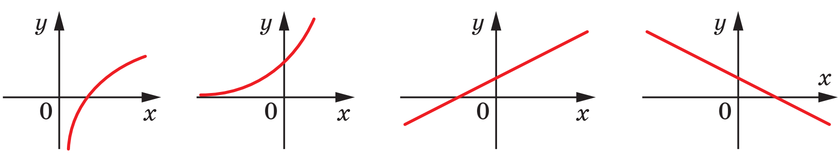
9.12.• Укажіть на рисунку 9.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x) = \cos 3$.



а *б* *в* *г*

Рис. 9.2

9.13.• Укажіть на рисунку 9.3 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x) = \ln 2$.



а *б* *в* *г*

Рис. 9.3

9.14.• Для функції $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2}$ знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

9.15.•• Доведіть, що функції $F_1(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ і $F_2(x) = -\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ є первісними функції $f(x) = \cos 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_1(x) = F_2(x) + C$?

9.16.•• Доведіть, що функції $F_1(x) = \sin^2 x$ і $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ є первісними функції $f(x) = \sin 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_2(x) = F_1(x) + C$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.17. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(1{,}5x - 3) \leqslant 1 + 2\log_2 0{,}3$; 2) $\log_{0,4}(3{,}5 - 5x) \geqslant 2\log_{0,4} 0{,}2 - 1$.

9.18. Спростіть вираз:

1) $2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \dfrac{2\sin(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha \sin(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{1 + \sin(\pi + \alpha)} + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

10. Правила знаходження первісної

Знаходячи похідні функцій, ви користувалися правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо три правила знаходження первісних.

Теорема 10.1. ***Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.***

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх x із проміжку I маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacktriangleleft$$

З теореми 10.1 випливає, що

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

де C — довільне число.

Аналогічно можна довести, що

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема 10.2. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Доведіть теорему 10.2 самостійно.

Тепер можна записати:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де C — довільне число.

Теорема 10.3. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною функції $y = f(kx+b)$.***

Доведення. Використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, запишемо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b). \blacktriangleleft$$

Коротко записують:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C,$$

де C — довільне число.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що функція $y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ є первісною функції $y = x^{\alpha}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки на даному проміжку виконується рівність $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то функція $y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, тобто функція $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, є первісною для функції $y = \sqrt{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Оскільки $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, то функція $y = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$, тобто функція $y = -\frac{1}{x}$, є первісною функції $y = \frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Тоді за теоремою 10.2 функція $y = -\frac{2}{x}$ є первісною функції $y = \frac{2}{x^2}$.

Скориставшись теоремою 10.1, отримуємо, що функція $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x}$ є первісною заданої в умові функції f. Тоді запис $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C$ є загальним виглядом первісних функції f. ◄

Розв'язання прикладу 1 можна записати й так:

$$\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\sqrt{x}\,dx + \int\frac{2}{x^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C.$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть одну з первісних функції:

1) $y = \cos\,(2x + 1)$;

2) $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ на проміжку $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$, то за теоремою 10.3 функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$, тобто функція $y = \frac{1}{2}\sin(2x+1)$, є первісною функції $y = \cos\,(2x + 1)$.

2) Оскільки $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, то первісною функції $f(x) = \frac{1}{x^3}$ є функція $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$, тобто $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Тоді первісна функції $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ має вигляд $y = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, тобто $y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = \frac{1}{4x-3}$ знайдіть первісну на проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 10.3 запис $\frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції f на заданому проміжку.

На проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ шукана первісна має вигляд $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x)+C$, де C — деяке число. З умови випливає, що $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Тоді $\frac{1}{4}\ln\left(3-4\cdot\frac{1}{2}\right)+C=2$, звідси $C=2$.

Отже, $F(x)=\frac{1}{4}\ln(3-4x)+2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t)=\frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Знайдіть закон руху $y=s(t)$, якщо $s(0)=3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах).

Розв'язання. Функція $y=s(t)$ є первісною функції $y=v(t)$ на проміжку $[0; +\infty)$. Тоді можна записати:

$$s(t)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2t+1}+C, \text{ тобто } s(t)=3\sqrt{2t+1}+C,$$

де C — деяке число. Знайдемо C з умови $s(0)=3$. Маємо:

$$3\sqrt{2\cdot 0+1}+C=3, \text{ звідси } C=0.$$

Отже, шуканий закон руху задається формулою

$$s(t)=3\sqrt{2t+1}.$$ ◄

У 10 класі ви дізналися, як знайти похідні добутку функцій, частки функцій та похідну складеної функції. Можливо, після ознайомлення з матеріалом цього пункту у вас виникло запитання: як знайти первісні функцій $y=f(x)\,g(x)$, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ або $y=f(g(x))$, якщо відомі первісні функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$. На жаль, загальних правил знаходження первісних таких функцій не існує.

?

Сформулюйте правила знаходження первісних.

ВПРАВИ

10.1.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=4-2x$;
2) $f(x)=3x^2-x+5$;
3) $f(x)=5\sin x+\cos x$;
4) $f(x)=x^3(2-x^2)$;

5) $f(x)=5e^x-2\cdot 3^x$;

6) $f(x)=\dfrac{6}{x}-x^3$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$;

7) $f(x)=\dfrac{9}{\sin^2 x}+\dfrac{x^4}{4}$ на проміжку $(0;\ \pi)$;

8) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}+x^3$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$;

10) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{6}{x^5}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

10.2.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=x+3$;

2) $f(x)=x^2+4x-1$;

3) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+2^x\ln 2$;

5) $f(x)=\dfrac{9}{\cos^2 x}-3\sin x$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $f(x)=5\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;

7) $f(x)=6x^2-\dfrac{2}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;

8) $f(x)=\dfrac{9}{x^{10}}+\dfrac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

10.3.• Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\sin 5x$;

2) $f(x)=2\cos\dfrac{x}{2}$;

3) $f(x)=\left(6x+\dfrac{1}{2}\right)^3$;

4) $f(x)=\left(\dfrac{x}{7}-2\right)^4$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$;

6) $f(x)=7^{3x}$;

7) $f(x)=-\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x)=\dfrac{8}{\sin^2 4x}$ на проміжку $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

11) $f(x)=\sqrt{x+4}$ на проміжку $[-4;\ +\infty)$;

12) $f(x)=\dfrac{6}{3x+2}$ на проміжку $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

13) $f(x)=\dfrac{4}{(4x-3)^2}$ на проміжку $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)$;

14) $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ на проміжку $(-\infty;\ 2]$.

10.4.• Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\sin\frac{x}{4}$;

2) $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$;

3) $f(x)=e^{5-\frac{x}{2}}$;

4) $f(x)=\frac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x)=(2x-3)^5$;

6) $f(x)=\frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x)=\frac{3}{(3x-1)^3}$ на проміжку $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$;

8) $f(x)=\frac{1}{3-x}$ на проміжку $(-\infty;\ 3)$;

9) $f(x)=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{5}}$ на проміжку $(0;\ 5\pi)$;

10) $f(x)=\sqrt[4]{4x+7}$ на проміжку $\left(-\frac{7}{4};+\infty\right)$.

10.5.• Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, яка задовольняє дану умову:

1) $f(x)=1-2x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(3)=2$;

2) $f(x)=3x^2-4x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(1)=4$;

3) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(\pi)=7$;

4) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$;

5) $f(x)=4-\frac{1}{x^2}$, $I=(0;\ +\infty)$, $F\left(\frac{1}{4}\right)=1$;

6) $f(x)=\frac{7}{x-4}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $I=(4;\ +\infty)$, $F(5)=6$;

7) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{6x+1}}$, $I=\left(-\frac{1}{6};+\infty\right)$, $F(4)=7$;

8) $f(x)=e^{3x}$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(0)=1$;

9) $f(x)=(2-3x)^2$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(1)=0$;

10) $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2\left(6x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $I=\left(-\dfrac{\pi}{18};\dfrac{\pi}{9}\right)$, $F(0)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

10.6.$^{\bullet}$ Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x)=3-6x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $A\ (-1;\ 0)$;
2) $f(x)=4x^3-6x^2+1$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $B\ (1;\ 5)$;
3) $f(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;\ +\infty)$, $C\ (4;\ 10)$;
4) $f(x)=2\sin 3x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $D\left(\dfrac{\pi}{3};0\right)$;
5) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{x}{2}-2}}$, $I=(4;\ +\infty)$, $E\ (6;\ 12)$;
6) $f(x)=e^{2x+1}$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $M\left(-\dfrac{1}{2};4\right)$;
7) $f(x)=\dfrac{1}{4x-3e^2}$, $I=\left(\dfrac{3e^2}{4};+\infty\right)$, $K\ (e^2;\ 6)$;
8) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{8}}$, $I=(0;\ 8\pi)$, $N\ (2\pi;\ -3)$.

10.7.$^{\bullet}$ Для функції $f(x)=4x^3+4x$ знайдіть первісну F, один із нулів якої дорівнює -1. Знайдіть решту нулів цієї первісної.

10.8.$^{\bullet}$ Для функції $f(x)=x^2-12$ знайдіть первісну F, один із нулів якої дорівнює 3.

10.9.$^{\bullet}$ Функції F_1 і F_2 є первісними функції f на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$. Графік функції F_1 проходить через точку A, а функції F_2 — через точку B. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище, якщо:

1) $f(x)=5x^4-3x^2-2$, $A\ (1;\ 2)$, $B\ (0;\ 5)$;
2) $f(x)=(2x-1)^2$, $A\ (2;\ 6)$, $B\ (-1;\ 1)$?

10.10.$^{\bullet}$ Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$. Графік функції F_1 проходить через точку $M\ (1;\ 9)$, а функції F_2 — через точку $N\ (10;\ 8)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище?

10.11.• Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат.

10.12.• Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка в будь-який момент часу t визначається за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

10.13.• Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(-\infty; +\infty)$, графік якої проходить через точку $A\ (-1; 6)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $6x^2 - 5x^4$.

10.14.• Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(0; +\infty)$, графік якої проходить через точку $B\ (4; -5)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $\frac{3}{\sqrt{x}} + 1$.

10.15.•• Знайдіть:

1) $\int \sin^2 x\,dx$; 2) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$; 3) $\int \sin\frac{7x}{3} \sin\frac{5x}{3}\,dx$.

10.16.•• Знайдіть:

1) $\int \cos^2 2x\,dx$; 2) $\int \cos x \cos 8x\,dx$.

10.17.•• Для функції $f(x) = 2x^2 + 3x$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = 5x - 2$ є дотичною до її графіка.

10.18.•• Для функції $f(x) = x^2 - 4$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = -3$ є дотичною до її графіка.

10.19.•• Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

10.20.•• Для функції $f(x) = x + 1$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

10.21.•• Василь Заплутайко шукає первісну функції $y = \cos x^2$ так:

1) робить заміну $x^2 = t$ і отримує функцію $y = \cos t$;
2) далі шукає первісну функції $y = \cos t$ і отримує $y = \sin t$;
3) потім замість t підставляє значення $t = x^2$ і робить висновок, що кожна первісна має вигляд $y = \sin x^2 + C$, де C — деяке число.

У чому полягає помилка Василя?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$;
2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$;
4) $\sin 7x = \sin 3x$.

10.23. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}} + \log_3(x^2 + 2{,}5x)$;
2) $f(x) = \sqrt{\frac{2x + 8}{x^2 - x - 6}}$;
3) $f(x) = \lg\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x\right) + \sqrt{7 - x}$;
4) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \log_{0,4}(1 - x)$.

11. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

Розглянемо функцію f, яка є неперервною на проміжку $[a; b]$ і набуває на ньому невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 11.1 наведено приклади криволінійних трапецій.

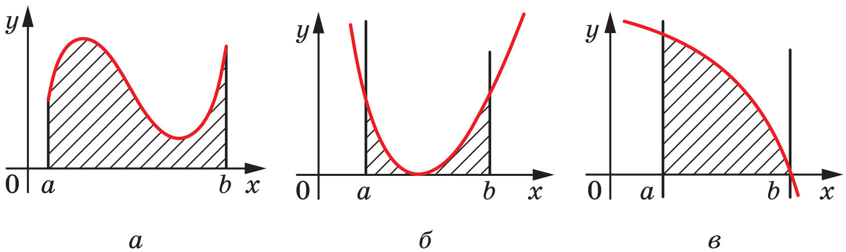


Рис. 11.1

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

Теорема 11.1. ***Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою***

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на відрізку $[a; b]$.

Доведення. Розглянемо функцію $y = S(x)$, де $x \in [a; b]$, яку визначено таким правилом.

Якщо $x = a$, то $S(a) = 0$; якщо $x \in (a;\ b]$, то $S(x)$ — це площа криволінійної трапеції, показаної штриховкою на рисунку 11.2.

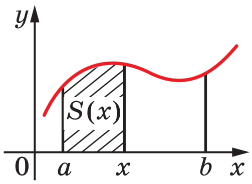


Рис. 11.2

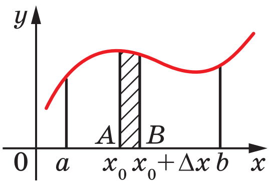


Рис. 11.3

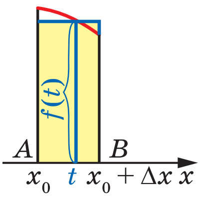


Рис. 11.4

Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a;\ b]$.

Нехай x_0 — довільна точка відрізка $[a;\ b]$ і Δx — приріст аргументу функції $y = S(x)$ у точці x_0. Обмежимося розглядом випадку, коли $\Delta x > 0$ (випадок, коли $\Delta x < 0$, розглядають аналогічно).

Маємо:

$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Отримуємо, що ΔS — це площа криволінійної трапеції, заштрихованої на рисунку 11.3.

На відрізку AB як на стороні побудуємо прямокутник, площа якого дорівнює ΔS (рис. 11.4). Довжини сторін цього прямокутника дорівнюють Δx і $f(t)$, де t — деяка точка проміжку $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$.

Тоді $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Звідси $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Оскільки функція f є неперервною в точці x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Звідси, якщо $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$.

Маємо:

$$S'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0).$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $y = S(x)$, то для будь-якого $x \in [a;\ b]$ виконується рівність $S'(x) = f(x)$.

Отримали, що функція $y = S(x)$ є однією з первісних функції f на відрізку $[a;\ b]$.

Нехай F — деяка первісна функції f на відрізку $[a;\ b]$. Тоді згідно з основною властивістю первісної можна записати:

$$F(x) = S(x) + C,$$

де C — деяке число.

Маємо: $F(b)-F(a)=(S(b)+C)-(S(a)+C)=S(b)-S(a)=S(b)$.

За означенням функції $y=S(x)$ шукана площа S криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$. Отже,

$$S=F(b)-F(a).$$ ◄

ПРИКЛАД 1 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x)=\sin x$ та прямими $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ і $x=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 11.5 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

Однією з первісних функції $f(x)=\sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x)=-\cos x$. Тоді

$$S=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$ ◄

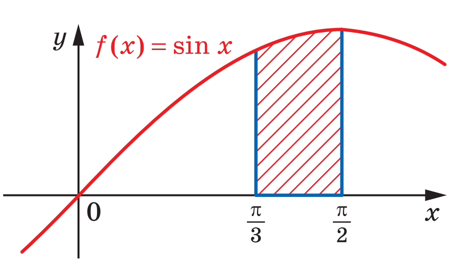


Рис. 11.5

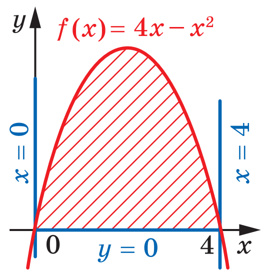


Рис. 11.6

ПРИКЛАД 2 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x)=4x-x^2$ і прямою $y=0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y=0$ у точках $x_1=0$ і $x_2=4$ (рис. 11.6). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції f і прямими $y=0$, $x=0$, $x=4$.

Однією з первісних функції f на відрізку $[0; 4]$ є функція $F(x)=2x^2-\frac{x^3}{3}$. Тоді

$$S=F(4)-F(0)=2\cdot4^2-\frac{4^3}{3}=\frac{32}{3}.$$ ◄

Означення. **Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$.**

Визначений інтеграл функції f на відрізку $[a; b]$ позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

де F — довільна первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b, де $a < b$, можна записати:

$$\int\limits_a^b 3x^2\,dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f вибрано. Справді, кожну первісну G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де C — деяка стала. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Рівність (1) називають **формулою Ньютона—Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона—Лейбніца потрібно:

1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a; b]$;
2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$. Маємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$ ◄

Якщо функція f має первісну F на відрізку $[a; b]$ і $c \in (a; b)$, то з формули Ньютона—Лейбніца випливає така властивість визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Справді,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F(b) - F(c)\big) + \big(F(c) - F(a)\big) =$$

$$= \int\limits_c^b f(x)\,dx + \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Якщо кожна з функцій f і g має первісну на відрізку $[a; b]$, то, використовуючи теореми 10.1 і 10.2, можна довести (зробіть це самостійно) такі властивості визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

2) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, де k — деяке число.

Формула Ньютона—Лейбніца дає змогу встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$.

Використовуючи теорему 11.1, можна записати:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)\,dx}$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст визначеного інтеграла**.

Зауважимо, що в наведеній формулі розглядаються неперервні функції f, які на відрізку $[a; b]$ набувають тільки невід'ємних значень. Проте визначений інтеграл можна використовувати для обчислення площ більш складних фігур.

Розглянемо неперервні на відрізку $[a; b]$ функції f і g такі, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$.

Покажемо, як знайти площу S фігури Φ, обмеженої графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 11.7).

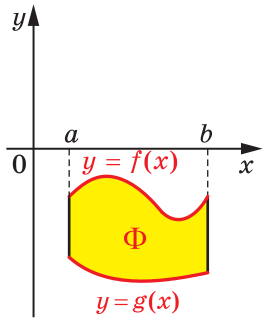


Рис. 11.7

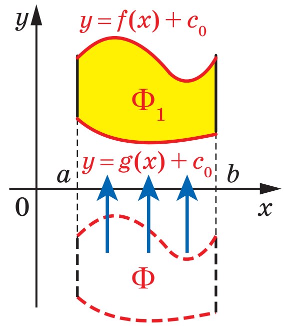


Рис. 11.8

Перенесемо фігуру Φ угору на c_0 одиниць так, щоб отримана фігура Φ_1 знаходилася вище від осі абсцис (рис. 11.8). Фігура Φ_1 обмежена графіками функцій $y = f(x) + c_0$ і $y = g(x) + c_0$ та прямими $x = a$, $x = b$.

Оскільки фігури Φ і Φ_1 мають рівні площі, то шукана площа S дорівнює різниці $S_f - S_g$, де:

S_f — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 11.9, *а*);

S_g — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = g(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 11.9, *б*).

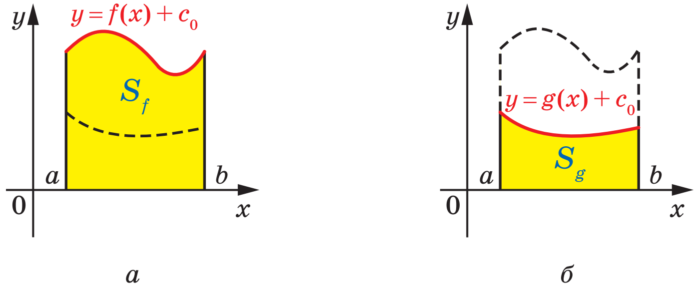


Рис. 11.9

Таким чином, використовуючи властивості визначеного інтеграла, можемо записати:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b (f(x) + c_0)dx - \int_a^b (g(x) + c_0)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + c_0) - (g(x) + c_0))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Отже, *якщо функції* f *і* g *є неперервними на відрізку* $[a; b]$ *і для всіх* $x \in [a; b]$ *виконується нерівність* $f(x) \geqslant g(x)$, *то площу* S *фігури, яка обмежена графіками функцій* f *і* g *та прямими* $x = a$ *і* $x = b$, *можна обчислити за формулою*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіками функцій $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ і $g(x) = x^2 - 2x$.

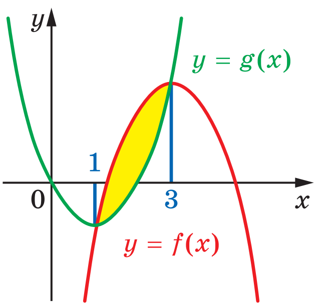


Рис. 11.10

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $f(x) = g(x)$, установлюємо, що графіки функцій f і g перетинаються у двох точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$. На рисунку 11.10 зображено фігуру (вона зафарбована жовтим кольором), площу якої потрібно знайти.

Тоді шукана площа

$$S = \int_1^3 (f(x) - g(x))dx =$$

$$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3}. \blacktriangleleft$$

?

1. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?
2. За якою формулою обчислюють площу криволінійної трапеції?
3. Що називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$?
4. Запишіть формулу Ньютона—Лейбніца.

ВПРАВИ

11.1.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.11.

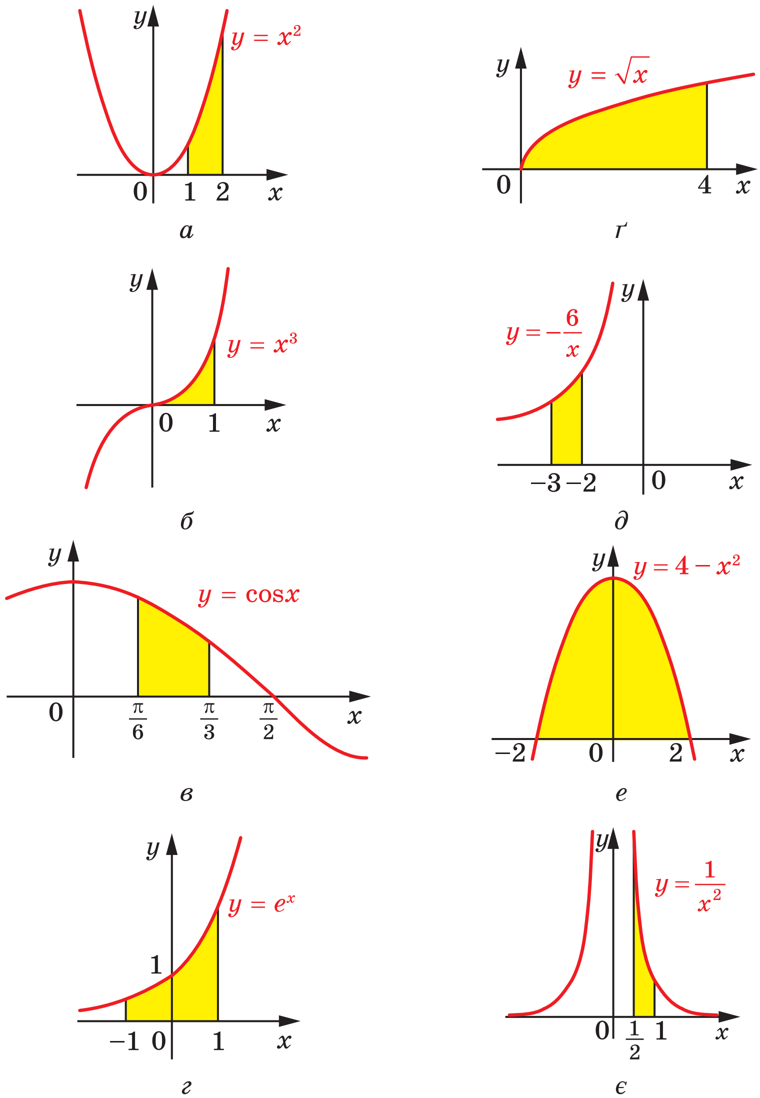


Рис. 11.11

11.2.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.12.

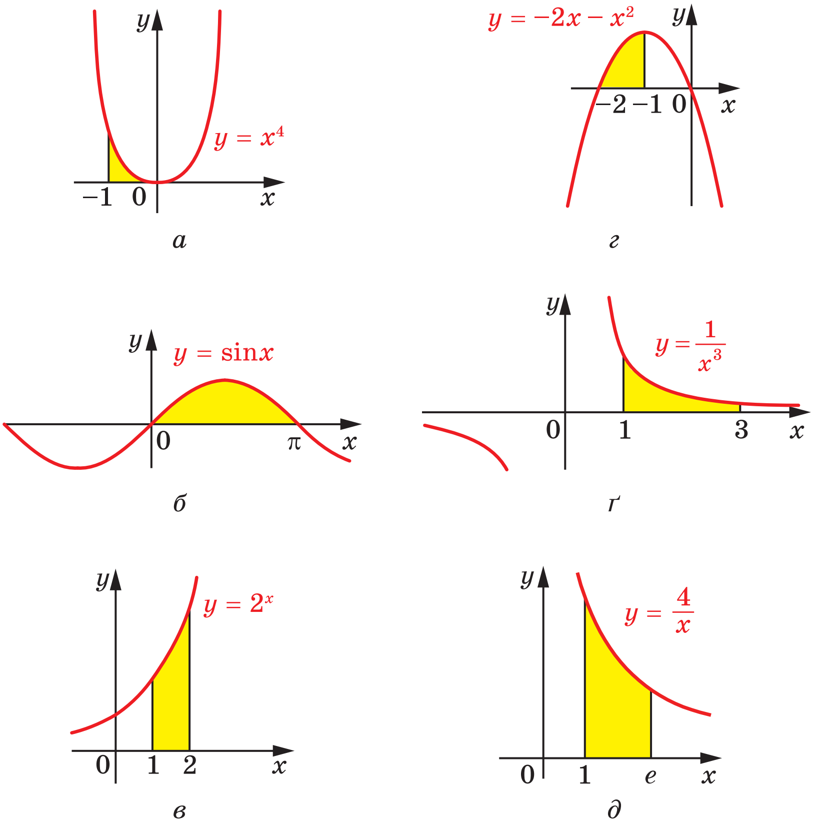


Рис. 11.12

11.3.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_5^7 x\,dx$;
2) $\int_3^8 dx$;
3) $\int_{-3}^0 x^2\,dx$;
4) $\int_{-1}^2 x^4\,dx$;
5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;
6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;
7) $\int_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
8) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;
9) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int_{-2}^{3} 3^x\,dx$; 12) $\int_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$; 14) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$.

11) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$; 13) $\int_{0}^{6} (3x^2 - x)\,dx$;

11.4.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-4}^{-2} 2\,dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 7) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

2) $\int_{1}^{2} x^3\,dx$; 5) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$; 8) $\int_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 6) $\int_{0}^{4} e^x\,dx$; 9) $\int_{-1}^{1} (1 - 5x^4)\,dx$.

11.5.• Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

1) параболою $y = x^2 + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) косинусоїдою $y = \cos x$ і прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) графіком функції $y = -x^3$ і прямими $y = 0$, $x = -2$;

4) параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

5) гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

6) параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис;

7) синусоїдою $y = \sin 2x$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

8) графіком функції $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;

9) графіком функції $y = e^x + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;

10) графіком функції $y = \sqrt{5 - x}$ і прямими $y = 0$, $x = -4$.

11.6.• Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;

4) $y = \frac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;

6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

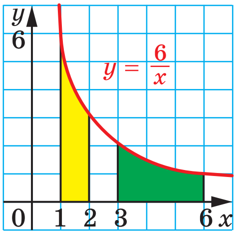


Рис. 11.13

11.7.° Доведіть, що криволінійні трапеції, зафарбовані на рисунку 11.13, рівновеликі.

11.8.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_1^3 (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{\sin^2 2x}$;

4) $\int_{-2}^{1} (x-3)^2\,dx$;

5) $\int_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5\,dx$;

6) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;

7) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$;

8) $\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{6} + \cos 5x\right)dx$;

9) $\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx$;

10) $\int_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}}\,dx$;

11) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}$;

12) $\int_{12}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4} - 2}\,dx$.

11.9.° Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$;

2) $\int_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\int_0^1 (2x-1)^4\,dx$;

5) $\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

6) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x}\,dx$;

7) $\int_0^3 \frac{dx}{3x+1}$;

8) $\int_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

9) $\int_1^4 \sqrt{7x-3}\,dx$.

11.10.• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;
15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

11.11.• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = x^3$ і прямими $y = 8$, $x = 1$;
2) параболою $y = 0{,}5x^2$ і прямою $y = -x$;
3) параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 3$;
4) параболою $y = 6 + x - x^2$ і прямою $y = 6 - 2x$;
5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = 4 - x^2$;
6) гіперболою $y = \frac{3}{x}$ і прямими $y = 3$, $x = 3$;
7) графіком функції $y = e^{-x}$ і прямими $y = e$, $x = 0$;
8) гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$.

11.12.•• При якому додатному значенні a визначений інтеграл $\int_0^a (6 - 2x)\,dx$ набуває найбільшого значення?

11.13.•• При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 9?

11.14.•• При яких значеннях a площа фігури, обмеженої лініями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 8?

11.15.•• При якому значенні a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{2}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на дві рівновеликі фігури?

11.16.•• При якому значенні a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = -x^3$ та прямими $y = 0$, $x = -2$, на дві рівновеликі фігури?

11.17.•• При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\int_0^a (4-2x)\,dx < 3$, де $a > 0$;

2) $\int_{\log_{0,2} 6}^a 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}$, де $a > \log_{0,2} 6$?

11.18.•• При яких додатних значеннях a виконується нерівність $\int_{\frac{1}{2}}^a \left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx > 1{,}5$, де $a > \frac{1}{2}$?

11.19.•• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \operatorname{tg}^2 3x\,dx$; 2) $\int_{-\pi}^0 2\sin^2 \frac{x}{4}\,dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x\,dx$; 4) $\int_1^2 \frac{e^x + x^3}{x^3 e^x}\,dx$.

11.20.•• Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{5}\,dx$;

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x \cos 3x\,dx$;

4) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}\,dx$.

11.21.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;
2) $y = -x^2$, $y = x - 2$;
3) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;
4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;
5) $y = 3 \sin x$, $y = -2 \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$;
6) $y = \frac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

11.22.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 4x$, $y = x - 4$;
2) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;
3) $y = \cos x$, $y = -2 \cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

11.23.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ якщо } x < 1, \\ 2x - 1, \text{ якщо } x \geqslant 1, \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

11.24.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} x + 3, \text{ якщо } x < -1, \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x \geqslant -1, \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} x + 2, \quad \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\cos 2x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}, \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

11.25.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, прямою, яка дотикається до цієї параболи в точці з абсцисою $x_0 = 2$, та осями координат.

11.26.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y = 2x^3$ та прямою, яка дотикається до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

11.27.•• Обчисліть визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_{4}^{8} \sqrt{8x - x^2}\,dx$; 5) $\int\limits_{-4}^{1} |x|\,dx$;

2) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{5 - 4x - x^2}\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{5} |x - 2|\,dx$.

11.28.•• Обчисліть визначений інтеграл, використовуючи його геометричний зміст:

1) $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{6x - x^2 - 5}\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2}\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{2} |x + 1|\,dx$.

11.29.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx$.

11.30.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x\,dx$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.31. Знайдіть цілі розв'язки нерівності $\frac{4}{x} \geqslant 1 - \frac{4-x}{x-5}$.

11.32. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + 3\left(\sqrt{3-x}\right)^2 - 13 \leqslant 0.$$

12. Обчислення об'ємів тіл

У попередньому пункті ви дізналися, як за допомогою інтегрування можна обчислювати площу криволінійної трапеції. Нагадаємо, що коли фігура обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 12.1), то її площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

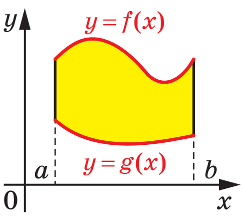


Рис. 12.1

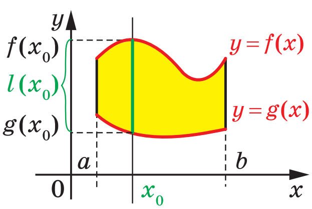


Рис. 12.2

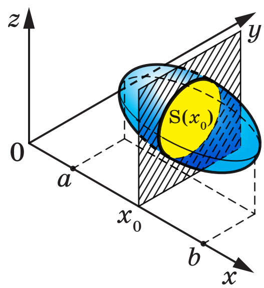


Рис. 12.3

Розглянемо функцію $l(x) = f(x) - g(x)$. Величина $l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$ дорівнює довжині відрізка, по якому вертикальна пряма $x = x_0$ перетинає дану фігуру (рис. 12.2). Отже, можна записати:

$$S = \int_a^b l(x)\, dx.$$

Виявляється, що останню формулу можна узагальнити для розв'язування задач на обчислення об'ємів просторових тіл.

У просторовій прямокутній декартовій системі координат розглянемо тіло Ф, об'єм якого дорівнює V. Нехай площина $x = x_0$ перетинає тіло Ф по фігурі з площею $S(x_0)$, а проекцією тіла Ф на вісь абсцис є відрізок $[a; b]$ (рис. 12.3). Якщо $y = S(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, то об'єм тіла Ф можна обчислити за формулою

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

Цю формулу можна довести, використовуючи ідею доведення теореми 11.1.

Покажемо, як за допомогою отриманої формули вивести формулу об'єму піраміди.

Нехай дано піраміду з висотою OM, рівною h, і основою, площа якої дорівнює S (рис. 12.4). Доведемо, що об'єм піраміди дорівнює $V = \frac{1}{3}Sh$. Уведемо систему координат так, щоб вершина піраміди O збіглася з початком координат, а висота піраміди OM належала додатній півосі абсцис (рис. 12.5). Тоді основа піраміди лежить у площині $x = h$, а проекцією піраміди на вісь абсцис є відрізок $[0; h]$.

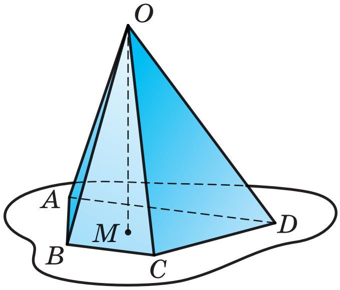


Рис. 12.4

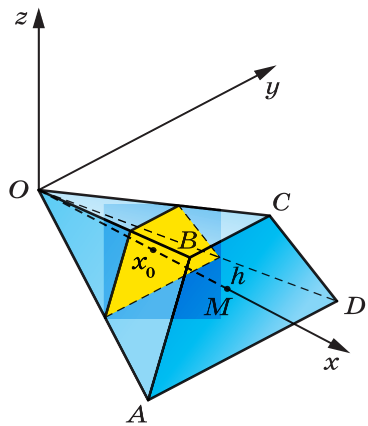


Рис. 12.5

Нехай площина $x = x_0$ перетинає піраміду по многокутнику з площею $S(x_0)$. Зрозуміло, що площина перерізу паралельна площині основи піраміди. Тому многокутник, утворений у перерізі, подібний многокутнику основи піраміди. При цьому коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{x_0}{h}$. Скориставшись теоремою про відношення площ подібних фігур, можна записати:

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Звідси $S(x_0)=\frac{x_0^2}{h^2}S$. Тепер можна записати:

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{x^2}{h^2}Sdx=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Sh.$$

ПРИКЛАД Фігура, обмежена графіком функції $f(x)=x^2+1$ і прямими $x=0$, $x=1$, $y=0$ (рис. 12.6), обертається навколо осі абсцис, утворюючи тіло об'єму V (рис. 12.7). Знайдіть V.

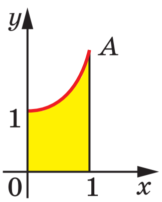


Рис. 12.6

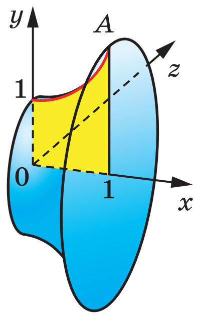


Рис. 12.7

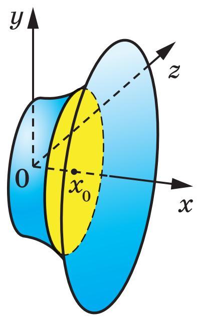


Рис. 12.8

Розв'язання. У перетині утвореного тіла площиною $x=x_0$, де $x_0\in[0;1]$, утворюється круг (рис. 12.8), радіус якого дорівнює $f(x_0)$. Тоді площа цього круга дорівнює:

$$S(x_0)=\pi f^2(x_0)=\pi\left(x_0^2+1\right)^2=\pi\left(x_0^4+2x_0^2+1\right).$$

Тому

$$V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 \pi(x^4+2x^2+1)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=\frac{28\pi}{15}.$$ ◄

Узагалі, має місце таке твердження.

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції f і прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, утворюється тіло об'єму V, то

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

ВПРАВИ

12.1.° Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2x + 1,\ x = 1,\ x = 0,\ y = 0;$
2) $y = x^2 + 1,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0;$
3) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0;$
4) $y = x^2,\ y = x;$
5) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = x.$

12.2.° Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \sqrt{\cos x},\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{4};$
2) $y = x - x^2,\ y = 0;$
3) $y = \sqrt{x},\ y = 1,\ x = 2.$

12.3.° У кулі радіуса R на відстані $\frac{R}{2}$ від її центра проведено площину, яка розбиває кулю на дві частини. Знайдіть об'єми цих частин.

12.4.° Доведіть, що об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

12.5.° Виведіть формулу для обчислення об'єму конуса.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.6. Обчисліть значення виразу:

1) $(4^{-0,25} - 2^{0,5})\left(4^{-0,25} + \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right);$
2) $\dfrac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6} + 1\right)\left(\sqrt{6} - 1\right)};$
3) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - \frac{5}{2}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{5}\right)^3}.$

12.7. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x + \sqrt{3x - 2} = 3;$
2) $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6;$
3) $2\sqrt{x - 2} = \sqrt[4]{x - 2} + 15;$
4) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2;$
5) $\sqrt{42 - x} - \sqrt{6 - x} = 2;$
6) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x} = 5.$

«РОЗУМОМ ВІН ПЕРЕВЕРШИВ РІД ЛЮДСЬКИЙ»

Ці величні слова написано нащадками про видатного англійського науковця — фізика й математика Ісаака Ньютона. В історії науки поряд з Ньютоном стоїть ще одна гігантська фігура — німецького науковця Ґотфріда Вільгельма Лейбніца, який залишив після себе немеркнучий слід у філософії, математиці, юриспруденції, логіці, дипломатії, історії, політології. Серед великої наукової спадщини цих геніальних учених особливе місце належить досягненням, пов'язаним зі створенням диференціального та інтегрального числення — науки про похідні та первісні.

Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Ґотфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Варто підкреслити, що Ньютон і Лейбніц створювали свої теорії в той час, коли звичні для нас поняття та терміни або взагалі не існували, або не мали точного змісту. Спробуйте уявити собі підручник з «Алгебри і початків аналізу», у якому немає термінів «множина», «функція», «дійсне число», «границя» тощо. Більш того, багато зручних сучасних позначень тоді ще не набули загальноприйнятого вжитку. Деякі з них Ньютону та Лейбніцу довелося самим винаходити, узагальнювати й пристосовувати до потреб. Наприклад, Лейбніц почав позначати операцію множення крапкою (до нього використовували символи: $\square$, $\times$, $*$, M тощо), операцію ділення — двокрапкою (раніше часто використовували літеру D);

Ньютон поширив позначення для степеня a^n на випадок цілих та дробових значень n, а позначення $\sqrt{x}$ узагальнив до $\sqrt[n]{x}$. Термін «функція» і символ інтеграла «$\int$» уперше зустрічаються в роботах Лейбніца.

Узагалі, історію розвитку математики можна сміливо розділити на дві епохи: до і після появи похідної та інтеграла. Відкриття Ньютона та Лейбніца дали змогу науковцям швидко й легко розв'язувати задачі, які раніше вважалися абсолютно неприступними.

Наведемо показовий приклад. У першій половині XVII ст. видатний італійський математик Бонавентура Кавальєрі запропонував новий метод для обчислення площ. Користуючись ним, Кавальєрі зміг обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^n$, віссю абсцис і вертикальною прямою $x = 1$, при деяких значеннях n (рис. 12.9). Наполегливо працюючи понад 10 років, шляхом надзвичайно складних та громіздких міркувань Кавальєрі зміг розв'язати задачу лише для натуральних значень n, менших від 10.

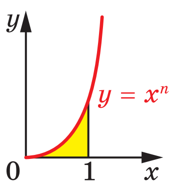


Рис. 12.9

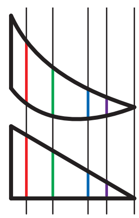


Рис. 12.10

Годі й казати, що, використовуючи формулу Ньютона—Лейбніца, шукану площу можна знайти в один рядок не тільки для натуральних, а й для всіх додатних значень n:

$$S = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Проте в той час метод, запропонований Кавальєрі, мав надзвичайно важливе значення, оскільки до XVII ст. протягом кількох тисяч років усі намагання науковців розв'язати таку або подібну задачі були взагалі безрезультатними.

Для своїх розрахунків Кавальєрі сформулював такий принцип: *якщо всі прямі, паралельні між собою, перетинають фігури F_1 і F_2 по відрізках однакової довжини* (рис. 12.10), *то такі фігури мають рівні площі.*

Ознайомившись із цим принципом, у 1644 р. видатний італійський математик і фізик Еванджеліста Торрічеллі писав: «Без сумнівів, геометричний принцип Кавальєрі є дивовижним за своєю економією засобом для знаходження теорем... Це — справді царська дорога серед хащ математичного тернику».

Наприклад, із принципу Кавальєрі випливає, що прямокутник і паралелограм з однаковими стороною та висотою мають рівні площі (рис. 12.11). Але принцип Кавальєрі застосовний і для більш складних фігур. Наприклад, розглянемо дві фігури: одиничний квадрат і «криволінійний чотирикутник» $ABCD$, обмежений лініями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=0$, $x=1$ (рис. 12.12). Зрозуміло, що кожна вертикальна пряма перетинає обидві фігури по відрізках одиничної довжини. Тоді з принципу Кавальєрі випливає, що площа «криволінійного чотирикутника» $ABCD$ дорівнює площі одиничного квадрата, тобто одиниці. У справедливості цього висновку ви можете переконатися самостійно, обчисливши площу «криволінійного чотирикутника» $ABCD$ за допомогою формули Ньютона—Лейбніца.

Ідеї, близькі до сформульованого принципу Кавальєрі, наштовхнули Ньютона та Лейбніца до створення зручної загальної теорії, яка дозволила просто й швидко будувати дотичні до найскладніших кривих, знаходити найбільші та найменші значення функцій, обчислювати площі різноманітних фігур, розв'язувати багато інших важливих і складних задач.

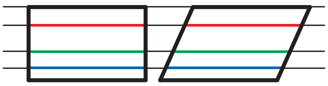


Рис. 12.11

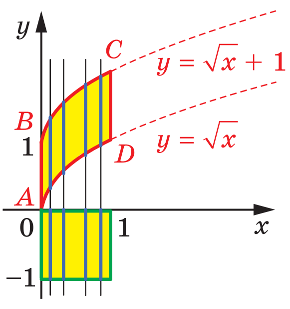


Рис. 12.12

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з наведених функцій є первісною функції $f(x) = x^4$?

А) $F(x) = 4x^3$; В) $F(x) = x^5$;

Б) $F(x) = \frac{x^5}{5}$; Г) $F(x) = \frac{x^5}{4}$.

2. У якому з наведених випадків функція F є первісною функції f?

А) $f(x) = \sin x,\ F(x) = \cos x$; В) $f(x) = x,\ F(x) = 1$;

Б) $f(x) = 2^x,\ F(x) = 2^x \ln 2$; Г) $f(x) = \cos x,\ F(x) = \sin x$.

3. Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \frac{4}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

А) $-\frac{1}{x^4}$; Б) $-\frac{1}{x^4} + C$; В) $-\frac{20}{x^6} + C$; Г) $-\frac{2}{3x^6} + C$.

4. Яка з наведених функцій є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty; -1]$?

А) $F(x) = -1 - \ln x$; В) $F(x) = \ln(x - 1)$;

Б) $F(x) = \ln(1 - x)$; Г) $F(x) = \ln(-x) - 1$.

5. Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = e^{6x}$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

А) $e^{6x} + C$; Б) $6e^{6x} + C$; В) $\frac{a^{6x+1}}{6x+1} + C$; Г) $\frac{1}{6}e^{6x} + C$.

6. Функція F є первісною функції $f(x) = x - 3$. Через яку з наведених точок проходить графік функції F, якщо $F(2) = 5$?

А) $(0; 8)$; Б) $(-2; 17)$; В) $(1; 5{,}5)$; Г) $(4; 4)$.

7. Яка з поданих функцій є первісною функції $f(x) = 7^x$?

А) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7}$; В) $F(x) = 7^x$;

Б) $F(x) = 7^x \ln 7$; Г) $F(x) = \frac{7^{x+1}}{x+1}$.

8. Обчисліть інтеграл $\int_0^3 x^2\,dx$.

А) 27; Б) 9; В) 6; Г) 3.

9. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $1\frac{1}{2}$; Г) $-1\frac{1}{2}$.

10. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

А) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\sqrt{3}$.

11. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{2\sqrt{7-x}}$.

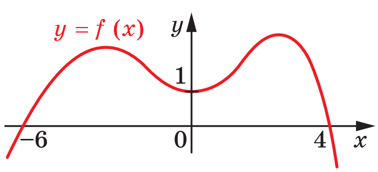
А) -4; Б) 4; В) -2; Г) 2.

12. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-1}^{4} (f(x)+1)\,dx$, якщо $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2$.

А) 3; Б) 5; В) 7; Г) 9.

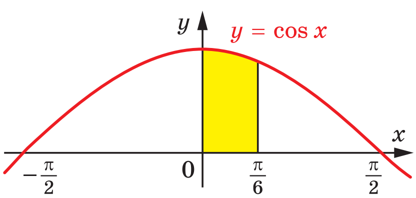
13. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть значення виразу $\int\limits_{-6}^{0} f'(x)\,dx - \int\limits_{0}^{4} f'(x)\,dx$.

А) 0;
Б) 2;
В) 1;
Г) знайти неможливо.



14. Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.

А) $\frac{\pi}{6}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
Б) $\frac{1}{2}$; Г) 1.



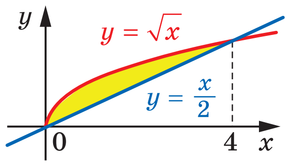
15. Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

А) $12\frac{2}{3}$; Б) $14\frac{1}{3}$; В) $14\frac{2}{3}$; Г) $15\frac{1}{3}$.

16. Значення якого з наведених інтегралів дорівнює площі зафарбованої фігури, зображеної на рисунку?

А) $\int\limits_0^4 \frac{x}{2}dx$; В) $\int\limits_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$;

Б) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx$; Г) $\int\limits_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$.



17. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

А) 3,5; Б) 4; В) 4,5; Г) 5.

18. При якому значенні a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{10}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, на дві рівновеликі фігури?

А) 4; Б) 5; В) 10; Г) такого значення не існує.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Первісна

Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називають її невизначеним інтегралом і позначають $\int f(x)dx$.

Основна властивість первісної

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Правила знаходження первісної

1. Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.
2. Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.
3. Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$.

Визначений інтеграл

Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$.

Формула Ньютона—Лейбніца

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де F — довільна первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Площа криволінійної трапеції

1) Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$.
2) Якщо функції f і g є неперервними на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Таблиця первісних

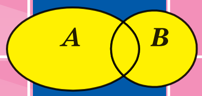
Функція f	**Первісна функції f**	**Функція f**	**Первісна функції f**
k (стала)	kx	$\cos x$	$\sin x$
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$	e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$	a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$

Обчислення об'ємів тіл обертання

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції f і прямими $x = a$, $x = b$ і $y = 0$, утворюється тіло об'єму V, то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

§ 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики



13. **Комбінаторні правила суми та добутку**
14. **Перестановки, розміщення, комбінації**
15. **Аксіоми теорії ймовірностей**
16. **Умовна ймовірність**
17. **Незалежні події**
18. **Випадкова величина**
19. **Математичне сподівання випадкової величини**
20. **Статистичний аналіз даних**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з комбінаторними методами обчислення кількості різних підмножин, утворених за певними правилами з елементів скінченної множини.
- Ознайомитеся з аксіомами теорії ймовірностей, з поняттями «умовна ймовірність» та «незалежні події».
- Дізнаєтеся, як випадкові величини використовують у практичній діяльності людини.
- Почнете вивчати математичну статистику — науку про отримання, оброблення й аналіз даних, які характеризують масові явища.

13. Комбінаторні правила суми та добутку

Скількома способами учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету? Скількома способами можна вибрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?

Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Розділ математики, який вивчає способи розв'язування подібних задач, називають **комбінаторикою**.

Підґрунтям для розв'язування більшості комбінаторних задач є два правила: правило суми та правило добутку.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів по Наддніпрянщині і 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один із них можна вибрати 12 способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило суми. **Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a або b» можна здійснити $m + k$ способами.**

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути та хоче побувати спочатку на Наддніпрянщині, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо вибрати один маршрут по Наддніпрянщині, то парою до цього маршруту може бути будь-який із 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів по Наддніпрянщині 5, то кількість пар (маршрут по Наддніпрянщині; маршрут по Карпатах) дорівнює $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ці міркування ілюструє така таблиця.

		Маршрути по Карпатах						
		1	2	3	4	5	6	7
Маршрути по Наддніпрянщині	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило добутку. **Якщо елемент *a* можна вибрати *m* способами й після кожного такого вибору елемент *b* можна вибрати *k* способами, то вибір «*a* і *b*» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари (*a*; *b*), можна зробити *mk* способами.**

ПРИКЛАД 1 Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

Розв'язання. Першою цифрою в такому чотирицифровому числі може бути будь-яка із чотирьох цифр: 1, 2, 3 або 4. Маємо 4 варіанти.

Оскільки всі цифри в цьому чотирицифровому числі мають бути різними, то якою б не була перша цифра, другою цифрою числа може бути будь-яка з тих трьох цифр, що залишилися. Отже, для кожного із чотирьох варіантів вибору першої цифри існує 3 варіанти вибору для другої цифри. Використовуючи правило добутку, маємо, що перші 2 цифри чотирицифрового числа можна вибрати $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Міркуючи аналогічно, стверджуємо, що для кожного із цих 12 варіантів вибору перших двох цифр існує 2 варіанти вибору третьої цифри. Справді, якщо першими двома цифрами вибрано, наприклад, цифри 1 і 2, то третьою цифрою може бути будь-яка з двох цифр — 3 або 4. Використовуючи правило добутку, доходимо висновку, що перші 3 цифри можна вибрати $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами.

Оскільки всі цифри в чотирицифровому числі мають бути різними, то зрозуміло, що перші 3 цифри числа однозначно визначають останню четверту цифру. Тому із цифр 1, 2, 3, 4 можна скласти $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ чотирицифрових числа так, щоб у кожному числі всі цифри були різними.

Відповідь: 24. ◄

Під час розв'язування прикладу 1 нам довелося обчислювати добуток $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. У комбінаторних задачах добуток послідовних натуральних чисел від 1 до n зустрічається настільки часто, що отримав спеціальну назву «факторіал» і позначення $n!$ (запис «$n!$» читають «ен факторіал»):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Наприклад, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

ПРИКЛАД 2 Для захисту інформації на комп'ютері використовують пароль — послідовність букв або цифр довжиною від 3 до 5 символів (пароль може містити кілька однакових символів). Скільки різних паролів можна утворити, використовуючи 26 букв і 10 цифр?

Розв'язання. Розглянемо кількість різних паролів із трьох символів. Першим символом можна вибрати будь-яку букву або будь-яку цифру. Отже, маємо 36 варіантів. Аналогічно для вибору другого та третього символів існує по 36 варіантів. Використовуючи правило добутку, маємо, що існує 36^3 різних паролів із трьох символів.

Так само доводимо, що кількість паролів із чотирьох символів дорівнює 36^4, а паролів із п'яти символів — 36^5.

Таким чином, використовуючи правило суми, отримуємо, що загальна кількість паролів становить $36^3 + 36^4 + 36^5$. ◄

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що кількість підмножин довільної n-елементної множини M дорівнює 2^n.

Розв'язання. Пронумеруємо всі елементи множини M. Маємо:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Розглянемо скінченні послідовності, які містять n членів і складаються з нулів і одиниць.

Кожній підмножині A множини M поставимо у відповідність одну з таких послідовностей, що вибирається за правилом:

- якщо $a_k \in A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 1;
- якщо $a_k \notin A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 0.

Наприклад,

$A = \{a_2, a_4\} \to 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$

$B = \{a_3\} \to 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$

$C = \{a_n\} \to 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1$

$M \to 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1$

$\varnothing \to 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0$

Зрозуміло, що кожній підмножині множини M відповідає єдина послідовність і, навпаки, кожна послідовність є відповідною єдиній підмножині множини M. Отже, кількість підмножин множини M дорівнює кількості послідовностей, що розглядаються.

Під час конструювання послідовностей будь-який член можна вибрати тільки двома способами: записати 0 або записати 1. Отже, можна сконструювати $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ множників}} = 2^n$ різних послідовностей. ◄

1. Сформулюйте правило суми.
2. Сформулюйте правило добутку.

ВПРАВИ

13.1.° Із міста A до міста B ведуть 4 дороги, а з міста B до міста C ведуть 3 дороги (рис. 13.1). Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C?

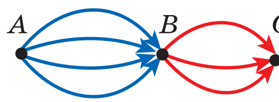


Рис. 13.1

13.2.° Кафе пропонує в меню 3 перші страви, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки існує способів вибрати обід із трьох страв (по одній страві кожного виду)?

13.3.° Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга — голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова:

1) шабля; 2) шаровари?

13.4.° У корзині лежать 10 яблук і 7 груш. Антон вибирає яблуко або грушу. Після цього Максим вибирає яблуко та грушу. У якому випадку Максим має більше можливостей для вибору: коли Антон узяв яблуко чи коли Антон узяв грушу?

13.5.° На рисунку 13.2 показано схему доріг, які ведуть із міста A до міста B. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста B?

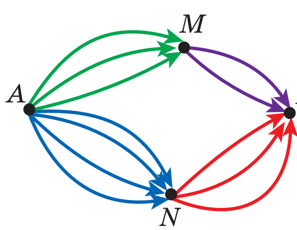


Рис. 13.2

13.6.° Кафе пропонує в меню 3 салати, 6 м'ясних страв і 5 десертів. Скільки існує способів вибрати обід із двох страв різного виду?

13.7.° На вершину гори прокладено 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на це запитання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

13.8.° Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

13.9.° Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися:
1) із цифри 1; 2) із запису «34»?

13.10.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

13.11.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні?

13.12.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

13.13.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?

13.14.° Скільки існує семицифрових телефонних номерів, які не починаються із цифри 0?

13.15.° Монету підкидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і чисел можна отримати?

13.16.° Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?

13.17.° Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

13.18.° Скільки трицифрових непарних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

13.19.° Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких мають бути різними, можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4?

13.20.° Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному числі цифри були різними?

13.21.° Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5?

13.22.° Скільки існує семицифрових чисел, які діляться націло на 25?

13.23.°° Скількома способами можна поставити на шахову дошку дві тури (білу та чорну) так, щоб вони не били одна одну?

13.24.•• У книжковому магазині є 4 різних видання поеми «Енеїда», 3 різних видання п'єси «Наталка Полтавка» і 2 різних видання п'єси «Москаль-чарівник». Крім того, є 5 різних книг, у яких містяться поема «Енеїда» та п'єса «Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» та «Москаль-чарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного із цих творів І. П. Котляревського?

13.25.•• Скільки існує семицифрових чисел, усі цифри яких мають однакову парність?

13.26.•• Для шифрування повідомлень використовують цифри 0, 1, 2, 3. Слово в повідомленні містить від однієї до п'яти цифр. Яку найбільшу кількість різних слів може містити повідомлення?

13.27.•• Скількома способами можна розподілити замовлення на друкування 10 різних підручників між двома книжковими фабриками?

13.28.•• Учень має 7 книг з математики, 4 книги з фізики і 2 книги з астрономії. Скількома способами він може розставити ці книги на полиці так, щоб книги з одного предмета стояли поруч?

13.29.•• У ряд на 10 поставлених поруч стільців сідають 5 хлопців і 5 дівчат. Скількома способами вони можуть розміститися так, щоб хлопці сиділи на стільцях з парними номерами, а дівчата — на стільцях з непарними номерами?

13.30.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна непарна цифра?

13.31.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

13.32.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, які містять хоча б 2 однакові цифри?

13.33.•• Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок, серед яких є хоча б одна шістка, можна отримати?

13.34.•• Серед 10 людей є двоє знайомих. Скількома способами можна посадити цих людей на 10 стільців так, щоб знайомі сиділи поруч?

13.35.•• Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри в числі не повторювалися і парні цифри не стояли поруч?

13.36.•• Будемо вважати словом будь-яку скінченну послідовність букв українського алфавіту. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова: 1) молоко; 2) математика; 3) комбінаторика?

13.37.* Скільки натуральних дільників має число $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.38. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|\sin x|\cos x$; 2) $y = \sin x|\sin x| + \cos x|\cos x|$.

13.39. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 < \sin x$; 3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x - 4\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

14. Перестановки, розміщення, комбінації

Ви знаєте, що елементи множини записують у довільному порядку. Наприклад, $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Але в комбінаториці розглядають також **упорядковані множини**. Наприклад, запис (b, a, c) задає триелементну впорядковану множину, у якій на першому місці стоїть елемент b, на другому — елемент a, а на третьому — елемент c. Запис $(c; b; a)$ задає іншу впорядковану множину з тих самих елементів a, b і c.

Означення. Перестановкою скінченної множини M називають будь-яку впорядковану множину, утворену з усіх елементів множини M.

Наприклад, існує 6 перестановок множини $M = \{a, b, c\}$. Випишемо їх:

$$(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a).$$

Перестановки заданої скінченної множини різняться лише порядком слідування елементів.

Наприклад, якщо потрібно визначити кількість способів, якими учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету, то для цього треба знайти кількість перестановок множини учнів класу.

Кількість перестановок n-елементної множини M позначають символом P_n, використовуючи першу літеру французького слова *permutation* — перестановка. Наприклад, розглядаючи множину $M = \{a, b, c\}$, ми встановили, що $P_3 = 6$.

Якщо $M = \{a\}$, то існує лише один спосіб упорядкування цієї множини: a — це перший елемент, тому $P_1 = 1$.

Доведемо, що для будь-якого натурального n справедлива формула

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Нехай множина M складається з n елементів. Записати будь-яку перестановку множини M — це фактично надати кожному елементу цієї множини певний номер від 1 до n. Тому кількість перестановок множини M дорівнює кількості способів нумерування її елементів.

Виберемо певний елемент a із цієї множини. Існує n способів присвоїти цьому елементу номер. Далі виберемо певний елемент b із множини M. Оскільки елементу a номер уже присвоєно, то існує $n - 1$ спосіб присвоїти номер елементу b. Зрозуміло, що наступний елемент можна пронумерувати $n - 2$ способами і т. д. Для останнього невибраного елемента множини M існує лише один спосіб присвоїти йому номер, оскільки до цього моменту $n - 1$ елемент уже отримав свій номер.

Отже, за правилом добутку можна записати:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ тобто}$$

$$P_n = n!$$

ПРИКЛАД 1 Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

Розв'язання. Для того щоб тури не могли бити одна одну, на кожній горизонталі та на кожній вертикалі має стояти тільки одна тура (рис. 14.1).

Рис. 14.1

Нехай a_1 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з першої горизонталі, a_2 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з другої горизонталі, ..., a_8 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з восьмої горизонталі.

Тоді $(a_1; a_2; ...; a_8)$ — деяка перестановка множини $\{1, 2, ..., 8\}$. Кожній такій перестановці відповідає деяке розташування тур, яке задовольняє умову задачі, і навпаки, кожному припустимому розташуванню тур відповідає певна перестановка цієї множини.

Отже, шукана кількість способів дорівнює P_8, тобто 8!.

Відповідь: 8!. ◄

Розглянемо ще кілька типових комбінаторних задач.

ПРИКЛАД 2 За правилами *FIFA*[1] у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призових місця) між командами?

Розв'язання. Перше місце може посісти будь-яка з 32 команд, друге місце — будь-яка з решти 31 команди, третє — будь-яка з 30 команд, що залишилися. За правилом добутку кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$. ◄

Розв'язавши цю задачу, ми з'ясували, скільки існує 3-елементних упорядкованих підмножин заданої 32-елементної множини. Кожну з таких упорядкованих підмножин називають **розміщенням із 32 елементів по 3 елементи**.

Означення. **Будь-яку k-елементну впорядковану підмножину даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.**

Кількість усіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають символом A_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *arrangement* — розміщення.

Результат, отриманий у задачі про розподіл призових місць, дозволяє зробити висновок, що $A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \qquad (1)$$

[1] Міжнародна федерація футбольних асоціацій.

Розглянемо n-елементну множину та сформуємо її k-елементну впорядковану підмножину.

Існує n способів вибору першого елемента підмножини. Після того як вибрано перший елемент, другий елемент підмножини можна вибрати вже тільки $n - 1$ способом. Після вибору першого і другого елементів залишається $n - 2$ способи для вибору третього елемента підмножини. Продовжуючи ці міркування, отримуємо, що вибір k-го елемента можна здійснити $n - k + 1$ способом.

Таким чином, за правилом добутку можна записати:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Отже, формулу (1) доведено.

Оскільки існує лише одна n-елементна підмножина даної n-елементної множини, то число A_n^n — це кількість перестановок n-елементної множини, тобто

$$\boxed{A_n^n = P_n}$$

Цю рівність можна також отримати, якщо у формулу (1) замість k підставити n. Маємо:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n!$$

За означенням прийнято вважати, що $0! = 1$. Ця домовленість дає змогу формулу (1) записати компактніше.

Помножимо й поділимо вираз, який стоїть у правій частині формули (1), на $(n - k)!$ (це можна зробити, оскільки $(n - k)! \neq 0$). Маємо:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отримуємо формулу

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

ПРИКЛАД 3 Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких — прості числа, менші від 30?

Розв'язання. Множина $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ складається з усіх простих чисел, які менші від 30. Кількість 2-елементних упорядкованих підмножин цієї множини дорівнює кількості звичайних дробів, відмінних від одиниці, чисельник і знаменник яких — зазначені прості числа. Половина із цих дробів є правильними. Отже, шукане число дорівнює $\frac{1}{2} A_{10}^2 = 45$.

Відповідь: 45. ◄

Розглянемо такі дві задачі. Скількома способами в класі, у якому 30 учнів та учениць, можна вибрати старосту та його заступника? Скількома способами в цьому класі можна призначити двох чергових?

Відповідь до першої задачі вам відома: це кількість 2-елементних упорядкованих підмножин 30-елементної множини, тобто A_{30}^2. Щоб розв'язати другу задачу, треба визначити кількість 2-елементних підмножин 30-елементної множини (саме підмножин, а не впорядкованих підмножин). Кожну з таких підмножин називають **сполукою (комбінацією)** із 30 елементів по 2 елементи.

Означення. **Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.**

Кількість усіх можливих сполук із n елементів по k елементів позначають символом C_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *combinaison* — комбінація.

Так, задачу про кількість способів призначення чергових можна сформулювати так: чому дорівнює C_{30}^2?

Обчислимо значення C_n^k для кількох очевидних випадків. Наприклад, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Справді, існує n одноелементних підмножин та одна n-елементна підмножина заданої n-елементної множини.

Оскільки будь-яка множина має лише одну підмножину, яка не містить жодного елемента (це порожня множина), то

$$C_n^0 = 1.$$

Також зрозуміло, що

$$C_0^0 = 1.$$

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boldsymbol{A_n^k = C_n^k \cdot P_k} \qquad (2)$$

Розглянемо деяку n-елементну множину. Кількість її k-елементних підмножин дорівнює C_n^k. З кожної такої підмножини можна утворити $k!$ упорядкованих k-елементних підмножин. Отже, кількість усіх k-елементних упорядкованих підмножин заданої n-елементної множини дорівнює $C_n^k \cdot k!$, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

З формули (2) отримуємо, що $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Звідси

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \qquad (3)$$

Зазначимо, що ця формула залишається справедливою і для випадків, коли $k = 0$ або $n = 0$. Справді,

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!\,0!} = 1.$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (4)$$

Розв'язання. Цю формулу можна довести за допомогою формули (3). Переконайтеся в цьому самостійно.

Формула (4) має й інше, комбінаторне доведення. Вибираючи k-елементну підмножину A n-елементної множини M, ми тим самим однозначно задаємо $(n-k)$-елементну підмножину, яка складається з усіх елементів множини M, що не належать A. Отже, кількість способів вибору k-елементної підмножини дорівнює кількості способів вибору $(n-k)$-елементної підмножини, тобто справедлива формула (4). ◄

1. Яку множину називають упорядкованою?
2. Що називають перестановкою скінченної множини?
3. За якою формулою можна обчислити кількість перестановок n-елементної множини?
4. Що називають розміщенням із n елементів по k елементів?
5. За якою формулою можна обчислити кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k елементів?
6. Що називають сполукою з n елементів по k елементів?
7. За якою формулою можна обчислити кількість усіх можливих сполук із n елементів по k елементів?

ВПРАВИ

14.1.° Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

14.2.° У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

14.3.° Скількома способами можуть сісти в автомобіль 5 осіб, якщо кожна з них може водити автомобіль?

14.4.° У футбольній команді, яка складається з 11 гравців, потрібно вибрати капітана та його заступника. Скількома способами можна це зробити?

14.5.° Комісія, що складається з 15 осіб, має вибрати голову, заступника голови та секретаря. Скількома способами можна це зробити?

14.6.° В 11 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?

14.7.° У фінальній частині чемпіонату Європи з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть розподілитися золоті, срібні та бронзові нагороди?

14.8.° У класі навчаються 32 учні та учениці. Кожні двоє з них обмінялись одне з одним фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?

14.9.° У класі з поглибленим вивченням математики 29 учнів та учениць. Скількома способами можна сформувати команду з 5 осіб для участі в математичній олімпіаді?

14.10.° Дано правильний n-кутник. Скільки існує чотирикутників із вершинами, які містяться серед вершин даного n-кутника?

14.11.° На площині позначено 10 точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

14.12.• Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися, а крайні цифри були парними?

14.13.• Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

14.14.• Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно 3 виграшних білети?

14.15.• На прямій позначено 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

14.16.° Пряма та коло не мають спільних точок. На колі позначено 9 червоних точок, а на прямій — 15 синіх точок. Відомо, що жодна пряма, яка проходить через дві червоні точки, не містить синіх точок. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

14.17.° У класі 30 учнів, з яких 13 хлопців і 17 дівчат. Скількома способами можна сформувати команду із 7 учнів цього класу, до якої має входити принаймні одна дівчина?

14.18.° Для підготовки до іспиту запропоновано 80 запитань. Учень знає відповіді лише на 15 із них. Екзаменаційний білет містить 6 різних запитань. Скільки різних екзаменаційних білетів можна скласти так, щоб учень міг відповісти принаймні на одне запитання білета?

14.19.•• Скількома способами можна розбити 12 спортсменів на 3 команди по 4 спортсмени в кожній?

14.20.•• Скількома способами можна розкласти 20 різних куль по чотирьох однакових ящиках так, щоб кожний ящик містив по 5 куль?

14.21.* Скількома способами можна m білих і n чорних куль ($m \geqslant n$) розкласти в ряд так, щоб жодні 2 чорні кулі не лежали поруч?

14.22.* П'ять ящиків пронумеровано числами від 1 до 5. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 17 однакових куль так, щоб жодний ящик не виявився порожнім?

14.23.* Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми k натуральних доданків (суми, які відрізняються порядком доданків, вважатимемо різними)?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.24. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності $x^2 - 3x < 4$.

14.25. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності

$$\frac{2}{x+3} > \frac{17}{x-2} + 5.$$

15. Аксіоми теорії ймовірностей

«Гральний кубик кинули тричі», «З коробки з білими та чорними кулями навмання витягують одну кулю», «Стрілець стріляє по мішені двічі» тощо. Такими словами, що описують деякий експеримент, починаються умови багатьох задач із теорії ймовірностей. І це не дивно, адже перш ніж відповідати на запитання «Чому дорівнює ймовірність?», потрібно чітко уявити експеримент (ще говорять: «випадковий експеримент»), у якому може виникнути таке запитання. Ознайомимося докладніше з тим, як у теорії ймовірностей прийнято описувати та досліджувати подібні експерименти (досліди).

Характерною особливістю випадкових експериментів є те, що вони закінчуються **результатом** (ще говорять: **елементарним наслідком)**, який неможливо передбачити заздалегідь. Множину всіх результатів експерименту називають **простором елементарних наслідків** цього експерименту й позначають грецькою буквою Ω (омега). У теорії ймовірностей розглядають експерименти, у яких Ω — непорожня множина.

Наприклад, якщо монету підкинути два рази та записати, що випало на монеті, то в такому досліді елементарними наслідками будуть записи:

$$\text{ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ,}$$

де буква Г означає, що на монеті «випав герб», а буква Ч — «випало число». Таким чином, у цьому експерименті простір елементарних наслідків складається із чотирьох елементів:

$$\Omega = \{\text{ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ}\}.$$

Ще один приклад. Якщо гральний кубик кинути один раз і записати число, яке випало на верхній грані кубика, то в такому експерименті простір елементарних наслідків складається із шести чисел:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Проте ми можемо, кидаючи гральний кубик, робити інакше, наприклад, фіксувати лише факт випадіння шістки. Причини цього можуть бути найрізноманітнішими. Наприклад, на даному кубику можна розпізнати тільки шістку, оскільки числа на решті граней кубика стерлися. У цьому, узагалі кажучи, новому експерименті йдеться вже не про шість, а тільки про два елементарних наслідки:

«випала шістка», «не випала шістка»,

які утворюють двоелементний простір елементарних наслідків

$$\Omega = \{\text{«випала шістка», «не випала шістка»}\}.$$

Коли ми вивчаємо випадковий експеримент, нас, окрім елементарних наслідків, цікавлять ще й такі об'єкти, як *випадкові події, що є підмножинами простору елементарних наслідків* Ω. Наведемо приклад.

Для шкільної лотереї випущено 5 лотерейних білетів із серійними номерами від 1 до 5. Учасник лотереї деяким випадковим чином вибирає один із цих білетів і дізнається про його серійний номер. Таким чином, ідеться про дослід з п'ятьма елементарними наслідками та простором елементарних наслідків:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Беручи участь у якій-небудь лотереї, ми, як правило, мало цікавимося серійним номером самим по собі (елементарним наслідком досліду). Розповідаючи друзям про участь у лотереї, ми скоріше розкажемо про виграш, ніж обговорюватимемо цифри серійного номера білета. Тому важливіше дізнатися, чи є білет виграшним.

Наприклад, якщо за правилами розглядуваної лотереї виграшними є білети з парними серійними номерами, то нас цікавитиме, чи потрапив наш серійний номер до множини виграшних номерів

$$A = \{2,\ 4\},$$

або ж він є елементом множини програшних номерів

$$B = \{1,\ 3,\ 5\}.$$

Іншими словами, у цьому експерименті особливу роль відіграють дві підмножини: A (вибраний білет виграв) і B (вибраний білет програв). А, наприклад, підмножина $C = \{1,\ 2\}$ навряд чи викликатиме будь-який інтерес.

Таким чином, підмножини множини Ω, які цікавлять дослідника в тій чи іншій задачі, називають **випадковими подіями** (або просто **подіями**) експерименту, що вивчається.

Як ви знаєте з курсу алгебри 9 класу, у теорії ймовірностей кожній випадковій події X ставлять у відповідність деяке невід'ємне число $P(X)$, яке називають **ймовірністю випадкової події** X.

До випадкових подій завжди відносять множину Ω і порожню множину $\varnothing$. Таким чином, у будь-якому експерименті існує щонайменше дві випадкові події. У кінці цього пункту ми докладніше пояснимо, як формують множину випадкових подій.

Повернемося до досліду з лотерейним білетом. Нехай учасник витягнув виграшний білет, тобто білет із серійним номером 2 або 4.

Оскільки цей елементарний наслідок є елементом множини A, то відбулася подія $A = \{2, 4\}$ — учасник виграв.

Узагалі вважають, що *в експерименті відбулася подія X, якщо елементарний наслідок ω, яким закінчився експеримент, є елементом множини X. У такому разі говорять, що елементарний наслідок ω* **сприяє події** X.

Наприклад, можна сказати, що будь-який елементарний наслідок сприяє події Ω, тобто подія Ω обов'язково відбувається, тому Ω називають **достовірною подією**. І навпаки, немає жодного наслідку, який сприяє події $\varnothing$, тобто ця подія ніколи не відбувається, тому її називають **неможливою подією.**

Можна зробити й такий висновок: у будь-якому експерименті події Ω і $\varnothing$ не можуть відбутися одночасно.

Означення. Якщо в деякому досліді дві події не можуть відбутися одночасно, то їх називають несумісними.

Іншими словами, події A і B є несумісними, якщо множини A і B не перетинаються.

Наприклад, Ω і $\varnothing$ — несумісні події.

Розглянемо більш змістовний приклад. Гральний кубик кидають один раз. Результатом досліду є число, що випало на верхній грані, тому $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. У цьому досліді можна розглянути різні події, наприклад такі:

A — «на кубику випала трійка», тобто $A = \{3\}$;

B — «на кубику випало парне число», тобто $B = \{2, 4, 6\}$;

C — «на кубику випало непарне число», тобто $C = \{1, 3, 5\}$.

Тоді події A і B є несумісними, оскільки множини A і B не мають спільних елементів. Події B і C також несумісні. Пару ж подій A і C не можна назвати несумісними, оскільки множини A і C мають спільний елемент — число 3. Це можна сказати також інакше. Якщо в результаті кидання на кубику випаде трійка, то одночасно відбудуться і подія A, і подія C.

Наведемо ще один приклад. Усередині прямокутника $ABCD$ навмання вибирають точку, тобто $\Omega = ABCD$. Нехай подія X полягає в тому, що вибрана точка належить кругу блакитного кольору, а подія Y — у тому, що вибрана точка належить трикутнику червоного кольору (рис. 15.1).

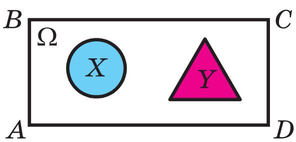


Рис. 15.1

Оскільки блакитний круг не має спільних точок із червоним трикутником, то події X і Y є несумісними.

Означення. **Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається принаймні одна з двох подій A або B деякого експерименту, називають об'єднанням подій A і B.**

Можна сказати й так: множину $A \cup B$ називають об'єднанням подій A і B.

Об'єднання подій є прикладом **операції над подіями.**

Об'єднання двох подій проілюстровано на рисунку 15.2.

Розглянемо в досліді з гральним кубиком такі події:

X — «на кубику випало просте число», тобто $X = \{2, 3, 5\}$;

Y — «на кубику випало складене число», тобто $Y = \{4, 6\}$;

Z — «на кубику випало число, більше за 1», тобто $Z = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тоді випадкова подія Z є об'єднанням випадкових подій X і Y, тобто $Z = X \cup Y$.

Аналогічно означають об'єднання трьох або більшої кількості подій.

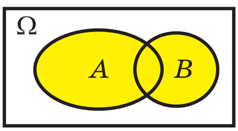


Рис. 15.2

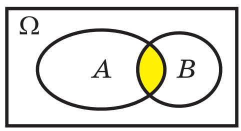


Рис. 15.3

Перейдемо до вивчення інших операцій над подіями.

Нехай у пеналі дівчинки лежать кілька кольорових олівців і ручок. Дівчинка навмання бере один із цих предметів. У цьому досліді розглянемо такі події:

X — «вибраний предмет пише червоним кольором»;

Y — «вибраний предмет — олівець»;

Z — «вибраний предмет — червоний олівець».

Зауважимо, що подія Z відбувається тоді й тільки тоді, коли одночасно відбувається і подія X, і подія Y.

Означення. **Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається і подія A, і подія B деякого експерименту, називають перетином подій A і B.**

Можна сказати й так: множину $A \cap B$ називають перетином подій A і B.

У розглянутому досліді з олівцями та ручками подія Z є перетином подій X і Y, тобто $Z = X \cap Y$.

На діаграмі (рис. 15.3) проілюстровано перетин подій A і B.

Аналогічно означають перетин трьох або більшої кількості подій.

Нехай A — подія деякого досліду. Розглянемо подію B, яка полягає в тому, що не відбулася подія A. Наприклад, у досліді з гральним кубиком розглянемо подію A — «на кубику випало парне число». Тоді подія B — «на кубику випало непарне число».

Означення. **Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли не відбувається подія A, називають доповненням події A.**

Можна сказати й так: множину $\bar{A}$ називають доповненням події A.

У розглянутому досліді з гральним кубиком подія B є доповненням події A, тобто $B = \bar{A}$. Також можна сказати, що $A = \bar{B}$.

На рисунку 15.4 проілюстровано доповнення події A.

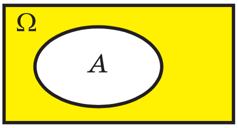


Рис. 15.4

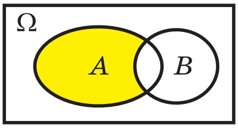


Рис. 15.5

Використовуючи операції об'єднання, перетину та доповнення, можна означити інші операції з випадковими подіями. Наприклад, операцію **різниці подій** A і B деякого експерименту (позначають $A \backslash B$) означають рівністю $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

Випадкова подія $A \backslash B$ відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається подія A та одночасно не відбувається подія B.

Різницю випадкових подій A і B проілюстровано на рисунку 15.5.

ПРИКЛАД 1 У коробці лежать червоні, сині та білі кулі. З коробки навмання виймають одну кулю. Подія A полягає в тому, що витягнута куля виявиться червоною; подія B — у тому, що вона виявиться синьою. Знайдіть ймовірність події $A \cup B$, якщо $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Подія $A \cup B$ полягає в тому, що витягнута навмання куля виявиться або червоною, або синьою. Природно припустити, що шукана ймовірність дорівнюватиме сумі

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Обґрунтуємо це припущення. Нехай у коробці лежить n куль, з яких a червоних і b синіх. Тоді ймовірність події A дорівнює $P(A)=\frac{a}{n}$. Аналогічно ймовірність події B дорівнює $P(B)=\frac{b}{n}$.

Події A і B несумісні, тому наслідки, що сприяють події A, відмінні від наслідків, що сприяють події B. Отже, події $A \cup B$ сприяє $a+b$ наслідків. Таким чином, ймовірність того, що навмання витягнута куля виявиться або червоною, або синьою, дорівнює:

$$P(A \cup B)=\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=P(A)+P(B)=\frac{5}{6}.$$

Відповідь: $\frac{5}{6}$. ◄

Розв'язання прикладу 1 ілюструє найважливішу властивість ймовірності.

Твердження 1. ***Ймовірність об'єднання двох несумісних подій A і B будь-якого досліду можна обчислити за формулою***

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B). \quad (1)$$

Наприклад, використовуючи рівність (1), можна довести, що ймовірність неможливої події $\varnothing$ в будь-якому досліді дорівнює нулю. Справді, якщо $A=B=\varnothing$, то $A \cup B=\varnothing$. Оскільки розглядувані події A і B є несумісними, то можна застосувати формулу (1). Отримуємо:

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing).$$

Звідси $P(\varnothing)=0$.

Знайти ймовірність достовірної події Ω, спираючись на рівність (1), неможливо, тому приймають без доведення таке твердження.

Твердження 2. ***Ймовірність достовірної події Ω дорівнює 1.***

Наведемо ще один приклад застосування формули (1).

Нехай A — деяка подія. Оскільки об'єднання подій A і $\bar{A}$ дорівнює достовірній події, то $P(A \cup \bar{A})=1$. Зважаючи на те, що події A і $\bar{A}$ несумісні, а також застосовуючи формулу (1), можна записати рівність

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \quad (2)$$

Рівність (2) використовують, наприклад, для обчислення ймовірності доповнення події.

Звернемо увагу, що, формулюючи твердження 1 і виводячи формулу (2), ми неявно зробили такі припущення:

- *якщо A і B — випадкові події деякого досліду, то $A \cup B$ — також випадкова подія*;
- *якщо A — випадкова подія деякого досліду, то $\bar{A}$ — також випадкова подія*.

Для того щоб кожного разу не робити подібних застережень, у теорії ймовірностей прийнято вважати, що набори випадкових подій завжди задовольняють ці умови та містять достовірну подію Ω. Такий набір випадкових подій ще називають **алгеброю** подій.

Наприклад, якщо простір елементарних наслідків є скінченним, то зазвичай до алгебри подій відносять усі підмножини простору елементарних наслідків.

Узагалі, якщо під час опису деякого досліду вказано:

- *множину елементарних наслідків*;
- *алгебру подій*;
- *ймовірності всіх випадкових подій*,

то говорять, що задано **ймовірнісний простір**, а твердження 1 і 2 називають **аксіомами теорії ймовірностей**.

Так само, як у курсі геометрії, аксіоми теорії ймовірностей використовують для доведення інших, більш складних тверджень — теорем.

Наприклад, застосовуючи аксіоми теорії ймовірностей, ми довели рівність (2). Використовуючи аксіоми та метод математичної індукції, можна довести, що коли $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — несумісні випадкові події, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad (3)$$

Доведемо також таку теорему.

Теорема 15.1. ***Якщо A і B — події деякого досліду, то***

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \quad (4)$$

Доведення. Розглянемо такі випадкові події:

$$C_1 = A \backslash B, \quad C_2 = B \backslash A, \quad C_3 = A \cap B.$$

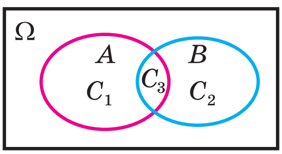


Рис. 15.6

Нескладно переконатися (рис. 15.6), що ці події попарно несумісні та виконується рівність

$$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

Використовуючи рівність (3), отримуємо:

$$P(A \cup B) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3).$$

Звідси

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(C_1) + P(C_2) + 2P(C_3). \qquad (5)$$

Водночас, оскільки $A = C_1 \cup C_3$ і $B = C_2 \cup C_3$, то можна записати:

$$P(A) = P(C_1) + P(C_3) \text{ і } P(B) = P(C_2) + P(C_3).$$

Додаючи ці рівності, отримуємо:

$$P(A) + P(B) = P(C_1) + P(C_2) + 2P(C_3). \qquad (6)$$

З рівностей (5) і (6) випливає справедливість рівності (4). ◄

Звернемо увагу на те, що формула (4) є узагальненням формули (1). Справді, якщо події A і B несумісні, то вони ніколи не відбуваються одночасно; тому $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$.

ПРИКЛАД 2 Кожний учень курсів іноземних мов вивчає або тільки англійську мову, або тільки німецьку мову, або обидві ці іноземні мови одразу. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибраний учень вивчає англійську мову, а подія B — у тому, що навмання вибраний учень вивчає німецьку мову. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень вивчає обидві іноземні мови, якщо $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$?

Розв'язання. Подія $A \cup B$ полягає в тому, що навмання вибраний учень вивчає англійську або німецьку мову. Оскільки кожний учень курсів вивчає хоча б одну іноземну мову, то подія $A \cup B$ є достовірною, тобто дорівнює Ω. Звідси випливає, що $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$.

Подія $A \cap B$ полягає в тому, що навмання вибраний учень вивчає і англійську мову, і німецьку, тобто вивчає обидві іноземні мови одразу. Використовуючи формулу (4), отримуємо:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{3}{20}.$$

Відповідь: $\frac{3}{20}$. ◄

?

1. Що називають простором елементарних наслідків експерименту?
2. У яких випадках говорять, що елементарний наслідок сприяє події?
3. Яку подію називають достовірною? неможливою?
4. Які події називають несумісними?
5. Яку подію називають об'єднанням двох подій і як це записують?
6. Яку подію називають перетином двох подій і як це записують?
7. Яку подію називають доповненням події і як це записують?
8. Що називають алгеброю подій?
9. У яких випадках говорять, що задано ймовірнісний простір?
10. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
11. Як можна обчислити ймовірність об'єднання двох подій?

ВПРАВИ

15.1.° У коробці лежать 7 синіх і 5 червоних олівців. Дослід полягає в тому, що з коробки навмання виймають один олівець і фіксують його колір. Опишіть елементарні наслідки такого досліду.

15.2.° Дослід полягає в тому, що одночасно підкидають три монети. Результатом досліду є кількість гербів, які при цьому випали. Опишіть елементарні наслідки такого досліду.

15.3.° У слові «МАТЕМАТИКА» навмання вибирають одну букву. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

15.4.° Дослід полягає в тому, що одночасно кидають два гральних кубики. Результатом досліду є сума очок, що випали на кубиках. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

15.5.° Уболівальник стежить за футбольним матчем і фіксує його остаточний результат. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

15.6.° Тренерка спостерігає за результатом забігу спортсменки на певну дистанцію, фіксуючи час забігу. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

15.7.° Чи є події A і B несумісними, якщо дослід полягає в тому, що:
1) монету підкидають один раз, A — «випав герб», B — «випало число»;
2) гральний кубик кидають два рази, A — «випала одиниця при першому киданні», B — «випала шістка при другому киданні»;
3) у мішень стріляють два рази, A — «у мішень улучили двічі», B — «у мішень улучили рівно один раз»?

15.8.° Бібліотекар шкільної бібліотеки бере навмання один із підручників. Серед даних подій знайдіть пари несумісних:
A — «взято підручник з математики»,
B — «взято підручник для 11 класу»,
C — «взято підручник з фізики для 10 класу»,
D — «взято підручник, виданий до 2017 року»,
E — «взято підручник з гуманітарного предмета».

15.9.° Шоколадне яйце із сюрпризом містить усередині іграшку із серії «Транспорт» (машинку чи літачок) або із серії «Тварини» (фігурку кота чи собаки). Подія A полягає в тому, що вибране навмання шоколадне яйце із сюрпризом містить іграшку із серії «Транспорт»; подія B — у тому, що шоколадне яйце із сюрпризом містить фігурку собаки. Укажіть серед подій X, Y, Z, T подію: 1) $\overline{A}$, 2) $A \cup B$, 3) $A \setminus B$, де:

X — «шоколадне яйце із сюрпризом містить фігурку кота»,
Y — «шоколадне яйце із сюрпризом містить іграшку із серії «Тварини»,
Z — «шоколадне яйце із сюрпризом містить машинку чи літачок»,
T — «шоколадне яйце із сюрпризом не містить фігурку кота».

15.10.° Діаграма (рис. 15.7) ілюструє подію A, яка полягає в тому, що навмання вибраний учень 11-А класу має світле волосся. Кожна червона точка на діаграмі зображує учня. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний учень 11-А класу: 1) має світле волосся; 2) має темне волосся.

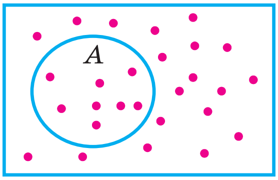


Рис. 15.7

15.11.° Серед членів спортклубу вибирають навмання одну людину. Подія A полягає в тому, що вибрана людина відвідує заняття в тренажерному залі, а подія B — у тому, що вона відвідує басейн. У чому полягає подія, проілюстрована на діаграмі (рис. 15.8)?

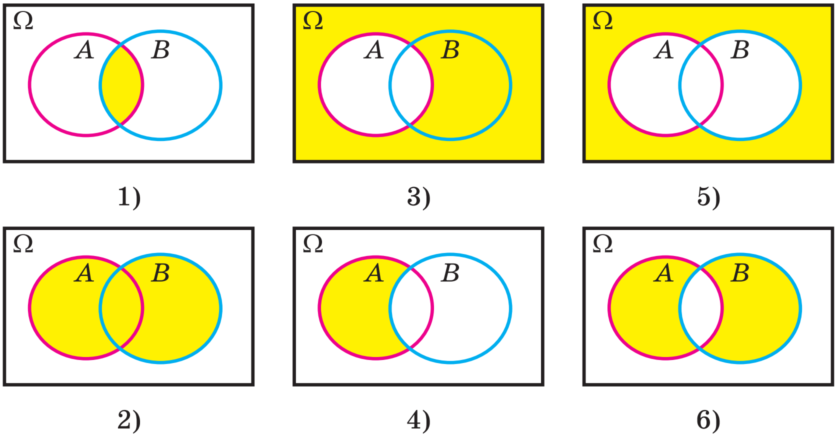


Рис. 15.8

15.12.° На діаграмі (рис. 15.9) проілюстровано події A і B. Перерисуйте діаграму в зошит і заштрихуйте ту область, яка ілюструє таке:

1) відбулася подія A, але не відбулася подія B;
2) відбулася подія B, але не відбулася подія A;
3) не відбулася ні подія A, ні подія B.

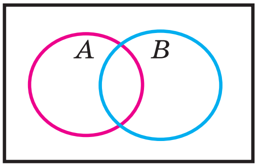


Рис. 15.9

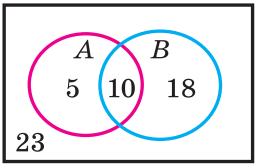


Рис. 15.10

15.13.° Дослід полягає в тому, що з множини $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ навмання вибирають один елемент. У цьому досліді розглядають такі події:

A — вибраний елемент належить множині $\{1, 2\}$,
B — вибраний елемент належить множині $\{1, 3, 5\}$,
C — вибраний елемент належить множині $\{4, 5\}$.

Який елемент міг бути вибраний, якщо відбулася подія:

1) $A \cap B$; 3) $\overline{B}$; 5) $A \cup B \cup C$?
2) $B \cup C$; 4) $C \backslash A$;

15.14.° Дослід полягає в тому, що навмання вибирають дійсне число. У цьому досліді розглядають такі події:

A — вибране число належить проміжку $[0; 2]$,
B — вибране число належить проміжку $(0; +\infty)$,
C — вибране число належить проміжку $[1; 3)$.

За допомогою числових проміжків запишіть множину тих чисел, які могли бути вибрані, якщо відбулася подія:

1) $A \cup B$; 3) $\overline{B}$; 5) $A \cap B \cap C$.
2) $A \cap C$; 4) $A \backslash C$;

15.15.° Подія A полягає в тому, що хтось із вибраних навмання людей у басейні вміє плавати брасом, подія B — у тому, що вміє плавати на спині. На діаграмі (рис. 15.10) вказано кількість людей у тій чи іншій групі. Знайдіть ймовірність події:

1) A; 2) $\overline{B}$; 3) $A \cup B$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$; 5) $A \backslash B$; 6) $A \backslash \overline{B}$.

15.16.° Використовуючи умову попередньої задачі, знайдіть ймовірність події:

1) B; 2) $\overline{A}$; 3) $A \cap B$; 4) $\overline{A} \cup \overline{B}$; 5) $B \backslash A$; 6) $\overline{B} \backslash A$.

15.17.$^{\bullet}$ Стрілець робить два постріли — спочатку в першу мішень, а потім у другу. Ймовірність того, що він улучить тільки в першу мішень, дорівнює $18\,\%$, тільки в другу мішень — $8\,\%$. Знайдіть ймовірність того, що з двох пострілів стрілець улучить у мішень тільки один раз.

15.18.$^{\bullet}$ Учні 10-х і 11-х класів вирішили зіграти між собою матч у футбол та матч у баскетбол. Ймовірність того, що збірна команда 10-х класів виграє у команди 11-х класів тільки у футбол, дорівнює $33\,\%$, тільки в баскетбол — $18\,\%$. Яка ймовірність того, що збірна команда 10-х класів виграє рівно один із двох зіграних матчів?

15.19.$^{\bullet}$ Від деякої зупинки до центру міста можна дістатися автобусом, тролейбусом і трамваєм. Людина, що їде в центр, сідає на той транспортний засіб, який прийде на зупинку першим. Відомо, що автобус приїжджає першим із ймовірністю $\frac{4}{7}$, тролейбус — $\frac{2}{7}$, трамвай — $\frac{1}{7}$. Яка ймовірність того, що людина відправиться в центр не на трамваї?

15.20.$^{\bullet}$ У їдальні пропонують три перші страви — солянку, борщ та овочевий суп. Серед тих, хто хоче скуштувати першу страву, солянку в середньому вибирає кожна друга людина, борщ — кожна третя, а овочевий суп — кожна шоста людина. Яка ймовірність того, що чергова людина, маючи намір замовити першу страву, не вибере борщ?

15.21.$^{\bullet}$ Про події A і B деякого досліду відомо, що $P(A) = P(B) = 0$. Доведіть, що:

1) $P(A \cap B) = 0$; 2) $P(A \backslash B) = 0$; 3) $P(A \cup B) = 0$.

15.22.$^{\bullet}$ Нехай A і B — події деякого досліду. Відомо, що $P(A) \geqslant 0{,}8$ і $P(B) \geqslant 0{,}8$. Доведіть, що $P(A \cap B) \geqslant 0{,}6$.

15.23.$^{\bullet}$ Про події A і B деякого досліду відомо, що $P(A) = P(B) = 1$. Доведіть, що:

1) $P(A \cup B) = 1$; 2) $P(A \cap B) = 1$.

15.24.$^{\bullet}$ Гральний кубик кинули двічі. Подія A полягає в тому, що сума очок, які випали на кубику, є парною; подія B — у тому, що принаймні один раз випала одиниця. Знайдіть ймовірність події:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $A \backslash B$.

15.25.° Правильну трикутну піраміду, грані якої пофарбовано в жовтий, зелений, червоний і синій кольори, підкинули двічі. Нехай подія A полягає в тому, що обидва рази піраміда впала на одну й ту саму грань; подія B полягає в тому, що першого разу піраміда впала на жовту грань або на зелену грань. Знайдіть ймовірність події:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $B \setminus A$.

15.26.° Чоловіки дарують дружинам подарунки на 8 Березня. Ймовірність того, що жінка отримає в подарунок квіти й не отримає в подарунок парфуми, дорівнює $20\ \%$, парфуми без квітів — $10\ \%$, а квіти та парфуми разом — $15\ \%$. Яка ймовірність того, що жінка отримає на 8 Березня в подарунок: 1) квіти; 2) парфуми?

15.27.° Гідрометцентр прогнозує температуру та вологість повітря на найближчі дні. Ймовірність того, що вологість підвищиться до $100\ \%$ або температура знизиться на $5\ ^\circ\mathrm{C}$, дорівнює $85\ \%$, а ймовірність того, що й вологість підвищиться до $100\ \%$, і температура знизиться на $5\ ^\circ\mathrm{C}$, — $40\ \%$. Яка ймовірність того, що найближчими днями температура повітря знизиться на $5\ ^\circ\mathrm{C}$, якщо ймовірність того, що вологість підвищиться до $100\ \%$, дорівнює $70\ \%$?

15.28.•• Серед абітурієнтів механіко-математичного факультету університету є призери обласних олімпіад і відмінники. Ймовірність натрапити серед абітурієнтів на призера обласної олімпіади дорівнює $20\ \%$, на відмінника — $35\ \%$, а на призера обласної олімпіади або на відмінника — $43\ \%$. Яка ймовірність натрапити серед абітурієнтів на призера обласної олімпіади та відмінника в одній особі?

15.29.•• Випускниця університету хоче працювати в банку або в страховій компанії. Після співбесід у цих установах вона оцінює ймовірність бути прийнятою на роботу в банк у 0,5, а в страхову компанію — у 0,6. Крім того, вона вважає, що їй надійде пропозиція з обох цих установ із ймовірністю 0,4. Як вона має оцінити ймовірність бути прийнятою на роботу?

15.30.•• Міжнародні фінансові аналітики провели дослідження та виявили, що ймовірність зростання курсу євро до долара в наступному місяці становить 0,55, ймовірність зростання курсу швейцарського франка до долара — 0,35, а ймовірність того, що зростуть курси обох європейських валют до долара, — 0,23. Знайдіть ймовірність того, що зросте курс щонайменше однієї європейської валюти.

15.31.•• У несправній люстрі поміняли на нові вимикач і лампочку. Ймовірність того, що не менше ніж рік пропрацює лампочка, становить 0,96, а вимикач — 0,98. Крім того, відомо, що з ймовірністю 0,01 протягом року можуть вийти з ладу і лампочка, і вимикач. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться замінити:
1) тільки лампочку;
2) тільки вимикач;
3) лампочку або вимикач;
4) рівно один із двох нових елементів люстри?

15.32.•• Петро й Андрій прийшли на озеро рибалити. Ймовірність того, що перша спіймана рибина виявиться коропом, у Петра дорівнює $\frac{3}{5}$, а в Андрія — $\frac{1}{2}$. Ймовірність того, що перша спіймана рибина виявиться коропом хоча б в одного з хлопців, дорівнює $\frac{7}{10}$. Яка ймовірність того, що перша спіймана рибина виявиться коропом:
1) і в Петра, і в Андрія;
2) тільки в Петра;
3) тільки в Андрія;
4) тільки в одного з хлопців?

15.33.* Випускники курсів іноземних мов вивчали англійську, німецьку та французьку мови. Ймовірність того, що навмання вибраний випускник знає англійську й німецьку мови, дорівнює 0,6, німецьку та французьку — 0,5, англійську та французьку — 0,4. Чи може адміністрація курсів гарантувати, що в середньому кожний четвертий випускник знає всі три мови?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.34. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}=\frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sqrt{3}}$;

2) $1+\frac{\cos\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$;

3) $\frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)-\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\,\mathrm{tg}\,\beta}=-\mathrm{tg}\,\alpha$.

15.35. Розв’яжіть рівняння:

1) $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25$;

2) $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$.

16. Умовна ймовірність

Розглянемо дослід, який полягає в тому, що гральний кубик кидають двічі. На рисунку 16.1 показано всі 36 рівноможливих результатів цього досліду. Нехай подія A полягає в тому, що сума чисел, які випали на кубику при першому та другому киданнях, дорівнює 12. Подія A відбувається тільки в одному випадку — коли обидва рази випадуть шістки. Тому $P(A) = \frac{1}{36}$.

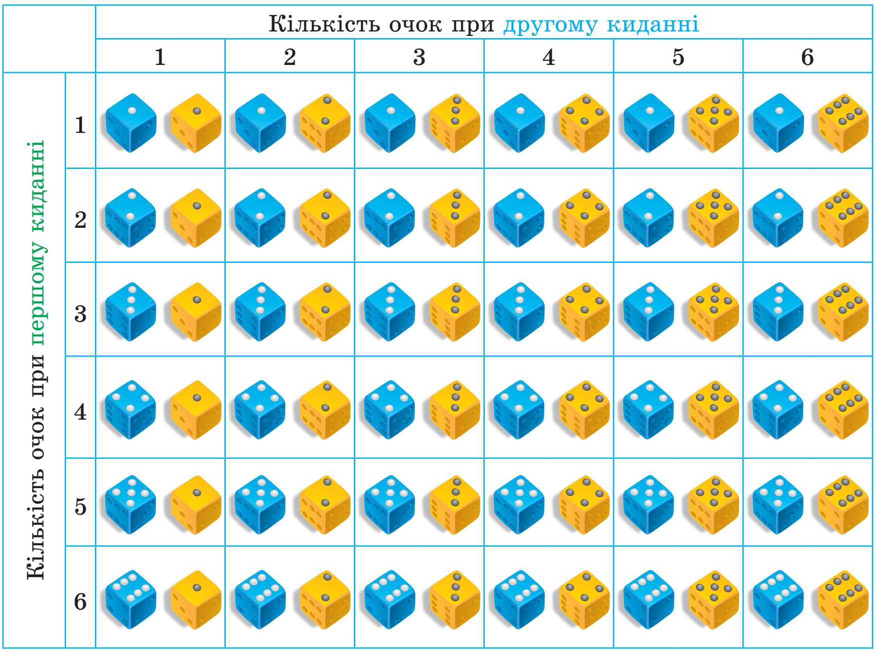


Рис. 16.1

Поставимо таке запитання: чи зміниться ймовірність події A, якщо відомо, що при першому киданні випала шістка (відбулася подія B)? Наш досвід підказує, що ймовірність події A має змінитися. Справді, якщо при першому киданні випала шістка, то для настання події A при другому киданні також має випасти шістка. Ймовірність випадіння шістки при другому киданні дорівнює $\frac{1}{6}$. Тому ймовірність події A за умови випадіння шістки при першому киданні (подія B) дорівнює $\frac{1}{6}$. Це записують так: $P_B(A)=\frac{1}{6}$, і називають **умовною ймовірністю**, тобто ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B.

Увести строге означення поняття умовної ймовірності нам допоможуть такі приклади.

ПРИКЛАД 1 З коробки, у якій лежать 2 червоні та 4 сині кулі, навмання беруть спочатку одну кулю, а потім — ще одну. Подія A полягає в тому, що перша взята куля виявиться червоною, а подія B — у тому, що друга взята куля також виявиться червоною. Обчисліть $P_A(B)$.

Розв'язання. Якщо відбулася подія A, то перша взята куля — червона. Це означає, що перед вибором другої кулі в коробці знаходяться одна червона куля та 4 сині. Тому ймовірність того, що в цій ситуації друга взята куля також виявиться червоною, дорівнює $\frac{1}{5}$, тобто $P_A(B)=\frac{1}{5}$. ◄

Розв'язування задач на обчислення умовних ймовірностей зручно ілюструвати за допомогою деревоподібної схеми — **дендрограми** (від лат. *dendro* — дерево і грец. *gram* — запис, зображення). Наприклад, дослід із прикладу 1 можна проілюструвати дендрограмою, на якій подано всі можливі результати даного досліду (рис. 16.2).

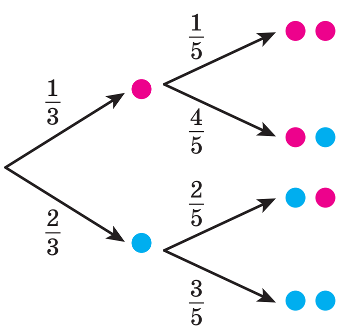


Рис. 16.2

Біля стрілок дендрограми зручно ставити значення ймовірностей відповідних подій. Пропонуємо вам перевірити самостійно правильність обчислення ймовірностей, записаних на дендрограмі 16.2.

Дендрограма є прикладом важливого математичного об'єкта, що застосовується в різних галузях знань. Наприклад, у класифікації живих організмів використовують ієрархічну модель, яка нагадує графічну схему 16.2. Хімічну структуру органічних сполук також зручно зображати у вигляді подібних схем. Такого роду об'єкти, які складаються з точок і відрізків, що їх сполучають, називають графами.

Розглянемо такий дослід. Нехай у прямокутнику позначено n точок, деякі з яких пофарбовано в червоний колір, а деякі мають більший розмір, ніж решта (рис. 16.3).

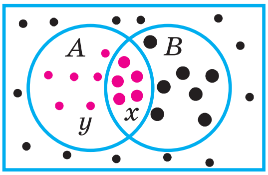


Рис. 16.3

Кількість великих червоних точок позначимо через x, маленьких червоних — через y.

Дослід полягає в тому, що з позначених n точок прямокутника навмання вибирають одну. Таким чином, множина позначених точок утворює простір елементарних наслідків.

У цьому досліді подія A полягає в тому, що вибрана точка виявиться червоною, а подія B — у тому, що вибрана точка виявиться великою.

Оскільки всі результати в даному досліді є рівноможливими, то $P(A)=\frac{x+y}{n}$.

Тепер знайдемо ймовірність події $A\cap B$, яка полягає в тому, що вибрана точка виявиться червоною і великою одночасно. Отримуємо: $P(A\cap B)=\frac{x}{n}$.

Обчислимо також ймовірність $P_A(B)$. Якщо відбулася подія A, тобто вибрано червону точку, то це означає, що з n рівноможливих результатів досліду має сенс розглядати тільки $x+y$ червоних точок (рис. 16.4).

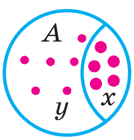


Рис. 16.4

Із цих $x+y$ рівноможливих результатів події B сприяють тільки x результатів, тому $P_A(B)=\frac{x}{x+y}$.

Використовуючи знайдені значення ймовірностей, можна записати:

$$P_A(B)\cdot P(A)=\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+y}{n}=\frac{x}{n}=P(A\cap B).$$

Таким чином, установлено, що **для досліду з n рівноможливими елементарними наслідками виконується рівність**

$$\boxed{P_A(B)\cdot P(A)=P(A\cap B),} \qquad (1)$$

яку за умови $P(A)>0$ можна переписати у вигляді

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}. \qquad (2)$$

Рівність (2) пояснює, чому при $P(A) > 0$ використовують таке означення.

Означення. **Нехай A і B — події деякого досліду і $P(A) > 0$. Тоді умовною ймовірністю $P_A(B)$ події B за умови, що відбулася подія A, називають число $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.**

У випадку, коли $P(A) = 0$, умовну ймовірність $P_A(B)$ не означають.

ПРИКЛАД 2 Відомо, що озиме жито успішно переносить зиму з ймовірністю $\frac{9}{10}$. Якщо озиме жито успішно перенесе зиму, то ймовірність того, що й озима пшениця успішно перезимує, дорівнює $\frac{13}{15}$. Якщо ж озиме жито навесні доведеться пересівати, то ймовірність того, що доведеться пересівати й озиму пшеницю, дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть ймовірність того, що пшениця успішно перезимує.

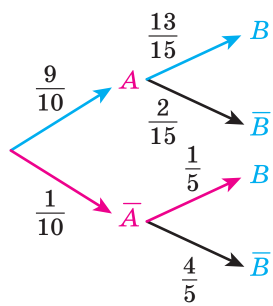


Рис. 16.5

Розв'язання. Позначимо через A і B події, які полягають у тому, що успішно перенесуть зиму жито й пшениця відповідно. Тоді інформацію, подану в задачі, можна проілюструвати дендрограмою, зображеною на рисунку 16.5.

Жито й пшениця успішно перезимують, якщо відбудуться і подія A, і подія B (блакитні стрілки на дендрограмі). Ураховуючи формулу (1), отримуємо, що

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{15} = \frac{39}{50} = 78\,\%.$$

Пшениця успішно перезимує, а жито доведеться пересівати, якщо відбудуться і подія B, і подія $\bar{A}$ (червоні стрілки на дендрограмі). Тому

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})\, P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 2\,\%.$$

Пшениця успішно перезимує (подія B) у разі одного з двох варіантів — жито успішно перезимує (подія A) або жито доведеться пересівати (подія $\bar{A}$). Ці два варіанти проілюстровано на дендрограмі (рис. 16.5) блакитною та червоною вітками.

Це означає, що подія B є об'єднанням двох несумісних подій: $A \cap B$ (блакитна вітка) і $\bar{A} \cap B$ (червона вітка), тому

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\bar{A} \cap B\right) = 78\,\% + 2\,\% = 80\,\%.$$

Відповідь: 0,8. ◄

Звернемо увагу, що під час розв'язування прикладу 2 для пошуку ймовірності того, що пшениця успішно перезимує, було розглянуто два взаємовиключальні варіанти: жито успішно перезимує і жито доведеться пересівати. Зрозуміло, що ці міркування можна узагальнити.

Нехай у деякому досліді розглядають такі події H_1 і H_2, що за будь-якого результату досліду відбувається рівно одна із цих подій і $P\,(H_1) > 0$, $P\,(H_2) > 0$. Це означає, що множини H_1 і H_2 не перетинаються та їх об'єднання дорівнює всьому простору елементарних наслідків Ω. Тоді для будь-якої події A цього досліду виконується рівність

$$P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2).$$

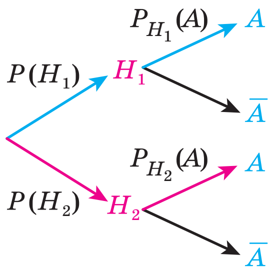


Рис. 16.6

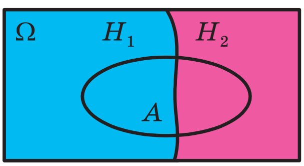


Рис. 16.7

Дендрограма на рисунку 16.6 і рисунок 16.7 ілюструють цю формулу.

Цю рівність називають **формулою повної ймовірності.**

?

1. Як називають ймовірність події A, якщо відомо, що відбулася подія B?
2. Яку діаграму зручно використовувати для ілюстрації задач на обчислення умовних ймовірностей?
3. За якою формулою визначають умовну ймовірність?
4. Що називають формулою повної ймовірності?

ВПРАВИ

16.1.° Серед учнів вашого класу навмання вибрали одного. Знайдіть ймовірність того, що вибраний учень має оцінку «12» з алгебри, якщо відомо, що вибрали хлопця.

16.2.° У таблиці подано інформацію про тварин притулку. З усіх тварин навмання вибрали одну. Знайдіть ймовірність того, що вік вибраної тварини більший за рік, якщо відомо, що вибрали собаку.

Вік тварини	*Собаки*	*Кішки*
Менший ніж рік	5	4
Від року до двох років	3	8
Більший за два роки	12	18

16.3.• У коробці лежать кілька куль одного кольору: або всі жовті, або всі сині. Ймовірність того, що в коробці лежать жовті кулі, дорівнює $\frac{1}{2}$. З коробки навмання послідовно беруть дві кулі.

1) Яка ймовірність того, що друга вийнята куля виявиться жовтою?
2) Яка ймовірність того, що друга вийнята куля виявиться жовтою, якщо перша вийнята куля також виявилася жовтою?
3) Яка ймовірність того, що друга вийнята куля виявиться жовтою, якщо перша вийнята куля виявилася синьою?

16.4.• Монету підкидають 4 рази. Знайдіть ймовірність того, що в кожному з останніх двох підкидань випаде герб, якщо в кожному з перших двох підкидань випало число.

16.5.• У коробці лежать ручки синього та червоного кольорів. З коробки навмання послідовно витягують дві ручки. Складіть дендрограму цього досліду.

16.6.• В одному ящику лежать кулі трьох кольорів: червоного, синього та жовтого, а в другому двох кольорів: зеленого і чорного. З кожної коробки навмання вибирають по одній кулі. Складіть дендрограму цього досліду.

16.7.• Людина очікує на зупинці автобус або тролейбус і заходить у той транспортний засіб, який прийде першим. Знаходячись у транспорті, людина сідає біля вікна, якщо є таке вільне місце. Складіть дендрограму цього досліду.

16.8.• Відомо, що $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ і $P(A \cup B) = 0,6$. Знайдіть:
1) $P(A \cap B)$; 2) $P_A(B)$; 3) $P_B(A)$.

16.9.• Відомо, що $P_A(B) = 0,5$, $P_B(A) = 0,75$ і $P(A \cap B) = 0,25$. Знайдіть:
1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) $P(A \cup B)$.

16.10.• На зборах присутні 19 осіб, серед яких 12 жінок і 7 чоловіків. Для підрахунку результатів голосування потрібно обрати рахункову комісію з трьох осіб. Членів рахункової комісії обирають послідовно шляхом жеребкування. Відомо, що першими двома членами комісії виявилися чоловіки. Знайдіть ймовірність того, що третім з вибраних членів рахункової комісії виявиться жінка. Складіть дендрограму цього досліду.

16.11.• З коробки, у якій лежать 20 синіх і 15 жовтих куль, навмання беруть спочатку одну, а потім ще одну кулю. Відомо, що перша куля була синьою. Обчисліть ймовірність того, що друга куля виявиться жовтою. Складіть дендрограму цього досліду.

16.12.• Після подорожі до Європи в мандрівника залишилися світлини — 10 пейзажів і 15 портретів із Франції та 6 пейзажів і 14 портретів з Італії. Мандрівник вибирає навмання 2 світлини. Яка ймовірність того, що вони обидві будуть пейзажами, якщо відомо, що він не вибрав жодного портрета, зробленого у Франції?

16.13.• У букіністичній крамниці на полиці з детективами стоять 20 книг, з яких 4 у твердій і 16 у м'якій обкладинках, а на полиці зі збірками поезій — 40 книг, з яких 10 у твердій і 30 у м'якій обкладинках. Відвідувач крамниці бере навмання одну книгу із цих полиць. Яка ймовірність того, що це буде збірка поезій, якщо відомо, що вибрана книга не є детективом у м'якій обкладинці?

16.14.•• На проспекті встановлено два світлофори. Ймовірність зафіксувати зелений колір на першому світлофорі дорівнює 0,8, а на другому світлофорі — 0,9. Ймовірність зафіксувати зелене світло одночасно на обох світлофорах дорівнює 0,7. Знайдіть ймовірність:
1) зафіксувати зелене світло на першому світлофорі за умови, що на другому світлофорі також горить зелене світло;
2) зафіксувати зелене світло на другому світлофорі за умови, що на першому світлофорі також горить зелене світло;
3) зафіксувати на першому світлофорі сигнал, який забороняє рух, за умови, що на другому світлофорі горить зелене світло;
4) зафіксувати зелене світло на другому світлофорі за умови, що на першому світлофорі горить сигнал, який забороняє рух.

16.15.•• Піцерія пропонує за бажанням відвідувача додавати в піцу бекон та/або гриби. Ймовірність того, що відвідувач попросить додати бекону, дорівнює 0,6, а додати грибів — 0,7. Ймовірність же того, що відвідувач попросить додати в піцу бекону або грибів, дорівнює 0,8. Знайдіть ймовірність того, що:

1) відвідувач попросить додати бекону, якщо відомо, що він уже попросив додати грибів;
2) відвідувач попросить додати грибів, якщо відомо, що він не любить бекон.

16.16.•• Ймовірність того, що навмання вибраний клієнт банку має поточний рахунок, дорівнює 80 %, депозитний — 60 %. Серед тих, у кого відкрито поточний рахунок, доля клієнтів з депозитним рахунком становить 70 %. Знайдіть ймовірність того, що у клієнта, який має депозитний рахунок, відкрито й поточний.

16.17.•• За даними страхової компанії, ймовірність того, що водій потрапить в аварію протягом року, дорівнює 0,05. Проте якщо відомо, що стаж водіння менший від 2 років, то така ймовірність становить уже 0,15. Серед водіїв 25 % мають стаж менше від 2 років. Знайдіть ймовірність того, що у водія, який потрапив в аварію протягом року, стаж водіння був меншим від 2 років.

16.18.•• У коробці лежать 24 сині та 16 червоних ручок. Учень вибирає навмання ручку з коробки та цією ручкою пише число на папері. Електронний сканер розпізнає число, написане синьою ручкою, із ймовірністю 90 %, а число, написане червоною ручкою, — із ймовірністю 70 %. Знайдіть ймовірність того, що написане число буде розпізнано.

16.19.•• На змаганнях з метання списа останньому спортсмену залишилося виконати останню спробу. Якщо під час кидка вітер буде попутним, то спортсмен зможе перемогти з ймовірністю 0,42; якщо ж вітер буде зустрічним — то з ймовірністю 0,35. Ймовірність того, що під час кидка вітер буде попутним, дорівнює 0,6. Знайдіть ймовірність того, що спортсмен переможе.

16.20.•• Два заводи виробляють парасольки. Перший завод виробляє 30 %, а другий — 70 % усього обсягу виробництва парасольок. Ймовірність купити браковану парасольку дорівнює 1 %, якщо її виготовлено на першому заводі, і дорівнює 3 %, якщо на другому. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибрана парасолька виявиться бракованою.

16.21.•• З коробки, у якій лежать 10 синіх і 18 червоних куль, навмання беруть спочатку одну, а потім ще одну кулю. Обчисліть ймовірність того, що перша взята куля синя, за умови, що друга куля виявилася червоною.

16.22.•• З коробки, у якій лежать 2 сині та 3 червоні кулі, навмання беруть спочатку одну, а потім ще одну кулю. Обчисліть ймовірність того, що взяті кулі одного кольору, якщо серед узятих куль є червона.

16.23.* Світланка виграє партію в настільний теніс у свого друга Сергійка з ймовірністю 0,6. Вони вирішили зіграти матч із 10 партій, переможець у якому отримає кульок цукерок. За рахунку 5 : 5 приз отримає Сергійко. Після 7 зіграних партій рахунок був 4 : 3 на користь Світланки, але тут прийшла мама Сергійка і матч довелося перервати. Як діти мають розділити кульок цукерок?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.24. Знайдіть кількість членів арифметичної прогресії, сума всіх членів якої дорівнює 660, добуток другого члена та різниці прогресії — 48, а сума третього та п'ятого членів — 40.

16.25. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, третій член якої більший за перший на 1, а другий — більший за четвертий на 2.

17. Незалежні події

Розглянемо дослід, у якому спочатку підкидають монету в 1 гривню, а потім — монету у 2 гривні. Цей дослід може закінчитися одним із чотирьох рівноможливих результатів (рис. 17.1).

Розглянемо дві події:

A — у результаті підкидання монети в 1 грн випав герб;

B — у результаті підкидання монети у 2 грн випав герб.

Оскільки події A сприяють два із чотирьох результатів досліду (рис. 17.1), то $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогічно $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Поставимо таке запитання: чи зміниться ймовірність випадіння герба в результаті підкидання монети у 2 грн (подія B), якщо відомо, що в результаті підкидання монети в 1 грн уже випав герб (відбулася подія A)? Тобто порівняємо величини $P(B)$ і $P_A(B)$.

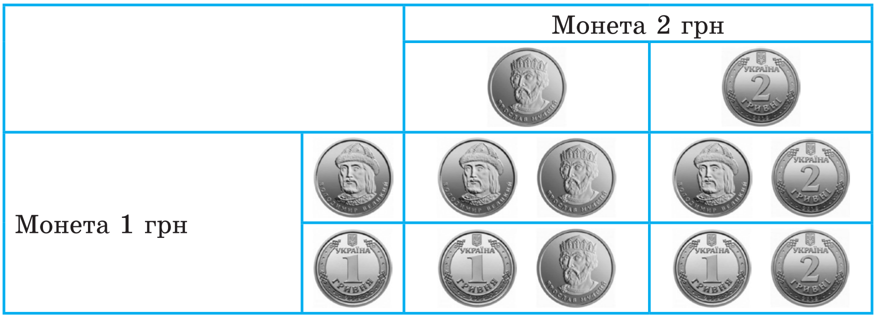


Рис. 17.1

Наш досвід підказує, що ймовірність не має змінитися, оскільки підкидання монети у 2 грн виконується *незалежно* від результату підкидання монети в 1 грн.

Справді, якщо відбулася подія A — у результаті підкидання монети в 1 грн випав герб, то із чотирьох рівноможливих результатів досліду є сенс розглядати тільки два (рис. 17.2).

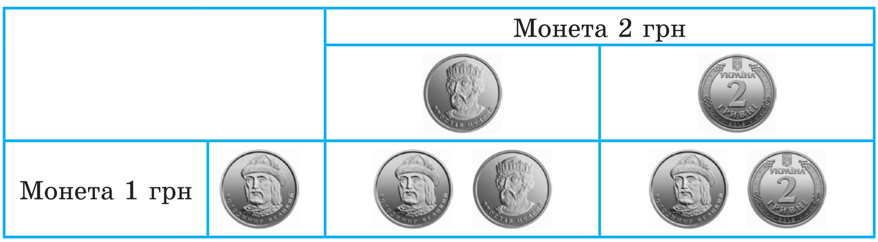


Рис. 17.2

Із цих двох результатів події B сприяє тільки один, тому $P_A(B) = \frac{1}{2}$. Таким чином, $P_A(B) = P(B)$.

Значення $P_A(B)$ можна було б знайти, користуючись означенням умовної ймовірності, а саме: із чотирьох рівноможливих елементарних наслідків (рис. 17.1) події $A \cap B$ сприяє тільки один — на обох монетах випав герб, тому

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, розрахунки підтвердили припущення, що $P_A(B) = P(B)$, тобто ймовірність події B не змінюється залежно від того, чи відбулася подія A. Так само можна показати, що $P_B(A) = P(A)$, тобто ймовірність події A не змінюється залежно від того, чи відбулася подія B. У такому разі говорять, що події A і B є **незалежними**.

Умовні ймовірності $P_A(B)$ і $P_B(A)$ визначені тільки для подій A і B з додатними ймовірностями. Тому рівності $P_A(B) = P(B)$ і $P_B(A) = P(A)$ означають поняття незалежності подій тільки у випадку, коли $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$.

Звернемо увагу, що рівність $P_A(B) = P(B)$ можна переписати так:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B);$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ці міркування пояснюють, чому використовують таке означення.

Означення. **Події A і B деякого досліду називають незалежними, якщо $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.**

Коли $P(A) = 0$ або $P(B) = 0$, то рівність $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ виконується (доведіть це самостійно). Тому такі події A і B також відносять до незалежних.

Якщо ж $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$, то рівність $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ є рівносильною кожній із двох таких рівностей: $P_A(B) = P(B)$ і $P_B(A) = P(A)$.

Якщо події A і B не є незалежними, то їх називають **залежними**. Наприклад, нехай гральний кубик кидають один раз. Якщо подія A полягає в тому, що на гральному кубику випало парне число, а подія B — у тому, що на гральному кубику випала двійка, то $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{6}$. Тому $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, тобто такі події A і B є залежними.

Поняття незалежності подій можна узагальнити для трьох і більшої кількості подій: ***події деякого досліду називають незалежними*[1]*, якщо для будь-якого набору $A_1, A_2, \ldots, A_n$ цих подій виконується рівність***

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Якщо ймовірності всіх розглядуваних подій більші за нуль, то так само, як і у випадку незалежності двох подій, *кілька подій є незалежними тоді й тільки тоді, коли ймовірність будь-якої з них не змінюється залежно від того, чи відбулися які-небудь з решти подій.*

ПРИКЛАД 1 Стрілець улучає в мішень із ймовірністю 0,9. Знайдіть ймовірність того, що з трьох послідовних незалежних пострілів стрілець улучить у мішень тільки з третього разу.

[1] Також використовують термін «незалежні в сукупності події».

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що стрілець не влучить у мішень при першому пострілі, подія B — у тому, що він не влучить у мішень при другому пострілі, а подія C — у тому, що він улучить у мішень при третьому пострілі. Зауважимо, що $P(A) = 0,1,\ P(B) = 0,1,\ P(C) = 0,9.$

Стрілець улучить у мішень тільки з третього разу, якщо відбудеться подія $A \cap B \cap C$. Оскільки постріли здійснюються незалежно один від одного, то події A, B і C будуть незалежними, тому

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,009. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 У партії з 20 000 лампочок є 500 бракованих. Дослід полягає в тому, що послідовно навмання вибирають 40 лампочок. Яка ймовірність того, що бракованою виявиться тільки перша лампочка із 40 вибраних?

Розв'язання. Використовуючи комбінаторні формули, розв'язати задачу досить легко. Закодуємо 20 000 лампочок числами від 1 до 20 000. Тоді елементарним наслідком даного випробування буде будь-який 40-елементний упорядкований набір чисел із множини $\{1, 2, \ldots, 20\,000\}$. Наприклад, упорядкований набір $(2, 3, \ldots, 41)$ означає, що першою витягли лампочку з номером 2, потім — лампочку з номером 3 і т. д., останньою витягнули лампочку з номером 41. Тому простір рівноможливих елементарних наслідків складається з $A_{20\,000}^{40}$ елементів.

Водночас кількість таких 40-елементних наборів, серед яких тільки перший елемент відповідає бракованій лампочці (подія X), дорівнює $A_{500}^{1} A_{19\,500}^{39}$ (подумайте чому), тому

$$P(X) = \frac{A_{500}^{1} A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}.$$

Відповідь отримано, і задачу розв'язано. Проте поставимо цілком резонне запитання: як скористатися такою відповіддю на практиці? Отримане число велике чи маленьке? Як у десятковому записі числа $P(X)$ знайти хоча б кілька знаків після коми? Навряд чи вийде підрахувати відповідні числа й на калькуляторі, оскільки навіть після скорочення всіх дробів доведеться працювати з більш ніж 100-цифровими числами[1].

[1] За допомогою спеціалізованих обчислювальних програм, які підтримують роботу з багатоцифровими числами, було знайдено, що

$$P(X) = \frac{A_{500}^{1} A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}} = 0,00932\ldots .$$

У таких випадках у теорії ймовірностей можна розв'язувати задачу з деякою похибкою (так само, як, наприклад, у шкільному курсі фізики нехтують опором повітря під час розрахунку параметрів руху тіла).

Наведемо відповідні міркування.

Зауважимо, що ймовірність, узявши одну лампочку, натрапити на браковану становить $p = \frac{500}{20\,000} = 0{,}025$. Оскільки число 40 мале порівняно з 20 000 і 500, то вважатимемо, що на кожному із 40 кроків ймовірність натрапити на браковану лампочку не залежить від результатів, отриманих на інших кроках, і дорівнює p.

Позначимо через A_k випадкову подію «взяти небраковану лампочку на k-му кроці», де $2 \leqslant k \leqslant 40$, а через B_1 — випадкову подію «взяти браковану лампочку на першому кроці». Тоді $P(A_k) = 1 - p = 0{,}975$, $P(B_1) = p = 0{,}025$. Випадкову подію X — «бракованою є тільки перша лампочка із 40 вибраних» — можна подати у вигляді

$$X = B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots \cap A_{40}.$$

Згідно з нашими домовленостями випадкові події $B_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{40}$ є незалежними. Отже,

$$P(X) = P(B_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_{40}) = p(1-p)^{39} \approx 0{,}00931.$$

Таким чином, шукана ймовірність приблизно дорівнює $1\,\%$. ◄

?

1. Як називають дві події, якщо ймовірність однієї з них не змінюється залежно від того, чи відбулася друга подія?
2. Які дві події називають незалежними?
3. Які дві події називають залежними?
4. Які n подій називають незалежними?

ВПРАВИ

17.1.° При обстрілі суміші ізотопів Урана пучком нейтронів ймовірність початку керованої ядерної ланцюгової реакції становить $40\,\%$. Яка ймовірність того, що з двох таких незалежних дослідів тільки в другому почнеться керована ядерна ланцюгова реакція?

17.2.° За даними демографічних досліджень, ймовірність того, що новонароджена дитина виявиться хлопчиком, дорівнює 0,512. Знайдіть ймовірність того, що в сім'ї, яка планує мати трьох дітей, діти народяться в послідовності: хлопчик, дівчинка, хлопчик.

17.3.° Стрілець улучає в мішень із ймовірністю p. Дослід полягає в тому, що стрілець стріляє доти, доки не влучить у мішень. Знайдіть ймовірність того, що йому доведеться стріляти 6 разів.

17.4.° У неякісній партії деталей ймовірність натрапити на браковану деталь становить 0,2. Контролер перевіряє деталі доти, доки не виявить першу браковану. Знайдіть ймовірність того, що йому доведеться перевірити 8 деталей.

17.5.• Нехай A і B — незалежні події деякого досліду. Доведіть, що події $\overline{A}$ і B також є незалежними.

17.6.• Нехай A і B — незалежні події деякого досліду. Доведіть, що події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також є незалежними.

17.7.• Нехай A і B — незалежні події деякого досліду з ненульовими ймовірностями. Чи можуть події A і B бути несумісними?

17.8.• Нехай A і B — несумісні події деякого досліду з ненульовими ймовірностями. Чи можуть події A і B бути незалежними?

17.9.• Андрій улучає в мішень із ймовірністю 0,4, Сергій — із ймовірністю 0,5, а Петро — із ймовірністю 0,7. Усі троє роблять по одному пострілу. Яка ймовірність того, що:

1) улучать усі хлопці;
2) жоден із хлопців не влучить;
3) тільки Андрій улучить;
4) рівно один із хлопців улучить;
5) тільки один із хлопців не влучить;
6) щонайменше двоє хлопців улучать?

17.10.• Серед лотерейних білетів 10 % виграшних. Гравець придбав 3 білети. Яка ймовірність того, що серед куплених білетів:

1) не буде виграшних;
2) буде рівно один виграшний;
3) буде рівно два виграшних;
4) будуть усі виграшні?

17.11.• Ймовірність того, що футбольний матч між командами A і B завершиться внічию, становить 50 %. Ймовірність перемоги команди A дорівнює 20 %, а команди B — 30 %. Команди A і B планують провести серію із чотирьох ігор між собою. Яка ймовірність того, що:

1) усі ігри закінчаться внічию;
2) команда B не програє жодного матчу;
3) команда A переможе тільки в другій грі;
4) команда A переможе тільки один раз у серії ігор?

17.12.•• Електричний блок (рис. 17.3) працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Для підвищення надійності системи електричний блок дублюють ще одним таким самим блоком так, що отримана система працює тоді, коли працює щонайменше один із блоків (рис. 17.4). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року, якщо несправність кожного електричного блока відбувається незалежно від роботи інших блоків?

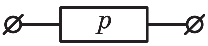


Рис. 17.3

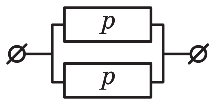


Рис. 17.4

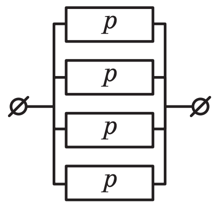


Рис. 17.5

17.13.•• Електричний блок (рис. 17.3) працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Для підвищення надійності системи електричний блок дублюють ще трьома такими самими блоками так, що отримана система працює тоді, коли працює щонайменше один із блоків (рис. 17.5). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року, якщо несправність кожного електричного блока відбувається незалежно від роботи інших блоків?

17.14.•• Схема складається з трьох електричних блоків (рис. 17.6), кожний з яких працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Якщо виходить з ладу хоча б один блок, то система припиняє працювати. Для підвищення надійності системи схему доповнюють ще трьома блоками (рис. 17.7). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року? Чи підвищиться надійність системи, якщо використати схему, зображену на рисунку 17.8?

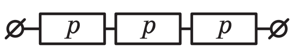


Рис. 17.6

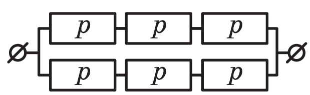


Рис. 17.7

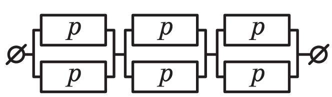


Рис. 17.8

17.15.•• Деякі (найменш надійні) блоки електричної схеми дублюють (рис. 17.9). Ймовірності безвідмовної роботи кожного блока протягом року зображено на цьому рисунку. Яка ймовірність безвідмовної роботи всієї системи протягом року?

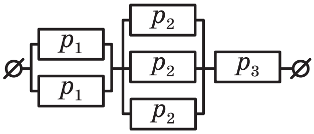


Рис. 17.9

17.16.•• Під час одного оберту локатора радіолокаційна станція виявляє об'єкт із ймовірністю 70 %. Виявлення об'єкта на кожному оберті не залежить від результатів попередніх обертів. Скільки обертів має зробити радіолокаційна станція, щоб виявили об'єкт із ймовірністю, що перевищує 99,9 %?

17.17.•• Ймовірність того, що Василь Заплутайко дасть правильну відповідь на поставлене запитання вчителя, становить 7 %. Скільки запитань має задати вчитель, щоб Василь дав хоча б одну правильну відповідь із ймовірністю, більшою за 50 %?

17.18.•• Для реклами безалкогольного напою виробник вирішив закрити кришками зі скритим написом «приз» 30 000 пляшок із 500 000 випущених. Сергійко любить цей напій і планує за місяць випити 15 пляшок. Яка ймовірність того, що Сергійко знайде напис «приз» тільки під кришкою п'ятої випитої пляшки напою? Відповідь округліть до десятих відсотка.

17.19.•• У деякій країні близько 10 млн виборців, з яких партію A підтримують близько 2 млн осіб. Яка ймовірність того, що серед 5 осіб, опитаних навмання, партію A підтримає тільки перша опитана людина? Відповідь округліть до одного відсотка.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.20. На графіку функції $y = \frac{x+2}{x-2}$ знайдіть таку точку, дотична в якій утворює кут 135° з додатним напрямом осі абсцис.

17.21. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції
$$y = x + \ln(1 - 2x).$$

18. Випадкова величина

Під час вивчення теорії ймовірностей нас часто цікавлять числові величини, пов'язані з результатами дослідів. Зокрема, кидаючи гральні кубики в настільній грі, ми хочемо дізнатися про кількість клітинок, на які треба пересунути фішку; вивчаючи якість продукції, обчислюють відсоток бракованих деталей у випадково вибраній пробній партії; плануючи роботу станції швидкої допомоги, з'ясовують кількість викликів, що надходять за певний проміжок часу, і т. п. У таких випадках говорять, що в даному досліді розглядається **випадкова величина** (кількість клітинок у грі, відсоток бракованих деталей, кількість викликів «швидкої допомоги»).

Наприклад, баскетболіст під час тренування послідовно виконує три кидки: штрафний (1 очко), з-під кільця (2 очки) і потім кидок з-за триочкової лінії (3 очки). Тренер записує результати, послідовно відмічаючи знаком «плюс» попадання, а знаком «мінус» — промах баскетболіста. У цьому досліді 8 елементарних наслідків:

Елементарні наслідки	$+++$	$++-$	$+-+$	$+--$	$-++$	$-+-$	$--+$	$---$

Нехай випадкова величина x дорівнює кількості очок, набраних баскетболістом за ці кидки. Це означає, що коли, наприклад, дослід закінчився результатом «$+-+$», то баскетболіст успішно виконав штрафний і триочковий кидки, тому $x = 4$. Узагалі, значення, якого набуде випадкова величина x, визначається елементарним наслідком розглядуваного досліду. Описати всі значення випадкової величини можна такою таблицею.

Елементарний наслідок	$+++$	$++-$	$+-+$	$+--$	$-++$	$-+-$	$--+$	$---$
Значення випадкової величини x	6	3	4	1	5	2	3	0

Таким чином, кожному елементарному наслідку поставлено у відповідність деяке число — значення випадкової величини. Це означає, що випадкова величина являє собою функцію, аргументами якої є елементарні наслідки, а значеннями — набрані баскетболістом очки.

Означення. Функцію, яка кожному елементарному наслідку деякого досліду ставить у відповідність число, називають випадковою величиною.

Випадкові величини будемо позначати латинськими літерами x, y, ...

Задають випадкову величину так само, як і будь-яку функцію: таблицею значень, формулою, описово, графіком тощо. Наприклад, для розглянутої вище випадкової величини x ми навели два способи її задання: описово («випадкова величина x дорівнює кількості очок, набраних баскетболістом») і таблицею значень.

Областю визначення випадкової величини є простір елементарних наслідків Ω, а областю значень (множиною значень) випадкової величини — деяка підмножина множини $\mathbb{R}$.

ПРИКЛАД 1 Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що випали в результаті підкидання двох монет. Знайдіть множину значень випадкової величини x.

Розв'язання. Оскільки в результаті підкидання двох монет може випасти або 0, або 1, або 2 герби, то множиною значень випадкової величини x є множина $\{0, 1, 2\}$. ◄

Звернемося ще раз до досліду з прикладу 1. Якщо пронумерувати монети, то можна вважати, що даний дослід закінчується одним із чотирьох рівноможливих елементарних наслідків:

Елементарні наслідки	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ

,

де буквою Г позначено випадіння на монеті герба, а буквою Ч — числа.

Розглянемо випадкову величину x, яка дорівнює кількості гербів, що випали в результаті підкидання двох монет. Подамо її можливі значення у вигляді таблиці:

Елементарний наслідок	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
Значення випадкової величини x	2	1	1	0

Із цієї таблиці бачимо, що випадкова величина x набуває значення 2 в одному із чотирьох рівноможливих випадків, тобто з ймовірністю $\frac{1}{4}$. Цей факт прийнято записувати так: $P(x=2)=\frac{1}{4}$.

Міркуючи аналогічно, отримуємо: $P(x=0)=\frac{1}{4}$, $P(x=1)=\frac{1}{2}$.

Набір ймовірностей — $P(x=0)=\frac{1}{4}$, $P(x=1)=\frac{1}{2}$, $P(x=2)=\frac{1}{4}$ — називають **розподілом ймовірностей** випадкової величини x. Розподіл ймовірностей випадкової величини часто подають у вигляді таблиці:

Значення x	0	1	2
Ймовірність	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Зауважимо, що сума чисел, записаних у другому рядку таблиці розподілу ймовірностей випадкової величини, дорівнює 1. Це випливає з того, що випадкова величина гарантовано набуває одного зі значень, указаних у першому рядку таблиці.

ПРИКЛАД 2 Розподіл ймовірностей випадкової величини z задано таблицею, у якій пропущено одне значення:

Значення z	1	3	7	8	10
Ймовірність	0,1	0,35	0,25		0,15

Знайдіть ймовірності: 1) $P(z=4)$; 2) $P(z<6)$; 3) $P(9 \leqslant z < 12)$; 4) $P(z=8)$.

Розв'язання. 1) Запис $P(z=4)$ означає ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина z дорівнює 4. Оскільки в першому рядку таблиці розподілу ймовірностей відсутнє число 4, то це означає, що випадкова величина z за жодного результату досліду не може дорівнювати 4. Тому $P(z=4)=0$.

2) Випадкова величина z набуває значення, меншого від 6, тільки тоді, коли $z=1$ або $z=3$. Оскільки події «випадкова величина набуває значення 1» і «випадкова величина набуває значення 3» є несумісними, то

$$P(z<6)=P(z=1)+P(z=3)=0,1+0,35=0,45.$$

3) Маємо:

$$P(9 \leqslant z < 12)=P(z=10)=0,15.$$

4) Оскільки сума чисел, записаних у другому рядку таблиці, дорівнює 1, то

$$P(z=8)=1-(0,1+0,35+0,25+0,15)=0,15. \blacktriangleleft$$

Розглянемо такий дослід. Червоний і синій гральні кубики кидають один раз і фіксують числа, що випали на кожному кубику.

Нехай випадкова величина x дорівнює числу, що випало на червоному кубику. У цьому самому досліді нас можуть цікавити й інші випадкові величини, наприклад:

- величина y дорівнює числу, що випало на синьому кубику;
- величина z дорівнює сумі чисел, що випали на кубиках;
- величина t дорівнює добутку чисел, що випали на кубиках;
- величина u дорівнює величині x, піднесеній до п'ятого степеня.

Таким чином, в одному досліді може вивчатися кілька різних випадкових величин.

Звернемо увагу, що яким би елементарним наслідком не закінчився описаний вище дослід, значення випадкової величини z завжди дорівнює сумі значень випадкових величин x і y. У такому разі говорять, що випадкова величина z дорівнює **сумі випадкових величин** x і y. Записують: $z = x + y$.

Оскільки випадкові величини x і y є функціями, то це можна сказати й інакше: функція z є сумою функцій x і y.

Аналогічно означають інші операції з випадковими величинами. Наприклад, $t = xy$ і $u = x^5$.

ПРИКЛАД 3 Монету підкидають тричі. Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що випали при цьому, а випадкова величина y дорівнює 0, якщо в результаті першого підкидання випав герб, і 3 в іншому випадку. Знайдіть:

а) розподіл випадкової величини x;
б) розподіл випадкової величини y;
в) розподіл випадкової величини $z = x + y$.

Розв'язання. Будемо писати букву Г, якщо на монеті випадає герб, і букву Ч, якщо число. Тоді в розглядуваному досліді існує 8 рівноможливих результатів досліду:

ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ, ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

а) Випадкова величина x дорівнює нулю (випало 0 гербів) тільки в одному з восьми випадків — якщо відбудеться наслідок ЧЧЧ, тому

$$P(x = 0) = \frac{1}{8} \text{ — результат досліду ЧЧЧ.}$$

Аналогічно знайдемо ймовірності для інших значень величини x. Маємо:

$$P(x = 1) = \frac{3}{8} \text{ — результати досліду ГЧЧ, ЧГЧ, ЧЧГ;}$$

$$P(x = 2) = \frac{3}{8} \text{ — результати досліду ГГЧ, ГЧГ, ЧГГ;}$$

$$P(x=3)=\frac{1}{8}$$ — результат досліду ГГГ.

Тепер можна скласти таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Значення x	0	1	2	3
Ймовірність	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

б) Знайдемо розподіл випадкової величини y. Маємо:

$P(y=0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ — результати досліду ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ;

$P(y=3)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ — результати досліду ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини y.

Значення y	0	3
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

в) Складемо загальну таблицю значень величин x і y залежно від результатів досліду.

Результат досліду	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значення x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значення y	0	0	0	0	3	3	3	3

Сформуємо в цій таблиці ще один рядок для значень випадкової величини $z=x+y$.

Результат досліду	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значення x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значення y	0	0	0	0	3	3	3	3
Значення $z=x+y$	3	2	2	1	5	4	4	3

З отриманої таблиці видно, що випадкова величина z дорівнює, наприклад, числу 5 в одному випадку з восьми — коли буде отримано ЧГГ, тому

$$P(z = 5) = \frac{1}{8} \text{ — результат досліду ЧГГ.}$$

Аналогічно знайдемо ймовірності для інших значень величини z.

Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини $z = x + y$.

Значення $z = x + y$	1	2	3	4	5
Ймовірність	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

◄

?

1. Що називають випадковою величиною?
2. Що називають розподілом ймовірностей випадкової величини?
3. Що називають сумою випадкових величин? добутком випадкових величин?

ВПРАВИ

18.1.° З метою контролю відвідуваності уроків учнями та ученицями 11-А класу заступник директора протягом дня заходить у клас і записує прізвища тих, хто відсутній на уроці. Опишіть усі елементарні наслідки цього досліду. Яку випадкову величину розглядає заступник директора школи? Укажіть множину значень цієї величини.

18.2.° Для визначення кількості клітинок, на які треба перемістити фішку в настільній грі, кидають червоний і синій гральні кубики та фіксують числа, що на них випали. За правилами гри, якщо випаде «дубль», гравець пропускає хід, інакше — пересуває фішку на кількість клітинок, яка дорівнює сумі чисел, що випали на кубиках. Що є простором елементарних наслідків у цьому досліді? Яку випадкову величину розглядає гравець? Укажіть множину значень цієї величини.

18.3.° Вивчаючи якість продукції силікатного заводу (відсоток браку), заводський контролер фіксує кількість бракованих цеглин у випадково вибраній палеті. Відомо, що кожна палета містить 275 цеглин. Що є простором елементарних наслідків у цьому досліді? Яка випадкова величина цікавить виробника? Укажіть множину значень цієї величини.

18.4.° Плануючи роботу станції швидкої допомоги, з'ясовують кількість викликів, що надходять за одну годину. Для цього прослуховують запис розмов випадково вибраного оператора служби швидкої допомоги протягом години. Що є простором елементарних наслідків у цьому досліді? Яку випадкову величину досліджують працівники охорони здоров'я? Укажіть множину значень цієї величини.

18.5.° У коробці лежать 15 куль, з яких п'ять куль підписано числом 1, а решта 10 куль — числом 2. З коробки навмання беруть одну кулю. Випадкова величина x дорівнює числу, написаному на вибраній кулі. Укажіть множину значень і складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

18.6.° Гральний кубик кидають один раз. Випадкова величина x дорівнює числу, що випало на кубику. Укажіть множину значень і складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

18.7.° За таблицею розподілу ймовірностей випадкової величини x знайдіть значення змінної a.

1)

Значення x	1	2	3	4	5
Ймовірність	0,17	0,17	0,17	0,17	a

2)

Значення x	-1	-2	-3	-4
Ймовірність	$4a$	$3a$	$2a$	a

3)

Значення x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ймовірність, %	25	b	21	a	38	$-a$

4)

Значення x	a	$1 - a^2$	7
Ймовірність	$5a^2 - 2a$	$2 - 3a$	a^2

18.8.° Чи може наведена таблиця задавати розподіл ймовірностей випадкової величини x?

Значення x	0	-1	1	-2	2
Ймовірність	0,47	0,02	0,19	0,17	0,16

18.9.° За таблицею розподілу ймовірностей випадкової величини x знайдіть значення змінної a.

1)

Значення x	0	12	48
Ймовірність	0,27	0,05	a

2)

Значення x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ймовірність, %	17	30	a	29	24

3)

Значення x	1	2	3	4
Ймовірність	a	$4a$	$9a$	$16a$

18.10.° Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Значення x	0	2	5	7	12	20
Ймовірність, %	9	26	35	11	7	12

Знайдіть:

1) $P(x = 5)$;
2) $P(x = 1)$;
3) $P(x \geqslant 7)$;
4) $P(x < 5)$;
5) $P(2 \leqslant x < 8)$.

18.11.° Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини y.

Значення y	−3	−2	−1	1	2	3
Ймовірність	0,02	0,09	0,36	0,28	0,14	0,11

Знайдіть:

1) $P(y = 3)$;
2) $P(y \geqslant 0)$;
3) $P(y < 5)$;
4) $P(-2 < y \leqslant 2)$.

18.12.• Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Значення x	1	7	10	13
Ймовірність, %	40	30	20	10

Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини:

1) $x + 1$;
2) $-2x$;
3) x^2;
4) $(x - 7)^2$.

18.13.• Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини y.

Значення y	−3	1	2	3
Ймовірність, %	15	30	25	30

Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини:

1) $y-4$; 2) $3y$; 3) y^3; 4) $(2-y)^2$.

18.14.$^\bullet$ Про випадкову величину y відомо, що $P(y>3)=0,2$ і $P(y<-3)=0,4$. Знайдіть:

1) $P(y+2>5)$; 3) $P(y^2>9)$;

2) $P(2y<-6)$; 4) $P(5y+1\leqslant 16)$.

18.15.$^\bullet$ Про випадкову величину x відомо, що $P(x>1)=0,5$ і $P(x\geqslant -3)=0,7$. Знайдіть:

1) $P(x-4>-3)$; 3) $P(2x+7<1)$;

2) $P(7-x\leqslant 10)$; 4) $P((x+1)^2>4)$.

18.16.$^\bullet$ Монету підкидають двічі. Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що при цьому випали. Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини $z=x+x^2$.

18.17.$^\bullet$ Монету та гральний кубик підкидають одночасно. Випадкова величина x дорівнює числу, що випало на кубику, а випадкова величина y дорівнює 1, якщо на монеті випав герб, і 0, якщо число. Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини $z=xy$.

18.18.$^\bullet$ Гральний кубик кидають двічі. Випадкова величина x дорівнює сумі чисел, що випали на кубику. Складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

18.19.$^\bullet$ В одній коробці лежать 2 кулі, пронумеровані числами 1 і 2, а в другій — 3 кулі, пронумеровані числами 1, 2 і 3. З кожної коробки навмання беруть по одній кулі. Випадкова величина y дорівнює сумі чисел на взятих кулях. Складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

18.20.$^\bullet$ Гральний кубик кидають один раз і записують кількість натуральних дільників числа, яке випало на кубику. Складіть таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини, що вивчається в цьому досліді.

18.21.$^\bullet$ Монету підкидають не більше ніж 5 разів доти, доки вперше не випаде герб, і записують, скільки разів довелося підкинути монету. Складіть таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини, що вивчається.

18.22.$^\bullet$ Гральний кубик кидають не більше ніж три рази доти, доки вперше не випаде шістка, і записують, скільки разів довелося кидати кубик. Складіть таблицю розподілу ймовірностей записаної випадкової величини.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.23. Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$; 2) $y=\sqrt{4-(|x|-1)^2}$.

18.24. Скільки розв'язків залежно від значення параметра a має рівняння $\left|4|x|-1\right|=a-x$?

19. Математичне сподівання випадкової величини

Нехай випадкова величина x дорівнює величині місячного прибутку деякої фірми. Аналітики прогнозують такий розподіл ймовірностей випадкової величини x у наступному місяці:

Значення x (тис. грн)	-500	-40	110
Ймовірність	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

Із таблиці видно, що при одному збігу обставин фірма отримає прибуток, при інших — збиток. Яку величину прибутку можна очікувати в наступному місяці?

Для відповіді на це запитання міркуватимемо так. Припустимо, що власник фірми має не одну таку фірму, а десять однакових фірм. Ймовірність отримати збиток у розмірі 500 тис. грн дорівнює $\frac{1}{10}$, тому вважатимемо, що тільки одна з десяти розглядуваних фірм отримає в наступному місяці збиток у розмірі 500 тис. грн. Міркуючи аналогічно, вважаємо, що дві фірми отримають збиток по 40 тис. грн, а кожна з решти семи — прибуток у розмірі 110 тис. грн. Загальний прибуток усіх десяти фірм разом дорівнюватиме $(-500)\cdot 1+(-40)\cdot 2+110\cdot 7$ тис. грн, а отже, на кожну з них припадатиме

$$(-500)\cdot\frac{1}{10}+(-40)\cdot\frac{2}{10}+110\cdot\frac{7}{10}=19 \text{ тис. грн.}$$

Характеристика 19 тис. грн показує очікуваний рівень прибутку кожної такої фірми в наступному місяці. Цю характеристику називають **математичним сподіванням** випадкової величини x і позначають $M(x)$. Таким чином, $M(x)=19$.

Звернемо увагу на вираз $(-500)\cdot\frac{1}{10}+(-40)\cdot\frac{2}{10}+110\cdot\frac{7}{10}$, за допомогою якого було обчислено математичне сподівання $M(x)$. Нескладно помітити, що для обчислення $M(x)$ кожне зі значень випадкової величини x треба помножити на ймовірність настання цього значення й усі отримані добутки додати.

Означення. **Якщо випадкова величина x має такий розподіл ймовірностей:**

Значення x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Ймовірність	p_1	p_2	p_3	...	p_n

,

то число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$ називають математичним сподіванням випадкової величини x.

ПРИКЛАД 1 Страховий поліс[1] передбачає виплати у випадку незначного пошкодження автомобіля (несправність кондиціонера або пошкодження лобового скла) або його викрадення. У разі незначного пошкодження розмір виплат складе 25 тис. грн, а в разі викрадення— 500 тис. грн. За досвідом минулих років відомо, що незначні пошкодження відбуваються з ймовірністю 6 %, а викрадання — із ймовірністю 0,1 %. На продажу кожного поліса страхова компанія планує заробити по 3 тис. грн. Визначте, яку ціну поліса має встановити страхова компанія.

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину x, яка дорівнює розміру виплат страхової компанії за страховим полісом. Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x:

Значення x (тис. грн)	0	25	500
Ймовірність	0,939	0,06	0,001

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини x. Маємо:

$$M(x) = 0\cdot 0{,}939 + 25\cdot 0{,}06 + 500\cdot 0{,}001 = 2.$$

Величина $M(x) = 2$ показує, що очікуваний розмір виплат за кожним полісом складе 2 тис. грн. Оскільки страхова компанія планує заробляти по 3 тис. грн на кожному полісі, то вона має встановити ціну такого поліса в 5 тис. грн.

Відповідь: 5 тис. грн. ◄

[1] Документ, за яким страхова компанія зобов'язується виплатити власнику поліса певні грошові суми в разі настання передбачених страхових випадків.

Зауважимо, що під час розв'язування прикладу 1 множина елементарних наслідків розглядуваного експерименту «залишилася поза кадром». У цій задачі множина елементарних наслідків $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ складалася з таких елементів:

ω_1 — відсутність страхових випадків,

ω_2 — несправність кондиціонера,

ω_3 — пошкодження лобового скла,

ω_4 — викрадення автомобіля.

Якщо ймовірність несправності кондиціонера становить, наприклад, 2%, то ймовірність пошкодження лобового скла дорівнює 4%. Тепер можна скласти таблицю розмірів виплат та ймовірностей залежно від страхових випадків (елементарних наслідків експерименту).

Елементарні наслідки	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Значення x (тис. грн)	0	25	25	500
Ймовірність	0,939	0,02	0,04	0,001

Математичне сподівання $M(x)$ випадкової величини x можна знайти, користуючись і цією таблицею. Маємо:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}939 + 25 \cdot 0{,}02 + 25 \cdot 0{,}04 + 500 \cdot 0{,}001 = 2.$$

Таким чином, *математичне сподівання можна знаходити як за таблицею розподілу ймовірностей випадкової величини, так і за таблицею значень випадкової величини та ймовірностей залежно від елементарних наслідків експерименту*.

Сформулюємо деякі властивості математичного сподівання.

1. Якщо $x = c$, де c — константа, то $M(x) = c$.

2. Якщо $M(x)$ — математичне сподівання випадкової величини x, а c — константа, то

$$M(x + c) = M(x) + c.$$

3. Якщо $M(x)$ — математичне сподівання випадкової величини x, а c — константа, то

$$M(cx) = cM(x).$$

Доведемо, наприклад, першу властивість. Якщо випадкова величина x дорівнює константі c, то це означає, що її розподіл ймовірностей має вигляд

Значення x	c
Ймовірність, %	100

Звідси

$$M(x) = c \cdot 1 = c.$$

Доведення другої та третьої властивостей намітимо в такій задачі.

ПРИКЛАД 2 Множина значень випадкової величини x складається з трьох чисел. Доведіть, що для довільної константи c виконуються рівності

$$M(x + c) = M(x) + c \text{ і } M(cx) = cM(x).$$

Розв'язання. Нехай розподіл ймовірностей випадкової величини x має вигляд

Значення x	x_1	x_2	x_3
Ймовірність	p_1	p_2	p_3

Тоді за означенням математичного сподівання отримуємо:

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Розглянемо випадкові величини $x + c$ і cx. Їхній розподіл ймовірностей задається такою таблицею:

Значення $x + c$	$x_1 + c$	$x_2 + c$	$x_3 + c$
Значення cx	cx_1	cx_2	cx_3
Ймовірність	p_1	p_2	p_3

Ураховуючи, що $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, отримуємо:

$$M(x + c) = (x_1 + c) p_1 + (x_2 + c) p_2 + (x_3 + c) p_3 =$$
$$= (x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + c(p_1 + p_2 + p_3) = M(x) + c$$

і

$$M(cx) = cx_1 p_1 + cx_2 p_2 + cx_3 p_3 = c(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) = cM(x).$$

Зазначимо, що формулу $M(cx) = cM(x)$ доведено для $c \neq 0$. Випадок $c = 0$ розгляньте самостійно. ◄

?

1. Що називають математичним сподіванням випадкової величини?
2. Чому дорівнює математичне сподівання випадкової величини, що дорівнює константі?
3. Чому дорівнює математичне сподівання суми випадкової величини та константи?
4. Чому дорівнює математичне сподівання добутку випадкової величини та константи?

ВПРАВИ

19.1.° Про випадкову величину x відомо, що $M(x) = 5$. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини y, яка дорівнює:

1) $x - 3$; 2) $2x$; 3) $-x + 1$; 4) $\frac{x+4}{3}$.

19.2.° Про випадкову величину x відомо, що $M(x) = -2$. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини:

1) $x + 1$; 2) $-4x$; 3) $2x - 3$; 4) $\frac{5-2x}{3}$.

19.3.° На карті з масштабом 1 : 10 000 лінійкою вимірюють відстань між пунктами A і B. Випадкова величина x дорівнює виміряній відстані (у сантиметрах). Відомо, що $M(x) = 7$. Оцініть відстань на місцевості між пунктами A і B (у метрах).

19.4.° Український школяр Андрій із Чернігова та його американська подруга Сандра з Бостона захоплюються метеорологією. У своєму листі Сандра повідомляє, що температура в Бостоні є випадковою величиною з математичним сподіванням 50 °F. Андрій знає, що перевести температуру зі шкали Фаренгейта в шкалу Цельсія можна за формулою $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$. Чому дорівнює математичне сподівання температури в Бостоні, виміряної за шкалою Цельсія?

19.5.• Випадкова величина x має такий розподіл ймовірностей:

Значення x	1	2	6
Ймовірність	0,4	0,5	0,1

Знайдіть математичне сподівання величини x.

19.6.• Випадкова величина y має такий розподіл ймовірностей:

Значення y	−2	5	19
Ймовірність	0,6	0,1	0,3

Знайдіть математичне сподівання величини y.

19.7.• Монету підкидають один раз. Випадкова величина x дорівнює 1, якщо випав герб, і 0, якщо випало число. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини x.

19.8.• Знайдіть математичне сподівання числа очок, які випадають у результаті кидання грального кубика.

19.9.• Нехай a — деяке число. Відомо, що кожне значення випадкової величини не менше від a. Чи може її математичне сподівання виявитися меншим від a?

19.10.• Нехай x — випадкова величина і $M(x^2) = 0$. Знайдіть $M(x)$.

19.11.• Таблиця розподілу ймовірностей виграшу в азартній грі має вигляд

Величина виграшу, грн	0	100	300	1500
Ймовірність, %	80	15	4	1

Ціна квитка для участі у грі становить 50 грн. Чи варто грати в таку гру?

19.12.• Фермер, який вирощує горох, має сумніви, чи використовувати йому насіння нового сорту. Ціна насіння нового сорту така, що його має сенс використовувати тільки тоді, коли врожайність гороху збільшиться на $10\,\%$. Зібравши врожай із двох експериментальних ділянок, фермер оцінив розподіл кількості горошин у стручку старого й нового сортів (див. таблицю). Чи варто фермеру використовувати насіння нового сорту?

Кількість горошин у стручку	2	3	4	5	6	7	8
Ймовірність (горох старого сорту), %	12	13	20	26	18	6	5
Ймовірність (горох нового сорту), %	2	5	18	21	27	23	4

19.13.• Громадська організація проводить безпрограшну лотерею, прибуток від якої піде на благодійні цілі. Кожний учасник лотереї купляє за 500 грн лотерейний білет. Таблиця розподілу ймовірностей суми виграшу має такий вигляд:

Сума виграшу, грн	100	200	400	1000	5000
Ймовірність	0,5	0,3	0,15	0,03	0,02

Оплата виграшів відбувається за рахунок коштів, виручених від продажу білетів. Яку суму для благодійних цілей сподівається отримати організація з одного лотерейного білета?

19.14.• Використовуючи результати виступу збірної команди України на міжнародній математичній олімпіаді за попередні роки, розподіл ймовірностей кількості золотих медалей, виборених командою на окремій олімпіаді, можна оцінити так:

Кількість золотих медалей у команді	0	1	2	3	4
Ймовірність, %	10	50	25	10	5

Знайдіть математичне сподівання кількості золотих медалей команди України на черговій міжнародній математичній олімпіаді.

19.15.• Використовуючи результати виступу футбольного клубу «Динамо» (Київ) у чемпіонаті України за попередні роки, розподіл ймовірностей посісти певне місце в підсумковій таблиці можна оцінити так:

Місце в підсумковій таблиці	1	2	3
Ймовірність, %	60	36	4

Знайдіть математичне сподівання місця команди «Динамо» (Київ) у підсумковій таблиці чергової першості країни з футболу.

19.16.• Випадкова величина x дорівнює кількості препаратів, проданих аптекою одному покупцеві за одну покупку. Відомо, що множина значень випадкової величини x дорівнює $\{0, 1, ..., 6\}$ і $P(x = k) = a(6k - k^2)$ для всіх $k = 0, 1, ..., 6$. Знайдіть математичне сподівання кількості препаратів, проданих аптекою одному покупцеві за одну покупку.

19.17.• Випадкова величина y дорівнює кількості школярів на черговому занятті математичного гуртка. Відомо, що множина значень випадкової величини y дорівнює $\{5, 6, 7\}$ і $P(y = k) = ak$ для всіх $k = 5, 6, 7$. Знайдіть математичне сподівання кількості школярів на занятті математичного гуртка.

19.18.• Комерційне підприємство може укласти деяку угоду. У цьому разі прогноз його прибутку на найближчий місяць визначається такою таблицею:

Прибуток підприємства, тис. грн	−500	−40	110
Ймовірність, %	10	20	70

Якщо ж угоду не буде укладено, то прибуток підприємства визначається такою таблицею:

Прибуток підприємства, тис. грн	−11	1	35
Ймовірність, %	20	20	60

За якого рішення очікуваний рівень прибутку буде вищим?

19.19.•• Чому дорівнює математичне сподівання кількості шісток, що випадуть у результаті кидання трьох гральних кубиків?

19.20.•• Чому дорівнює математичне сподівання кількості гербів, що випадуть у результаті підкидання п'яти монет?

19.21.•• Ймовірність забити пенальті (штрафний 11-метровий удар у футболі) дорівнює p.

1) Складіть таблицю розподілу ймовірностей кількості забитих м'ячів у серії з п'яти пенальті.
2) З точністю до 1 % обчисліть ймовірності зі складеної таблиці розподілу, якщо $p = 0,8$.
3) Базуючись на отриманих у другому завданні наближених значеннях ймовірностей, оцініть математичне сподівання кількості забитих м'ячів у серії з п'яти пенальті.

19.22.•• З великої коробки із цукерками, серед яких 30 % шоколадних, Карлсон навмання виймає 4 цукерки.

1) Складіть таблицю розподілу ймовірностей кількості шоколадних цукерок у Карлсона.
2) Оцініть математичне сподівання кількості шоколадних цукерок у Карлсона.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.23. Відомо, що $\log_n m = \sqrt{13}$. Обчисліть значення виразу

$$\log_{\frac{m}{n}} \sqrt[3]{m^2 n}.$$

19.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;
2) $4 + \dfrac{2}{3^x - 1} = \dfrac{5}{3^{x-1}}$;
3) $\log_3 (3^x - 1) \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$.

20. Статистичний аналіз даних

У 9 класі ви ознайомилися з елементами математичної **статистики** — науки про отримання, оброблення й аналіз даних, які характеризують масові явища.

У статистиці сукупність зібраних даних, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**. Фактично збирання даних — це певний випадковий дослід, який проводять кілька разів.

Наприклад, для проведення ефективної рекламної кампанії деяка фірма вирішила скласти психологічний портрет свого типового клієнта. Для цього заплановано опитати деяку кількість навмання вибраних клієнтів фірми (випадковий вибір клієнта — це певний випадковий дослід).

У такому разі говорять, що множина всіх клієнтів фірми утворює **генеральну сукупність**, а множина тих клієнтів, яких буде опитано, утворює вибірку.

Узагалі, множину всіх можливих результатів певного випробування в статистиці прийнято називати **генеральною сукупністю.** Співвідношення між генеральною сукупністю і вибіркою проілюстровано на рисунку 20.1.

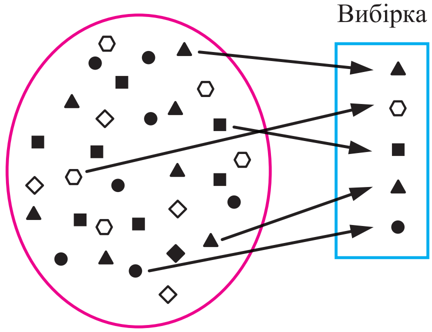


Рис. 20.1

Одна з головних задач статистики полягає в тому, щоб на основі аналізу даних вибірки зробити висновок про всю генеральну сукупність. Аналізуючи зібрані дані, виділяють один або кілька загальних показників, які характеризують найважливіші особливості генеральної сукупності. Наприклад, якщо вибірка складається із числових даних, то різницю між найбільшим і найменшим значеннями даних називають **розмахом** вибірки. Важливими показниками вибірки також є **середнє значення**, **медіана** та **мода**. Нагадаємо й уточнимо відповідні означення.

Нехай вибірка складається із числових даних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. **Середнім значенням** цієї вибірки **(вибірковим середнім)** називають число $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Наприклад, у таблиці подано результати виступів українських школярів на міжнародних математичних олімпіадах протягом

2009–2018 рр. (команда учасників на міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб).

Рік	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Кількість медалей	6	6	6	5	5	6	6	6	5	6

Для даної вибірки **середнє значення** дорівнює:

$$\bar{x} = \frac{6+6+6+5+5+6+6+6+5+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більш як 6 медалей, то вибіркове середнє 5,7 свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

Зауважимо, що середнє значення вибірки визначають лише у випадку, коли зібраними даними є числа.

Розглянемо вибірку, що складається з таких даних, які можна порівнювати одне з одним. Якщо кількість даних непарна та їх упорядковано $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, то **медіаною** даної вибірки називають x_n, тобто те з даних, яке в переліку $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ розміщене посередині.

Наприклад, у багатьох університетах України запроваджено оцінювання знань студентів не за числовою шкалою, а за шкалою букв: A, B, C, D, E, F (A — найвища, F — найнижча оцінка). Нехай під час опитування 9 студентів про результати складеного ними останнього іспиту було отримано таку вибірку (послідовність оцінок):

$$F,\ F,\ D,\ D,\ \boldsymbol{C},\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині переліку розміщена літера C. Отже, медіаною даної вибірки є оцінка «C».

Якщо вибірка складається з парної кількості даних: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$, то **медіаною** даної вибірки називають будь-яке з даних x_n або x_{n+1}, тобто ті двоє даних, що розташовані посередині в переліку $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$.

Наприклад, якщо до 9 наведених вище оцінок студентів додати ще одну оцінку E, то отримаємо таку послідовність:

$$F,\ F,\ E,\ D,\ \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{C},\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині переліку розташовані літери D і C. Отже, медіаною даної вибірки є оцінки D і C.

Зверніть увагу на те, що в наведених прикладах знаходження медіани вибірки досліджувані дані не є числами.

Якщо досліджуваними даними є числа, то у випадку парної кількості даних $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$ **медіаною** вибірки допускається також вважати величину $\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Наприклад, якщо розглянути вибірку із чотирьох числових даних:

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,$$

то число $\dfrac{2+3}{2} = 2{,}5$ можна вважати медіаною цієї вибірки.

Нехай вибірка складається з даних $x_1, x_2, \dots, x_n$. **Модою** даної вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку $x_1, x_2, \dots, x_n$ найчастіше. Наприклад, якщо вибірка складається із шести чисел: 1, 2, 2, 3, 3, 3, то число 3 є модою даної вибірки.

Якщо таких найчастіших даних у вибірці кілька, то кожне з них є модою даної вибірки.

Звернемо увагу на те, що моду вибірки можна визначити для даних будь-якої природи, на відміну від даних, необхідних для визначення середнього значення (числові дані) або медіани (дані, які можна порівнювати одне з одним).

Розглянемо приклад. Нехай у виборах до шкільного парламенту беруть участь три партії: «За математику», «За сучасну музику» і «Ми — за спорт». Опитавши 30 навмання вибраних учнів, з'ясували, що партію «За математику» підтримує 7 осіб, «За сучасну музику» — 14 осіб, «Ми — за спорт» — 9 осіб. Це означає, що серед 30 отриманих даних, що утворюють вибірку, найбільшу підтримку має партія «За сучасну музику». Тому ця партія є модою даної вибірки.

Зауважимо, що в наведеному прикладі неможливо визначити ні середнє значення, ні медіану вибірки.

ВПРАВИ

20.1.° Запишіть прізвища учнів та учениць, яких опитав учитель на минулому уроці математики під час перевірки домашнього завдання. Що є генеральною сукупністю та вибіркою зі статистичного дослідження щодо перевірки результатів виконання домашнього завдання?

20.2.° Результатом роботи комп'ютерної програми, що моделює статистичне дослідження, є деяке ціле число в діапазоні від −128 до 128. Після п'яти послідовних запусків програма видала такі результати: 62, −15, 31, 103, −22. Що в даному статистичному дослідженні є генеральною сукупністю? Що є вибіркою? Знайдіть розмах вибірки.

20.3.° Учнів та учениць опитали про їхній улюблений предмет у школі. Які статистичні показники (розмах, середнє значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

20.4.° На замовлення підприємств легкої промисловості проведено дослідження, результатами якого є розміри одягу в міжнародному форматі (символи: XS, S, M, L, XL, XXL, $XXXL$). Які статистичні показники (розмах, середнє значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

20.5.° Дано вибірку: 6, 5, 8, 6, 12, 7, 8, 11, 8. Знайдіть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

20.6.° Дано вибірку: 2, 7, 3, 6, 4, 7, 3, 7, 1. Знайдіть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

20.7.° Серед учнів і учениць 11 класу провели опитування: скільки часу щодня вони перебувають на свіжому повітрі. Результати опитування подано у вигляді діаграми, зображеної на рисунку 20.2. Знайдіть розмах, середнє значення та моду даної вибірки.

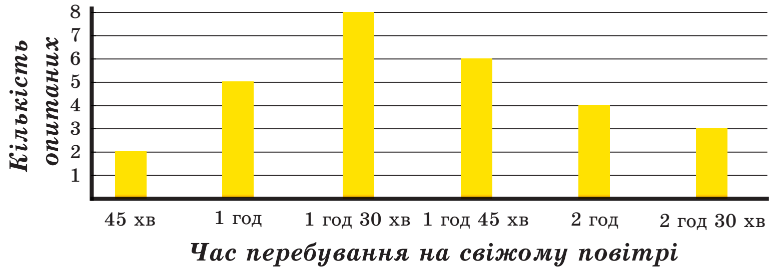


Рис. 20.2

20.8.• Користуючись таблицею середніх температур повітря в січні в деяких містах світу, обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Амстердам	3	Москва	−10
Афіни	8	Найробі	27
Буенос-Айрес	23	Нью-Йорк	0
Гонконг	24	Ріо-де-Жанейро	30
Єрусалим	8	Рим	8
Київ	−6	Сінгапур	27
Монреаль	−11	Токіо	3

20.9.$^{\bullet}$ Користуючись таблицею врожайності соняшнику в Україні, обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

Рік	Урожайність, ц/га	Рік	Урожайність, ц/га
2006	14	2012	17
2007	12	2013	22
2008	15	2014	19
2009	15	2015	22
2010	15	2016	22
2011	18	2017	20

20.10.$^{\bullet}$ У чемпіонаті України з футболу 2017–2018 рр. команда «Шахтар», що стала чемпіоном України, зіграла 32 матчі, у яких двічі забила 5 голів, 3 рази — 4 голи, 9 разів — 3 голи, 8 разів — 2 голи, 6 разів — один гол і в чотирьох матчах не забила жодного гола. Обчисліть середню кількість м'ячів, яку команда «Шахтар» забивала в одному матчі.

20.11.$^{\bullet}$ Студентка протягом семестру отримала 45 оцінок, серед яких 7 п'ятірок, 22 четвірки та 16 трійок. Обчисліть середній бал студентки.

20.12.$^{\bullet}$ На зовнішньому незалежному оцінюванні школярів з математики 2018 року було запропоновано тестове завдання:

«Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

А	Б	В
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

»

На діаграмі (рис. 20.3) наведено дані про кількість учнів, які розв'язували це завдання (відповіді деяких учасників ЗНО, близько 1 %, не були зараховані Українським центром оцінювання якості освіти). Знайдіть моду відповідей учнів. За правильну відповідь нараховували 1 бал, а за неправильну відповідь — 0 балів. Обчисліть середнє значення та медіану кількості балів, яку набрали учасники тестування за це завдання.

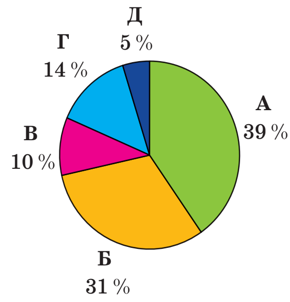


Рис. 20.3

20.13.• Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі (рис. 20.4). Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду цієї вибірки.

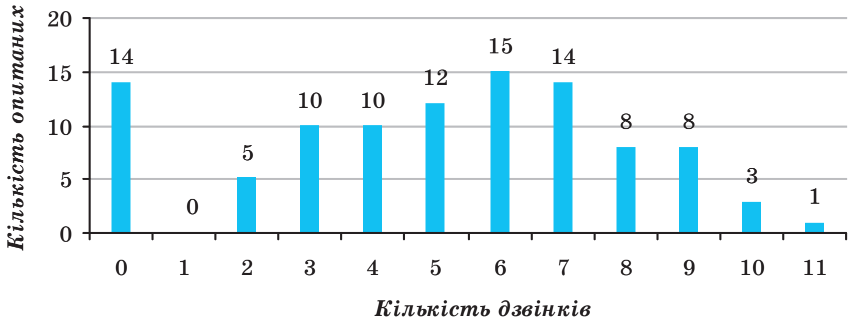


Рис. 20.4

20.14.• На діаграмі (рис. 20.5) наведено дані про кількість книжок, що їх прочитали протягом місяця 50 опитаних школярів. Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

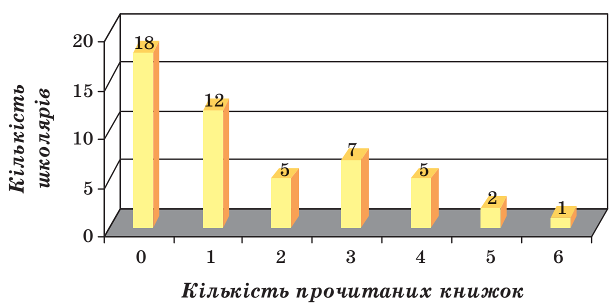


Рис. 20.5

20.15.•• У деякому ліцеї одинадцятикласники, які навчаються в класах фізичного, економічного та філологічного профілів, написали контрольну роботу з математики за єдиними текстами. Виявилося, що середній бал учнів фізичного профілю дорівнює 8,9, економічного — 7,7, а філологічного — 7,1.

1) Оцініть середній бал учнів цієї школи за контрольну роботу з математики.
2) Як потрібно змінити відповідь, якщо додатково відомо, що в класі фізичного профілю навчаються 23 учні, економічного — 25 учнів, а у двох класах філологічного профілю — 46 учнів?

20.16.•• У таблиці наведено дані про частоту випадіння герба при підкиданні монети в дослідах, проведених деякими вченими.

Дослідник	Частота випадіння герба	Дослідник	Частота випадіння герба
Жорж Бюффон	0,5069	Всеволод Романовський	0,4923
Огастес де Морган	0,5005	Карл Пірсон	0,5005
Вільям Джевонс	0,5068	Вільям Феллер	0,4979

1) На основі цих даних оцініть ймовірність випадіння герба при підкиданні монети.
2) Якою буде відповідь, якщо додатково врахувати дані про кількість кидків монети в цих дослідах?

Дослідник	Кількість підкидань монети	Дослідник	Кількість підкидань монети
Жорж Бюффон	4040	Всеволод Романовський	80 640
Огастес де Морган	4092	Карл Пірсон	24 000
Вільям Джевонс	20 480	Вільям Феллер	10 000

Відповідь дайте з точністю до сотих відсотка.

20.17.•• У школі опитали деяких хлопців і дівчат з паралелі 7-х класів про час, який вони витрачають на допомогу батькам по домашньому господарству. Виявилося, що учні та учениці 7-А класу в середньому витрачають 1,1 год на добу, а учні та учениці 7-Б класу — 1,7 год на добу.

1) Користуючись цими даними, оцініть середній час, який витрачає учень школи на допомогу батькам на добу.
2) Як потрібно змінити відповідь, якщо додатково відомо, що в школі навчаються 400 дівчат і 560 хлопців?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.18. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{(8-\sqrt{7})^6}+\sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}$; 2) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-6)^8}+\sqrt[7]{(\sqrt{5}-3)^7}$.

20.19. Чому дорівнює значення виразу:

1) $\log_{27}\log_8\sqrt[5]{32}$; 2) $36^{\frac{1}{3}\log_6 64-3\log_6 2}$; 3) $\dfrac{25^{-\frac{2}{5}}\cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{\sqrt[5]{9}}$?

КРАСА ТА РОЗУМ УКРАЇНИ

Роксолана, Соломія Крушельницька, Леся Українка — відомі в усьому світі українки минулого.

Сучасні українські дівчата стають найкращими не тільки в політиці та мистецтві, а й на аренах математичних змагань. У найпрестижнішій Європейській математичній олімпіаді для дівчат (EGMO) українські школярки Софія Дубова (2014 рік), Ольга Шевченко (2017 рік) та Аліна Гарбузова (2018 рік) тричі виборювали першість серед усіх учасниць, розв'язавши абсолютно всі запропоновані задачі. Узагалі, українська команда дівчат досі залишається єдиною командою Європи, яка тричі ставала першою в офіційному командному заліку. Такі досягнення переконали європейську спільноту вибрати місцем проведення EGMO у 2019 р. місто Київ. Упевнені, що в черговий раз побачимо наших розумниць на вершині п'єдесталу пошани.

Команда України на першій олімпіаді EGMO (Кембридж, Велика Британія, 2012 рік)

Склад команди (*зліва направо*): Харитонова Олена (срібло); Кравченко Юлія (срібло); Павлюк Марія (срібло); Сердюк Ярослава (срібло)

ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Монету підкидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і чисел можна отримати, якщо в результаті першого підкидання випав герб?

А) 2; Б) 4; В) 8; Г) 16.

2. Скільки натуральних дільників має число $2^{10} \cdot 17$?

А) 2; Б) 10; В) 11; Г) 22.

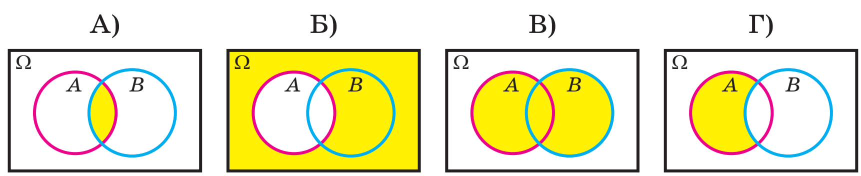
3. У першому півфіналі пісенного конкурсу Євробачення-2017, що проходив у Києві, брали участь 18 країн. Скількома різними способами з 18 країн можна вибрати множину з 10 країн, що вийдуть до фіналу конкурсу?

А) 10!; Б) $\frac{18!}{10!}$; В) $\frac{18!}{8! \cdot 10!}$; Г) $\frac{18!}{8!}$.

4. Під час проведення екзит-полу було опитано 15 тисяч виборців, серед яких 600 проголосували «Проти всіх». Оцініть ймовірність події, що виборець голосує «Проти всіх».

А) 4 %; Б) 0,04 %; В) 25 %; Г) 0,25 %.

5. Яка з поданих діаграм ілюструє подію $A \setminus B$?



6. У ящику лежать яблука трьох сортів: 20 жовтих, 10 зелених і 30 червоних. Яку найменшу кількість яблук треба взяти з ящика навмання, щоб гарантовано дістати принаймні одне жовте та два червоних яблука?

А) 3; Б) 13; В) 32; Г) 41.

7. Яка ймовірність того, що в результаті кидання двох гральних кубиків на одному з них випаде одиниця, а на іншому — трійка?

А) $\frac{2}{6}$; Б) $\frac{1}{6}$; В) $\frac{2}{36}$; Г) $\frac{1}{36}$.

8. Марина вважає, що отримає найвищу оцінку — 200 балів на зовнішньому оцінюванні з математики з ймовірністю 20 %, а з української мови й літератури — із ймовірністю 10 %. Як Марина має оцінити ймовірність отримати принаймні одну найвищу оцінку на зовнішньому оцінюванні з математики та української мови й літератури?

А) 2 %; Б) 28 %; В) 30 %; Г) 35 %.

9. Картки, на яких написано числа 1, 3, 5, 7, навмання послідовно викладають у ряд. Яка ймовірність того, що останньою покладуть картку із числом 5?

А) $\frac{1}{24}$; Б) $\frac{1}{12}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{1}{4}$.

10. Чому дорівнює мода сукупності даних: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

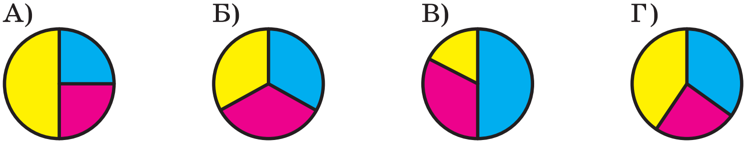
А) 5; Б) 4; В) 3; Г) 2.

11. У результаті підкидання монети 20 разів поспіль випав герб. Яка ймовірність того, що при наступному підкиданні знову випаде герб?

А) 0,5; Б) $\frac{1}{21}$; В) $\frac{1}{2^{21}}$; Г) 0.

12. У сукупних витратах деякої української родини 33 % становлять витрати на продукти харчування, 25 % — на комунальні послуги; 42 % — решта витрат. Яка з наведених кругових діаграм відповідає структурі витрат цієї родини?

А) Б) В) Г)



13. Розподіл ймовірностей випадкової величини x задано таблицею:

Значення x	0	2	5	7	8
Ймовірність	0,2	0,3	0,25	0,1	0,15

Знайдіть ймовірність того, що значення випадкової величини буде парним.

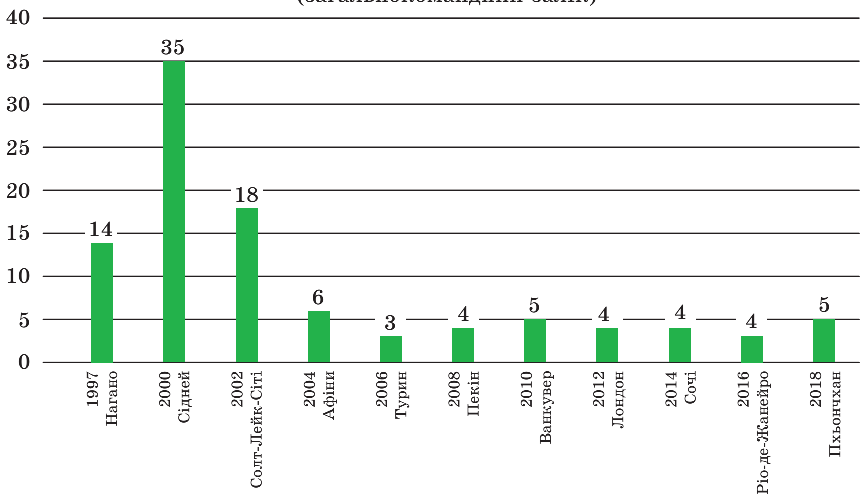
А) 20 %; Б) 30 %; В) 50 %; Г) 65 %.

14. Випадкова величина z дорівнює кількості гербів, які випадуть у результаті підкидання трьох монет. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини $y = 2z - 3$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

15. На діаграмі показано результати виступу команди України на Паралімпійських іграх протягом 1998–2018 рр. Знайдіть медіану підсумкового місця збірної команди України.

Підсумкові місця збірної команди України на Паралімпійських іграх
(загальнокомандний залік)



А) 4; Б) 5; В) 9; Г) 14.

16. Гральний кубик кидають два рази. Знайдіть ймовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнює 8.

А) $\frac{1}{36}$; Б) $\frac{3}{36}$; В) $\frac{5}{36}$; Г) $\frac{7}{36}$.

17. З коробки, у якій лежать 1 червона та 2 сині ручки, навмання беруть одну за одною 2 ручки. Знайдіть ймовірність того, що перша із цих ручок червона, якщо відомо, що друга виявилася синьою.

А) $\frac{1}{6}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{2}{3}$.

18. У ящику лежать 7 червоних, 2 сині та 3 зелені кулі. Навмання вибирають 6 куль. Яка ймовірність того, що серед вибраних будуть 4 червоні та 2 зелені кулі?

А) $\frac{5}{44}$; Б) $\frac{3}{55}$; В) $\frac{3}{77}$; Г) $\frac{1}{132}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Комбінаторні правила суми та добутку

Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a або b» можна здійснити $m+k$ способами.

Якщо елемент a можна вибрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a і b» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари $(a; b)$, можна зробити mk способами.

Перестановки, розміщення, комбінації

Перестановкою скінченної множини M називають будь-яку впорядковану множину, утворену з усіх елементів множини M.

Кількість перестановок n-елементної множини позначають символом P_n та обчислюють за формулою $P_n = n!$.

Будь-яку k-елементну впорядковану підмножину даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів. Кількість усіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають символом A_n^k та обчислюють за формулою $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів. Кількість усіх можливих сполук із n елементів по k елементів позначають символом C_n^k та обчислюють за формулою $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Несумісні події

Якщо в деякому досліді дві події не можуть відбутися одночасно, то їх називають несумісними.

Об'єднання, перетин, доповнення подій

Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається принаймні одна з двох подій A або B деякого експерименту, називають об'єднанням подій A і B. Об'єднання подій A і B позначають $A \cup B$.

Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається і подія A, і подія B деякого експерименту, називають перетином подій A і B. Перетин подій A і B позначають $A \cap B$.

Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли не відбувається подія A, називають доповненням події A. Доповнення події A позначають $\bar{A}$.

Якщо A і B — несумісні події деякого досліду, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Якщо A і B — події деякого досліду, то:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

Незалежні події

Події A і B деякого досліду називають незалежними, якщо $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Випадкова величина

Випадковою величиною називають функцію, яка кожному елементарному наслідку деякого досліду ставить у відповідність число. Множину тих значень, яких вона може набувати, називають множиною значень випадкової величини.

Розподіл ймовірностей випадкової величини

Набір ймовірностей $P(x = k)$, де k пробігає множину значень випадкової величини, називають розподілом ймовірностей випадкової величини x.

Математичне сподівання

Якщо випадкова величина x має такий розподіл ймовірностей:

Значення x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Ймовірність	p_1	p_2	p_3	...	p_n

,

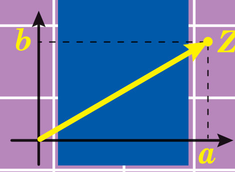
то число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$ називають математичним сподіванням випадкової величини x.

Вибіркові характеристики

Якщо вибірка складається із числових даних $x_1, x_2, ..., x_n$, то середнім значенням цієї вибірки (вибірковим середнім) називають число $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Нехай вибірка складається з таких даних, які можна порівнювати одне з одним. Якщо кількість даних непарна та їх упорядковано $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{2n-1}$, то медіаною вибірки називають x_n, тобто те з даних, яке в переліку $x_1, x_2, ..., x_{2n-1}$ розміщене посередині. Якщо вибірка складається з парної кількості даних: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{2n}$, то медіаною даної вибірки називають будь-яке з даних x_n або x_{n+1}, тобто ті двоє даних, що розташовані посередині в переліку $x_1, x_2, ..., x_{2n}$. Якщо вибірка складається з парної кількості числових даних: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{2n}$, то медіаною вибірки допускається вважати і величину $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$.

Нехай вибірка складається з даних $x_1, x_2, ..., x_n$. Модою вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку $x_1, x_2, ..., x_n$ найчастіше.



§ 4. Рівняння і нерівності. Узагальнення та систематизація

21. Про появу сторонніх коренів і втрату розв'язків рівнянь

Ви знаєте, що далеко не кожне перетворення рівняння зберігає незмінною множину його коренів. В одному випадку ця множина може звузитися, тобто корені будуть **утрачені**, а в іншому — **розширитися**, тобто з'являться сторонні корені.

Наведемо кілька прикладів.

- У результаті переходу від рівняння $\log_2 (x-1)^2 = 0$ до рівняння $2\log_2 (x-1) = 0$ втрачається корінь $x = 0$.
- Піднесення обох частин рівняння $\sqrt{x} = -x$ до квадрата призводить до появи стороннього кореня $x = 1$.
- Заміняючи рівняння $\log_x 4 = 2$ рівнянням $x^2 = 4$, отримуємо сторонній корінь $x = -2$.

Метод розв'язування рівняння, при якому дане рівняння замінюють на рівняння-наслідок, а потім отримані корені піддають перевірці, називають **методом наслідків**. Його застосовують тоді, коли виконати перевірку нескладно. Проте так буває не завжди. Наприклад, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$, але щоб у цьому переконатися, потрібно провести значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — **метод рівносильних перетворень**. Із цим методом ви ознайомилися в 10 класі.

Наголосимо, що, застосовуючи як метод наслідків, так і метод рівносильних перетворень, важливо знати причини втрати коренів і появи сторонніх коренів. Розглянемо деякі із цих причин.

Рис. 21.1

Зміна області визначення рівняння

Поза областю визначення рівняння коренів немає (рис. 21.1), тому перетворення рівняння, у результаті якого розширюється область його визначення, **може призвести до появи сторонніх коренів**.

Наприклад, областю визначення рівняння $\log_x 4 = 2$ є множина $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. Користуючись означенням логарифма, отримуємо рівняння $x^2 = 4$, областю визначення якого є множина $\mathbb{R}$. Розширення області визначення початкового рівняння призвело до появи стороннього кореня $x = -2$.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \cos^2 x - \sin 2x$.

Розв'язання. Якщо дріб у лівій частині даного рівняння скоротити на ($\sin x + \cos x$), то отримаємо рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x$. У результаті такого перетворення область визначення початкового рівняння розширюється на множину чисел, які є коренями рівняння $\sin x + \cos x = 0$, тому насправді дане в умові рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x, \\ \sin x + \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Знайдемо корені рівняння системи. Маємо:

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + \sin 2x = 0;$$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x = 0;$$

$$\sin x\ (\sin x + \cos x) = 0.$$

Оскільки $\sin x + \cos x \neq 0$, то отримуємо $\sin x = 0$. Звідси $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Залишилося зауважити, що при $x = \pi n$ значення виразу $\sin x + \cos x$ відмінне від нуля.

Відповідь: πn, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

Якщо розширення області визначення рівняння може призвести до появи сторонніх коренів, то її звуження є можливою причиною втрати коренів.

Наприклад, областю визначення рівняння $\log_2 (x - 1)^2 = 0$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, а областю визначення рівняння $2 \log_2 (x - 1) = 0$ — множина $(1; +\infty)$. У множині $(-\infty; 1)$ міститься корінь $x = 0$ першого рівняння. Тому під час переходу від рівняння $\log_2 (x - 1)^2 = 0$ до рівняння $2 \log_2 (x - 1) = 0$ цей корінь утрачено.

Часто причиною зміни множини коренів рівняння є застосування рівностей, права і ліва частини яких мають різні області визначення.

Наведемо приклади таких рівностей:

- $x = \frac{xy}{y}$;
- $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;
- $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$;
- $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
- $\log_a x^2 = 2 \log_a x$.

У кожній із цих рівностей область визначення виразу, який стоїть у правій частині, є підмножиною області визначення виразу, що стоїть у лівій частині. Тому застосування цих рівностей зліва направо може призвести до втрати коренів, а справа наліво — до появи сторонніх коренів.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(x-1)^2(x-3)} = x-1.$

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $\{1\} \cup [3; +\infty).$ Очевидно, число 1 є коренем даного рівняння.

Проте застосування формули $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ призводить до рівняння

$$|x-1|\sqrt{x-3} = x-1,$$

область визначення якого — множина $[3; +\infty)$. Тому число 1 не є коренем отриманого рівняння, тобто такий перехід веде до втрати цього кореня.

Розв'яжемо дане рівняння методом рівносильних переходів.

Дане в умові рівняння рівносильне системі $\begin{cases}(x-1)^2(x-3) = (x-1)^2, \\ x \geqslant 1.\end{cases}$

Звідси $\begin{cases}(x-1)^2(x-4) = 0, \\ x \geqslant 1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Відповідь: 1; 4. ◄

Множення обох частин рівняння на вираз, який містить змінну

Інколи буває доцільно помножити обидві частини рівняння на деякий вираз. Розглянемо наслідки такого перетворення.

Перейдемо від рівняння

$$f(x) = g(x)$$

до рівняння

$$f(x)\ \varphi(x) = g(x)\ \varphi(x).$$

У результаті такого переходу множина коренів рівняння може змінитися під впливом двох факторів: області визначення функції φ і множини коренів рівняння $\varphi(x) = 0$.

Наприклад, якщо обидві частини рівняння $x^2 = 4$ помножити на вираз $\sqrt{x}+1$ і перейти до рівняння $x^2\left(\sqrt{x}+1\right) = 4\left(\sqrt{x}+1\right)$, то тим самим утратимо корінь -2. Якщо ж обидві частини цього рівняння помножити на $\sqrt{x}$, то втратимо корінь -2 та одночасно отримаємо сторонній корінь 0.

Отже, якщо під час розв'язування рівняння виникла потреба помножити обидві його частини на вираз $\varphi(x)$, то слід ураховувати як область визначення цього виразу, так і множину коренів рівняння $\varphi(x)=0$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини даного рівняння на вираз $\sqrt{1+x}-1$. Оскільки $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x$, то отримаємо:

$$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{1+x}-1\right). \qquad (1)$$

Це перетворення не змінює області визначення початкового рівняння. Поява ж сторонніх коренів можлива за рахунок коренів рівняння $\sqrt{1+x}-1=0$. Отже, отримане рівняння (1) — наслідок рівняння, даного в умові.

Рівняння (1) рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1. \end{array}\right.$$

Розв'яжемо друге рівняння сукупності. Його наслідком буде рівняння $2x-5=-1$. Звідси $x=2$.

Залишилося виконати перевірку. Легко впевнитися, що число 2 є коренем даного в умові рівняння, а число 0 — ні.

Відповідь: 2. ◄

Перехід від рівняння $f(x)=g(x)$ до рівняння $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$

Чому рівняння

$$x=2x-1 \text{ і } 2^x=2^{2x-1} \qquad (2)$$

є рівносильними, а рівняння

$$x=2x-1 \text{ і } \sin x=\sin(2x-1) \qquad (3)$$

не є рівносильними?

Річ у тім, що властивості функції $y=2^t$ відрізняються від властивостей функції $y=\sin t$.

Якщо визначена на $\mathbb{R}$ функція $y=\varphi(t)$ є оборотною, то рівність $t_1=t_2$ справджується тоді й тільки тоді, коли $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Тому в цьому разі рівняння $f(x)=g(x)$ і $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ є рівносильними.

Коли ж визначена на $\mathbb{R}$ функція $y=\varphi(t)$ не є оборотною, то з рівності $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ не обов'язково випливає, що $t_1=t_2$. Тому рівняння $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ є наслідком рівняння $f(x)=g(x)$.

Так, рівняння (2) є рівносильними, тому що функція $\varphi(t)=2^t$ є оборотною. Оскільки функція $\varphi(t)=\sin t$ не є оборотною, то рівняння (3) не є рівносильними.

Ви знаєте, що піднесення обох частин рівняння до парного степеня приводить до рівняння-наслідку, а піднесення до непарного степеня — до рівносильного рівняння.

Це пов'язане з тим, що функція $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, не є оборотною, а функція $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, — оборотна.

Функція $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, є оборотною на множині $[0; +\infty)$. У 10 класі ви користувалися цим фактом у вигляді такої теореми.

Теорема 21.1. ***Якщо для будь-якого*** $x \in M$ ***виконуються нерівності*** $f(x) \geqslant 0$ ***і*** $g(x) \geqslant 0$, ***то рівняння*** $f(x) = g(x)$ ***і*** $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, ***рівносильні на множині*** M.

Цю теорему ви використовували під час розв'язування ірраціональних рівнянь.

Розглянемо приклад, у якому поява стороннього кореня пов'язана з необоротністю функції $y = \sin t$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arccos(5x - 2)$.

Розв'язання. Оскільки визначена на $\mathbb{R}$ функція $y = \sin t$ не є оборотною, то рівняння $\sin\left(\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)\right) = \sin(\arccos(5x - 2))$ є наслідком даного. Тому розв'язування рівняння має завершитися перевіркою коренів. Отже, можна не побоюватися далі переходити до нових рівнянь-наслідків.

Нагадаємо, що мають місце рівності $\sin(\arcsin a) = a$ та $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$. Тому можна записати:

$$x\sqrt{3} = \sqrt{1 - (5x - 2)^2}.$$

Звідси $3x^2 = 1 - (5x - 2)^2$. Далі маємо:

$$28x^2 - 20x + 3 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{3}{14}. \end{array}\right.$$

Перевіримо отримані корені.

При $x = \frac{1}{2}$ маємо: $\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$;

$$\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\frac{5}{2} - 2\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, число $\frac{1}{2}$ є коренем початкового рівняння.

При $x = \frac{3}{14}$ маємо:

$$\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14} < \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(5x-2) = \arccos\left(\frac{15}{14}-2\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

Отже, число $\frac{3}{14}$ не є коренем початкового рівняння.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◄

ВПРАВИ

21.1.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x-5=0$ і $x(x-5)=0$;

2) $\frac{6}{x}=0$ і $x^2=-4$;

3) $x+1=1+x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

4) $x^{100}=1$ і $x^{1000}=1$;

5) $\frac{x}{x}=1$ і $x=x$;

6) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x-1=0$;

7) $\frac{x^2-9}{x+2}=0$ і $x^2-9=0$;

8) $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=2x+5$ і $x+2=2x+5$;

9) $\sqrt{(x-1)(x-3)}=0$ і $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

10) $\sin x=2$ і $2^x=-1$;

11) $\sin x=0$ і $\cos x=1$;

12) $\cos x=0$ і $\sin^2 x=1$;

13) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-1$ і $\cos 2x=-1$;

14) $\log_3 x^2=2$ і $\log_3 x=1$;

15) $\log_5(x^2-1)=\log_5(x-1)$ і $\log_5(x+1)=0$;

16) $\frac{\log_x(x+1)}{\log_x 2}=1$ і $\log_2(x+1)=1$?

21.2.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x^2=x$ і $x=1$;

2) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{2}=0$ і $4x^2-1=0$;

3) $x^2+1=0$ і $\frac{3}{x-1}=0$;

4) $\frac{x+1}{x+1}=1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

5) $\frac{x+1}{x+1}=0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1}=0$;

6) $\cos x=-1{,}2$ і $e^x=0$;

7) $\cos x=0$ і $\sin x=1$;

8) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0$ і $\sin 2x=0$;

9) $\sqrt{x^2(x-1)}=0$ і $|x|\sqrt{x-1}=0$;

10) $\log_{x^2} x^2=1$ і $\log_x x=1$?

21.3.° Чи буде в результаті даного перетворення отримано рівняння, рівносильне даному:

1) у рівнянні $3(2x-1)-5(4x+2)=1$ розкрити дужки та звести подібні доданки;

2) у рівнянні $x^2+\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}=49$ різницю $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;

3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1}+3x-5=0$ скоротити дріб;

4) обидві частини рівняння $x^3=x$ поділити на x;

5) обидві частини рівняння $(x+1)(x^2+4)=x^2+4$ поділити на x^2+4;

6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x}=2$ помножити на x;

7) обидві частини рівняння $2x+1=5$ помножити на $x+1$?

21.4.° Яке з двох рівнянь є наслідком іншого:

1) $x^2=x$ і $x=1$;

2) $\frac{x}{x}=1$ і $0x=0$;

3) $x^3=1$ і $x^2=1$;

4) $|x|=1$ і $x^3=1$;

5) $\frac{x^2}{x-6}=\frac{36}{x-6}$ і $x^2=36$;

6) $x^2=4$ і $x^2-\frac{1}{x+2}=4-\frac{1}{x+2}$;

7) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x^2-1=0$;

8) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x}$ і $x^2-2=3x$;

9) $\sqrt{x^2(x-1)}=x$ і $|x|\sqrt{x-1}=x$;

10) $\sqrt{x+3}=x$ і $x+3=x^2$;

11) $\sin x=3$ і $\log_2 x=1$;

12) $\lg(x^2-1)=\lg(x-1)^2$ і $x^2-1=(x-1)^2$;

13) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$ і $\operatorname{tg} 2x=0$;

14) $\frac{1}{\log_x 2}=0$ і $\log_2 x=0$?

21.5.° Яке з двох рівнянь є наслідком іншого:

1) $\frac{x^2}{x}=1$ і $x^2=x$;

2) $(x+1)^2=1$ і $x^2+1^2=1$;

3) $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$ і $x^2=64$;

4) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2=9$;

5) $\sqrt{x^2-x-1}=\sqrt{5x}$ і $x^2-x-1=5x$;

6) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}$ і $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}=\sqrt{x+2}$;

7) $\sqrt{x+7}=-x$ і $x+7=x^2$;

8) $\cos x=-2$ і $e^{x^2-x-11}=1$;

9) $\log_3|x+2|=1$ і $\log_x|x+2|\cdot\log_3 x=1$?

21.6.$^\bullet$ Як може змінитися (розшириться чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x|+3)f(x)=2|x|+6$ замінити на рівняння $f(x)=2$;

2) рівняння $(\mathrm{tg}^2 x+1)f(x)=\mathrm{tg}^2 x+1$ замінити на рівняння $f(x)=1$;

3) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1}=0$ замінити на рівняння $f(x)=0$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{\lg^2 x+1}=0$ замінити на рівняння $f(x)=0$;

5) рівняння $(x+1)f(x)=x+1$ замінити на рівняння $f(x)=1$;

6) рівняння $(\sqrt{x}-1)f(x)=\sqrt{x}-1$ замінити на рівняння $f(x)=1$;

7) рівняння $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x)=g(x)$;

8) рівняння $f(x)=g(x)$ замінити на рівняння $(x+1)f(x)=(x+1)g(x)$;

9) рівняння $\log_2 f(x)=0$ замінити на рівняння $f(x)=1$;

10) рівняння $\log_x f(x)=0$ замінити на рівняння $f(x)=1$?

21.7.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$; 2) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

21.8.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$; 2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

21.9.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+(\sqrt{x-2})^2-5=0$; 2) $2x^2+9(\sqrt{x+1})^2-27=0$.

21.10.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-(\sqrt{x+3})^2-8=0$; 2) $x^2-4(\sqrt{x+2})^2-13=0$.

21.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0;$ 2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0;$ 3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0.$

21.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=0;$ 2) $\frac{\sin 2x}{1-\sin x}=2\cos x.$

21.13.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{16-9x^2}\,(3\sin 2\pi x+8\sin \pi x)=0.$

21.14.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{25-4x^2}\left(\sin \pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0.$

21.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x^2-x+4}+\sqrt{2x^2-7x+10}=3x-3;$

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x.$

21.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3;$

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right)=x.$

21.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1+\cos x+\sin x}{\cos x}=0;$ 2) $\frac{\cos x+\cos\frac{3x}{2}-2}{\sin\frac{x}{8}}=0.$

21.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\cos 3x-1}=0;$ 2) $\frac{\cos x+\cos 3x+2}{\sin\frac{x}{2}-1}=0.$

21.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}-5\operatorname{ctg} x;$ 2) $\operatorname{tg} 2x+\sin 2x=-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} x.$

21.20.•• Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x-\sin 2x=-\frac{9}{2}\operatorname{ctg} x.$

21.21.•• Розв'яжіть рівняння $\log_x \cos 2\pi x=0.$

21.22.•• Розв'яжіть рівняння $\log_x \sin\frac{\pi x}{2}=0.$

21.23.•• Розв'яжіть рівняння $\log_9 \sin 2x=\log_3\sqrt{\sin x}.$

21.24.•• Розв'яжіть рівняння $\log_4 \sin 2x=\log_2\sqrt{-\sin x}.$

21.25.•• Розв'яжіть рівняння $\arccos\left(x\sqrt{3}\right)=\arcsin(3x-2).$

21.26.•• Розв'яжіть рівняння $\arcsin x = \arccos(3x - 1)$.

21.27.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\log_3(9 - |x - 1|) = \log_2(x^2 - 2x + 5) \text{ і } a^2x^2 - (a+1)x + 4a - 3 = 0$$

є рівносильними?

21.28.* При яких значеннях параметра a нерівність

$$\log_2(3 - x) + \log_2 2x \geqslant 2$$

рівносильна рівнянню $|x - 1| + a|x - 2| = a^2$?

22. Основні методи розв'язування рівнянь

У таблиці наведено схеми розв'язування деяких типових рівнянь.

Тип рівняння	Умова, рівносильна даному рівнянню
$\|f(x)\| = \|g(x)\|$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$
$\|f(x)\| = g(x)$	$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0 \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Часто розв'язування рівнянь зводиться до розв'язування типових рівнянь, наведених у таблиці. Це ілюструють вправи № 22.1, 22.2. До тих рівнянь, які не зводяться до типових, застосовують спеціальні методи та прийоми розв'язування. Розглянемо деякі з них.

Метод розкладання на множники

Добре, коли вдається ліву частину рівняння $f(x)=0$ подати у вигляді добутку кількох виразів. Як правило, цей крок є корисним, оскільки дає змогу замість даного рівняння розв'язати сукупність більш простих рівнянь.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^3-6x^2+11x-6=0$.

Розв'язання. Очевидно, що число 1 є коренем даного рівняння. Тоді ліву частину рівняння можна подати у вигляді добутку $(x-1)\,Q(x)$, де $Q(x)$ — квадратний тричлен. Для знаходження $Q(x)$ поділимо «куточком» многочлен $x^3-6x^2+11x-6$ на двочлен $x-1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -6x^2 & +11x & -6 & x-1 \\ \cline{5-5} -\;x^3 & -\;x^2 & & & x^2-5x+6 \\ \cline{1-2} & -5x^2 & +11x & -6 & \\ & -\;-5x^2 & +\;5x & & \\ \cline{2-3} & & 6x & -6 & \\ & & -\;6x & -6 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Отримали, що $Q(x)=x^2-5x+6$.

Маємо: $(x-1)(x^2-5x+6)=0$.

Це рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2-5x+6=0. \end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$

Відповідь: 1; 2; 3. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$3\sqrt{x-2}\cdot 2^{x^2-3}+2x=x\cdot 2^{x^2-3}+6\sqrt{x-2}.$$

Розв'язання. Маємо: $3\sqrt{x-2}\cdot 2^{x^2-3}-x\cdot 2^{x^2-3}+2x-6\sqrt{x-2}=0$;

$2^{x^2-3}\left(3\sqrt{x-2}-x\right)-2\left(3\sqrt{x-2}-x\right)=0$; $\left(3\sqrt{x-2}-x\right)\left(2^{x^2-3}-2\right)=0$.

Помилковим було б вважати, що це рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x-2}-x=0, \\ 2^{x^2-3}-2=0. \end{array}\right.$$

Справді, корінь −2 другого рівняння сукупності не входить до області визначення початкового рівняння. Насправді рівняння $\left(3\sqrt{x-2}-x\right)\left(2^{x^2-3}-2\right)=0$ рівносильне системі $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x-2}-x=0,\\ 2^{x^2-3}-2=0,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2.\end{cases}$

Звідси $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3\sqrt{x-2}=x,\\ 2^{x^2-3}=2,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}9x-18=x^2,\\ x^2-3=1,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=6,\\ x=2,\\ x=-2,\end{array}\right.\\ x\geqslant 2.\end{cases}$

Відповідь: 2; 3; 6. ◄

Метод заміни змінної

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $x^4-8x^3+15x^2+4x-2=0$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння так:

$$x^4-8x^3+16x^2-x^2+4x-2=0;$$
$$(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-2=0.$$

Зробивши заміну $x^2-4x=t$, отримуємо рівняння $t^2-t-2=0$.

Звідси $\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-4x=2,\\ x^2-4x=-1.\end{array}\right.$

Відповідь: $2\pm\sqrt{6}$; $2\pm\sqrt{3}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2x}{x^2-4x+2}+\dfrac{3x}{x^2+x+2}=-\dfrac{5}{4}$.

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем даного рівняння, то, поділивши чисельник і знаменник кожного з дробів лівої частини рівняння на x, отримуємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4}.$$

Зробимо заміну $x+\dfrac{2}{x}=t$. Тоді $\dfrac{2}{t-4}+\dfrac{3}{t+1}+\dfrac{5}{4}=0$; $\dfrac{t^2+t-12}{(t-4)(t+1)}=0$;

$\begin{cases}t^2+t-12=0,\\ (t-4)(t+1)\neq 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t=-4,\\ t=3.\end{array}\right.$ Маємо: $\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{2}{x}=-4,\\ x+\dfrac{2}{x}=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+4x+2=0,\\ x^2-3x+2=0.\end{array}\right.$

Відповідь: $-2\pm\sqrt{2}$; 1; 2. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x} + 3\left(\sin x - \frac{2}{\sin x}\right) - 2 = 0.$$

Розв'язання. Нехай $\sin x - \frac{2}{\sin x} = t$. Тоді $\sin^2 x - 4 + \frac{4}{\sin^2 x} = t^2$. Звідси $\sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x} = t^2 + 4$. Початкове рівняння набуває вигляду $t^2 + 4 + 3t - 2 = 0$.

Звідси $t^2 + 3t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = -2. \end{array}\right.$

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - \frac{2}{\sin x} = -1, \\ \sin x - \frac{2}{\sin x} = -2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \sin^2 x + \sin x - 2 = 0, \\ \sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -2, \\ \sin x = -1 - \sqrt{3}, \\ \sin x = -1 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$

Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$, то отримуємо $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = \sqrt{3} - 1. \end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = (-1)^k \arcsin\left(\sqrt{3} - 1\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$ ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt[3]{7+x} = b$. Тоді

$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ a^3 + b^3 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 3, \\ a + b = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} ab = 2, \\ a + b = 3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Тепер можна записати: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=1,\\ \sqrt[3]{7+x}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=2,\\ \sqrt[3]{7+x}=1;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-6.\end{array}\right.$

Відповідь: 1; –6. ◄

Застосування властивостей функцій

Пошук області визначення функції f може бути ключем до розв'язування рівняння $f(x)=0$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_3 x+\sqrt{4x-x^2-3}=1.$$

Розв'язання. Застосування будь-яких прийомів, пов'язаних з перетворенням лівої частини даного рівняння, навряд чи призведе до успіху. Разом з тим знаходження області визначення рівняння — шлях цілком природний.

Маємо: $\begin{cases}x^2-4x+3\geqslant 0,\\ 4x-x^2-3\geqslant 0,\\ x>0.\end{cases}$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що областю визначення розглядуваного рівняння є двоелементна множина $\{1, 3\}$. Перевірка показує, що число 1 не підходить, а число 3 є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 3. ◄

Нехай функції f і g є такими, що для будь-якого $x \in D(f) \cap D(g)$ виконуються нерівності $f(x)\leqslant a$ і $g(x)\geqslant a$, де a — деяке число. Тоді рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases}f(x)=a,\\ g(x)=a.\end{cases}$$

За допомогою цих очевидних міркувань можна розв'язати цілу низку рівнянь.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\log_2(5+3\cos 4x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $\cos 4x\geqslant -1$, то $5+3\cos 4x\geqslant 2$. Звідси $\log_2(5+3\cos 4x)\geqslant 1$.

Водночас $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$.

Тому початкове рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \log_2(5+3\cos 4x)=1, \\ \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}, \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. ◄

Ви знаєте, що коли функція f є зростаючою (спадною), то рівняння $f(x)=a$ має не більше ніж один корінь. Якщо вдається корінь угадати, то розв'язування такого рівняння завершено.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $2x-\sin x=0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=2x-\sin x$. Маємо: $f'(x)=2-\cos x$. Оскільки для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ виконується нерівність $f'(x)>0$, то функція f є зростаючою. Отже, рівняння $f(x)=0$ має не більше ніж один корінь. Очевидно, що число 0 є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 0. ◄

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=1$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}$. Легко встановити, що $D(f)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Кожна з функцій $g(x)=\sqrt{4x^2-1}$ і $h(x)=\sqrt{4x-1}$ є зростаючою на $D(f)$. Отже, функція f також зростає на $D(f)$.

Очевидно, що число $\frac{1}{2}$ є коренем початкового рівняння. Цей корінь єдиний.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◄

ВПРАВИ

22.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2-7x+3|=|x-4|$;
2) $|x^2-3x-1|=x-1$;
3) $\sqrt{4x^2-5x}=\sqrt{3x^2-2x-2}$;
4) $\sqrt{3x+7}=7-x$;
5) $7^{2x+3}=7^{3-x}$;
6) $\log_3(x^2-7)=\log_3(-x-1)$.

22.2.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2-2x-5|=|x-1|$;
2) $|x^2+6x-16|=8-4x$;
3) $\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{x^2+2x-3}$;
4) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
5) $2^{8-2x^2}=2^{x^2-1}$;
6) $\lg(x^2+2x-10)=\lg(3x+2)$.

22.3.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3-7x-6=0$;
2) $x^4-5x^3+8x^2-7x+3=0$;
3) $x^4-9x^2+4x+12=0$.

22.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3+x^2+x+6=0$;
2) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4=0$.

22.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;
2) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)=-5$;
3) $\frac{3x^2-9x}{2}-\frac{12}{x^2-3x}=3$;
4) $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$.

22.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;
2) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;
3) $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$;
4) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

22.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$;
2) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$;
3) $4^{\operatorname{tg}^2 x}+8=3\cdot2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

22.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x^2-x}-17\cdot2^{x^2-x+2}+256=0$;
2) $2^{\cos 2x}=3\cdot2^{\cos^2 x}-4$.

22.9.•• Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

22.10.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$;
2) $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$.

22.11.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=1204$;
2) $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$.

22.12.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x^2-5x+2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$;
2) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

22.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$;

2) $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$.

22.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$; 2) $2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}+\frac{4}{3}$.

22.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16$; 2) $x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)$.

22.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$; 2) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$.

22.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x}{x^2+1-4x}-\frac{2x}{x^2+1+x}=\frac{8}{3}$; 2) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\frac{13}{3}=0$.

22.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

2) $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

22.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4+5x^2(x+1)=6\ (x+1)^2$;

2) $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0$.

22.20.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2$;

2) $5\cos^3 x=\sin x-\cos x$.

22.21.•• Розв'яжіть рівняння $22\cos^2 x+4\sin 2x=7$.

22.22.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4$;

2) $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0$.

22.23.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x=4$;

2) $4\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}+4\sin x+\frac{2}{\sin x}=11$.

22.24.•• Розв'яжіть рівняння $\sin 2x+3(\sin x+\cos x)+1=0$.

22.25.•• Розв'яжіть рівняння $\sin 2x+4\sin x-4\cos x-1=0$.

22.26.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$.

22.27.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4;$ 2) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

22.28.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $2\cos\frac{x^2-4x}{3}=x^2-8x+18;$

2) $5\sin x-12\cos x=x^2-2x+14.$

22.29.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{\pi x}{6}=x^2-6x+10;$ 2) $\sin 2x=x-x^2-1.$

22.30.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\cos 2x+\cos\frac{5x}{2}=2;$ 2) $\sin 6x+\cos\frac{12x}{5}=-2.$

22.31.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{13x}{6}\cos\frac{5x}{6}=1;$ 2) $\sin 2x+\cos\frac{8x}{3}=2.$

22.32.•• Розв’яжіть рівняння $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)=1.$

22.33.•• Розв’яжіть рівняння $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)=1.$

22.34.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $x^3+2x\sqrt{x-1}=12;$ 2) $\frac{17}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x}}{2}.$

22.35.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{2x+7}=13;$

2) $x^2+5x+15\sqrt{x+2}=44.$

22.36.•• Розв’яжіть рівняння $\cos x-2x=1.$

22.37.•• Розв’яжіть рівняння $\sin x-\cos x=2x-1.$

22.38.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x^2-2(a+1)x+6a-3)(\operatorname{tg}\pi x-1)=0$$

на проміжку [0; 1] має рівно два різних корені?

22.39.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x^2-(a+4)x+2a+4)\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$$

на проміжку [0; 3] має рівно два різних корені?

23. Основні методи розв’язування нерівностей

У таблиці наведено схеми розв’язування деяких типових нерівностей.

Тип нерівності	Умова, рівносильна даній нерівності
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$
$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a > 1$	$f(x) > g(x)$
$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ 0 < a < 1$	$f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) > \log_a g(x),\ a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x),\ 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Часто розв’язування нерівностей зводиться до розв’язування типових нерівностей, наведених у таблиці. Це ілюструють вправи № 23.1–23.10. До тих нерівностей, які не зводяться до типових, застосовують спеціальні методи та прийоми розв’язування. Розглянемо деякі з них.

Метод рівносильних перетворень

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x^2-9)\sqrt{x-2}\geqslant 0$.

Розв'язання. Зауважимо, що помилковими є такі міркування: «Оскільки при $x\geqslant 2$ виконується нерівність $\sqrt{x-2}\geqslant 0$, то дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x^2-9\geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $x\in[3;+\infty)$». Неважко побачити, що в результаті такого «розв'язування» втрачається розв'язок $x=2$.

Правильним розв'язанням даної нерівності є, наприклад, перехід до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} (x^2-9)\sqrt{x-2}=0, \\ (x^2-9)\sqrt{x-2}>0. \end{array}\right.$$

Розв'язком рівняння сукупності є числа 2 і 3, розв'язком нерівності — проміжок $(3;+\infty)$.

Відповідь: $[3;+\infty)\cup\{2\}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}>1$.

Розв'язання. Одразу підносити обидві частини нерівності до квадрата не є раціональним кроком, оскільки цей перехід вимагає враховувати таку додаткову умову: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}\geqslant 0$.

Дану в умові нерівність доцільно записати так:

$$\sqrt{5x-1}>1+\sqrt{x+2}.$$

Оскільки обидві частини останньої нерівності можуть набувати лише невід'ємних значень, то можна перейти до рівносильної нерівності $\left(\sqrt{5x-1}\right)^2>\left(1+\sqrt{x+2}\right)^2$.

Далі отримуємо:

$$5x-1>1+2\sqrt{x+2}+(x+2);$$

$$2(x-1)>\sqrt{x+2};$$

$$\begin{cases} 4(x-1)^2>x+2, \\ x>1, \\ x+2\geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-9x+2>0, \\ x>1. \end{cases}$$

Звідси $x>2$.

Відповідь: $(2;+\infty)$. ◄

Метод інтервалів

Нехай нулі функції та її точки розриву розбивають область визначення функції на деякі проміжки (рис. 23.1). Тоді з наслідку теореми Больцано—Коші випливає, що ці проміжки є проміжками знакосталості функції. Визначити знак функції на кожному з таких проміжків можна за допомогою «пробних точок».

Ці міркування є основою для розв'язування широкого класу нерівностей.

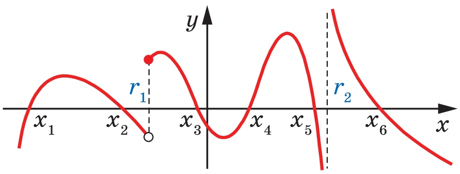


Рис. 23.1

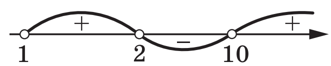


Рис. 23.2

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1$. Маємо: $D(f) = [1; +\infty)$. Знайдемо нулі функції f. Для цього розв'яжемо рівняння $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1 = 0$.

Зробимо заміну: $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Маємо: $2 - x = a^3$, $x - 1 = b^2$. Звідси $a^3 + b^2 = 1$. Отримуємо систему

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0, \\ a^3 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + (1-a)^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$

Ця система має три розв'язки: (0; 1), (1; 0), (−2; 3).

Тепер можна записати: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 0, \\ \sqrt{x-1} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = -2, \\ \sqrt{x-1} = 3. \end{cases} \end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 1, \\ x = 10. \end{array}\right.$

Оскільки функція f є неперервною, то її нулі, тобто числа 1, 2, 10, розбивають її область визначення $D(f) = [1; +\infty)$ на проміжки знакосталості: $(1; 2)$, $(2; 10)$, $(10; +\infty)$.

Маємо:

$$\frac{3}{2} \in (1; 2); \quad f\left(\frac{3}{2}\right) > 0;$$
$$3 \in (2;\ 10);\ f(3) < 0;$$
$$17 \in (10;\ +\infty);\ f(17) > 0.$$

Знаки функції на проміжках знакосталості показано на рисунку 23.2.

Відповідь: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$. ◄

Застосування властивостей функцій

Під час розв'язування прикладу 3 було використано таку властивість функції, як неперервність. Нерідко ключем до розв'язування можуть бути й інші властивості функцій: періодичність, парність (непарність), зростання (спадання), найбільше і найменше значення функції тощо.

Наприклад, якщо $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$ і $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$, то множиною розв'язків кожної з нерівностей $f(x) \geqslant a$ і $f(x) \leqslant b$ є множина $D(f)$ (рис. 23.3).

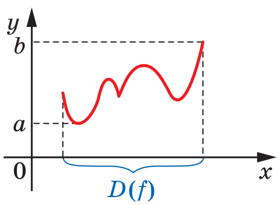


Рис. 23.3

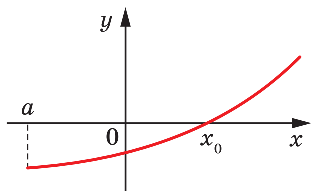


Рис. 23.4

Ще один приклад: якщо функція f зростає на проміжку $D(f) = [a;\ +\infty)$ і $f(x_0) = 0$, то множиною розв'язків нерівності $f(x) \geqslant 0$ є проміжок $[x_0;\ +\infty)$ (рис. 23.4).

Розглянемо приклади, що ілюструють вищесказане.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\sqrt[4]{19 - x} + \sqrt[4]{x + 13} \leqslant 4$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{19 - x} + \sqrt[4]{x + 13}$, $D(f) = [-13;\ 19]$.

Маємо: $f'(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(19 - x)^3}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x + 13)^3}}$. Розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, отримаємо $x = 3$.

Порівнюючи числа $f(-13)$, $f(3)$, $f(19)$, доходимо висновку, що $\max\limits_{[-13;19]} f(x) = f(3) = 4$.

Тоді нерівність $f(x) \leqslant 4$ виконується для всіх $x \in D(f)$.

Відповідь: $[-13; 19]$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність

$$\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\log_3(x^2+x+21) \geqslant 6.$$

Розв'язання. Областю визначення даної нерівності є проміжок $[2; +\infty)$.

Оскільки $\sqrt{x-2}+4 \geqslant 4$, то $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geqslant \log_2 4 = 2$.

При $x \geqslant 2$ отримуємо, що $x^2+x+21 \geqslant 27$.

Тоді $\log_3(x^2+x+21) \geqslant 3$.

Маємо: $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geqslant 2$ і $\log_3(x^2+x+21) \geqslant 3$.

Звідси для всіх $x \in [2; +\infty)$ виконується нерівність

$$\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\log_3(x^2+x+21) \geqslant 6.$$

Відповідь: $[2; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{5x^3+9x+6} \geqslant 5$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt[3]{5x^3+9x+6}-5.$$

Легко показати, що ця функція зростає на $D(f) = [1; +\infty)$. Очевидно, що $f(2) = 0$. Тоді множиною розв'язків нерівності $f(x) \geqslant 0$ є проміжок $[2; +\infty)$.

Відповідь: $[2; +\infty)$. ◄

ВПРАВИ

23.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x-5| \leqslant x$;
2) $|3x-2| > 2x+1$.

23.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|3x-1| < \dfrac{x}{2}$;
2) $|3x-5| > 9x+1$.

23.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2+3x| < x+4$;
2) $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}\right| < 1$;
3) $x^2-x-2 < |5x-3|$;
4) $|x^2+3x| \geqslant 2-x^2$.

23.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|4x^2-1| < x+2$;
2) $\left|\dfrac{3x+1}{x-5}\right| \geqslant 1$;
3) $|x^2-3x| \geqslant x+5$.

23.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x^2+5x-6} > \sqrt{-x-3}$;
2) $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$;
3) $\sqrt{2x^2+6x+3} \geqslant \sqrt{-x^2-4x}$;
4) $\sqrt{\dfrac{8-x}{x-10}} \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{2-x}}$.

23.6.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x^2-7x+5} \geqslant \sqrt{3x-4}$;
2) $\sqrt{x^2+5x} < \sqrt{1-x^2+4x}$;
3) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{4x-1}} \geqslant \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$;
4) $\sqrt{3-x} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$.

23.7.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+7} < x$;
2) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$;
3) $\sqrt{5-|x+1|} \leqslant 2+x$.

23.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x+4 > 2\sqrt{4-x^2}$;
2) $\sqrt{x^2-3x-18} \leqslant 4-x$;
3) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$.

23.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x+4} > x+3$;
2) $\sqrt{2x^2+5x-6} \geqslant 2-x$;
3) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2$.

23.10.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x^2-2x} > 4-x$;
2) $\sqrt{-x^2-8x-12} \geqslant x+4$;
3) $\sqrt{\dfrac{x^3+27}{x}} > x-3$.

23.11.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$;
2) $(x+1)\sqrt{x+4}\,\sqrt{x+7} \leqslant 0$;
3) $(x+8)\sqrt{x^2-5x+4} \leqslant 0$;
4) $(x^2+3x-10)\sqrt{2x^2+5x+2} \geqslant 0$.

23.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$;
2) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7} \geqslant 0$;
3) $(x+3)\sqrt{x^2+x-2} \leqslant 0$;
4) $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \geqslant 0$.

23.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$;
2) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leqslant 5$.

23.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} > 3$;
2) $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} \leqslant \sqrt{10-x}$.

23.15.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^6 x + \cos^6 x < \frac{2}{3}$;
2) $2\cos^2 x - \sin x > 1$;
3) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 > 0$;
4) $2 + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x < 0$.

23.16.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$;
2) $\sin x + \cos 2x > 1$;
3) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 < 0$.

23.17.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos 2x \operatorname{tg} x < 0$;
2) $\sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x < 0$;
3) $(\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\sin x - \cos x) > 0$;
4) $(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})\sin x \leqslant 0$.

23.18.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\cos x - \sin 2x - \cos 3x < 0$;
2) $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} 3x$;
3) $(2\cos x - 1)\operatorname{ctg} x \geqslant 0$.

23.19.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt{x-2} \leqslant 1$;
2) $\frac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} \geqslant \frac{21}{x}$.

23.20.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{10-x} + \sqrt{x-1} \geqslant 3$;
2) $\frac{\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}} \leqslant \frac{6}{x}$.

23.21.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[4]{83-x} + \sqrt[4]{79+x} \leqslant 6$;
2) $\sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+5} \geqslant 2$;
3) $3x^5 + \sqrt[3]{3x^3 + 4x + 1} < 5$;
4) $(\sqrt{x+2} + 1)\log_3(x^2 + 4x + 13) \geqslant 2$;
5) $\log_3(\sqrt{x-1} + 3)\log_5(x^2 + x + 3) \geqslant 1$.

23.22.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[6]{71-x} + \sqrt[6]{57+x} \leqslant 4$;
2) $\sqrt[6]{33-x} + \sqrt[6]{31+x} \geqslant 2$;
3) $2\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x^3 + 9x + 10} \geqslant 4$;
4) $\log_2(\sqrt{x+3} + 2)\log_3(x^2 + 6x + 18) \geqslant 2$.

23.23.* При яких значеннях параметра a множина розв'язків нерівності $\frac{x^2 - (3a-3)x + 6a - 10}{\sqrt{-x^2 - 2x + 48}} \leqslant 0$ містить рівно п'ять цілих чисел?

23.24.* При яких значеннях параметра a множина розв'язків нерівності $\frac{\log_{12}(6-x) + \log_{12}(7-x) - 1}{\sqrt{x^2 - 2(2a+1)x + 4a + 1}} \geqslant 0$ містить рівно п'ять цілих чисел?

24. Методи розв'язування систем рівнянь

Означення. **Дві системи рівнянь із двома змінними називають рівносильними, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.**

Наприклад, системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{1-y} = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} |x| + |y| = 0, \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = 2 \end{cases}$ є рівносильними, оскільки множина розв'язків кожної з них складається з одного елемента — пари чисел (0; 0).

Означення. **Якщо множина розв'язків першої системи рівнянь є підмножиною множини розв'язків другої системи рівнянь, то другу систему рівнянь називають наслідком першої системи рівнянь.**

Наприклад, система $\begin{cases} x = y, \\ (x+y-2)(x+y-4) = 0 \end{cases}$ є наслідком системи рівнянь $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Під час розв'язування систем рівнянь їх замінюють на більш прості, рівносильні їм системи. При цьому керуються таким очевидним твердженням:

якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне, то отримаємо систему рівнянь, рівносильну даній.

У 9 класі ви навчилися розв'язувати деякі системи рівнянь із двома змінними. При цьому ви застосовували спосіб підстановки або спосіб додавання.

«Законність» застосування методів підстановки та додавання забезпечують такі дві теореми.

Теорема 24.1. ***Якщо в системі рівнянь***

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

замінити в другому рівнянні змінну y виразом $f(x)$, то буде отримано систему

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x; f(x)) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

яка рівносильна даній.

Доведення. Нехай пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи (1). Тоді отримуємо дві правильні числові рівності: $y_0 = f(x_0)$ і $F(x_0; y_0) = 0$.

У другій рівності замінимо число y_0 числом $f(x_0)$, що йому дорівнює. Отримаємо правильну числову рівність $F(x_0; f(x_0)) = 0$. А це означає, що пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи (2).

Аналогічно можна показати, що коли пара $(x_1; y_1)$ є розв'язком системи (2), то вона також є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) рівносильні. ◄

Теорема 24.2. ***Якщо в системі рівнянь*** $\begin{cases} F(x; y) = 0, \\ G(x; y) = 0 \end{cases}$ ***замінити одне з них рівнянням*** $F(x; y) + G(x; y) = 0$***, то буде отримано систему, яка рівносильна даній.***

Доведення теореми 24.2 аналогічне доведенню теореми 24.1. Проведіть його самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases}$

Підставивши в перше рівняння замість y^2 двочлен $x + 5$, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = x + 4, \\ y^2 = x + 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 9; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: (4; 3), (4; –3). ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння на 3:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ 3x^2y + 3y^2x = -6. \end{cases}$$

Ця система рівносильна такій: $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x = 1, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases}(x+y)^3=1,\\ xy(x+y)=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-2.\end{cases}$

Зрозуміло, що цю систему можна розв'язати методом підстановки. Але є й інший шлях. З теореми, оберненої до теореми Вієта, випливає, що числа x і y є коренями квадратного рівняння $t^2-t-2=0$, яке має корені -1 і 2. Звідси, якщо $x=-1$, то $y=2$, і навпаки, якщо $x=2$, то $y=-1$.

Відповідь: $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y,\\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y.\end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x-1}{\sin x}=\sin y,\\ \dfrac{\cos^2 x-1}{\cos x}=\cos y;\end{cases}$

$$\begin{cases}-\cos^2 x=\sin x\sin y,\\ -\sin^2 x=\cos x\cos y,\\ \sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases} \qquad (3)$$

Додамо перше та друге рівняння системи. Отримуємо:

$$-(\cos^2 x+\sin^2 x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$

$$\cos\,(x-y)=-1;$$

$$x-y=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$x=\pi+2\pi k+y.$$

Підставляючи в перше рівняння системи (3) замість x вираз $\pi+2\pi k+y$, отримуємо: $-\cos^2 y=-\sin^2 y$; $\cos^2 y-\sin^2 y=0$; $\cos 2y=0$;

$y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$. Звідси $x=\dfrac{5\pi}{4}+\pi\left(2k+\dfrac{n}{2}\right)$.

Оскільки при знайдених значеннях x і y $\cos x\neq 0$ і $\sin x\neq 0$, то маємо відповідь.

Відповідь: $\left(\dfrac{5\pi}{4}+\pi\left(2k+\dfrac{n}{2}\right);\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}$. ◄

У ряді випадків для розв'язування систем рівнянь ефективними є методи почленного множення і ділення рівнянь системи.

Теорема 24.3. ***Якщо в системі рівнянь*** $\begin{cases} F(x; y) = c_1, \\ G(x; y) = c_2, \end{cases}$ ***де*** $c_1 \neq 0$ ***і*** $c_2 \neq 0$, ***замінити одне з них рівнянням*** $F(x; y)\,G(x; y) = c_1 c_2$ ***або*** $\dfrac{F(x; y)}{G(x; y)} = \dfrac{c_1}{c_2}$, ***то буде отримано систему, яка рівносильна даній.***

Доведення теореми 24.3 аналогічне доведенню теореми 24.1. Проведіть його самостійно.

Зауважимо, що у формулюванні теореми 24.3 вимога $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$ є суттєвою. Наприклад, система $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 1 \end{cases}$ має два розв'язки: (1; 1) і (−1; −1), а система $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy(x - y) = 0 \end{cases}$ — безліч розв'язків виду $(t; t)$, де $t \in \mathbb{R}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 y^3 = 81, \\ x^3 y^2 = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Дана система рівносильна такій: $\begin{cases} x^5 y^5 = 243, \\ x^3 y^2 = 3. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} xy = 3, \\ x(xy)^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3, \\ x = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = 9. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{3}; 9\right)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0{,}5, \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. $\begin{cases} 2\sin\dfrac{x - y}{2}\cos\dfrac{x + y}{2} = 0{,}5, \\ 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Поділимо перше рівняння системи на друге.

Отримаємо $\operatorname{tg}\dfrac{x - y}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, звідси $x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Тоді початкова система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \sin x - \sin y = 0{,}5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right) - \sin y = 0{,}5. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) - \sin y = 0{,}5;\quad 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5;\quad \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5;$$

$$y = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\quad \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi(k+n), \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi(k+n), \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$

Оскільки для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ сума $k + n$ може набувати будь-яких цілих значень, то в даному випадку $k + n$ можна замінити на m, $m \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$,

$\left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. ◄

Ви знаєте, що вдало виконана заміна зводить розв'язування заданого рівняння до розв'язування більш простого рівняння. Цей прийом є ефективним і для розв'язування багатьох систем рівнянь.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{16y^2}{x^2} + 4\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x}\right) + 8 = 0, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = t$. Тоді $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{16y^2}{x^2} = t^2 - 8$. Маємо:

$$t^2 - 8 + 4t + 8 = 0;\ t^2 + 4t = 0;\ t = -4 \text{ або } t = 0.$$

Отримуємо: $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=-4$ або $\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=0.$

Тоді задана система рівносильна сукупності двох систем.

а) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=-4,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$ Нехай $\frac{x}{y}=u$. Тоді $u+\frac{4}{u}=-4$; $u^2+4u+4=0$; $u=-2$. Звідси $\begin{cases}\frac{x}{y}=-2,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$ Ця система рівнянь має два розв'язки: (2; −1), (−2; 1).	б) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}=0,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$ Очевидно, що ця система розв'язків не має.

Відповідь: (2; −1), (−2; 1). ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4.\end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 2x+y+1+x+y=5.\end{cases}$

Нехай $\sqrt{2x+y+1}=u$, $\sqrt{x+y}=v$. Отримуємо: $\begin{cases}u-v=1,\\ u^2+v^2=5.\end{cases}$

Звідси $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=2,\\ v=1,\end{cases}\\ \begin{cases}u=-1,\\ v=-2.\end{cases}\end{array}\right.$

Оскільки $u\geqslant 0$ і $v\geqslant 0$, то дана система рівносильна такій: $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}=2,\\ \sqrt{x+y}=1.\end{cases}$

Звідси $\begin{cases}2x+y+1=4,\\ x+y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$

Відповідь: (2; −1). ◄

Означення. **Многочлен, усі члени якого мають один і той самий степінь, називають однорідним многочленом.**

Наприклад,

$x - 2y$ — однорідний многочлен першого степеня,

$x^2 - 3xy - y^2$ — однорідний многочлен другого степеня,

$3x^3 - 2xy^2 + x^2y - y^3$ — однорідний многочлен третього степеня.

Для розв'язування систем виду $\begin{cases} F(x; y) = a, \\ G(x; y) = b, \end{cases}$ де $F(x; y)$ і $G(x; y)$ — однорідні многочлени, ефективною є заміна $\frac{x}{y} = t$. Продемонструємо це на прикладах.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Розв'язання. Нескладно переконатися, що пара виду $(x_0; 0)$ не є розв'язком даної системи. Поділивши обидві частини першого рівняння на y^2, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} - \frac{5x}{y} + 6 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

Нехай $\frac{x}{y} = t$. Тоді $t^2 - 5t + 6 = 0$. Звідси $t = 2$ або $t = 3$.

Задана система рівносильна сукупності таких систем:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Розв'язавши кожну із цих систем методом підстановки, отримуємо відповідь.

Відповідь: (2; 1), (−2; −1), $\left(3\sqrt{\frac{7}{17}}; \sqrt{\frac{7}{17}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\frac{7}{17}}; -\sqrt{\frac{7}{17}}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

Розв'язання. Очевидно, що пара виду $(x_0; 0)$ не є розв'язком даної системи. Тоді можна виконати заміну $\frac{x}{y} = t$. Звідси $x = yt$.

Маємо: $\begin{cases} y^3t^3 - y^3 = 7, \\ y^3t^2 + y^3t = 6. \end{cases}$ Тепер, поділивши перше рівняння на друге, отримуємо: $\frac{y^3t^3 - y^3}{y^3t^2 + y^3t} = \frac{7}{6}$; $\frac{y^3(t^3-1)}{y^3(t^2+t)} = \frac{7}{6}$; $6t^3 - 7t^2 - 7t - 6 = 0$.

Неважко підібрати один із коренів цього рівняння: $t = 2$. Тоді, розкладаючи ліву частину рівняння на множники, отримуємо:

$$6t^3 - 12t^2 + 5t^2 - 10t + 3t - 6 = 0;$$

$$6t^2(t-2) + 5t\,(t-2) + 3\,(t-2) = 0;$$

$$(t-2)(6t^2 + 5t + 3) = 0; \quad t = 2.$$

Задана система рівносильна такій: $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримуємо відповідь.

Відповідь: (2; 1). ◄

Означення. Якщо при будь-яких значеннях x і y виконується рівність $F(x;\ y) = F(y;\ x)$, то многочлен $F(x;\ y)$ називають симетричним.

Наведемо приклади симетричних многочленів:

$$x + y,\ x^2 - xy + y^2,\ x^2 + y^2,\ x^3 + y^3.$$

Таким чином, симетричним називають многочлен $F(x;\ y)$, який не змінюється, якщо змінну x замінити на y, а змінну y — на змінну x.

Для розв'язування систем виду $\begin{cases} F(x; y) = a, \\ G(x; y) = b, \end{cases}$ де $F(x;\ y)$ і $G(x;\ y)$ — симетричні многочлени, ефективною є заміна $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Зауважимо, що ліві частини рівнянь системи є симетричними многочленами.

«Підготуємо» задану систему до заміни $x + y = u$, $xy = v$. Маємо:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + (x+y) = 8, \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) + xy(x+y) = 15. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} u^2 - 2v + u = 8, \\ u(u^2 - 3v) + uv = 15; \end{cases}$ $\begin{cases} -2v = 8 - u^2 - u, \\ u(u^2 - 2v) = 15. \end{cases}$

Тоді $u(u^2 + 8 - u^2 - u) = 15$; $u^2 - 8u + 15 = 0$; $\left[\begin{array}{l} u = 5, \\ u = 3. \end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 5, \\ v = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3, \\ v = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Задана система рівносильна сукупності двох систем:

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 11. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Відповідь: (1; 2), (2; 1). ◄

ПРИКЛАД 11 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо перше рівняння системи як квадратне відносно x. Його дискримінант дорівнює $y^4 - 16$. Вимагаючи $y^4 - 16 \geqslant 0$, отримуємо, що $|y| \geqslant 2$.

Перепишемо друге рівняння системи так:

$$x^2 - 4x + 4 = 2y - y^2; \quad (x - 2)^2 = 2y - y^2.$$

Звідси $2y - y^2 \geqslant 0$, тобто $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Отримані обмеження для змінної y дозволяють зробити такий висновок: якщо задана система має розв'язки, то ними можуть бути лише пари виду $(x; 2)$.

Підставивши $y = 2$ в задану систему, отримаємо $x = 2$.

Відповідь: (2; 2). ◄

ПРИКЛАД 12 Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} |x - 4| + |x + 4| = y^3, \\ ax^2 + y + a^2 - a = 2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Якщо пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком даної системи, то й пара $(-x_0; y_0)$ також є розв'язком. Оскільки дана система повинна мати єдиний розв'язок, то $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$. Тоді необхідно, щоб пара $(0;\ y_0)$ була розв'язком даної системи.

Маємо: $\begin{cases} |0-4| + |0+4| = y_0^3, \\ a \cdot 0^2 + y_0 + a^2 - a = 2. \end{cases}$

Звідси $y_0 = 2$ і $a = 0$ або $a = 1$.

При цих значеннях параметра a пара (0; 2) є розв'язком даної системи. Проте це не означає, що система не має інших розв'язків. Тому знайдені значення параметра a слід перевірити.

При $a = 0$ маємо: $\begin{cases} |x-4| + |x+4| = y^3, \\ y = 2. \end{cases}$ Ця система має безліч розв'язків (переконайтеся в цьому самостійно).

При $a = 1$ маємо: $\begin{cases} |x-4| + |x+4| = y^3, \\ x^2 + y = 2. \end{cases}$

Оскільки $|x-4| + |x+4| \geqslant 8$ (доведіть це самостійно), то $y^3 \geqslant 8$, тобто $y \geqslant 2$. З другого рівняння цієї системи випливає, що $y \leqslant 2$. Отже, ця система може мати розв'язки тільки виду $(x_0;\ 2)$. Легко переконатися, що пара (0; 2) є єдиним розв'язком цієї системи.

Відповідь: $a = 1$. ◄

ВПРАВИ

24.1.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + 6x = 29; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ x^3 - xy^2 + x^2 = 3. \end{cases}$

24.2.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y^3 = 2, \\ 2x + x^2 + 5y^3 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y = 1, \\ y^3 - 4y^2 + 4y + x^6 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^3 + x^2y + y^2 = 6. \end{cases}$

24.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-2)(y+2) = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3x = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x-y)y = y; \end{cases}$

3) $\begin{cases}(x+4)(y-1)=x^2+5x+4,\\ x^2-y^2-3x+8=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=23,\\ x^2+y^2+2xy=9.\end{cases}$

24.4.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2x^2-3xy+5y=5,\\ (x-2)(y-1)=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x^2-xy-3y=7,\\ 2x^2+x-3=(x-1)(y+5);\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-1)y=2x-2,\\ x^2+y^2+3xy=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=9,\\ 4x^2+xy+4y^2=18.\end{cases}$

24.5.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15,\\ xy+\dfrac{x}{y}=15;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{36},\\ xy^2-x^2y=324;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1,\\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+3y}+\dfrac{x+3y}{xy}=2,\\ \dfrac{xy}{x-y}+\dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

24.6.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2y-xy^2=6,\\ xy+x-y=-5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2,\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=\dfrac{3}{2};\end{cases}$

2) $\begin{cases}xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3},\\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7,\\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2}=12.\end{cases}$

24.7.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=2,\\ 2x^2-y^2+2x-y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2y^2+x^2+xy=4,\\ 3xy-2y=5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+xy=15,\\ y^2+xy=10;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^2+y+\dfrac{1}{4}=0,\\ y^2+x+\dfrac{1}{4}=0.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+3xy=18,\\ xy+4y^2=7;\end{cases}$

24.8.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0, \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 5, \\ y^2 - 2xy = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 12, \\ 4x + 3xy - x^2 = 16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0, \\ y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0. \end{cases}$

24.9.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \sin y = 0{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} \pi y = -1. \end{cases}$

24.10.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos(x - y) = 2\cos(x + y), \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

24.11.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y^5 = 1, \\ x^5y^2 = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - y)^2 (x + 2y) = 4, \\ (x - y)^4 (x + 2y)^5 = 16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3y + x^2y^2 = 6, \\ x^2y^2 + xy^3 = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2xy + 6x - y^2 - 3y = 14, \\ 2x^2 + 4x - xy - 2y = 35; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 - x - 3y = 24, \\ 2x^2 + xy - y^2 - 2x + y = 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 40, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 10. \end{cases}$

24.12.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^8y^6 = 64, \\ x^6y^8 = 256; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + y)(x - 2y)^4 = 81, \\ (x + y)^6 (x - 2y)^3 = 27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy^3 + x^3y = -10, \\ x^2y^4 + x^4y^2 = 20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + 3xy + x + 3y = 8, \\ 3y^2 + xy - 2x - 6y = -4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = -7, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 2y = 5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 4x - 2y = 5, \\ x^2 - 3xy - 2x + 6y = 6. \end{cases}$

24.13.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2 + 2y + 1} = 1 - 2y, \\ 6x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

24.14.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + \sqrt{3x^2 - 2y + 3} = \dfrac{2}{3}y + 5, \\ 3y - 2x = 5. \end{cases}$

24.15.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 - 2y^2) = 4, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 + 2y^2) = 3. \end{cases}$

24.16.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{4 - x + y} + \sqrt{9 - 2x + y} = 7, \\ 2y - 3x = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

24.17.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 3} = 7, \\ 3x + 2y = 22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

24.18.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0{,}5, \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = -\cos y, \\ \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin y. \end{cases}$

24.19.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

24.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2} = \dfrac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 2, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = 0{,}5. \end{cases}$

24.21.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos(2x+2y) + 2\sin(x+y) = 0, \\ 2\cos(x-y) = \sin^2(x-y) + 1. \end{cases}$

24.22.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 7, \\ y^2 + xy = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 3y^2 = 2, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$

24.23.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -9, \\ x^2 - y^2 - 2xy = -7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$

24.24.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 16, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y = -4, \\ y^3 - xy^2 = -1. \end{cases}$

24.25.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 9, \\ (x-y)(x^2+y^2) = 5. \end{cases}$

24.26.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy(x-1)(y-1) = 72, \\ (x+1)(y+1) = 20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10, \\ (x+y)(xy-1) = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 10, \\ (x+y)(xy+1) = 25; \end{cases}$

24.27.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 1, \\ x^2y + xy^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy+8)(x+y) = 2. \end{cases}$

24.28.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 10(x^4+y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 12, \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8; \end{cases}$

24.29.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5, \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

24.30.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2y^2) = 1 + 4y^4, \\ (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2y^2) = 1 - 4y^4. \end{cases}$

24.31.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x^2 + y^2 - xy)(x - y) = 1 + y^3, \\ (x^2 + y^2 + xy)(x + y) = 1 - y^3. \end{cases}$

24.32.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3y^5 = 4x^2y^3 - 9, \\ xy = x^2y^3 - 6. \end{cases}$

24.33.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y + 6 = \dfrac{y^3}{x^2}, \\ x^2y - 1 = \dfrac{4x^4}{y^2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^8 = x^4y^4 + 1, \\ 3y^8 = x^4y^4 + 2. \end{cases}$

24.34.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

24.35.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4 + 4y^4 = 5, \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 1. \end{cases}$

24.36.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{17}{4}, \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} = \dfrac{20}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0, \\ 2x^2 + 3y^2 - 2x - 6y - 13 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$

24.37.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y}, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 - 3y + 4x = 4, \\ y(y-4)(y+4x) = -21. \end{cases}$

24.38.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + 6 = 0, \\ 24 - y^2 = (4x^2 - y^2)^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0; \end{cases}$

24.39.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 + 3y^2 = 2xy, \\ |\, xy - 2\,| = 6 - x^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^4 = 0, \\ x^2 - 4x + 6 - 2y^6 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1; \end{cases}$

24.40.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0, \\ \sqrt{1 - y^2} + x^2 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = \sqrt{x-y}, \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9}. \end{cases}$

24.41.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0, \\ \sqrt{4 - x^2} + y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - (x-3)^2 = \sqrt{x-y}, \\ y^2 - 4 = \sqrt{x - y - 1}. \end{cases}$

24.42.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^3 x = \dfrac{1}{2}\sin y, \\ \cos^3 x = \dfrac{1}{2}\cos y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$

24.43.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5\sin x = \sin y, \\ 3\cos x + \cos y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y. \end{cases}$

24.44.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^3 - y^2 + y = x^2, \\ x^3 - x^2 + x = y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y}{1+y^2} = x. \end{cases}$

24.45.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y^2 = x - 2, \\ x^4 + y^4 = 82; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 = 8y + x, \\ y^3 = 8x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1 + x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1 + y^2} = x. \end{cases}$

24.46.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь має єдиний розв'язок:

1) $\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

24.47.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 3y - a\sqrt{x^2 + 1} = 1, \\ y + x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

24.48.* При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} (x - y)^2 + x + y = 2a, \\ (x + y)^3 + x + y = 2a \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

24.49.* При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} \left(2 + \sqrt{3}\right)^x + \left(2 - \sqrt{3}\right)^x = y, \\ a|x| + y = a + 2 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

24.50.* При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} a^2 y^2 + (1 - a)\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2 + 2a^2, \\ \log_y (x^2 + 1) = \log_y x + 1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

24.51.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} (4b - 1)x + y = b, \\ (3b + 2)x + y = a \end{cases}$ має розв'язок при будь-яких значеннях параметра b.

24.52.* При яких значеннях параметра a системи рівнянь

$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ ax - y = 3 \end{cases}$ та $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - (a^2 - 7a + 12)xy + (7 - 2a)y^2 = 0 \end{cases}$

рівносильні?

§ 5. ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ

25. Вправи для повторення курсу алгебри

Подільність натуральних чисел. Ознаки подільності

25.1. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел:
1) 24 і 42; 2) 18 і 30; 3) 128 і 192; 4) 328 і 624.

25.2. Знайдіть найменше спільне кратне чисел:
1) 16 і 32; 2) 9 і 14; 3) 18 і 12; 4) 16 і 24.

25.3. Замість зірочки в числі 400* поставте таку цифру, щоб отримане число було кратне: 1) 2; 2) 5; 3) 9; 4) 3. Розгляньте всі можливі випадки

25.4. Неповна частка при діленні двох двоцифрових чисел дорівнює 9, а остача — 8. Чому дорівнює ділене?

25.5. Яке із чисел 4025, 7540, 2754, 6225 ділиться націло на 3, але не ділиться націло на 2?

25.6. Скільки існує двоцифрових чисел, які кратні числу:
1) 5; 2) 9; 3) 7?

25.7. Із чисел 8, 9, 15, 38, 65, 91 і 98 складіть трійки взаємно простих чисел.

25.8. Чи може бути простим числом сума чотирьох послідовних натуральних чисел?

25.9. Скоротним чи нескоротним числом є значення дробу:
1) $\frac{7425}{10^5-1}$; 2) $\frac{10^{100}+5}{35}$; 3) $\frac{10^{100}+5}{36}$?

25.10. Чи може добуток кількох простих чисел закінчуватися цифрою 0? цифрою 5?

25.11. Простим чи складеним є число a, якщо воно кратне числу 25?

25.12. Чи кратна сума:
1) 33^3+3 числу 10; 2) $10^{10}+5$ числу 3?
Відповідь обґрунтуйте.

25.13. Яке найменше натуральне число треба додати до числа 836, щоб отримана сума ділилася націло одночасно на 3 і на 10?

25.14. При діленні числа n на 6 отримали остачу 4. Чому дорівнює остача при діленні числа $2n$ на 6?

25.15. У кожному букеті має бути 3 червоні та 4 білі троянди. Яку найбільшу кількість таких букетів можна скласти з 36 червоних і 45 білих троянд?

25.16. Натуральні числа a і b такі, що a — парне, b — непарне. Значення якого з наведених виразів обов'язково є парним числом?

1) a^2+3; 2) $b(a+b)$; 3) $\frac{ab}{2}$; 4) $\frac{a^2}{2}$.

25.17. Натуральне число a — парне, а натуральне число b — непарне. Яка з наведених рівностей можлива?

1) $\frac{a+1}{b-1}=1$; 2) $ab=25$; 3) $\frac{a}{b}=2$; 4) $\frac{b}{a}=4$.

25.18. Натуральні числа a і b такі, що a — парне число, а b — непарне. Значення якого з наступних виразів не може бути натуральним числом?

1) $\frac{4b}{3a}$; 2) $\frac{2a}{b}$; 3) $\frac{a^2}{b^2}$; 4) $\frac{b^2}{a}$.

25.19. Скільки натуральних дільників має добуток двох різних простих чисел?

25.20. Яку одну й ту саму цифру треба приписати ліворуч і праворуч до числа 25, щоб отримане число було кратне 6?

Числові вирази. Раціональні числа і дії з ними

25.21. Яка з даних рівностей хибна:

1) $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$; 2) $\frac{5}{7}=\frac{45}{56}$; 3) $\frac{56}{72}=\frac{7}{9}$; 4) $\frac{63}{81}=\frac{7}{8}$?

25.22. Розташуйте в порядку спадання числа:

1) $\frac{7}{10}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{13}{15}$; 2) $\frac{11}{16}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{5}{12}$.

25.23. Знайдіть усі натуральні значення x, при яких є правильною нерівність $\frac{x}{9}<\frac{22}{45}$.

25.24. Скільки існує дробів:

1) зі знаменником 24, які більші за $\frac{3}{8}$, але менші від $\frac{2}{3}$;

2) зі знаменником 18, які більші за $\frac{7}{9}$, але менші від 1;

3) зі знаменником 28, які більші за $\frac{3}{7}$, але менші від $\frac{4}{7}$?

25.25. Якому з дробів $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{11}{24}$ може дорівнювати x, щоб була правильною нерівність $\frac{11}{48} < x < \frac{29}{48}$?

25.26. Скільки існує правильних дробів зі знаменником 12?

25.27. Скільки можна скласти нерівних між собою правильних дробів, чисельниками та знаменниками яких є числа:

1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 2) 3, 5, 7, 11, 13, 17?

25.28. Скільки існує неправильних дробів із чисельником 10?

25.29. Скільки можна скласти нерівних між собою неправильних дробів, чисельниками та знаменниками яких є числа:

1) 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23; 2) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12?

25.30. Якому з наведених проміжків належить число $\frac{10}{15}$:

1) (0; 0,25); 2) (0,25; 0,5); 3) (0,5; 0,75); 4) (0,75; 1)?

25.31. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{9}{11}-\frac{2}{5}$;
2) $\frac{13}{16}-\frac{9}{32}$;
3) $\frac{14}{15}-\frac{7}{10}$;
4) $\frac{9}{16}+\frac{7}{24}-\frac{3}{8}$;
5) $5\frac{7}{8}+6\frac{3}{10}$;
6) $6\frac{3}{8}+2\frac{5}{9}$;
7) $6\frac{4}{9}-3\frac{6}{7}$;
8) $8\frac{7}{30}-2\frac{9}{20}$;
9) $0,8-\frac{5}{7}$;
10) $0,36+\frac{8}{15}$.

25.32. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}$; 2) $\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{29\cdot 31}$.

25.33. Доведіть, що:

1) $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{31}+\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}>\frac{1}{4}$.

25.34. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{11}{18}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{16}$;
2) $1\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}+1\frac{3}{8}$;
3) $1\frac{3}{25}\cdot 2\frac{1}{7}-2\frac{1}{9}\cdot\frac{27}{190}$;
4) $\left(5\frac{1}{16}-1\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{14}\right)$;
5) $\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{8}\right):\frac{3}{8}$;
6) $2\frac{6}{7}:\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{14}\right)$;

7) $2\frac{1}{4}:1\frac{4}{11}-\frac{3}{8}:\frac{7}{8}$; 8) $\left(2{,}04:\frac{1}{25}-36{,}1:\frac{19}{20}\right)\cdot\frac{5}{13}$.

25.35. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1) $2{,}3\cdot(-8)-9{,}8:(6{,}7-8{,}1)$

2) $\left(-\frac{5}{12}+\frac{11}{16}\right):\left(-\frac{13}{72}\right)$

3) $\left(\frac{9}{14}-\left(-\frac{5}{21}\right)\right):\left(-2\frac{9}{14}\right)$

4) $\left(-\frac{11}{18}+\frac{29}{45}\right):\left(\frac{19}{27}-\frac{35}{54}\right)$

А) $-1{,}5$
Б) $-0{,}6$
В) $-11{,}4$
Г) $-10{,}2$
Д) -1

25.36. Який з даних десяткових дробів не можна перетворити в скінченний десятковий дріб?

А) $\frac{11}{16}$; Б) $\frac{24}{600}$; В) $\frac{5}{12}$; Г) $\frac{18}{125}$.

25.37. Чому дорівнює значення виразу $(1-2)-(3-4)-(5-6)-$ $-\ldots-(99-100)$?

25.38. Число a — додатне, а число b — від'ємне. Значення якого з наведених виразів найбільше?

А) $\frac{a^2}{b^2}$; Б) $-\frac{a}{b^2}$; В) $\frac{a^2}{b}$; Г) $\frac{b}{a}$.

25.39. Сума 1000 натуральних чисел дорівнює 1001. Чому дорівнює їхній добуток?

25.40. Із послідовності чисел -8, -7, -4, 36, 5, 9 вибрали два числа та знайшли їхній добуток. Якого найбільшого значення може набути цей добуток?

25.41. Числа a і b такі, що $a>0$, $b<0$. Який із наведених виразів може набувати від'ємних значень?

А) $a-b$; Б) $|a+b|$; В) a^3b^2; Г) $a+b$.

25.42. Числа a і b такі, що $a+b<a$. Яке з тверджень є правильним?

А) $b>0$; Б) $b<0$; В) $b=0$; Г) $b\geqslant 0$.

Пропорційні величини. Відсоткові розрахунки

25.43. У хлопчика є певна сума грошей, за яку він може придбати 18 однакових зошитів. Скільки зошитів він зможе придбати за ту саму суму грошей, якщо вони:

1) подешевшають у 2 рази; 2) подорожчають в 1,5 раза?

25.44. На двох книжних полицях стояло порівну книжок. Потім третину книжок з першої полиці переставили на другу. У скільки разів на другій полиці стало більше книжок, ніж на першій?

25.45. Шість однакових екскаваторів, працюючи разом, вирили котлован за 18 год. За скільки годин 4 таких екскаватори, працюючи разом, вириють два таких котловани?

25.46. Відомо, що з 50 кг борошна отримують 70 кг хліба. Скільки хліба отримають зі 150 кг борошна? Скільки потрібно борошна, щоб спекти 14 кг хліба?

25.47. Якщо робітник буде виготовляти по 10 деталей щодня, то він виконає замовлення за 24 дні. За скільки днів він виконає замовлення, якщо виготовлятиме щодня 12 деталей?

25.48. Дві дівчини та хлопець домовилися придбати для вечірки 15 тістечок. Перша дівчина купила 6 тістечок, друга — 9, а хлопець замість своєї частини тістечок вніс 48 грн. Як дві дівчини мають поділити між собою ці гроші?

25.49. У сонячний день квасу продають на 50 % більше, ніж у похмурий. У скільки разів у похмурий день продають менше квасу, ніж у сонячний?

25.50. Для засолювання 10 кг риби кладуть 3,5 кг солі. Скільки потрібно солі, щоб засолити 24 кг риби?

25.51. Від мотузки відрізали 50 % її довжини, а потім 20 % решти. Скільки відсотків від початкової довжини мотузки залишилося?

25.52. Огірками засадили $\frac{1}{3}$ городу, а помідорами — 30 %. Якою городиною, огірками чи помідорами, засадили більшу площу?

25.53. До 200 г 10-відсоткового розчину солі долили 300 г води. Який відсотковий вміст солі в отриманому розчині?

25.54. Кілограм яблук коштує 16 грн 50 коп. Скільки коштуватиме 1 кг яблук, якщо вони подешевшають на 10 %?

25.55. На скільки відсотків збільшиться площа квадрата, якщо кожну його сторону збільшити у 2 рази?

25.56. На скільки відсотків зменшиться площа квадрата, якщо кожну його сторону зменшити у 2 рази?

25.57. Із придбаних зошитів 20 % були в клітинку, а решта — у лінійку. У скільки разів придбали більше зошитів у лінійку, ніж у клітинку?

25.58. З коробки взяли $50\ \%$ кульок, які там лежали, і ще 5 кульок. Потім узяли $50\ \%$ кульок, що залишилися. Після цього в коробці залишилося 15 кульок. Скільки кульок було в коробці спочатку?

25.59. Із 12 м батисту пошили 8 блузок. Скільки таких блузок можна пошити з 18 м батисту?

25.60. Ціну товару спочатку збільшили на $50\ \%$, а потім зменшили на $50\ \%$. Збільшилася чи зменшилася та на скільки відсотків початкова ціна товару?

25.61. Змішали 72 г 5-відсоткового розчину солі та 48 г 15-відсоткового розчину солі. Знайдіть відсотковий вміст солі в утвореному розчині.

25.62. Зливок міді важить на $20\ \%$ більше, ніж зливок олова. Знайдіть маси цих зливків, якщо маса їхнього сплаву становить 5,5 кг.

25.63. Відомо, що 4 кг огірків і 3 кг помідорів коштували 144 грн. Після того як огірки подорожчали на $50\ \%$, а помідори подешевшали на $20\ \%$, за 2 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 156 грн. Знайдіть початкову вартість 1 кг огірків і 1 кг помідорів.

25.64. Вкладник поклав до банку 12 000 грн на два різних рахунки. По першому з них банк виплачує $5\ \%$ річних, а по другому — $7\ \%$ річних. Через рік вкладник отримав по першому вкладу на 240 грн відсоткових грошей більше, ніж по другому. Скільки гривень він поклав на кожен рахунок?

25.65. Сплав містить $9\ \%$ цинку. Скільки цинку міститься у 270 кг сплаву?

25.66. За перший день турист пройшов 16 км, що становить $40\ \%$ довжини туристичного маршруту. Знайдіть довжину цього маршруту.

25.67. Руда містить $70\ \%$ заліза. Скільки треба взяти руди, щоб отримати 84 т заліза?

25.68. Банк сплачує своїм вкладникам $12\ \%$ річних. Скільки грошей треба покласти в банк, щоб через рік одержати 54 грн прибутку?

25.69. Під час сушіння гриби втрачають $92\ \%$ своєї маси. Скільки свіжих грибів треба взяти, щоб отримати 24 кг сушених?

25.70. У кінозалі 480 місць, з яких під час сеансу було зайнято 408. Скільки відсотків місць було зайнято?

25.71. Вартість деякого товару зросла зі 160 грн до 164 грн. На скільки відсотків зросла вартість товару?

25.72. Вартість деякого товару знизилася з 320 грн до 256 грн. На скільки відсотків знизилася ціна?

25.73. Вкладник поклав у банк 60 000 грн під 10 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через 2 роки?

25.74. Підприємець узяв у банку кредит у розмірі 30 000 грн під деякий відсоток річних. Через два роки він повернув банку 43 200 грн. Під який відсоток річних дає кредити цей банк?

25.75. У 2016 р. в деякому місті мешкало 60 000 жителів, а у 2018 р. — 54 150 жителів. На скільки відсотків щорічно зменшувалося населення цього міста?

25.76. Змішали 50-відсотковий і 20-відсотковий розчини кислоти та отримали 600 г 30-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

25.77. Скільки кілограмів 30-відсоткового та скільки кілограмів 40-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 50 кг 36-відсоткового сплаву?

25.78. Вкладник поклав у банк 30 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 6 %. На кінець другого року на рахунку стало 34 320 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка в перший рік?

25.79. До зливку сплаву міді й цинку, який містив міді на 4 кг більше, ніж цинку, додали 4 кг міді. Унаслідок цього відсотковий вміст міді в сплаві збільшився на 7,5 %. Скільки кілограмів міді містив зливок спочатку?

25.80. Водно-сольовий розчин містив 4 кг солі. Через деякий час 4 кг води випарувалось, унаслідок чого концентрація солі в розчині збільшилася на 5 %. Якою була початкова маса розчину?

25.81. Водно-сольовий розчин містив 3 кг солі, концентрація якої була менша від 20 %. До цього розчину додали 6 кг солі, після чого концентрація солі збільшилася на 15 %. Якою була початкова маса розчину?

25.82. Ціну деякого товару спочатку знизили на 20 %, а потім підвищили на 30 %. Як і на скільки відсотків змінилася початкова ціна внаслідок цих двох переоцінок?

25.83. Певний товар коштував 200 грн. Спочатку його ціну підвищили на кілька відсотків, а потім знизили на стільки ж відсотків, після чого ціна його стала 192 грн. На скільки відсотків кожного разу відбувалася зміна ціни товару?

25.84. До розчину, який містить 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація солі зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

25.85. Зливок сплаву міді із цинком, який містив 10 кг цинку, сплавили з 10 кг міді. Відсотковий вміст міді в одержаному сплаві став на 5 % більше, ніж у початковому. Скільки кілограмів міді містив початковий сплав?

25.86. Змішали 2 л молока жирністю 8 % і 3 л молока жирністю 6 %. Яка жирність утвореної суміші?

Елементи статистики

25.87. Деяка вибірка складається з 30 чисел, серед яких число 6 наведено 10 разів, число 10 — 12 разів і число 15 — 8 разів. Знайдіть середнє значення даної вибірки.

25.88. Знайдіть міри центральної тенденції вибірки:
1) 6, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 23;
2) 1,2; 1,4; 1,5; 1,5; 2,3; 4,4; 4,5;
3) 5, 12, 12, 14, 14, 10, 9, 12.

25.89. У таблиці наведено розподіл за віком відпочиваючих в один із літніх місяців у молодіжному спортивному таборі:

Вік у роках	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Кількість відпочиваючих	12	21	20	32	20	20	19	24	15	7

Знайдіть середній вік відпочиваючих у таборі.

25.90. У 24 легкових автомобілів зробили заміри витрати палива на 100 км і склали таблицю:

8	10	7,5	9	8	8,5
9	8,5	9	10	7,5	9
7,5	9	10	7,5	8,5	8
9	8	7,5	8,5	10	7,5

Знайдіть середній рівень витрати палива на 100 км.
Складіть частотну таблицю та побудуйте відповідну гістограму.

25.91. Середній зріст 10 баскетболістів дорівнює 195 см, а середній зріст семи з них — 192 см. Який середній зріст решти трьох баскетболістів?

25.92. На рисунку 25.1 наведено діаграму, яка відображає розподіл дерев, що ростуть у парку. Які з наведених тверджень є правильними:

1) дубів у парку росте більше, ніж тополь;
2) тополі становлять менше 50 % усіх дерев;
3) кленів і верб росте більше, ніж дубів;
4) дуби становлять понад 25 % усіх дерев;
5) тополі та верби становлять менше від половини всіх дерев;
6) тополі та дуби становлять понад 75 % усіх дерев?

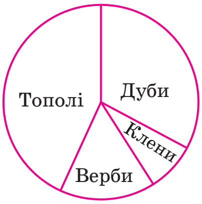


Рис. 25.1

25.93. Серед учнів 11 класу провели опитування щодо кількості часу, який вони витрачають щодня на виконання домашніх завдань. Результати опитування подано у вигляді гістограми, зображеної на рисунку 25.2. Знайдіть моду та середнє значення даної вибірки.

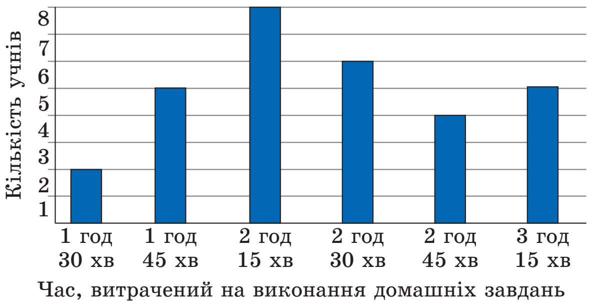


Рис. 25.2

25.94. За результатами тестування з геометрії 24 учнів одинадцятого класу склали таблицю кількості зроблених помилок:

4	1	4	1	4	5	4	2
3	3	5	4	5	4	1	2
3	4	3	4	3	0	4	3

Укажіть моду даної вибірки.

25.95. Протягом перших десяти днів травня температура повітря о 6 год ранку була такою: $16°$; $14°$; $12°$; $16°$; $15°$; $15°$; $13°$; $15°$; $17°$; $14°$. Знайдіть середнє значення, моду та медіану отриманої сукупності даних.

25.96. У таблиці наведено розподіл за стажем роботи працівників дитячого садка:

Стаж роботи в роках	3	6	10	12	15	16	20
Кількість працівників	2	4	4	3	2	4	5

Знайдіть моду та середнє значення вибірки, побудуйте відповідну гістограму.

Раціональні вирази

25.97. Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $5x^2-6xy-7y^2$ і $-3x^2+6xy+8y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

25.98. Розставте дужки так, щоб була тотожністю рівність:

1) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=2;$
2) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=-2;$
3) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=0.$

25.99. Відомо, що при деякому значенні y значення виразу y^2-4y+2 дорівнює 6. Знайдіть при цьому значенні y значення виразу $3y^2-12y+8$.

25.100. Відомо, що числа x і y такі, що $x^2+y^2=1$. Знайдіть значення виразу $x^6+3x^2y^2+y^6$.

25.101. Відомо, що числа x і y такі, що $x^3-y^2=2$. Знайдіть значення виразу $x^9-6x^3y^2-y^6$.

25.102. Спростіть вираз:

1) $\frac{2a+5b}{ab}-\frac{2a-3b}{ab};$
2) $\frac{5y}{y^2-9}-\frac{15}{y^2-9};$
3) $\frac{y^2+8y}{4-y^2}-\frac{4y-4}{4-y^2};$
4) $\frac{5x+6}{5-x}+\frac{3x+16}{x-5};$
5) $\frac{16-7x}{(x-4)^2}-\frac{x-x^2}{(4-x)^2}.$

25.103. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{6n^2+4n+10}{n};$
2) $\frac{n^3-5n^2+32}{n^2};$
3) $\frac{6n+2}{2n-3}.$

25.104. Спростіть вираз:

1) $\frac{2n-5m}{m}-\frac{6n^2+5m^2}{mn};$
2) $\frac{a+3}{3a-3}+\frac{2-a}{5a-5};$
3) $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-1}{x+5};$
4) $\frac{4b}{3b-21}+\frac{3b}{14-2b};$

5) $\frac{3p}{3p+2q}-\frac{9p^2}{9p^2+12pq+4q^2}$;

6) $\frac{4}{c^2-36}-\frac{2}{c^2-6c}$;

7) $6-\frac{3a+6c}{c}$;

8) $\frac{5b+1}{b+2}-4$;

9) $\frac{m^2-n^2}{m+3n}+m-3n$;

10) $x-\frac{9}{x-3}-3$.

25.105. Спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

25.106. Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$;

4) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

5) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$.

25.107. Спростіть вираз:

1) $\frac{5x-5y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x-y}$;

2) $\frac{18b}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{3b}$;

3) $\frac{6}{m^2-9n^2}\cdot(m-3n)$;

4) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1}\cdot\frac{3c+1}{c-3}$;

5) $\frac{x^2-y^2}{x^2}:\frac{6x+6y}{x^5}$;

6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

7) $(p^2-16k^2):\frac{p+4k}{p}$;

8) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

9) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

10) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

11) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

12) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8}:\frac{2n+12}{6m-12}$.

25.108. Відомо, що $x-\frac{1}{x}=9$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

25.109. Відомо, що $3x+\frac{1}{x}=-4$. Знайдіть значення виразу $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

25.110. Дано: $x^2+\frac{16}{x^2}=41$. Знайдіть значення виразу $x+\frac{4}{x}$.

25.111. Дано: $x^2+\frac{1}{x^2}=6$. Знайдіть значення виразу $x-\frac{1}{x}$.

25.112. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

3) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

4) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

5) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

6) $\frac{b+4}{b^2-6b+9}:\frac{b^2-16}{2b-6}-\frac{2}{b-4}$;

7) $\left(\frac{m-1}{m+1}-\frac{m+1}{m-1}\right):\frac{4m}{m^2-1}$;

8) $\frac{2x}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

9) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-2a}\right):\frac{a^2-2}{a^3-4a}$;

10) $\left(a-\frac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-3}\right)$;

11) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(a-1)^2}$.

25.113. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-6x+5}{x-5}$;

2) $\frac{2x+12}{x^2+3x-18}$;

3) $\frac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$;

4) $\frac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$;

5) $\frac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$;

6) $\frac{x^2-16}{32-4x-x^2}$.

25.114. Спростіть вираз:

1) $\frac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\frac{a-2}{3a+2}+\frac{a-1}{1-2a}$;

2) $\frac{b-4}{b^3-b}:\left(\frac{b-1}{2b^2+3b+1}-\frac{1}{b^2-1}\right)$.

25.115. Із даної рівності виразіть змінну a через решту змінних:

1) $\frac{3}{a}=b+\frac{2}{c}$;

2) $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}=c$.

25.116. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{b^2-a^2}$, якщо $a=2\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\frac{3a+6b}{2a-6b}$, якщо $a=4$, $b=-5$.

Раціональні рівняння. Системи алгебраїчних рівнянь

25.117. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x^2-4}=0$;
3) $\frac{x-2}{x-2}=1$;
5) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0$;
2) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$;
4) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0$;
6) $\frac{10-3x}{x+8}+\frac{5x+6}{x+8}=0$.

25.118. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$;
2) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{2x+18}{x^2-9}$;
3) $\frac{4x-10}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}=4$;
4) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2-5x}=\frac{3-x}{x-5}$;
5) $\frac{4x}{x^2+4x+4}-\frac{x-2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$;
6) $\frac{6}{x^2-36}-\frac{3}{x^2-6x}+\frac{x-12}{x^2+6x}=0$.

25.119. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$;
3) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;
5) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;
2) $\frac{x-a}{x+5}=0$;
4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;
6) $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

25.120. При яких значеннях a рівняння $\frac{x+a}{x^2-4}=0$ не має коренів?

25.121. При яких значеннях a рівняння $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ має один корінь?

25.122. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4-9x^2+20=0$;
3) $x^4+3x^2-70=0$;
2) $x^4-2x^2-24=0$;
4) $9x^4-10x^2+1=0$.

25.123. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$;
3) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;
2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;
4) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{3}{2}$.

25.124. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+2x+\frac{3}{x-8}=\frac{3}{x-8}+80$;
2) $x^2+8\left(\sqrt{x}\right)^2-33=0$.

25.125. При якому значенні b має один корінь рівняння:

1) $2x^2+4x-b=0$;
2) $3x^2-bx+12=0$?

25.126. Доведіть, що при будь-якому значенні p має два корені рівняння:

1) $4x^2-px-3=0$;
2) $x^2+px+p-2=0$.

25.127. Доведіть, що при будь-якому значенні m не має коренів рівняння:

1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

25.128. При якому значенні b має один корінь рівняння:

1) $bx^2 + x + b = 0$; 2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

25.129. Число 7 є коренем рівняння $x^2 + px - 42 = 0$. Знайдіть значення p і другий корінь рівняння.

25.130. Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $6x^2 - bx + 4 = 0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

25.131. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не розв'язуючи це рівняння, знайдіть значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

25.132. При якому значенні b корені рівняння $x^2 + bx - 17 = 0$ є протилежними числами? Знайдіть ці корені.

25.133. Один із коренів рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 менший від другого. Знайдіть значення c і корені рівняння.

25.134. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 7x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 5x_2 = 28$. Знайдіть корені рівняння та значення m.

25.135. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 - x_2)^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

25.136. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 2 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

25.137. Складіть квадратне рівняння, корені якого в 3 рази менші від відповідних коренів рівняння $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

25.138. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5a - 3b = 14, \\ 2a + b = 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 4x - 6y = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x - 3y = 15, \\ 5x + 6y = 27; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{7x - 1}{4} - \frac{2x + 3}{3} = \frac{3x - 5y}{2}, \\ \frac{5x - 3y}{3} + \frac{x + 5y}{2} = 3x - y. \end{cases}$

25.139. Пряма $y = kx + b$ проходить через точки $M(3;\ 1)$ і $E\ (1;\ 5)$. Напишіть рівняння цієї прямої.

25.140. Пара чисел $(7;\ 5)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 7y = 21, \\ 5x + by = 20. \end{cases}$ Знайдіть значення a і b.

25.141. При яких значеннях a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 4x + 3y = a \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 5x - ay = 6, \\ 15x + 12y = 18 \end{cases}$ має безліч розв'язків;

3) $\begin{cases} ax + 2y = 12, \\ 7x - 6y = -36 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

25.142. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + y)^2 + (x - 1)^2 = 0$;

2) $(x - 2y + 1)^2 + x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$;

3) $|x + 3y - 5| + (7x - 6y + 4)^2 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + 8x - 18y + 97 = 0$.

25.143. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = -5, \\ xy = -14; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 5y = 3, \\ x^2 - 2xy - y^2 = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y = -1, \\ 4x - y = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ 4x^2 + 6y = 7. \end{cases}$

25.144. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 = 9, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 36; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy = -8, \\ y^2 - xy = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4xy - y = -40, \\ 5x - 4xy = 27; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 29, \\ xy = 2. \end{cases}$

25.145. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 54, \\ xy = -10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^2 + xy + y^2 = 13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{15}{4}, \\ 2x - 5y = 9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{x - 2y} - \dfrac{3(x - 2y)}{2x + y} = 2, \\ x^2 + 3xy - y^2 = 23. \end{cases}$

25.146. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a: \end{cases}$

1) має один розв'язок;
2) має два розв'язки;
3) не має розв'язків?

25.147. При яких значеннях k система рівнянь $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3: \end{cases}$

1) має один розв'язок;
2) має два розв'язки;
3) не має розв'язків?

25.148. Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

Алгебраїчні рівняння та системи рівнянь як математичні моделі реальних ситуацій

25.149. Відстань між двома містами мотоцикліст проїхав за 0,8 год, а велосипедистка — за 4 год. Швидкість велосипедистки на 48 км/год менша від швидкості мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного з учасників руху.

25.150. Зараз батькові 26 років, а його доньці — 2 роки. Через скільки років батько буде в 5 разів старший за доньку?

25.151. У Петра й Василя було порівну грошей. Коли на купівлю зошитів Петро витратив 30 грн, а Василь — 45 грн, то в Петра залишилось у 2 рази більше грошей, ніж у Василя. Скільки грошей було в кожного хлопця спочатку?

25.152. В одній цистерні було 200 л води, а в другій — 640 л. Коли з другої цистерни використали вдвоє більше води, ніж з першої, то в другій залишилось у 3,5 раза більше води, ніж у першій. Скільки літрів води використали з кожної цистерни?

25.153. Відстань між двома містами по річці на 55 км менша, ніж по шосе. Теплохід проходить цю відстань за 6 год, а автобус — за 3 год 30 хв. Знайдіть швидкості автобуса й теплохода, якщо швидкість теплохода на 30 км/год менша від швидкості автобуса.

25.154. Під час розселення туристів у намети виявилося, що коли в кожний намет поселити 6 туристів, то 5 туристам місця не вистачить, а якщо розселяти по 7 туристів, то 6 місць залишаться вільними. Скільки було туристів?

25.155. Готуючись до екзамену, учень планував щодня розв'язувати 10 задач. Оскільки він щодня розв'язував на 4 задачі більше, то вже за 3 дні до екзамену йому залишилось розв'язати 2 задачі. Скільки всього задач планував розв'язати учень?

25.156. У касі було 19 купюр по дві та п'ять гривень, усього на суму 62 грн. Скільки купюр кожного виду було в касі?

25.157. Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить $9\ \%$, а другий — $30\ \%$ цинку. Скільки треба взяти кілограмів кожного сплаву, щоб отримати зливок сплаву масою 300 кг, що містить $23\ \%$ цинку?

25.158. За 11 зошитів і 8 ручок заплатили 98 грн. Скільки коштує один зошит і скільки одна ручка, якщо 5 зошитів дорожчі за 4 ручки на 14 грн?

25.159. Із села до станції вийшов пішохід. Через 30 хв із цього села до станції виїхала велосипедистка, яка наздогнала пішохода через 10 хв після виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 3 год пішохід проходить на 4 км більше, ніж велосипедистка проїжджає за півгодини.

25.160. Галина й Михайло мали разом 240 грн. Коли Михайло витратив $\frac{1}{3}$ своїх грошей на придбання довідника з математики, а Галина — $\frac{1}{6}$ своїх грошей на придбання довідника з української мови, то виявилося, що Михайло витратив на 4 грн менше, ніж Галина. Скільки грошей було в кожного з них спочатку?

25.161. Велосипедист прибув із пункту A до пункту B за запланований час, рухаючись з певною швидкістю. Якби він збільшив швидкість на 3 км/год, то прибув би до пункту B на 1 год раніше, а якби він проїжджав за годину на 2 км менше, то прибув би на 1 год пізніше. Знайдіть швидкість велосипедиста.

25.162. Маса суміші, яка складається з двох речовин, становила 800 г. Після того як з неї виділили $\frac{5}{8}$ першої речовини та $60\ \%$ другої, у ній першої речовини залишилося на 72 г менше, ніж другої. Скільки грамів кожної речовини було в суміші спочатку?

25.163. Швидкість однієї велосипедистки на 3 км/год більша за швидкість другої, тому 120 км вона проїжджає на 2 год швидше, ніж друга велосипедистка. Знайдіть швидкість кожної велосипедистки.

25.164. Із пункту A в пункт B автомобіль їхав по шосейній дорозі завдовжки 210 км, а з пункту B у пункт A повертався по ґрунтовій дорозі завдовжки 200 км, витративши на зворотний шлях на 1 год більше, ніж на шлях із пункту A до пункту B. Знайдіть швидкість, з якою автомобіль їхав по ґрунтовій дорозі, якщо по шосе його швидкість на 20 км/год більша, ніж по ґрунтовій дорозі.

25.165. Поїзд мав пройти 1200 км. Після того як він подолав $\frac{2}{3}$ шляху, його було затримано на 3 год. Щоб прибути в пункт призначення вчасно, швидкість руху було збільшено на 30 км/год. Знайдіть початкову швидкість руху поїзда.

25.166. Теплохід пройшов 170 км за течією річки на 2 год швидше, ніж 210 км проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість теплохода дорівнює 32 км/год.

25.167. Для перевезення 60 т вантажу планували використати деяку кількість машин. Оскільки на кожну машину вантажили на 0,5 т менше, ніж планували, то додатково довелося замовити ще 4 машини. Скільки машин планували використати спочатку?

25.168. Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий 100 м^3. Скільки води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?

25.169. Катер пройшов 16 км за течією річки та 30 км проти течії, витративши на весь шлях 1 год 30 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії становить 1 км/год.

25.170. За течією річки від пристані відійшов пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.

25.171. Турист проплив на байдарці 4 км по озеру та 5 км за течією річки за той самий час, за який проплив би 6 км проти течії. З якою швидкістю турист плив по озеру, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год?

25.172. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них, працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому?

25.173. Одному маляру треба на 5 год більше, ніж другому, щоб пофарбувати фасад будинку. Коли перший маляр пропрацював 3 год, а потім його змінив другий, який пропрацював 2 год, то виявилося, що пофарбовано 40 % фасаду. За скільки годин може пофарбувати фасад кожний маляр, працюючи самостійно?

25.174. До басейну підведено дві труби. Через одну трубу басейн наповнюють водою, а через другу спорожнюють, причому для спорожнення басейну треба на 1 год більше, ніж на його наповнення. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?

25.175. Із двох міст, відстань між якими дорівнює 300 км, виїхали одночасно назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі, які зустрілися через 2,5 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо вантажівка витратила на весь шлях на 3 год 45 хв більше, ніж легковий автомобіль.

25.176. Із міста в село, відстань між якими дорівнює 180 км, вирушили одночасно вантажівка та велосипедист. Вантажівка приїхала в село на 8 год раніше, ніж велосипедист. Знайдіть швидкість руху велосипедиста, якщо за 2 год вантажівка проїжджає на 60 км більше, ніж велосипедист за такий самий час.

25.177. Із двох сіл, відстань між якими дорівнює 30 км, вирушили назустріч один одному два пішоходи, які зустрілися посередині дороги, причому один з них вирушив на 1 год 15 хв пізніше за другого. Якби вони вирушили одночасно, то зустрілися б через 3 год. Знайдіть швидкість руху кожного пішохода.

25.178. Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн буде наповнено за 8 год. Якщо спочатку перша труба наповнить половину басейну, а потім інша труба — другу його половину, то весь басейн буде наповнено за 18 год. За скільки годин може наповнити цей басейн кожна труба?

25.179. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 12 днів. Вони пропрацювали разом 10 днів, і один з них захворів. Тоді другий робітник закінчив виконувати замовлення через 5 днів, працюючи один. За скільки днів кожен робітник може виконати дане замовлення, працюючи самостійно?

25.180. Із села A в село B, відстань між якими дорівнює 20 км, вирушив пішохід. Через 2 год із села A в тому самому напрямі вирушила велосипедистка зі швидкістю 15 км/год, яка наздогнала пішохода, передала йому пакет і поїхала в село A з тією самою швидкістю. Пішохід прийшов у село B, а велосипедистка повернулася в село A одночасно. Знайдіть швидкість руху пішохода.

25.181. Із двох сіл, відстань між якими дорівнює 9 км, вирушили одночасно назустріч один одному два пішоходи. Один з них прийшов у друге село через 1 год 21 хв після зустрічі, а інший у перше село — через 36 хв після зустрічі. Знайдіть, з якою швидкістю рухався кожен пішохід і через скільки часу після початку руху відбулася їхня зустріч.

Числові нерівності та їхні властивості. Лінійні та квадратичні нерівності та їхні системи. Метод інтервалів

25.182. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

1) $(a-8)(a+7) > (a+10)(a-11)$;
2) $(a-6)^2 - 2 < (a-5)(a-7)$;
3) $a(a-8) > 2(a-13)$.

25.183. Доведіть, що:

1) $a^2 - 6a + 10 > 0$ при всіх дійсних значеннях a;
2) $12y - 4y^2 - 11 < 0$ при всіх дійсних значеннях y;
3) $x^2 - 10xy + 26y^2 + 12y + 40 > 0$ при всіх дійсних значеннях x і y;
4) $x^2 + 4y^2 + 6x + 4y + 10 \geqslant 0$ при всіх дійсних значеннях x і y;
5) $ab(a+b) \leqslant a^3 + b^3$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

25.184. Дано: $x < 0$ і $y > 0$. Порівняйте:

1) $x - y$ і 0;
2) $x - y$ і y;
3) $2y - 5x$ і x;
4) $\frac{1}{4x-3y}$ і y.

25.185. Дано: $-5 < x < 1$. Оцініть значення виразу:

1) $3x - 2$;
2) $9 - 5x$.

25.186. Дано: $2 < x < 7$. Оцініть значення виразу $\frac{3}{x}$.

25.187. Дано: $-2 < x < 7$. Оцініть значення виразу $\frac{3}{x}$.

25.188. Дано: $3 < x < 8$ і $2 < y < 7$. Оцініть значення виразу:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) xy; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $2x + 5y$; 6) $3x - 4y$.

25.189. Яка множина розв'язків нерівності:

1) $(x-2)^2 \geqslant 0$; 3) $(x-2)^2 > 0$; 5) $0x < -3$; 7) $0x < 3$;
2) $(x-2)^2 \leqslant 0$; 4) $(x-2)^2 < 0$; 6) $0x \geqslant -3$; 8) $0x \geqslant 3$?

25.190. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x-2}{x-2} > 0$; 3) $\dfrac{x-2}{x-2} > \dfrac{1}{4}$; 5) $\left(\dfrac{x-3}{x-4}\right)^2 \geqslant 0$;
2) $\dfrac{x-2}{x-2} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{x-2}{x-2} \leqslant 1$; 6) $\left(\dfrac{x-3}{x-4}\right)^2 > 0$.

25.191. Розв'яжіть нерівність:

1) $9x+5 \leqslant 31-4x$; 3) $\dfrac{5x-2}{4} - \dfrac{3-x}{5} > \dfrac{1-x}{10}$;
2) $\dfrac{x-5}{4} - \dfrac{x+1}{3} > 2$; 4) $(x+4)(x-2)-(x+5)(x+3) \leqslant -8x$.

25.192. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $2x+9 > 4x-7$; 2) $14x^2-(2x-3)(7x+4) \leqslant 14$.

25.193. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $x-4 < 3x+9$; 2) $18x^2-(3x-2)(6x+5) \leqslant 20$.

25.194. Скільки цілих від'ємних розв'язків має нерівність

$$x - \frac{x+7}{4} - \frac{11x+30}{12} < \frac{x-5}{3}?$$

25.195. Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}?$$

25.196. При яких значеннях a рівняння:

1) $x^2+3x-a=0$ не має коренів;
2) $2x^2-8x+5a=0$ має хоча б один дійсний корінь?

25.197. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 0{,}3(x-6) \leqslant 0{,}5x+1, \\ 4x+7 > 2(x+6{,}5); \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1 - \dfrac{3x-88}{7} > 5x, \\ x(x-4)-(x+1)(x-5) < 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{6} - 1 > \dfrac{2x+1}{3}, \\ \dfrac{3x+1}{4} - 2x > 2{,}5 - \dfrac{3x-2}{8}; \end{cases}$

25.198. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 6x-9 < 3x+15, \\ 7-2x > 13-5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+20 \geqslant 3x+5, \\ 2x+1 \geqslant 4x-5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x-1 > 2x+4, \\ 10x-5 \leqslant 3x+13. \end{cases}$

25.199. Скільки цілих розв'язків має нерівність:
1) $-3 \leqslant 6x - 4 \leqslant 2$; 2) $-1 \leqslant 3 - 10x \leqslant 5$?

25.200. При яких значеннях a має хоча б один розв'язок система нерівностей:
1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

25.201. Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей:
1) $\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

25.202. При яких значеннях a найменшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ є число 9?

25.203. При яких значеннях b найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ є число -6?

25.204. Розв'яжіть нерівність:
1) $x^2 + 6x - 7 < 0$; 5) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
2) $-x^2 - 6x - 5 > 0$; 6) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
3) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$; 7) $2x^2 - x + 3 > 0$;
4) $4x^2 - 12x \leqslant 0$; 8) $(2x+1)^2 - (x+1)(x-7) \leqslant 5$.

25.205. Скільки цілих розв'язків має нерівність:
1) $20 - 8x - x^2 > 0$; 2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

25.206. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:
1) $42 - x^2 - x > 0$; 2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

25.207. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:
1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$; 2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

25.208. При яких значеннях a не має коренів рівняння:
1) $x^2 - ax + 4 = 0$; 3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?
2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;

25.209. При яких значеннях b має два різних дійсних корені рівняння:
1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b - 6)\, x + b - 2 = 0$?

25.210. Розв'яжіть систему нерівностей:
1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

25.211. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$; 2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$.

25.212. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x-3{,}2}{x-4{,}8} \geqslant 0$;
3) $\dfrac{(x+13)(x+2)}{x-13} \geqslant 0$;
2) $\dfrac{6-x}{x-5} \geqslant 0$;
4) $\dfrac{x-3{,}5}{(x+6)(x-12)} \leqslant 0$.

25.213. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x^2+7x)(x^2-25) \leqslant 0$;
3) $\dfrac{x^2+10x+9}{x^2-4x+3} < 0$;
2) $(x^2+6x+5)(x^2-3x) > 0$;
4) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-64} \geqslant 0$.

25.214. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+4)^2(x^2+8x+12) < 0$;
5) $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5 \leqslant 0$;
2) $(x+4)^2(x^2+8x+12) \geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x-10} > 0$;
3) $(x-5)^2(x^2-2x-3) \geqslant 0$;
7) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x-10} \leqslant 0$.
4) $(x-1)^2(x-2)^4(x-3)^3 > 0$;

25.215. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^2+3x}{x-5} \geqslant \dfrac{28}{x-5}$;
3) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2$;
5) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{3}{x}$;
2) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3}$;
4) $\dfrac{x-3}{x+3} \leqslant \dfrac{2x-5}{4x-3}$;
6) $\dfrac{12}{x^2-4} - \dfrac{7}{x^2-9} \leqslant 0$.

Степені та корені

25.216. Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:

1) 7^{-2}, 7^2, 7^{-1}, 7^0;
2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$.

25.217. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2}+a^{-3}$;
3) $(c^{-1}-d^{-1})(c-d)^{-2}$;
2) $mn^{-4}+m^{-4}n$;
4) $(x^{-2}+y^{-2})(x^2+y^2)^{-1}$.

25.218. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\dfrac{3}{16}\right)^8$;
3) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;
5) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.
2) $27^{-2} : 9^{-4}$;
4) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

25.219. Знайдіть значення виразу:

1) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;

2) $\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

3) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;

4) $0,2\sqrt[3]{1000}-\frac{3}{5}\sqrt[4]{625}$;

5) $4\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8-0,8\sqrt[4]{10\,000}+\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{270}\right)^3$.

25.220. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{a-3}$; 2) $\sqrt{a^2}$; 3) $\sqrt[8]{x+6}$; 4) $\sqrt[4]{y(y-1)}$; 5) $\sqrt[6]{-x^2}$?

25.221. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=7$; 2) $x^2=0$; 3) $x^2=-16$; 4) $3x^2-15=0$; 5) $x^5=9$; 6) $x^7=-2$; 7) $x^4=16$; 8) $x^6=5$.

25.222. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,4}$;

2) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

3) $\sqrt[6]{16}\cdot\sqrt[6]{4}$;

4) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{54}}$;

5) $\sqrt[5]{\sqrt{13}-16}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{13}+16}$.

25.223. При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$;

2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$;

3) $\sqrt[3]{a^3}=a$;

4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$;

5) $\sqrt[4]{(a-5)^3}=\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;

6) $\sqrt[3]{(a-5)^4}=\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$?

25.224. При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{b}$;

2) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;

3) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;

4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

5) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

25.225. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[6]{m}}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$; 3) $\sqrt[7]{\sqrt[5]{x}}$; 4) $\sqrt[21]{b^{14}}$; 5) $\sqrt[18]{a^9b^{27}}$.

25.226. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-42)^2}$, якщо $a\geqslant 42$;

2) $\sqrt{(y+4)^2}$, якщо $y\leqslant -4$;

3) $(32-a)\sqrt{\frac{361}{(a-32)^2}}$, якщо $a>32$;

4) $\sqrt[8]{(b-10)^8}$, якщо $b\geqslant 10$;

5) $\sqrt[12]{(4-y)^{12}}$, якщо $y\leqslant 4$;

6) $(21-b)\sqrt[6]{\frac{729}{(b-21)^6}}$, якщо $b>21$.

25.227. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{8}\right)^2}$;

4) $\sqrt{\left(8-\sqrt{11}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$;

5) $\sqrt{\left(\sqrt{23}-7\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{23}-3\right)^2}$;

6) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-6\right)^4}$;

7) $\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{3}\right)^3}$;

8) $\sqrt[8]{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)^8}$;

9) $\sqrt[6]{\left(7-5\sqrt{2}\right)^6}+\sqrt[5]{\left(3-5\sqrt{2}\right)^5}$.

25.228. При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\sqrt[3]{a^3}\geqslant\sqrt[4]{a^4}$; 2) $\sqrt[5]{a^5}\leqslant\sqrt[6]{a^6}$?

25.229. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^4}+a$, якщо $a>0$;

2) $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[3]{a^3}$, якщо $a<0$;

3) $\sqrt[5]{a^5}+\sqrt[4]{a^4}$;

4) $\sqrt{a^2}-\sqrt[7]{a^7}$.

25.230. Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{x^2}-x+2$, якщо $x\geqslant 0$;

2) $y=2\sqrt{x^2}-2x+1$, якщо $x\leqslant 0$;

3) $y=\sqrt{x^2}+1$;

4) $y=\sqrt[6]{x^6}+x$, якщо $x\leqslant 0$;

5) $y=\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^4$;

6) $y=\sqrt[4]{(x+1)^4}$.

25.231. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{12a^8}$;

2) $\sqrt[4]{x^{15}}$;

3) $\sqrt[3]{-m^{16}}$;

4) $\sqrt[4]{x^{26}y^9}$;

5) $\sqrt[4]{-81a^{13}}$;

6) $\sqrt[6]{m^7n^7}$, якщо $m\leqslant 0$, $n\leqslant 0$;

7) $\sqrt[6]{a^8b^7}$, якщо $a\leqslant 0$;

8) $\sqrt[10]{-p^{21}q^{34}}$, якщо $q\leqslant 0$.

25.232. Спростіть вираз, якщо змінні набувають невід'ємних значень:

1) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^2}}$; 2) $\sqrt[7]{c\sqrt[5]{c^2}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$.

25.233. Внесіть множник під знак кореня:

1) $(b-2)\sqrt{\dfrac{3}{b^2-4b+4}}$, якщо $b>2$;

2) $(a+2)\sqrt{\dfrac{1}{a+2}}$;

3) $(a-3)\sqrt{\dfrac{1}{9-3a}}$.

25.234. Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{27b}-5\sqrt{48b}+\frac{1}{3}\sqrt{192b}$;
3) $(12-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$;
2) $(\sqrt{99}-\sqrt{44})\sqrt{11}$;
4) $(4\sqrt{5}-5\sqrt{2})^2$.

25.235. Скоротіть дріб:

1) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;
3) $\frac{17-\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$;
5) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$;
7) $\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[6]{x}-2}$;
2) $\frac{a+3\sqrt{a}}{a-9}$;
4) $\frac{\sqrt{21}-3}{7-\sqrt{21}}$;
6) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;
8) $\frac{\sqrt[4]{x^3}+x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

25.236. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{12}{12-5\sqrt{6}}-\frac{12}{12+5\sqrt{6}}$;
4) $\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\cdot\sqrt[6]{31+8\sqrt{15}}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1}-\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$;
5) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}$.
3) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$;

25.237. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;
3) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;
2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;
4) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

25.238. Відомо, що $\sqrt{8+a}+\sqrt{3-a}=4$. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(8+a)(3-a)}$.

25.239. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}$;
3) $\frac{68}{9-\sqrt{13}}+\frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{85}{10+\sqrt{15}}$.
2) $\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{11}$;

25.240. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}+\sqrt{a^2}$, якщо $a=-2$;
3) a^2-6a+9, якщо $a=3-\sqrt{6}$.
2) $\sqrt[3]{(-1-\sqrt{3})^3}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$;

25.241. Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt[4]{63}$:
1) $[1; 2]$;
2) $[2; 3]$;
3) $[3; 4]$;
4) $[4; 5]$?

25.242. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{a^2}$, якщо $0\leqslant a\leqslant 1$;
2) $\sqrt{(a+2)^2}-\sqrt{a^2}$, якщо $a<-1$.

25.243. Яка з наведених нерівностей виконується при всіх дійсних значеннях змінної:

1) $\left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$; 2) $\sqrt{x} \geqslant 0$; 3) $\sqrt{x^2} \geqslant 0$?

25.244. Відомо, що $\sqrt{2-a} - \sqrt{10-a} = 2$. Знайдіть значення виразу $\sqrt{24-a} + \sqrt{10-a}$.

25.245. Обчисліть значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $32^{-\frac{2}{5}}$; 3) $0{,}0004^{-1{,}5}$; 4) $81^{0{,}75}$; 5) $\left(12\frac{1}{4}\right)^{1{,}5}$.

25.246. Знайдіть значення виразу:

1) $3^{3{,}6} \cdot 3^{-1{,}2} \cdot 3^{1{,}6}$;

2) $(5^{-0{,}8})^7 : 5^{-2{,}6}$;

3) $\left(6^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}} \cdot 36^{1{,}1}$;

4) $81^{-1{,}25} \cdot 9^{1{,}5} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$;

5) $\left(\dfrac{7^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}}{14^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-1{,}5}$;

6) $\left(\dfrac{16^{\frac{4}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{9}}}{4^{-\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{5^{\frac{2}{7}} \cdot 256^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{2}{5}} \cdot 625^{\frac{4}{7}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

25.247. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{6y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}} - y^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{m - m^{0{,}5}n^{0{,}5} + n}{m^{1{,}5} + n^{1{,}5}}$; 3) $\dfrac{3a^{\frac{1}{3}} + a}{3a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{5}{6}}}$; 4) $\dfrac{m^{\frac{5}{8}} + 5m^{\frac{1}{4}}}{m - 25m^{\frac{1}{4}}}$.

25.248. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} + 4a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}} + 4b^{\frac{1}{4}}}{a - a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}}} \cdot \dfrac{ab^{\frac{7}{8}} - a^{\frac{7}{8}}b}{a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}} + 2b^{\frac{1}{4}}}$;

2) $\dfrac{2y - 5x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x - 4y} - \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{6}} - 1}{2x^{\frac{1}{6}} - 6} - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}} - \dfrac{3\left(x^{\frac{1}{6}} - 1\right)}{2x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}}}$;

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{6}} + 4}{a^{\frac{1}{6}} - 4} - \dfrac{a^{\frac{1}{6}} - 4}{a^{\frac{1}{6}} + 4}\right) : \dfrac{32a^{\frac{1}{2}}}{16 - a^{\frac{1}{3}}}$.

Ірраціональні рівняння

25.249. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = 3$.

25.250. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-4} + 2\sqrt{4-x} = x^2 - 5x + 4$.

25.251. Скільки коренів має рівняння:

1) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} = 0$;

2) $(x-5)\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{(x+2)(x+1)} = 0$;

3) $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[4]{6-x} = 0$?

25.252. Знайдіть цілі корені рівняння $\sqrt{2-x}+\sqrt[6]{x+3}=2$.

25.253. Знайдіть добуток коренів рівняння

$$(x^2-7x+10)\cdot|3-x|\cdot\sqrt{4-x}=0.$$

25.254. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x-1}=\sqrt{4x^2-6x+1}$;
2) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}=2$;
3) $\sqrt{x+7}=x-5$;
4) $2+\sqrt{4+2x-x^2}=x$;
5) $\sqrt{x^2+x-12}=\sqrt{2x}$;
6) $\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}=2$;
7) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x+4}$;
8) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$;
9) $2\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}=1$;
10) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$.

25.255. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0$;
2) $3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-2=0$;
3) $\sqrt{x+2}=2\sqrt[4]{x+2}+3$;
4) $\sqrt[3]{9-6x+x^2}-\sqrt[3]{3-x}-2=0$;
5) $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39$;
6) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}=12$;
7) $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}=1$;
8) $x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}=4$;
9) $\sqrt{3x^2-6x+7}=7+2x-x^2$;
10) $6\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-2=0$;
11) $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$;
12) $2x^2+3x+3=5\sqrt{2x^2+3x+9}$.

Функції та їхні властивості

25.256. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-8}{10}$;
2) $f(x)=\sqrt{x-3}$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$;
4) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+4}$;
5) $f(x)=\sqrt[6]{x+5}+\sqrt[8]{3-x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$;
7) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{x-2}{x^2-1}$;
8) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{3x-12x^2}}$;
9) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{x-3}{x+4}}$;
10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-5}$;
11) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+11}{x^2-5x+4}}$.

25.257. Область визначення якої з наведених функцій дорівнює її області значень:

1) $y=\sqrt{|x|}$; 2) $y=-\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt{-x}$; 4) $y=-\sqrt{-x}$?

25.258. Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt{x}+1$; 5) $y=4+|x|$; 9) $y=-x^2+8x-16$;

2) $y=3-x^2$; 6) $y=\sqrt{-x^2}$; 10) $y=x^2+6x-14$;

3) $y=\sqrt{25+x^2}$; 7) $y=\sqrt{1-x^2}$; 11) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x$;

4) $y=\sqrt{x^2+16}-7$; 8) $y=(x-2)^2+5$; 12) $y=\frac{1}{1+x^2}$.

25.259. Графік якої з наведених функцій проходить через точку $A(2;\ -1)$:

1) $y=\sqrt{1-x}$; 2) $y=\frac{2x-3}{x-1}$; 3) $y=\sqrt[3]{7-4x}$; 4) $y=\sqrt[4]{9x-2}$?

25.260. Побудуйте графік даної функції та, користуючись ним, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та проміжки спадання:

1) $y=x^2+1$; 5) $y=\frac{4}{x}+1$; 9) $y=\sqrt{x-4}$; 13) $y=x^{-2}+2$;

2) $y=(x+4)^2$; 6) $y=\frac{4}{x-1}+2$; 10) $y=-\sqrt{x}$; 14) $y=x^{-3}-1$;

3) $y=x^2-6x+5$; 7) $y=\frac{2x+14}{x+3}$; 11) $y=\sqrt{-2x}$; 15) $y=\sqrt[3]{x}-2$;

4) $y=8-2x-x^2$; 8) $y=\sqrt{x}-4$; 12) $y=(x+2)^4$; 16) $y=\sqrt[4]{x+1}$.

25.261. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, знайдіть область значень функції, проміжок зростання та проміжок спадання функції:

1) $f(x)=x^2-2x-3$; 2) $f(x)=6x-2x^2$.

25.262. Побудуйте графік даної функції та, користуючись ним, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та проміжки спадання:

1) $f(x)=\begin{cases}-3x-5, & \text{якщо } x\leqslant 1,\\ x^2-4x-5, & \text{якщо } 1<x<4,\\ -5, & \text{якщо } x\geqslant 4;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{якщо } x\leqslant -1,\\ 2-x, & \text{якщо } -1<x<1,\\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$

25.263. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+2}$; 2) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$; 3) $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

25.264. Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{4-x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-4}$;

2) $f(x)=\dfrac{4x-20}{x^2-5x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x-3}$.

25.265. Відомо, що $f(-4)=-20$. Знайдіть $f(4)$, якщо функція f є:
1) парною; 2) непарною.

25.266. Чи є парною або непарною функція:

1) $f(x)=9x^4$; 6) $f(x)=(x+4)(x-1)-3x$;

2) $f(x)=7x^3-5x^5$; 7) $f(x)=(x-5)^2-(x+5)^2$;

3) $f(x)=\sqrt{6-x^2}$; 8) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{2x-8}$;

4) $f(x)=x^2+x-3$; 9) $f(x)=x|x|$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+2x}$; 10) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x^3-x}$?

25.267. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y=x-3$ і $y=x^2-4x+3$; 4) $y=\dfrac{6}{x}$ і $y=x+5$;

2) $y=2x^2-3x$ і $y=-x^2+x+7$; 5) $y=\sqrt{10-3x}$ і $y=-x$;

3) $y=x^6$ і $y=2x^4$; 6) $y=\sqrt{x+2}$ і $y=\sqrt{2x-3}+1$.

25.268. Знайдіть значення k, якщо відомо, що графік функції $y=kx-10$ проходить через точку $M(4;\ 2)$.

25.269. Графік функції $y=kx+b$ перетинає осі координат у точках $A(0;\ -3)$ і $B(1;\ 0)$. Знайдіть значення коефіцієнтів k і b.

25.270. Усі точки графіка функції $y=kx+b$ мають однакову ординату, яка дорівнює -4. Знайдіть значення коефіцієнтів k і b.

25.271. Графік функції $y=kx+b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(2;\ -1)$. Знайдіть значення коефіцієнтів k і b.

25.272. Графік квадратичної функції — парабола з вершиною в точці $A(0;\ -5)$, яка проходить через точку $B(4;\ 27)$. Задайте цю функцію формулою.

25.273. При яких значеннях p і q вершина параболи $y=x^2+px+q$ знаходиться в точці $(4;\ 7)$?

25.274. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ має вершину в точці $M(2; 1)$ і проходить через точку K $(-1; 5)$. Знайдіть значення коефіцієнтів a, b і c.

25.275. Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 12x + 1$ на проміжку:
1) $[-4; 6]$; 2) $[-7; 1]$; 3) $[4; 10]$.

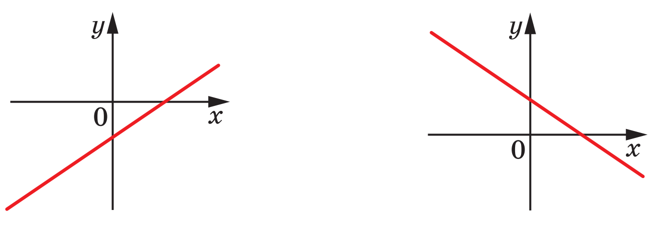
25.276. При якому значенні c найбільше значення функції $y = -2x^2 + 8x + c$ дорівнює -4?

25.277. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^6$ на проміжку: 1) $[0; 3]$; 2) $[-3; -2]$; 3) $[-3; 3]$.

25.278. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-5}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$.

25.279. Дано функції $f(x) = x - 3$, $g(x) = \left(\sqrt{x-3}\right)^2$ і $h(x) = \sqrt{(x-3)^2}$. Графіки яких із цих функцій збігаються?

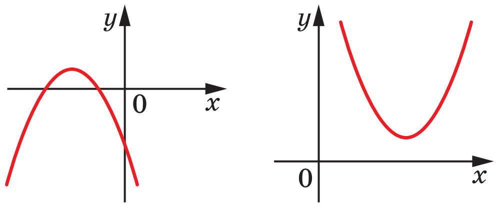
25.280. На рисунку 25.3 зображено графік лінійної функції $y = ax + b$. Укажіть правильне твердження:
1) $k > 0$, $b > 0$; 3) $k < 0$, $b > 0$;
2) $k > 0$, $b < 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$.



а б

Рис. 25.3

25.281. На рисунку 25.4 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження:
1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; 5) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$;
2) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$; 6) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;
3) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$; 7) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$;
4) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; 8) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.



а *б*

Рис. 25.4

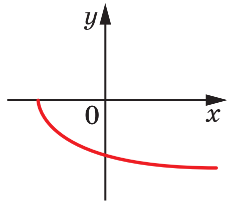


Рис. 25.5

25.282. На рисунку 25.5 зображено графік функції $y = a\sqrt{x+b}$. Укажіть правильне твердження:

1) $a > 0,\ b > 0$;
2) $a > 0,\ b < 0$;
3) $a < 0,\ b > 0$;
4) $a < 0,\ b < 0$.

25.283. Вершина параболи $y = (x+a)^2 + b$ лежить у третій координатній чверті. Укажіть правильне твердження:

1) $a > 0,\ b > 0$;
2) $a > 0,\ b < 0$;
3) $a < 0,\ b > 0$;
4) $a < 0,\ b < 0$.

25.284. Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ визначені на множині дійсних чисел і є непарними. Яка з наведених функцій є парною:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f^2(x) \cdot g(x)$; 3) $y = f(x) \cdot g(x)$?

Прогресії

25.285. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (x_n), якщо:
1) $x_1 = 14,\ x_8 = -7$; 2) $x_5 = -4,\ x_{14} = 50$.

25.286. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (y_n), якщо:
1) $y_{12} = -23,\ d = -2$; 2) $y_6 = 16,\ y_{18} = 52$.

25.287. Знайдіть номер члена арифметичної прогресії (z_n), який дорівнює 3,8, якщо $z_1 = 10{,}4$ і $d = -0{,}6$.

25.288. Чи є число 25 членом арифметичної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 8$ і $d = 3{,}5$? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

25.289. Дано арифметичну прогресію 5,3; 4,9; 4,5; ... . Починаючи з якого номера її члени будуть від'ємними?

25.290. Знайдіть кількість від'ємних членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -24,\ d = 1{,}2$.

25.291. Між числами -6 і 6 вставте сім таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

25.292. При якому значенні m значення виразів $3m$, m^2+2 і $m+4$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

25.293. Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = 0{,}4n + 5$. Знайдіть суму тридцяти шести перших членів прогресії.

25.294. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 6$, $a_{13} = 42$; 2) $a_6 = 45$, $a_{14} = -43$.

25.295. Знайдіть суму сімнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{17} = 84$, $d = 6{,}5$.

25.296. При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 4n^2 - 5n$. Знайдіть перший член і різницю цієї прогресії.

25.297. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 11 і не більші за 374.

25.298. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 9 і не більші за 192.

25.299. Сума четвертого та сімнадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 12. Знайдіть суму перших двадцяти членів цієї прогресії.

25.300. Знайдіть суму перших двадцяти п'яти членів арифметичної прогресії, якщо її тринадцятий член дорівнює 18.

25.301. Обчисліть суму перших двадцяти парних натуральних чисел.

25.302. Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які кратні числу 7.

25.303. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 4000$, $b_4 = 256$; 2) $b_2 = 6$, $b_4 = 18$.

25.304. Знайдіть перший член геометричної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_5 = q = \frac{2}{3}$; 2) $c_4 = 8$, $c_7 = -64$.

25.305. Число 192 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$. Знайдіть номер цього члена.

25.306. Які три числа треба вставити між числами 16 і 81, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію?

25.307. При якому значенні x значення виразів $2x+1$; $x+2$ і $8-x$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

25.308. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_4 = 125,\ q = 2{,}5;$
2) $b_1 = \sqrt{5},\ b_5 = 25\sqrt{5},\ q < 0;$
3) $b_4 = 10,\ b_7 = 10\,000.$

25.309. Геометричну прогресію (b_n) задано формулою n-го члена $b_n = 7 \cdot 2^{2n-1}$. Знайдіть суму чотирьох перших її членів.

25.310. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 75, а знаменник дорівнює $\frac{4}{5}$.

25.311. Знайдіть п'ятий член нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює −24, а сума дорівнює −16.

25.312. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = 36,\ b_4 = 16$.

25.313. Добуток трьох чисел, які утворюють геометричну прогресію, дорівнює 125. Знайдіть другий член цієї прогресії.

Тригонометричні функції

25.314. При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\cos x = a + 2;$
2) $\sin x = 4a - a^2 - 5?$

25.315. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1 - 5\cos\alpha;$
2) $4 + \sin^2\alpha;$
3) $\dfrac{\sin\alpha(3 - \cos\alpha)}{\sin\alpha}.$

25.316. Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\ 100°$ і $\mathrm{tg}(-100°);$
2) $\cos 70°$ і $\sin 340°;$
3) $\mathrm{ctg}\dfrac{5\pi}{4}$ і $\cos\dfrac{5\pi}{6};$
4) $\cos 6$ і $\sin 4.$

25.317. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2;$
2) $y = \sin x + \sin|x|;$
3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x};$
4) $y = \sqrt{-\sin^2 x};$
5) $y = \sqrt{\cos x - 1};$
6) $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|};$
7) $y = \mathrm{tg}\, x\ \mathrm{ctg}\, x;$
8) $y = \mathrm{tg}\, x \cos x.$

25.318. Обчисліть значення тригонометричних функцій кута α, якщо:

1) $\sin\alpha = -\dfrac{2}{7}$ і $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2};$
2) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\sqrt{2}$ і $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$

25.319. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-1}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)$;

4) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2$;

5) $\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

6) $\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}-\dfrac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}$;

7) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;

8) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

25.320. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha$;

2) $2\sin^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

25.321. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}+\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi<\alpha<4\pi$;

2) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, якщо $90^\circ<\alpha<180^\circ$;

3) $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, якщо $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

25.322. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Знайдіть:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$;

3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

4) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$;

5) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$;

6) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

25.323. Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)}=\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$;

3) $\sin 6\alpha\operatorname{ctg}3\alpha-\cos 6\alpha=1$;

4) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1$.

25.324. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $3\sin\alpha+4\cos\alpha$.

25.325. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi+\alpha)$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-\beta)\cos(\pi+\beta)\operatorname{tg}(\pi-\beta)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}$;

4) $\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)\right)^2+\dfrac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}$.

25.326. Спростіть вираз:

1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 3) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}$; 5) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

2) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$; 4) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$;

25.327. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$; 2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg} 22^\circ30'}{1-\operatorname{tg}^2 22^\circ30'}$.

25.328. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{6}=0{,}5$. Знайдіть $\operatorname{tg}\left(45^\circ-\dfrac{x}{3}\right)$.

25.329. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg} 2\alpha(1-\cos 4\alpha)=\sin 4\alpha$; 2) $\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$.

25.330. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{2+2\cos 2\alpha}$, якщо $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

25.331. Доведіть, що $\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\dfrac{1}{8}$.

25.332. Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha+\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha$;

4) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$.

25.333. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}\right)\cdot\frac{\cos 10\alpha-\cos 6\alpha}{\sin 3\alpha}$;

2) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$;

3) $\frac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(\pi-6\alpha)}{\cos(\pi-2\alpha)+1-2\cos^2(\pi+2\alpha)}$;

4) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}+\alpha\right)$.

25.334. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha+2\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)=0,5$;

2) $\sin 5\alpha\sin\alpha+\cos 7\alpha\cos\alpha=\cos 6\alpha\cos 2\alpha$;

3) $\sin^2 2\alpha-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}$;

4) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=1$.

25.335. Обчисліть:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\operatorname{arctg}1\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

25.336. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin(x-1)$; 2) $y=\arccos(x^2-8)$; 3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{2-x}$.

25.337. Знайдіть область значень функції:

1) $y=3\arcsin x+\frac{\pi}{4}$; 2) $y=4-2\operatorname{arctg}2x$.

Тригонометричні рівняння і нерівності

25.338. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

25.339. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg}3x=1$ належить проміжку $[0;\pi]$?

25.340. Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, які задовольняють нерівність $\frac{2\pi}{5}<x<\pi$.

25.341. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$;
2) $6\sin^2 x + 5\cos x - 7 = 0$;
3) $\cos 2x + 3\sin x = 2$;
4) $2\operatorname{tg}\frac{x}{4} - 2\operatorname{ctg}\frac{x}{4} = 3$.

25.342. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;
2) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;
3) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$;
4) $2\sin x - 3\cos x = 2$.

25.343. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + \cos 5x = 0$;
2) $\sin 9x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)$;
3) $\sin 3x + \cos 7x = 0$;
4) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$;
5) $\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$.

25.344. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x + \cos^2 5x = 1$;
2) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0{,}5$.

25.345. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$;
2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 3x$.

25.346. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin(45^\circ + x)\sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}$;
2) $\cos 7x\cos 3x = \cos 4x$;
3) $\sin 5x\cos 3x = \sin 9x\cos 7x$;
4) $2\sin^2 x = 1{,}5 - \sin x\sin 3x$.

25.347. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$;
2) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 0$;
3) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$;
4) $\frac{1 - \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$.

25.348. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1.$$

25.349. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$\sin^3 x\cos x = 0{,}25 + \cos^3 x\sin x.$$

25.350. Скільки коренів рівняння $\sin x + \cos x + \sin 3x = 0$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

25.351. Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos\frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{2}$;
3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$;
5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) \leqslant -1$.

Показникова функція. Показникові рівняння і нерівності

25.352. Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$;

2) $\sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}}$;

3) $128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x}$;

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{6}\right)^x = \frac{125}{64}$;

5) $2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7}$;

6) $8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0$.

25.353. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $2^{7-3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$;

2) $0{,}9^x \leqslant 1\frac{19}{81}$;

3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$;

4) $1 < 10^{x+1} \leqslant 100\,000$;

5) $0{,}04 \leqslant 5^{2-x} \leqslant 25$;

6) $1{,}3^{x^2-4x+2} \leqslant 1{,}69$;

7) $0{,}4^{x^2+2x+2} \leqslant 0{,}16$;

8) $4{,}5^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} \geqslant 1$.

25.354. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;

2) $2^{x+1} + 5^{x-2} = 104$;

3) $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$;

4) $4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 352$.

25.355. Розв'яжіть нерівність:

1) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13$;

2) $5^{x+1} + 5^{x-2} < 630$;

3) $0{,}5^{x+3} - 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x+1} < 0{,}375$;

4) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17$;

5) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 64^{\frac{x}{3}} \leqslant 228$;

6) $6 \cdot 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x-3} \geqslant 19$.

25.356. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;

2) $49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0$;

3) $\frac{16 - 3^{2x}}{3^x + 4} = 1$;

4) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$;

5) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;

6) $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$;

7) $3^{1+\sqrt{x+1}} = 28 - 3^{2-\sqrt{x+1}}$;

8) $\frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4$.

25.357. Розв'яжіть нерівність:

1) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 \geqslant 0;$
4) $7^x + 7^{2-x} - 50 \geqslant 0.$

25.358. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x - 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}} - 50 \cdot 2^x = 0;$
2) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0;$
3) $5^{2x+1} - 3 \cdot 10^x = 2^{2x+1};$
4) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$

Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння і нерівності

25.359. Обчисліть:

1) $2^{1-\log_2 7};$
2) $5^{3\log_5 2};$
3) $10^{1+\lg \sin\frac{\pi}{6}};$
4) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27};$
5) $\lg 20 + \lg 50;$
6) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5};$
7) $36^{\log_6 7} + 10^{2-\lg 4} - 7^{\log_{49} 25};$
8) $3\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 64;$
9) $\frac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}.$

25.360. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (2x - 1);$
2) $y = \lg (x^2 - 9x);$
3) $y = \log_6 (4^x - 3 \cdot 2^x + 2);$
4) $y = \lg \lg x;$
5) $y = \lg(5x - x^2) + \frac{1}{\lg(2-x)};$
6) $y = \log_{x-2} (x^2 + x - 3).$

25.361. Побудуйте графік функції:

1) $y = 5^{\log_5 (x-1)};$ 2) $y = 2^{-\log_2 x};$ 3) $y = 10^{\lg \sin x};$ 4) $y = e^{\ln (4-x^2)}.$

25.362. Порівняйте m і n, якщо:

1) $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n;$
2) $\log_2 m > \log_2 n;$
3) $\log_{1,5} m < \log_{1,5} n;$
4) $\log_{0,3} m < \log_{0,3} n.$

25.363. Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 7 < \log_a 6;$ 2) $\log_a 5 > 0.$

25.364. Порівняйте з нулем число:

1) $\log_2 \frac{1}{5};$ 2) $\log_3 4;$ 3) $\log_{\frac{1}{3}} 0,6;$ 4) $\log_{\frac{1}{6}} 10.$

25.365. Між якими двома послідовними цілими числами розташовано на числовій прямій число:

1) $\lg 50;$ 2) $\log_3 8;$ 3) $\log_{\frac{1}{5}} 30;$ 4) $\log_{0,1} 4,37?$

25.366. Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \dfrac{|\log_{0,4} x|}{\log_{0,4} x}$;
2) $f(x) = \sqrt{\ln \sin x}$;
3) $f(x) = \sqrt{\log_5^2 x} \cdot \log_x 5$.

25.367. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) = -1$;
2) $100^{\lg(x+10)} = 10\ 000$;
3) $\log_x 3 - \log_x 2 = 2$;
4) $\lg x = 3 - \lg 20$;
5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$;
6) $\dfrac{\log_2(x^2 - x - 16) - 2}{\log_5(x-4)} = 0$.

25.368. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x-5) > \dfrac{2}{3}$;
2) $\log_4(x+1) < -\dfrac{1}{2}$;
3) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) \geqslant -1$;
4) $\log_{0,6}(x^2 + 4x + 4) > 0$;
5) $\log_{\frac{1}{6}} \dfrac{x+2}{x^2} < 0$.

25.369. Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(5x+2) = \dfrac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;
2) $\log_9(4x - 6) = \log_9(2x - 4)$;
3) $\dfrac{1}{2}\lg(3x^2 + 25) = \lg(3x - 5)$;
4) $\log_6(x^2 - x - 2) = \log_6(2x^2 + x - 1)$;
5) $\ln(x^2 - 2x - 8) = 2\ln\sqrt{-4x}$.

25.370. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(2x - 3) > \log_2(3x - 5)$;
2) $\log_{0,7}(3x - 1) < \log_{0,7}(3 - x)$;
3) $\log_{\frac{1}{9}}(1 - x^2) > \log_{\frac{1}{9}}(2x + 2)$;
4) $\lg\dfrac{x+3}{x+4} > \lg\dfrac{x+5}{x+2}$.

25.371. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{0,7}\dfrac{x+1}{x-5}}$;
2) $f(x) = \log_3 \log_{0,3}\dfrac{x-2}{x+3}$.

25.372. Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(2x - 1) + \lg(x + 5) = \lg 13$;
2) $\log_6(x - 3) + \log_6(x + 1) = 1$;
3) $\log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$;
4) $\log_7(-x) + \log_7(1 - x) = \log_7(x + 3)$.

25.373. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 x + \log_2(x+1) \leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}}(x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{6}}(x+3)$;

3) $\log_3(4-x)+\log_3(x+3)\leqslant 1+\log_3(x-1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\geqslant \log_{\frac{1}{2}}3-1$.

25.374. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2^2 x-\log_2 x-6=0$;

2) $\ln^2 x-6\ln x+9=0$;

3) $\dfrac{2}{\lg x+2}-\dfrac{1}{\lg x-4}=1$;

4) $\log_3 x^2\cdot\log_3\dfrac{x}{9}=6$;

5) $\log_7\dfrac{7}{x}+\log_7^3 x=1$.

25.375. Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg^2 x-\lg x\geqslant 0$;

2) $\ln^2 x+\ln x\leqslant 0$;

3) $3\log_8^2 x+2\log_8 x-5\geqslant 0$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}^2(-x)-\log_{\frac{1}{3}}(-x)\leqslant 2$;

5) $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}>1$;

6) $\dfrac{\log_6^2 x+2\log_6 x-6}{\log_6 x}<1$.

25.376. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_5 x-2}=125$;

2) $x^{\lg x}=100x$;

3) $x^{2\log_7 x}=7x$;

4) $x^{\log_6 x}=\dfrac{36}{x}$.

Похідна та її застосування

25.377. Знайдіть похідну функції:

1) $y=x\sqrt{5}$;

2) $y=2x^7+3x^5-2x^6$;

3) $y=\dfrac{3x-1}{x^2+1}$;

4) $y=(x^2+x+1)(x^2-4+1)$;

5) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$;

6) $y=x^6+2x^4+\dfrac{4}{x^2}-1$;

7) $y=(3-2x)\sqrt{x}$;

8) $y=\sqrt{x}\sin x$;

9) $y=2^x\cos x$;

10) $y=\sqrt{x^2-1}$;

11) $y=2\sin 5x$;

12) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{6}$;

13) $y=(2x-1)^6$;

14) $y=\log_3(2x^2-3x+1)$;

15) $y=3e^{2x+5}$;

16) $y=14^{2-5x}$;

17) $y=x^3+\ln(6x-1)$;

18) $y=\dfrac{1}{2x^3}+\dfrac{4}{x}$.

25.378. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+$ $+15t+2$ (переміщення s вимірюють у метрах, час t — у секундах). Знайдіть прискорення руху тіла в момент часу, коли його швидкість дорівнює нулю.

25.379. Тіло масою 2 кг рухається прямолінійно за законом $s(t)=\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+5$ (переміщення s вимірюють у метрах, час t — у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла та силу, яка дії на нього, у момент часу $t=3$ с.

25.380. Укажіть функцію, дотична до якої в точці з абсцисою $x_0=0$ буде горизонтальною прямою:

1) $y=x^3+2x-3$; 2) $y=x^2-1$; 3) $y=x^2-6x$; 4) $y=-x^2-x$.

25.381. Укажіть функцію, дотична до якої в точці з абсцисою $x_0=\frac{3\pi}{2}$ буде паралельна бісектрисі першого координатного кута:

1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos x$; 3) $y=\operatorname{ctg} x$.

25.382. Складіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці з абсцисою x_0:

1) $f(x)=\sin 2x,\ x_0=\frac{\pi}{6}$;
2) $f(x)=\frac{2}{x},\ x_0=-2$;
3) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12}\right),\ x_0=\pi$;
4) $f(x)=(x-1)\sqrt{2x+1},\ x_0=4$.

25.383. До графіка функції $f(x)=5+7x-4x^2$ проведено дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює -9. Знайдіть координати точки дотику.

25.384. Знайдіть координати точки перетину з осями координат дотичних до графіка функції $f(x)=\frac{x+4}{x-5}$, кутовий коефіцієнт яких дорівнює -1.

25.385. Знайдіть координати точки параболи $y=x^2-3x+2$, дотична у якій паралельна прямій $y=6-x$.

25.386. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=$ $=x^4-4x^3+5x$, яка паралельна прямій $y=5x-8$.

25.387. Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і дотичною до графіка функції $f(x)=\sqrt{3x^2-8}$, яка паралельна прямій $y=3x+5$.

25.388. Знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = -8x^3 - x^2 + 2x$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{12}(x-5)^3$; 7) $f(x) = 2^x - 4^x$;

2) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$; 5) $f(x) = \frac{x^3}{x^3+8}$; 8) $f(x) = x^2 - 8\ln x$;

3) $f(x) = \frac{5-2x}{x^2-4}$; 6) $f(x) = \frac{x}{e} - e^x$; 9) $f(x) = \sqrt{x}(\ln x - 4)$.

25.389. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ на проміжку $[-2; 2]$;

2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$ на проміжку $[-1; 2]$;

3) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ на проміжку $[0; 4]$;

4) $f(x) = \cos x - \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$;

5) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ на її області визначення;

6) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ на проміжку $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

25.390. Подайте число 15 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб добуток квадрата одного з них на друге число був найбільшим.

25.391. Подайте число 20 у вигляді суми двох таких доданків, щоб сума їхніх кубів була найменшою.

25.392. Знайдіть від'ємне число, різниця якого з третиною його куба набуває найменшого значення.

25.393. Яку найбільшу площу може мати прямокутник, вписаний у коло радіуса 25 см?

25.394. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 - 9x$; 3) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$; 5) $f(x) = 4 + x^2 - \frac{1}{4}x^4$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$; 4) $f(x) = (x^2 - 2)^2$; 6) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Інтеграл і його застосування

25.395. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 3$ на проміжку $(0; +\infty)$;

2) $f(x) = x - \frac{2}{x^5}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;

3) $f(x)=\frac{3}{x^4}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0;+\infty)$;

4) $f(x)=\frac{2}{\cos^2 2x}+\frac{3}{\sin^2 3x}$ на проміжку $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$;

5) $f(x)=2+\frac{4}{x-1}$ на проміжку $(-\infty;1)$;

6) $f(x)=e^{5x}-7e^{-4x}$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$;

7) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}-\cos\frac{x}{4}$ на проміжку $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$;

8) $f(x)=\sqrt{6x-2}$ на проміжку $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

25.396. Для функції f знайдіть на вказаному проміжку I первісну F, графік якої проходить через дану точку M:

1) $f(x)=2x+4$, $I=(-\infty;+\infty)$, $M(2;1)$;

2) $f(x)=4x^3-2x+3$, $I=(-\infty;+\infty)$, $M(1;8)$;

3) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-5\sin 5x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $M(\pi;0)$;

4) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-2x}}$, $I=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, $M(-4;1)$;

5) $f(x)=6x^2+e^{\frac{x}{4}}$, $I=(-\infty;+\infty)$, $M\left(2;4\sqrt{e}\right)$;

6) $f(x)=(5x-3)^4$, $I=(-\infty;+\infty)$, $M(1;1)$.

25.397. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка в будь-який момент часу t визначається за законом $v(t)=t^2$. Установіть закон руху тіла, якщо за перші 3 с руху тіло пройшло шлях 10 м.

25.398. Задайте формулою функцію f, графік якої проходить через точку $A(4;3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної до графіка цієї функції в будь-якій точці x з її області визначення дорівнює $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

25.399. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_{-1}^{2} x^2dx$;

2) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{x^2}$;

3) $\int_{0}^{\pi}(6\cos 4x-3\sin x)dx$;

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{18}}\frac{dx}{\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

5) $\int_{-2}^{1}(x^2-2x+4)dx$;

6) $\int_{1}^{3}\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$;

7) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;

8) $\int\limits_{0}^{2}(3x-2)^3\,dx$;

9) $\int\limits_{2}^{4}e^{-x}\,dx$;

10) $\int\limits_{0}^{5}\frac{dx}{4x+1}$.

25.400. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^3 + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$;

2) $y = 2 - x^2,\ y = 0$;

3) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$;

4) $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = -2$;

5) $y = -x^2 + 4,\ x + y = 4,\ y = 0$;

6) $y = \frac{4}{x^2},\ y = x - 1,\ x = 1$;

7) $y = x^2 - 4x + 5,\ y = 5 - x$;

8) $y = 8 - x^2,\ y = 4$;

9) $y = x^2,\ y = 4x - x^2$;

10) $y = \frac{5}{x},\ y = 4x + 1,\ x = 2$.

25.401. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$;

2) $\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx$.

Елементи теорії ймовірностей

25.402. У коробці лежать 6 білих і 14 червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться:

1) білою;
2) червоною?

25.403. У лотереї розігрували 6 автомобілів, 18 мотоциклів і 42 велосипеди. Усього було випущено 3000 лотерейних білетів. Яка ймовірність:

1) виграти мотоцикл;
2) виграти який-небудь приз;
3) не виграти жодного призу?

25.404. Гральний кубик кинули один раз. Яка ймовірність того, що випаде число, кратне 2?

25.405. З натуральних чисел від 1 до 16 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 16?

25.406. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число ділиться націло на 12?

25.407. У коробці лежать 3 білі та 4 сині кульки. Яку найменшу кількість кульок треба вийняти навмання, щоб ймовірність того, що серед них є хоча б одна синя кулька, дорівнювала 1?

25.408. Чотири картки пронумеровано числами 1, 2, 3 і 4. Яка ймовірність того, що добуток номерів двох навмання вибраних карток буде кратним 3?

25.409. У коробці лежать червоні і жовті кульки. Скільки червоних кульок у коробці, якщо ймовірність вийняти з неї навмання червону кульку дорівнює $\frac{3}{8}$, а жовтих кульок у коробці 20?

25.410. У коробці лежать 16 зелених і 24 сині кульки. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) зеленою; 2) синьою; 3) червоною; 4) зеленою або синьою?

25.411. На 20 картках записано натуральні числа від 1 до 20. Яка ймовірність того, що число, записане на вибраній навмання картці, ділиться націло на 3 і не ділиться націло на 2?

25.412. Із 28 кісточок доміно навмання вибирають одну й обчислюють суму очок на ній (на рис. 25.6 зображено кісточку, сума очок якої дорівнює 10). Яка ймовірність вибрати кісточку, сума очок на якій дорівнює:

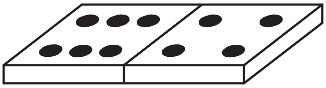


Рис. 25.6

1) 5; 2) 6; 3) 8; 4) 12; 5) 14?

25.413. Кидають одночасно два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть:
1) числа, сума яких дорівнює 9;
2) числа, сума яких менша від 7?

26. Завдання для повторення курсу алгебри в тестовій формі

ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яку цифру треба поставити замість зірочки, щоб число 1845* ділилося націло на 9, але не ділилося націло на 6?
А) 0; Б) 3; В) 6; Г) 9.

2. Групу туристів можна розмістити в менших наметах по 4 чоловіки або в більших наметах по 6 чоловік, причому в обох випадках вільних місць у наметах не залишиться. Скільки туристів було в групі, якщо відомо, що їх більше за 40, але менше від 50?
А) 42; Б) 44; В) 46; Г) 48.

3. Яке з наведених чисел ділиться націло на 3, але не ділиться націло ні на 2, ні на 5?

А) 3540; Б) 2601; В) 7335; Г) 6228.

4. Чому дорівнює остача при діленні на 8 значення виразу $(15n + 7) - (7n + 3)$, де n — довільне натуральне число?

А) 7; Б) 6; В) 4; Г) 10.

5. Яке найменше натуральне число треба додати до числа 832, щоб отримана сума була кратна одночасно числам 3 і 5?

А) 3; Б) 5; В) 8; Г) 9.

6. На таці лежать пиріжки з м'ясом і пиріжки з вишнями, кількості яких відносяться як 5 : 2 відповідно. Укажіть серед наведених чисел те, яким може виражатися загальна кількість пиріжків.

А) 15; Б) 16; В) 21; Г) 24.

7. Яка з даних рівностей хибна?

А) $\frac{5}{7} = \frac{35}{49}$; Б) $\frac{14}{24} = \frac{2}{3}$; В) $\frac{7}{9} = \frac{56}{72}$; Г) $\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$.

8. Якому з наведених проміжків належить число $\frac{15}{18}$?

А) (0; 0,25); Б) (0,25; 0,5); В) (0,5; 0,75); Г) (0,75; 1).

9. Укажіть, скільки можна скласти нерівних між собою правильних дробів, чисельниками та знаменниками яких є числа 2, 4, 5, 6, 8, 9.

А) 12; Б) 13; В) 14; Г) 15.

10. Визначте, на скільки $\frac{3}{7}$ числа 350 більше за 0,12 числа 500.

А) 140; Б) 150; В) 160; Г) 170.

11. Один робітник може виконати певну роботу за годину, а другий — за півтори години. За який час вони виконають цю роботу, працюючи разом?

А) 36 хв; Б) 40 хв; В) 48 хв; Г) 60 хв.

12. Укажіть найбільше число:

А) $\frac{2002}{2001}$; Б) $\frac{2003}{2002}$; В) $\frac{2004}{2003}$; Г) $\frac{2005}{2004}$.

13. Натуральне число a — парне, а натуральне число b — непарне. Яка з поданих рівностей можлива?

А) $\frac{a-1}{b+1} = 1$; Б) $ab = 35$; В) $\frac{a}{b} = 9$; Г) $\frac{a}{b} = 4$.

14. Додатне число a менше від 1, а число b більше за 1. Який із виразів набуває найбільшого значення?

А) ab; Б) a^2; В) $a + b$; Г) $\frac{a}{b}$.

15. Із послідовності чисел −9, −7, −5, 2, 3, 6 вибрали два числа та знайшли їхній добуток. Якого найменшого значення може набути цей добуток?

А) −54; Б) 6; В) −10; Г) 12.

16. Відомо, що число a — додатне, а число b — від'ємне. Про який із виразів можна стверджувати, що він набуває лише додатних значень?

А) $b^2 - a^2$; Б) $a - b$; В) $(b - a)^3$; Г) $a^4 - b^4$.

17. Поїзд пройшов 105 км, що становить $\frac{5}{7}$ усього шляху. Скільки кілометрів становить довжина всього шляху?

А) 75 км; Б) 140 км; В) 147 км; Г) 210 км.

18. Обчисліть значення виразу $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2009 - 2010$.

А) 1005; Б) −1005; В) 2010; Г) −2010.

19. Установіть відповідність між заданими числами (1–4) і цифрами (А–Д), які треба підставити замість зірочок, щоб дані числа ділилися націло на 9.

1) 628*
2) 57*57
3) 7*51
4) 90*2

А) 1
Б) 5
В) 7
Г) 4
Д) 2

20. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}$

2) $\left(2{,}5-1\frac{5}{6}\right)(-1{,}2)$

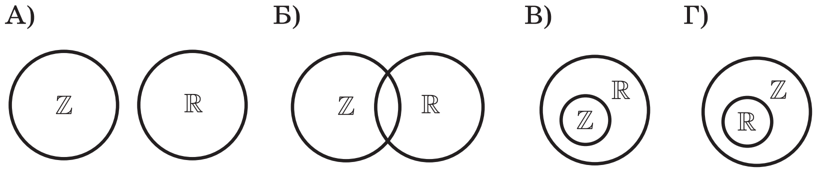
3) $2{,}8\cdot\frac{4}{7}-2{,}8:\frac{4}{7}$

4) $\dfrac{8-\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{8+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}$

А) 0,7
Б) −0,8
В) $\frac{1}{7}$
Г) −3,3
Д) $1\frac{3}{7}$

ЗАВДАННЯ № 5 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Укажіть діаграму Ейлера, на якій правильно зображено співвідношення між множинами $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{R}$.



2. Дано три твердження:
1) будь-яке натуральне число є дійсним;
2) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
3) будь-яке дійсне число є раціональним або ірраціональним.
Скільки із цих тверджень є правильними?
А) Жодного правильного; Б) одне; В) два; Г) три.

3. Відомо, що $A \subset B$ і $A \neq B$. Укажіть правильне твердження:
А) $A \cap B = B$; Б) $A \cup B = A$; В) $A \cap B = \varnothing$; Г) $A \cup B = B$.

4. До зливка сплаву масою 400 кг, що містить 15 % міді, додали 25 кг міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому сплаві?
А) 20 %; Б) 25 %; В) 30 %; Г) 40 %.

5. Видобуток вугілля на деякій шахті спочатку зменшився на 20 %, а потім підвищився на 20 %. Збільшився чи зменшився видобуток вугілля внаслідок цього порівняно з початковим рівнем і на скільки відсотків?
А) Збільшився на 4 %; В) збільшився на 10 %;
Б) зменшився на 4 %; Г) не змінився.

6. Вміст солі в морській воді становить 5 %. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 30 кг морської води, щоб вміст солі в утвореному розчині становив 3 %?
А) 10 кг; Б) 15 кг; В) 20 кг; Г) 25 кг.

7. Бригада з 12 робітників може відремонтувати школу за 36 днів. Скільки потрібно робітників, щоб відремонтувати школу за 9 днів, якщо продуктивність праці всіх робітників однакова?
А) 3; Б) 24; В) 36; Г) 48.

8. У саду ростуть яблуні та груші, причому яблунь у 4 рази більше, ніж груш. Скільки відсотків усіх дерев становлять груші?
А) 20 %; В) 50 %;
Б) 25 %; Г) установити неможливо.

9. Першого дня хлопчик прочитав 30 % сторінок книжки, а другого — 18 %. Скільки сторінок у книжці, якщо першого дня він прочитав на 6 сторінок більше, ніж другого?
А) 200; Б) 500; В) 50; Г) 20.

10. Деякі величини a, b і c, які набувають тільки додатних значень, такі, що $ac = b$. Як зміниться величина a, якщо величину b збільшити у 12 разів, а величину c збільшити в 3 рази?
А) Збільшиться в 36 разів; В) збільшиться в 4 рази;
Б) зменшиться в 4 рази; Г) не зміниться.

11. У 160 г води розчинили 40 г солі. Знайдіть відсотковий вміст солі в розчині.
А) 20 %; Б) 25 %; В) $33\frac{1}{3}$ %; Г) 40 %.

12. У таблиці наведено розподіл оцінок, отриманих учнями класу за контрольну роботу з алгебри і початків аналізу.

Оцінка	6	7	8	9	10	11
Кількість учнів	3	8	4	5	3	2

Знайдіть моду даної вибірки.
А) 2; Б) 7; В) 8; Г) 11.

13. Банк сплачує своїм вкладникам 8 % річних. Скільки грошей треба покласти в банк, щоб через рік на рахунку було 21 600 грн?
А) 20 300 грн; Б) 20 200 грн; В) 20 100 грн; Г) 20 000 грн.

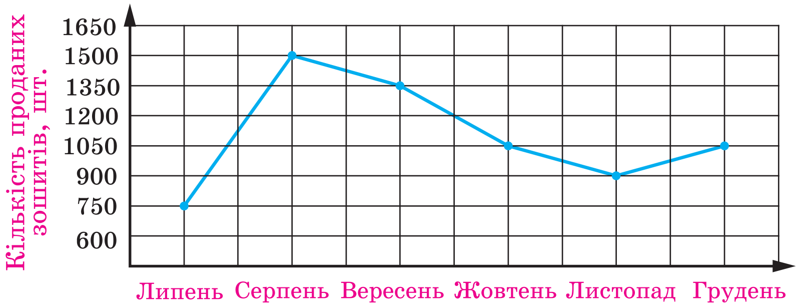
14. Ціна товару становила 80 грн. Через деякий час вона зменшилася на 8 грн. На скільки відсотків відбулося зниження ціни?
А) На 10 %; Б) на 8 %; В) на 12 %; Г) на 15 %.

15. Стілець, початкова ціна якого становила 1200 грн, двічі подешевшав, причому кожного разу на 50 %. Скільки тепер коштує стілець?
А) 300 грн; Б) 450 грн; В) 600 грн; Г) 750 грн.

16. Відомо, що 7 кг печива коштують стільки, скільки 5 кг цукерок. Скільки кілограмів цукерок можна купити замість 28 кг печива?
А) 14 кг; Б) 16 кг; В) 10 кг; Г) 20 кг.

17. На рисунку наведено графік, що відображає обсяги продажу зошитів у крамничці канцтоварів протягом 6 місяців. Скільки в середньому продавали зошитів за один місяць?

А) 1050; Б) 1100; В) 1200; Г) 1250.



18. У травні магазин продав прохолоджувальних напоїв на суму m грн, а в червні — на $2m$ грн. На скільки відсотків збільшився виторг магазину від продажу прохолодних напоїв у червні порівняно з виторгом у травні?

А) На 50 %; В) на 200 %;
Б) на 100 %; Г) залежить від числа m.

19. Установіть відповідність між заданими вибірками (1–4) та їхніми медіанами (А–Д).

1) 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9
2) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
3) 2, 4, 4, 6, 9, 3, 8, 9, 10
4) 3, 10, 4, 9, 13, 9, 19, 3

А) 7
Б) 4
В) 6
Г) 9
Д) 5

20. Установіть відповідність між сольовим розчином (1–4) і кількістю солі, яку він містить (А–Д).

1) 300 г 4-відсоткового розчину
2) 40 г 9-відсоткового розчину
3) 20 г 8-відсоткового розчину
4) 40 г 6-відсоткового розчину

А) 1,6 г
Б) 12 г
В) 2,4 г
Г) 3,6 г
Д) 37 г

ЗАВДАННЯ № 6 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. При якому значенні змінної не має змісту вираз $\frac{4}{3x-21}$?

А) 7; Б) −7; В) 4; Г) −4.

2. Скоротіть дріб $\frac{12a^{10}b^2}{16a^5b^6}$.

А) $\frac{3a^2}{4b^3}$; Б) $\frac{3a^5b^4}{4}$; В) $\frac{3a^2}{4b^4}$; Г) $\frac{3a^5}{4b^4}$.

3. Скоротіть дріб $\frac{6m-mn}{18m}$.

А) $\frac{6-mn}{18}$; Б) $\frac{1-mn}{3}$; В) $\frac{6-n}{18}$; Г) $\frac{m-n}{3}$.

4. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{a-5b}{2b}-\frac{b-5a}{2a}$.

А) $\frac{a^2-b^2}{2ab}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$; В) $\frac{a-b}{2}$; Г) $\frac{a-b}{4}$.

5. Спростіть вираз $\frac{a+b}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$.

А) $\frac{ab}{a+b}$; Б) $\frac{a+b}{ab}$; В) $\frac{ab}{a-b}$; Г) $\frac{a-b}{ab}$.

6. Якщо $a=2-\frac{b}{c}$, то b дорівнює:

А) $c\ (2-a)$; Б) $c\ (a-2)$; В) $\frac{c}{2-a}$; Г) $\frac{2-a}{c}$.

7. Знайдіть значення виразу $\frac{2}{a-2}+\frac{a+2}{a^2-10a+25}\cdot\frac{6a-30}{a^2-4}$ при $a=4{,}75$.

А) 2,5; Б) −2,5; В) 8; Г) −8.

8. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{2a+6}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}\right)\cdot\frac{a^2-a}{2a+2}$ при $a=0{,}125$.

А) 1; Б) −0,5; В) 0,25; Г) 0,125.

9. Коренем якого з даних рівнянь є будь-яке число?

А) $\frac{x^2-25}{x^2-25}=1$; В) $\frac{x^2+25}{x^2+25}=1$;

Б) $\frac{x^2-25}{x+5}=x-5$; Г) $\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$.

10. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$.

А) $\dfrac{x-3}{x-5}$; Б) $\dfrac{x+3}{x+5}$; В) $\dfrac{x+3}{x-5}$; Г) $\dfrac{x-3}{x+5}$.

11. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2+2x-5=0$. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$.

А) $-1{,}2$; Б) $1{,}2$; В) $-2{,}8$; Г) $2{,}8$.

12. Якого найбільшого значення набуває вираз $x+y$, якщо пара чисел $(x;\ y)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x-3y=4, \\ xy-6y=1? \end{cases}$

А) 10; Б) 8; В) 6; Г) $2\dfrac{2}{3}$.

13. Пари чисел $(x_1;\ y_1)$ і $(x_2;\ y_2)$ є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 2x-xy=5, \\ y+xy=6. \end{cases}$ Знайдіть значення виразу $|\,x_1y_1-x_2y_2\,|$.

А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.

14. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 350 км, виїхали одночасно вантажний і легковий автомобілі. Швидкість вантажівки на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля, через що вона прибула до пункту призначення на 2 год пізніше за легковий автомобіль. Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює x км/год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\dfrac{350}{x}-\dfrac{350}{x+20}=2$; В) $\dfrac{350}{x+20}-\dfrac{350}{x}=2$;

Б) $\dfrac{350}{x}+\dfrac{350}{x+20}=2$; Г) $\dfrac{350}{x}-\dfrac{350}{x-20}=2$.

15. Катер проплив 30 км за течією річки, швидкість якої дорівнює 1 км/год, і повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 10 хв. Нехай власна швидкість катера становить x км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x-1}=3{,}1$; В) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x}=3\dfrac{1}{6}$;

Б) $\dfrac{30}{x+1}-\dfrac{30}{x-1}=3{,}1$; Г) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x-1}=3\dfrac{1}{6}$.

16. Двоє працівників разом можуть виконати комп'ютерний набір тексту підручника з алгебри за 8 днів. Якщо перший працівник набере $\frac{2}{3}$ тексту, а потім другий працівник завершить набір, то весь текст буде набрано за 16 днів. Нехай перший працівник може набрати текст підручника за x днів, а другий — за y днів. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 16; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{16}; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16. \end{cases}$

17. Відомо, що при деяких від'ємних значеннях a і b виконуються рівності $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Знайдіть значення виразу $a + b$.

А) 10; Б) −10; В) −8; Г) −6.

18. Відомо, що $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$. Знайдіть значення виразу $\left| x - \frac{1}{x} \right|$.

А) $2\sqrt{5}$;

В) 6;

Б) $-2\sqrt{5}$ або $2\sqrt{5}$;

Г) 4.

19. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1) $\frac{3a - 12}{a^2 - 16}$

2) $\frac{1}{a} - \frac{4}{a^2 + 4a}$

3) $\frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 16} : (a + 4)$

4) $\frac{3a}{a - 4} - \frac{a + 2}{2a - 8} \cdot \frac{96}{a^2 + 2a}$

А) $\frac{1}{a - 4}$

Б) $\frac{3a + 12}{a}$

В) $\frac{3}{a + 4}$

Г) $\frac{1}{a + 4}$

Д) $\frac{a + 4}{a - 4}$

20. Установіть відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їхніх коренів (А–Д).

1) $x^2 - 6x - 16 = 0$
2) $\frac{x^2 - 3x}{x+2} = \frac{3x+16}{x+2}$
3) $x^4 - x^2 - 12 = 0$
4) $\frac{x+2}{x^2 - 4} = 0$

А) $\{-2,\ 8\}$
Б) $\{-2,\ 2\}$
В) $\{-2\}$
Г) $\varnothing$
Д) $\{8\}$

ЗАВДАННЯ № 7 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з наведених нерівностей обов'язково виконується, якщо $a > b$ і $c < 0$?

А) $ac > b$; Б) $a > bc$; В) $a > b + c$; Г) $a + c > b$.

2. Оцініть значення виразу $\frac{a}{b}$, якщо $3 \leqslant a \leqslant 5$ і $5 \leqslant b \leqslant 6$.

А) $15 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 30$; Б) $\frac{3}{5} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{4}{5}$; В) $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1$; Г) $18 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 25$.

3. Яка з поданих систем нерівностей має єдиний розв'язок?

А) $\begin{cases} 2x + 6 \geqslant 0, \\ 1 - x \geqslant 3; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 0{,}5x > -1, \\ 2x - 5 > 4x + 7; \end{cases}$

В) $\begin{cases} \frac{x+9}{3} > 2, \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} > 0{,}75; \end{cases}$

Г) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 \leqslant \frac{2}{3}x, \\ 0{,}7x + 2 \leqslant 0{,}3x + 0{,}8. \end{cases}$

4. Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$(3x - 5)(3x + 2) - 9x(x - 1) \leqslant 6?$$

А) Один; Б) два; В) жодного; Г) безліч.

5. Укажіть множину розв'язків нерівності $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$.

А) $[2;\ +\infty)$; Б) $(-\infty;\ 2]$; В) $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$; Г) $(0; 2]$.

6. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності

$$(2x + 3)^2 - (x + 2)(x - 5) < 37.$$

А) Знайти неможливо;
Б) -20;
В) 15;
Г) -15.

7. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{12{,}5}\cdot\sqrt[3]{0{,}016}$?

А) 0,25; Б) 0,5; В) 1; Г) 2.

8. Спростіть вираз $\left(1-\sqrt{8}\right)^2+4\sqrt{2}$.

А) 9; Б) $9+8\sqrt{2}$; В) -7; Г) $-7+8\sqrt{2}$.

9. Обчисліть значення виразу $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

10. Знайдіть значення виразу $\frac{3}{2+\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}+4}$.

А) 4; Б) 3; В) 2; Г) 1.

11. При якій із наведених умов виконується рівність

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4\cdot\sqrt[4]{b^4}=-ab?$$

А) $a>0$ і $b>0$; В) $a<0$ і $b>0$;
Б) $a>0$ і $b<0$; Г) $a<0$ і $b<0$.

12. Знайдіть значення виразу $\frac{3x^{\frac{1}{6}}+x}{x^{\frac{5}{6}}+3}-\frac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$ при $x=12$, $y=64$.

А) 2; Б) -2; В) 4; Г) -4.

13. Укажіть проміжок, якому належить число $\sqrt[3]{32}$.

А) (0; 1); Б) (1; 2); В) (2; 3); Г) (3; 4).

14. Обчисліть значення виразу $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$.

А) $3-2\sqrt{5}$; Б) $1-2\sqrt{5}$; В) -1; Г) 1.

15. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^3}{x}\leqslant 1$.

А) $[-1;0)\cup(0;1]$; В) $(-\infty;0)\cup(0;1]$;
Б) $(-\infty;\ 1]$; Г) $[-1;\ 1]$.

16. Укажіть множину розв'язків рівняння $\left(\sqrt{-x}\right)^2=\sqrt{(-x)^2}$.

А) $\varnothing$; Б) $\{0\}$; В) $(-\infty;\ 0]$; Г) $\{-1,\ 0\}$.

17. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt[6]{x+2}\cdot\sqrt[5]{x+3}\cdot\sqrt[4]{4-x}=0$.

А) 5; Б) 2; В) -1; Г) -3.

18. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+7}-\sqrt{2-x}=2$.

А) 1; Б) -1; В) $-\frac{31}{9};\ 1$; Г) $-1;\ \frac{31}{9}$.

19. Установіть відповідність між заданими нерівностями (1–4) та множинами їхніх розв'язків (А–Д).

1) $\frac{2x-1}{x} \leqslant 1$
2) $x \geqslant x^2$
3) $\frac{x^2+x-2}{x^2} \leqslant 0$
4) $x^3 \leqslant x^2$

А) $(0; 1]$
Б) $[-2; 0) \cup (0; 1]$
В) $[0; 1]$
Г) $(-\infty; 1]$
Д) $[-1; 0) \cup (0; 1]$

20. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1) $\frac{\left(a^{-\frac{5}{4}}\right)^{-8} \cdot a^{2,5}}{a^{-3,5}}$

2) $\frac{9}{4}a^{-5}b^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}a^{-1}b^{-2}\right)^{-2}$

3) $\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3} : \left(\frac{a^4}{b^{-3}}\right)^{-2}$

4) $\frac{\sqrt{a\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt[16]{a^{12}}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$

А) a^{16}
Б) $\frac{1}{a}$
В) $\frac{1}{a^3}$
Г) a
Д) $\frac{b}{a^3}$

ЗАВДАННЯ № 8 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4x+4}$.

А) $[-1; +\infty)$;
Б) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$;
В) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;
Г) $[-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Скільки нулів має функція $y = x^4 - x^2 - 2$?

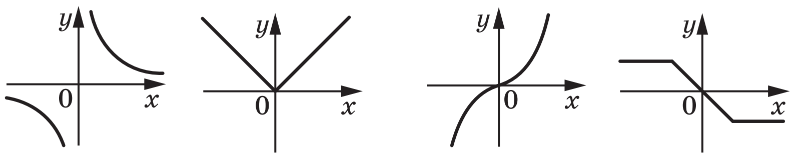
А) Жодного; Б) один; В) два; Г) три.

3. Графік непарної функції $y = f(x)$ проходить через точку $A(2; -7)$. Чому дорівнює $f(-2)$?

А) -7;
Б) 7;
В) 2;
Г) визначити неможливо.

4. На одному з рисунків зображено графік парної функції. Укажіть цей рисунок.

А) Б) В) Г)

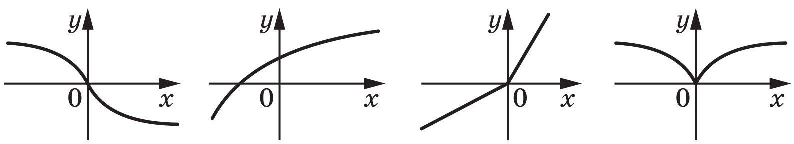


5. Яка з наведених функцій спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$?

А) $y = \frac{1}{x}$; Б) $y = -x^2$; В) $y = -\sqrt{x}$; Г) $y = \sqrt[3]{-x}$.

6. На якому рисунку зображено графік необоротної функції?

А) Б) В) Г)



7. Яка функція є оберненою до функції $y = x - 2$?

А) $y = -x + 2$; В) $y = x - 2$;
Б) $y = -x - 2$; Г) $y = x + 2$.

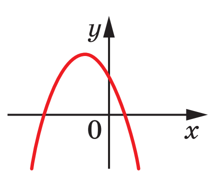
8. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = x^{-2}$ на проміжку $[3; 5]$?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{1}{25}$; В) 9; Г) 25.

9. Графік лінійної функції $y = kx + b$ містить точки в першій, другій і четвертій координатних чвертях. Укажіть правильне твердження.

А) $k > 0$, $b > 0$; В) $k < 0$, $b > 0$;
Б) $k > 0$, $b < 0$; Г) $k < 0$, $b < 0$.

10. Графіком якої з наведених функцій може бути зображена на рисунку парабола?



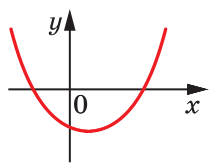
А) $y = -x^2 + 2x$;
Б) $y = -x^2 - 2x - 2$;
В) $y = -x^2 - 2x + 2$;
Г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

11. При якому значенні a найменше значення функції $y = 2x^2 - 8x + a$ дорівнює 3?

А) 3; В) −21;

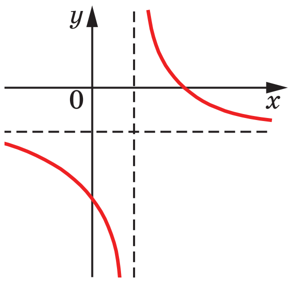
Б) 11; Г) такого значення не існує.

12. На рисунку зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження.



А) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$;
Б) $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$;
В) $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$;
Г) $a < 0,\ b < 0,\ c > 0$.

13. На рисунку зображено графік функції $y = \dfrac{x + a}{bx - c}$. Укажіть правильне твердження.



А) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$;
Б) $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$;
В) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$;
Г) $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.

14. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 5,2; 4,9; 4,6; ...?

А) 17; Б) 18; В) 19; Г) 20.

15. Місця в цирку розташовані так, що в першому ряду кожного сектора 8 місць, а в кожному наступному на 2 місця більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць в одному секторі, якщо в ньому 15 рядів?

А) 270 місць; Б) 330 місць; В) 285 місць; Г) 345 місць.

16. Чому дорівнює сума тридцяти п’яти перших членів арифметичної прогресії, якщо її вісімнадцятий член дорівнює 20?

А) 350; В) 1400;
Б) 700; Г) визначити неможливо.

17. Другий член геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 48, а восьмий член дорівнює $\frac{1}{3}$. Знайдіть п’ятий член цієї прогресії.

А) 4; Б) 2; В) $\frac{1}{4}$; Г) $\frac{1}{2}$.

18. Третій і шостий члени геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q дорівнюють відповідно -12 і $\frac{3}{2}$. Знайдіть значення виразу $\frac{b_1}{1-q}$.

А) 24; Б) 48; В) −96; Г) −32.

19. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1) $y = \sqrt[3]{x+1}$
2) $y = \sqrt[4]{x+1}$
3) $y = \sqrt{x^2-1}$
4) $y = \frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$

А) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
Б) $(-\infty; 1)$
В) $(-\infty; +\infty)$
Г) $[-1; +\infty)$
Д) $[1; +\infty)$

20. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та їхніми областями значень (А–Д).

1) $y = x^2 + 4$
2) $y = 4 - |x|$
3) $y = \sqrt{x+4}$
4) $y = \sqrt{4-x^2}$

А) $[0; 2]$
Б) $[2; +\infty)$
В) $[0; +\infty)$
Г) $(-\infty; 4]$
Д) $[4; +\infty)$

ЗАВДАННЯ № 9 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Обчисліть значення виразу $2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\frac{2\pi}{3}$.

А) −4; Б) 2; В) 0; Г) −1.

2. Укажіть правильну нерівність.

А) $\sin 160° < 0$; Б) $\cos 250° > 0$; В) $\operatorname{tg} 140° > 0$; Г) $\operatorname{ctg} 200° > 0$.

3. Яка з даних функцій є непарною?

А) $y = \frac{1}{\cos x}$; Б) $y = \sqrt{\cos x}$; В) $y = x + \cos x$; Г) $y = x \cos x$.

4. Чому дорівнює найменше значення виразу $1 - 2\cos\alpha$?

А) −2; Б) −1; В) 0; Г) 3.

5. Спростіть вираз $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

А) −1; Б) 1; В) $\operatorname{tg}^2\alpha$; Г) $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

6. Знайдіть значення виразу $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \sin 23°$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) 1.

7. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$.

А) $\cos\alpha+\sin\alpha$; Б) $2\sin\alpha$; В) $\cos\alpha-\sin\alpha$; Г) 0.

8. Відомо, що $\cos(\alpha+\beta)=0$ і $\sin\alpha=1$. Знайдіть значення $\sin\beta$.

А) 2; Б) 1; В) 0; Г) −1.

9. Спростіть вираз $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$.

А) 2; Б) $2\cos\alpha$; В) $2\sin\alpha$; Г) $\sin\alpha\cos\alpha$.

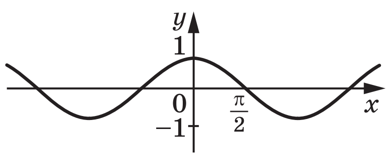
10. Обчисліть значення виразу $\frac{\cos 20° - \cos 80°}{\sin 20° + \sin 80°}$.

А) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\sqrt{3}$.

11. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $\sin x=\frac{1}{7}$; Б) $\cos x=\frac{8}{7}$; В) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{7}$; Г) $\operatorname{ctg} x=\frac{8}{7}$.

12. Графік якої функції зображено на рисунку?



А) $y=\sin x$; В) $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

Б) $y=\sin(\pi+x)$; Г) $y=\sin(2\pi-x)$.

13. Знайдіть корені рівняння $\operatorname{tg} 2x=0$.

А) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Б) $\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

14. Розв'яжіть рівняння $\cos\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $\pm\frac{5\pi}{2}+6\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; В) $\pm\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{\pi}{2}+6\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; Г) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

15. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} = 0.$

А) $\dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$ Б) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ В) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ Г) коренів немає.

16. Укажіть множину розв'язків нерівності $\sin x > -\dfrac{1}{2}.$

А) $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ В) $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

Б) $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ Г) $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

17. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = -\dfrac{1}{4}.$

А) $\dfrac{7}{8};$ Б) $\dfrac{3}{4};$ В) $\dfrac{15}{16};$ Г) $\dfrac{5}{8}.$

18. Розв'яжіть рівняння $1 - \cos 6x = \sin 3x.$

А) $(-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z};$ В) $(-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{18} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

Б) $\pi k,\ \ (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ Г) $\dfrac{\pi k}{3},\ \ (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

19. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$
2) $(\sin \alpha + \cos \alpha)(-\cos \alpha + \sin \alpha)$
3) $\sin 3\alpha \sin \alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$
4) $\sin 2\alpha + \sqrt{3} \cos 2\alpha$

А) $\cos 4\alpha$
Б) $2\sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$
В) $-\cos 4\alpha$
Г) $-\cos 2\alpha$
Д) $1 + \sin 2\alpha$

20. Установіть відповідність між тригонометричними рівняннями (1–4) та їхніми розв'язками (А–Д).

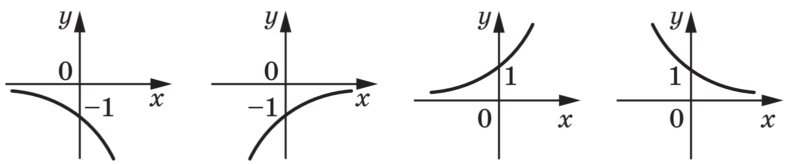
1) $\cos x = -1$
2) $\operatorname{ctg} x = -1$
3) $|\sin x| = 1$
4) $|\operatorname{tg} x| = 1$

А) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
Б) $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
В) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
Г) $\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
Д) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ЗАВДАННЯ № 10 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 2^{-x}$. Укажіть цей рисунок.

А) Б) В) Г)

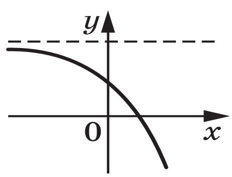


2. Серед наведених функцій укажіть спадну.

А) $y = \pi^x$; Б) $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$; В) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; Г) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$.

3. На рисунку зображено графік функції $y = a \cdot 3^x + b$. Укажіть правильне твердження.

А) $a > 0,\ b > 0$; В) $a < 0,\ b > 0$;
Б) $a > 0,\ b < 0$; Г) $a < 0,\ b < 0$.



4. Яка область значень функції $y = 5^{2\sin^2 x - \cos^2 x}$?

А) $[1;\ 5]$; Б) $[5;\ 25]$; В) $\left[\frac{1}{5}; 25\right]$; Г) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

5. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $0{,}2^{3x-2} = 0{,}0016$.

А) $[-1;\ 0]$; Б) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; В) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; Г) $(1;\ 2]$.

6. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant 6^4$.

А) $(-\infty;\ -4]$; Б) $[-4;\ +\infty)$; В) $(-\infty;\ 4]$; Г) $[4;\ +\infty)$.

7. Розв'яжіть рівняння $2^{x+2} - 2^x = 96$.

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

8. Знайдіть значення виразу $0{,}04^{\log_{0,2} 2}$.

А) 0,2; Б) $\sqrt{2}$; В) 2; Г) 4.

9. Чому дорівнює значення виразу $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 5$?

А) 3; В) 5;
Б) 2; Г) установити неможливо.

10. Розв’яжіть рівняння $2 \cdot 25^x + 5^x - 1 = 0$.

А) -1; $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) $-\log_5 2$; Г) коренів немає.

11. Яка область визначення функції $y = \frac{e^x}{\ln x}$?

А) $(0; +\infty)$; В) $(1; +\infty)$;
Б) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $(-\infty; +\infty)$.

12. Розв’яжіть рівняння $\log_x(x + 2) = 2$.
А) -1; 2; Б) -2; 1; В) 2; Г) 1.

13. Розв’яжіть рівняння $\log_{0,1}(x + 4) + \log_{0,1}(x + 6) = \log_{0,1}35$.
А) -11; 1; Б) -1; 11; В) 11; Г) 1.

14. Розв’яжіть нерівність $\log_5(x - 3) \leqslant 1$.
А) $(-\infty; 8]$; Б) $(3; 8]$; В) $[3; 8]$; Г) $(-\infty; 3)$.

15. Розв’яжіть нерівність $\log_7 0,4 \cdot \log_7 x < 0$.
А) $(1; 7)$; Б) $(-\infty; 1)$; В) $(1; +\infty)$; Г) $(0; 1)$.

16. Знайдіть множину розв’язків нерівності
$$\log_{0,3}(x^2 + 2x - 3) > \log_{0,3}(x - 1).$$
А) $(-2; 1)$; В) $(-\infty; +\infty)$;
Б) $(-3; -2) \cup (-2; 1)$; Г) $\varnothing$.

17. Скільки цілих розв’язків має нерівність $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 6x) \geqslant -2$?

А) 2; Б) 4; В) 6; Г) 11.

18. Знайдіть значення виразу $\log_3\left(\sqrt{a+18} - \sqrt{a-9}\right)$, якщо
$$\log_3\left(\sqrt{a+18} + \sqrt{a-9}\right) = 5.$$
А) -2; В) 1;
Б) $\frac{3}{5}$; Г) знайти неможливо.

19. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1) $y = \frac{2}{2^x - 4}$
2) $y = \sqrt{4 - 2^x}$
3) $y = \log_{0,2}(2 - x)$
4) $y = \sqrt{\log_{0,2}(2 - x)}$

А) $(-\infty; 2)$
Б) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
В) $(-\infty; 2]$
Г) $(2; +\infty)$
Д) $[1; 2)$

20. Установіть відповідність між заданими виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1) $\log_4 \sqrt{2}$
2) $\log_{16} \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$
3) $\log_6 25 - 2\log_6 \frac{5}{6}$
4) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$

А) 4
Б) $-\frac{3}{4}$
В) $\frac{1}{4}$
Г) 2
Д) 1

ЗАВДАННЯ № 11 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{6}{x^3}$.

А) $f'(x) = -\frac{18}{x^2}$;
Б) $f'(x) = -\frac{18}{x^4}$;
В) $f'(x) = \frac{2}{x^2}$;
Г) $f'(x) = \frac{2}{x^4}$.

2. Укажіть похідну функції $f(x) = \sqrt{4x+1}$.

А) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$;
Б) $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{4x+1}}$;
В) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x+1}}$;
Г) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

3. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x) = x^2 - 5x$, у якій дотична до цього графіка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $45°$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

4. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = g'(x)$, якщо

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x},$$

$$g(x) = \frac{6x^2 + 2}{x}.$$

А) 0; –3;
Б) 0; 3;
В) 3;
Г) коренів немає.

5. Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 3t - 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). У який момент часу t швидкість руху тіла становить 10 м/с?

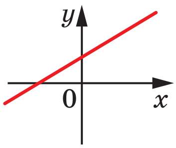
А) $t = 4{,}5$ с; Б) $t = 3{,}5$ с; В) $t = 4$ с; Г) $t = 3$ с.

6. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ у точці його перетину з віссю ординат?

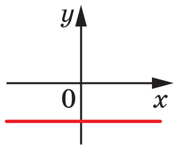
А) 1; Б) −2; В) −3; Г) 13.

7. Укажіть рисунок, на якому може бути зображено графік похідної функції $y=\dfrac{-x^2+bx+c}{4}$.

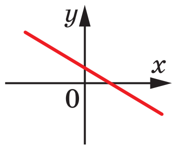
А)



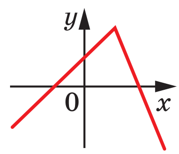
Б)



В)



Г)

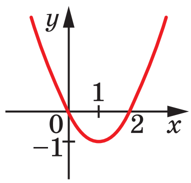


8. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x)=3x^2-x^3$.

А) [0; 2]; В) $(-\infty;\ 0]$ і $[2;\ +\infty)$;

Б) [−2; 0]; Г) $(-\infty;\ -2]$ і $[0;\ +\infty)$.

9. Функція $y=f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку зображено графік функції $y=f'(x)$. Визначте точку мінімуму функції $y=f(x)$.



А) 2; В) 0;

Б) 1; Г) визначити неможливо.

10. Чому дорівнює найбільше значення функції $f(x)=x^3-3x$ на проміжку [−2; 0]?

А) −1; Б) −2; В) 0; Г) 2.

11. Для функції $f(x)=e^{2x}-\cos x$ знайдіть первісну F, графік якої проходить через початок координат.

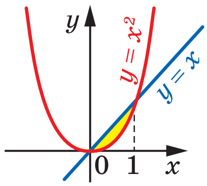
А) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\sin x-\dfrac{1}{2}$;

Б) $F\ (x)=e^{2x}-\sin x-1$;

В) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\sin x-\dfrac{3}{2}$;

Г) $F(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}-\sin x-e$.

12. Знайдіть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.



А) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{6}$;
Б) $\frac{2}{3}$; Г) $\frac{1}{4}$.

13. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x\,dx$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) $-\frac{1}{4}$.

14. З натуральних чисел від 1 до 18 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 18?

А) $\frac{1}{4}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{1}{18}$.

15. У лотереї розігрували 12 комп'ютерів, 18 фотоапаратів і 120 калькуляторів. Усього було випущено 15 000 лотерейних білетів. Яка ймовірність, придбавши один білет, не виграти жодного призу?

А) $\frac{1}{10}$; Б) $\frac{1}{100}$; В) $\frac{9}{10}$; Г) $\frac{99}{100}$.

16. Із двоцифрових парних чисел навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде кратним числу 7?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{7}{45}$; В) $\frac{1}{14}$; Г) $\frac{2}{15}$.

17. У коробці лежать 12 білих і 16 червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться білою?

А) $\frac{3}{4}$; Б) $\frac{3}{7}$; В) $\frac{1}{12}$; Г) $\frac{4}{7}$.

18. У коробці лежать олівці, із них 24 олівці — сині, 8 олівців — зелені, а решта — жовті. Скільки олівців лежить у коробці, якщо ймовірність того, що вибраний навмання олівець буде жовтим, становить $\frac{1}{3}$?

А) 48 олівців; В) 45 олівців;
Б) 54 олівці; Г) 42 олівці.

19. Установіть відповідність між заданими функціями (1–4) та значеннями їхніх похідних (А–Д) у точці x_0.

1) $f(x) = 3\sin x - 2\cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

2) $f(x) = \frac{2}{1-x},\ x_0 = -1$

3) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - e^{4x-4},\ x_0 = 1$

4) $f(x) = \mathrm{ctg}^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$

А) 2

Б) $-\frac{1}{2}$

В) $\frac{1}{2}$

Г) −2

Д) −4

20. Установіть відповідність між заданими інтегралами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1) $\int_0^1 dx$

2) $\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3) $\int_0^2 (x^3 - 1)dx$

4) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$

А) 2

Б) $\frac{1}{2}$

В) 4

Г) 1

Д) −4

Дружимо з комп'ютером

У цьому навчальному році ви систематизуєте та вдосконалите свої знання, що дадуть змогу використовувати комп'ютер під час вивчення курсу математики. Визначайте самостійно, яку технічну роботу ви можете виконувати за допомогою комп'ютера; яким чином подавати матеріал, що вивчається, у наочному вигляді. Рекомендуємо також складати алгоритми для розв'язування вправ і програми для їх реалізації мовою програмування, яку ви вивчаєте. Нижче наведено завдання, які відповідають темам, що вивчаються; але цими завданнями зовсім не обмежуються можливості застосування комп'ютера в шкільному курсі математики.

До п. 1 «Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція»

Наведіть приклади з фізики, біології, хімії та інших шкільних предметів, у яких деякий процес може бути описано показниковою функцією. Промоделюйте ці процеси за допомогою табличного редактора; побудуйте графіки.

Чи є в мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, можливість обчислення a^x?

До п. 2 «Показникові рівняння»

Користуючись поняттям степеня з дійсним показником, запишіть алгоритм для розв'язування рівняння $a^x = b$ для заданих $a > 0$ і $b > 0$. Вважайте, що шуканий розв'язок знайдено, якщо a^x відрізняється від b менше ніж на 0,01.

До п. 3 «Показникові нерівності»

Користуючись поняттям степеня з дійсним показником, запишіть алгоритм для наближеного розв'язування нерівності $a^x > b$ для заданих $a > 0$ і b. Розгляньте також нерівності $a^x \geqslant b$, $a^x < b$, $a^x \leqslant b$.

До п. 4 «Логарифм і його властивості»

Знайдіть у мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, засоби для обчислення логарифма. За якою основою обчислюється логарифм? Як використати ці засоби для обчислення логарифма з будь-якою потрібною основою?

До п. 5 «Логарифмічна функція та її властивості»

Складіть у табличному редакторі таблицю значень показникової та логарифмічної функцій з однією і тією самою основою, більшою за 1; меншою від 1. Побудуйте графіки цих функцій на одному екрані. Які властивості цих функцій ілюструють отримані графіки?

До п. 8 «Похідні показникової та логарифмічної функцій»

Яким чином у мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, задають число e? Чи є засоби для обчислення натурального логарифма?

До п. 9 «Первісна»

Використовуючи засоби побудови графіків функцій, складіть алгоритм для побудови графіка первісної лінійної функції.

До п. 11 «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл»

Припустимо, що у вас є підпрограма, яка обчислює значення деякої функції в будь-якій точці. Як обчислити визначений інтеграл цієї функції на заданому проміжку?

Обчисліть у такий спосіб кілька інтегралів із вправ до цього параграфа та порівняйте результати з результатами, які ви отримали під час виконання вправ.

До п. 12 «Обчислення об'ємів тіл»

Запишіть алгоритм для обчислення об'єму тіла обертання. Які потрібні початкові дані та яким чином буде задано форму цього тіла обертання?

До п. 13 «Комбінаторні правила суми та добутку»

Якими засобами в мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, можна обчислити факторіал числа? Складіть у табличному редакторі таблицю значень факторіалів кількох перших натуральних чисел.

До п. 14 «Перестановки, розміщення, комбінації»

Припустимо, що у вас є підпрограма, яка обчислює факторіал числа. Використовуючи цю підпрограму, складіть алгоритм для обчислення кількості перестановок, розміщень і комбінацій.

До п. 15 «Аксіоми теорії ймовірностей»

За допомогою яких інструментів можна описувати події та моделювати операції над подіями на комп'ютері?

Подайте в табличному редакторі експеримент з n рівноможливими результатами у вигляді таблиці з n рядків. Як можна задавати випадкові події за допомогою цього інструменту? Проілюструйте за допомогою такого подання поняття, які вивчено в цьому пункті.

До п. 16 «Умовна ймовірність»

Подайте дендрограму за допомогою табличного редактора; графічного редактора. Чи можна автоматизувати заповнення написів над стрілками дендрограми?

Чи траплялися вам у курсі інформатики об'єкти, подані у вигляді деревоподібної схеми? Що спільного в цих об'єктів з дендрограмою? Як можна використати навички роботи із цими об'єктами в курсі математики, що ви вивчаєте?

До п. 18 «Випадкова величина»

Ознайомтеся з поняттям «генератор випадкових чисел». Знайдіть у мові програмування, яку ви вивчаєте, засоби отримання випадкових чисел.

У яких межах знаходиться величина, яку видає генератор випадкових чисел?

Часто значення випадкової величини знаходиться в певних межах. Як використовувати генератор випадкових чисел для того, щоб отримати значення випадкової величини із зазначеного діапазону?

Сформуйте набір значень якої-небудь випадкової величини з використанням генератора випадкових чисел. Заповніть цими значеннями таблицю та побудуйте графік. Чи є якась закономірність у розміщенні точок графіка?

До п. 19 «Математичне сподівання випадкової величини»

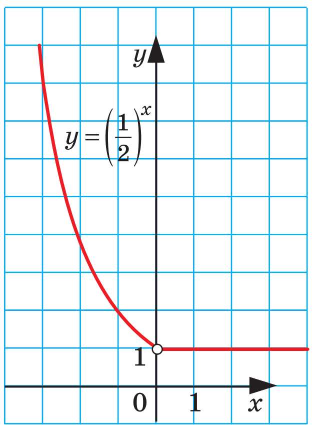
Напишіть програму для обчислення математичного сподівання випадкової величини.

До п. 20 «Статистичний аналіз даних»

Сформуйте набір значень з використанням генератора випадкових чисел у вигляді масиву даних або таблиці. Знайдіть розмах, середнє значення, моду та медіану отриманого набору чисел.

Відповіді та вказівки до вправ

1.13. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\dfrac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\dfrac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}}-a^{2\sqrt[3]{3}}$. **1.14.** 1) $a^{\sqrt{6}}+1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **1.15.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **1.16.** 3) $(-4; +\infty)$; 4) $[1; +\infty)$. **1.17.** 36. **1.18.** $[-2; 4]$. **1.20.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **1.21.** $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$. **1.26.** 1) Коренів немає; 2) 3 корені; 3) безліч коренів; 4) 2 корені. **1.27.** 1) 1 корінь; 2) безліч коренів; 3) 2 корені. **1.30.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}>\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$. *Вказівка*. Числа $7+4\sqrt{3}$ і $7-4\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **1.32.** *Вказівка*. Знайдіть область визначення даної функції. **1.33.** 2) Див. рисунок.



До задачі 1.33 (2)

1.37. 1) 0. *Вказівка*. $2^{\cos x}\leqslant 2$, $x^2+2\geqslant 2$; 2) 0. **1.38.** 1) 0; 2) 0. **1.39.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0; +\infty)$. **1.40.** 1) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; 2) $\{0\}$. **1.41.** 1) Непарна; 2) парна. **1.42.** 1) Непарна; 2) непарна. **1.43.** $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)\cup(1; +\infty)$. *Вказівка*. З'ясуйте, при яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{t-1}{t-4}=a$ має хоча б один додатний корінь. **1.44.** $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **1.47.** 2) $33\cdot 2^{x-4}$; 3) $13\cdot 3^{x-1}$; 4) $12\cdot 9^x$. **1.48.** 1) $(-\infty; -2)\cup(-2; 4)\cup(4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4]\cup[0; 4]$. **1.49.** 1) $(-\infty; 16]$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $(-1; 1)$. **1.50.** 1) $y>0$ при $x\in(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$, $y<0$ при $x\in((0; 1)$; 2) $y>0$ при $x\in(-2; -1)\cup(2; 5)$, $y<0$ при $x\in(-\infty; -2)\cup(-1; 2)\cup(5; +\infty)$.

2.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) -1; 2. **2.7.** 1) $-\dfrac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;

4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) −2; 6) $\frac{1}{10}$. **2.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **2.11.** 1) −1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) −1; 2; 6) 1. **2.12.** 1) −1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) −1; 5) 0; 6) 2. **2.13.** 1) 2; 2)−1; 1; 3) 2. **2.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **2.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; −3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **2.16.** 1) 1; 2) 3; 3) πk, $k\in\mathbb{Z}$. **2.17.** 1) 0; 1; 2) 0; −1; 3) −1; 4) 0. **2.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.19.** 2. **2.20.** 0. **2.21.** −2; 2. *Вказівка*. Числа $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **2.22.** −2; 2. **2.23.** 1) −1; 0; 1. *Вказівка*. Нехай $2^x+\frac{1}{2^x}=t$. Тоді $4^x+\frac{1}{4^x}=\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^2-2\cdot 2^x\cdot\frac{1}{2^x}=t^2-2$; 2) −1; 0; 1. **2.24.** $(-\infty;\ 2]\cup\{5\}$. **2.25.** $[-2;\ 3]$. **2.26.** $(1;3)\cup(3;+\infty)$. **2.27.** 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3. **2.28.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 3. **2.29.** $(-\infty;\ 0]\cup\{1\}$. **2.30.** $(-\infty;\ 0)\cup\left\{1,\ \sqrt{3}\right\}$. **2.31.** 1; 3. **2.32.** 1; 2. **2.33.** 5. **2.34.** $[-3;2)\cup(2;7]$. **2.35.** $\frac{1}{2}$.

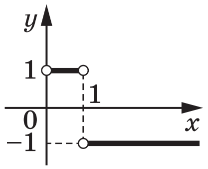
3.4. 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.5.** 1) −5; 2) 7. **3.6.** 1) $[0;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$. **3.7.** 1) $(-\infty;\ -2]$; 2) $(-\infty;\ 4]$. **3.8.** 1) $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; 2) $\left[-3;\frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5;-3)\cup(3;+\infty)$; 4) $(-\infty;\ 0)$; 5) $(0;\ 4]$; 6) $[-1;\ 2]$. **3.9.** 1) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$; 3) $(-\infty;-2)\cup$ $\cup(1;2)$; 4) $(-1;\ +\infty)$. **3.10.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2)$; 3) $(5;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1]$; 5) $(-\infty;\ 0]$; 6) $(-\infty;\ 1)$. **3.11.** 1) $(-\infty;\ 2)$; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) $(3;\ +\infty)$; 4) $(1;\ +\infty)$. **3.12.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1)$; 3) $[0;\ 1]$; 4) $(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$; 5) $(-\infty;\ 1]$; 6) $[1;\ +\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $[6;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$; 4) $[0;\ 2]$. **3.14.** 1) $(-\infty;2)\cup(2;3]$; 2) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **3.15.** 1) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};2\right]$; 2) $[-2;\ 5)$. **3.16.** 1) $\left(\frac{7}{3};+\infty\right)$; 2) $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$. **3.17.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $\left(-\infty;\frac{7}{4}\right]$. **3.18.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 1)$; 3) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; 4) $\{0\}$. **3.19.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **3.20.** $[0;\ 1]$. **3.21.** $[0;\ 4]$. **3.22.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$. **3.23.** 1) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;1]$. **3.24.** 1) $(-1;0)\cup(1;+\infty)$; 2) $(0;\ 2)$. **3.25.** $(-\infty;-3)\cup(0;3)$. **3.26.** $[0;\ 2]$. **3.27.** $[0;\ 1]$. **3.28.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(2;\ +\infty)$. **3.29.** $(-\infty;\ 3)$. **3.30.** $[3;+\infty)\cup\{-2\}$. **3.31.** $(-\infty;-2]\cup\{4\}$. **3.32.** Якщо $a\geqslant 1$, то $x=1$; якщо

$a < 1$, то $x \in [a;\ 1]$. **3.33.** Якщо $a < 1$, то $x \in (-\infty;\ a] \cup \{1\}$; якщо $a \geqslant 1$, то $x \in (-\infty;\ 1]$. **3.34.** 1,5. **3.35.** 1. **3.36.** $y = 8x + 1 - \frac{5\pi}{6}$.

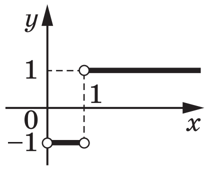
4.21. 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **4.22.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **4.23.** 1) −3; 2) −1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $-\frac{1}{2}$. **4.24.** 1) 1; 2) −1; 3) 0; 4) −1. **4.25.** 1) 4; 2) 60; 3) 180; 4) 20; 5) 0,1. **4.26.** 1) 72; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 10. **4.27.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) −3. **4.28.** 1) −5; 2) −2. **4.29.** 1) 2; 2) 4. **4.30.** 1) 6; 2) 9. **4.31.** 30. **4.32.** 21. **4.33.** $\log_a b$. **4.34.** $\log_b a$. **4.37.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **4.38.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **4.39.** lg 2. *Вказівка.* У кожному з логарифмів перейдіть до основи 10. **4.40.** $\frac{5}{2}$. **4.46.** $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. *Вказівка.* $\log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. **4.47.** *Вказівка.* У виразі $\log_{ab} x$ перейдіть до логарифма з основою a. **4.48.** −3. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\log_{ab} b + \log_{ab} a = 1$. **4.49.** $\frac{2a+b+1}{2b+1}$. **4.50.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{a+b}{1-a}$. **4.51.** $\frac{3-3a}{b+1}$. **4.52.** 1) $-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}$. **4.53.** $\frac{a+3b}{a-b}$. **4.54.** 1) $x_{\max} = -2$, $x_{\min} = 2$; 2) $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -\frac{7}{9}$.

5.19. 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **5.20.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **5.21.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1,3 < \log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8 < \log_{0,8} 0,7$; 4) $\log_{0,2} 0,1 > \log_{0,1} 0,2$. **5.23.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **5.24.** 1) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.27.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.29.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь; 3) 1 корінь. **5.30.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь. **5.31.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Вказівка.* Числа $\log_2 3$ і $\log_3 2$ є додатними та взаємно оберненими. **5.33.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\{0\}$; 4) усі числа виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 6) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 7) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 8) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 9) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 10) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **5.34.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

3) $\mathbb{R}$; 4) усі числа виду $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 5) $(-8;-2)\cup(-2;-1)$; 6) $(0;7)\cup(7;8)$; 7) $\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$; 8) $(0;4)\cup(4;5)$; 9) $(-1;1)\cup(1;2)$; 10) $[-5;0)\cup$ $\cup(0;2]$. **5.35.** 3) Див. рисунок; 4) див. рисунок.



До задачі 5.35 (3)



До задач 5.35 (4), 5.36 (3)

5.36. 3) Див. рисунок. **5.37.** 1) −2; 2) −1. **5.38.** 1) 3; 2) 1. **5.39.** Непарна. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}$. **5.41.** 1) 7; 2) коренів немає; 3) 1; 4) 15; 5) $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

6.5. 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 6; 5) 512. **6.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **6.7.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) −1. **6.8.** 1) 1; 2) 0; 1. **6.9.** 1) −2; 6; 2) 5; 3) коренів немає; 4) −2; 5) 1; 6) −1; 7) 0; 8) 6. **6.10.** 1) −2; 2) коренів немає; 3) 0; 13; 4) −2. **6.11.** 1) 7; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **6.12.** 1) 3; 2) $\log_2 3$; 3) 2. **6.13.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 4; 4) 5; 5) 8; 6) 4; 7) 4; 8) 7. **6.14.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) −1; 4; 5) 3; 6) 8. **6.15.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **6.16.** 1) 2; 2) $\log_3\left(3+\sqrt{11}\right)$. **6.17.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 10; 1000; 4) 25; $\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 8; 10^7-2. **6.18.** 1) −8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.19.** 1) 7; 2) коренів немає; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **6.20.** 1) Коренів немає; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **6.21.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) −5; −2; $\frac{\sqrt{89}-7}{2}$. **6.22.** 1) −6; −4; 2; 2) −1; 2; 3. **6.23.** 1) $\frac{1}{3}$; $3^{\frac{5}{9}}$; 2) 0,1; $\sqrt{10}$; 3) 4; 4) 8; $\frac{1}{8}$; 5) 100; 10^{-8}; 6) 5; $\frac{1}{625}$; 7) 10; 8) 10 000. **6.24.** 1) $\sqrt[3]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 2) 3; 9; 3) 1; 49; 4) 100; $\frac{1}{100}$; 5) 6; 6^{-7}; 6) 32. **6.25.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) 0,001; 10; 3) 3; 9; 4) 216; $\frac{1}{6}$. **6.26.** 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 16; $\frac{1}{4}$; 4) 1 000 000; 0,001. **6.27.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$;

4) 1; 9; 5) 1; 16; 6) $\frac{1}{2}$. **6.28.** 1) $\frac{1}{9}$; 3; 2) $\sqrt{3}$; 3; 3) 7; 4) 3. **6.29.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **6.30.** *Вказівка*. Розгляньте добуток $\log_a x \cdot \log_a y$. Скориставшись теоремою 4.3, можна записати: $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a y^{\log_a x}$ або $\log_a y \cdot \log_a x = \log_a x^{\log_a y}$. Звідси $\log_a y^{\log_a x} = \log_a x^{\log_a y}$; $y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$. **6.31.** 1) 1000; 2) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$. **6.32.** 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 7. **6.33.** 1) (1; 3); 2) (9; 3), (3; 9); 3) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 4) (3; 9), (9; 3); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 6) (2; 10), (10; 2). **6.34.** 1) (1,5; 2); 2) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 3) (5; 5); 4) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$; 5) (4; 1). **6.35.** 1) −1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Вказівка.* Розгляньте дане рівняння як квадратне відносно $\log_2 x$. **6.36.** 1) 8; 2) 3; $\frac{1}{27}$. **6.37.** 3; $\sqrt{2}$. **6.38.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1,5. **6.39.** 1) 2; 2) коренів немає. **6.40.** 1) 1; 2) 3. **6.41.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. **6.42.** Якщо $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 7$, то 1 розв'язок; якщо $-1 < a < 7$, то 2 розв'язки. **6.43.** Якщо $a \leqslant 2$ або $a \geqslant 11$, то 1 розв'язок; якщо $2 < a < 11$, то 2 розв'язки. **6.44.** $a = \frac{8}{3}$ або $a \leqslant \frac{7}{3}$. **6.45.** $a = -3$ або $a \geqslant -2{,}5$. **6.46.** 1) Зростає на проміжках $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ і $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -\frac{1}{4}$, $x_{\min} = 1$; 2) зростає на проміжку $[-2; 1]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -2$; 3) зростає на проміжках $(-\infty; -3)$ і $(-3; 0]$, $x_{\max} = 0$; 4) зростає на проміжку $[-1; 5]$, $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 5$. **6.47.** 1) $y = -8x + 18$; 2) $y = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

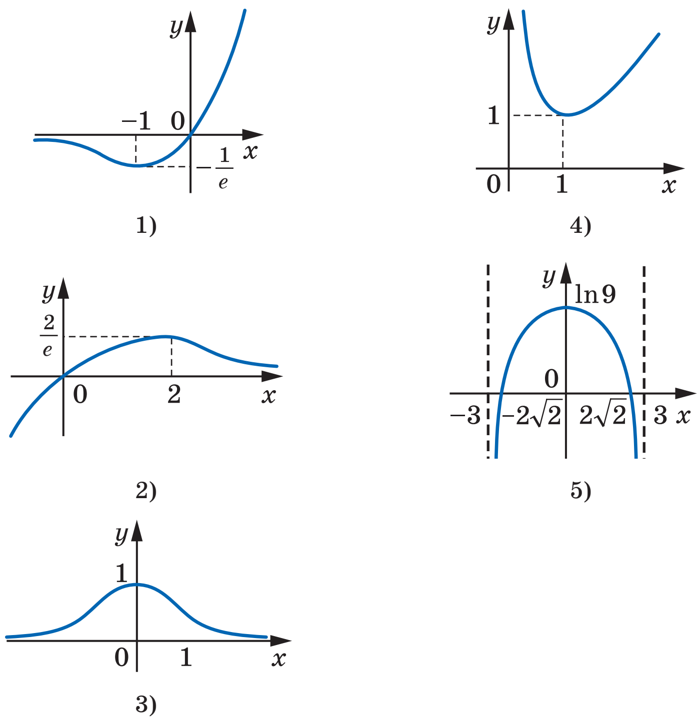
7.5. 1) 21; 2) 26. **7.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **7.7.** 1) $(1; +\infty)$; 2) (0; 1); 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **7.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [3; 5)$. **7.9.** 1) 6; 2) 2; 3) 2; 4) 5. **7.10.** 1) −1; 2) 3; 3) 1; 4) 0. **7.11.** 1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; 2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $(-6; -5) \cup (-5; -4)$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 5) $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; 7) $(-\infty; -2{,}5) \cup [2; +\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$. **7.12.** 1) (2; 3); 2) $[1; 2) \cup (4; 5]$; 3) $[-4; -3) \cup (0; 1]$; 4) $[0; 1) \cup (1; 2]$; 5) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$;

6) $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **7.13.** 1) (3; 6]; 2) (1; 3]; 3) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; 4) $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$; 5) $[-4;-3)\cup(1;3]$; 6) $[-5;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right]$. **7.14.** 1) (−3; −1); 2) (4; 5]; 3) (−5; 7]; 4) $\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup(4;13]$. **7.15.** 1) (5; +∞); 2) (1; +∞); 3) (0; 4); 4) (5; 7]; 5) $\left(-1;-\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty;-\frac{7}{5}\right]$. **7.16.** 1) [−1; 0); 2) (1; 2]; 3) [11; +∞); 4) $\left[\frac{14}{3};+\infty\right)$. **7.17.** 1) $\left[\frac{1}{5};5\right]$; 2) $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[9;+\infty)$; 3) (0,0001; 10); 4) $\left[\frac{1}{16};256\right]$; 5) $(0;4]\cup[8;+\infty)$; 6) $\left(0;\frac{1}{81}\right]\cup$ $\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **7.18.** 1) $\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[8;+\infty)$; 2) $(0;0{,}1]\cup[1000;+\infty)$; 3) (0,5; 4); 4) [0,04; 5]. **7.19.** 1) $\left(\frac{1}{128};2\right)$; 2) $(0;3^{-10}]\cup[3;+\infty)$; 3) $[0{,}001;1)\cup[100;+\infty)$; 4) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup(1;5]$. **7.20.** 1) $\left(0;\frac{1}{49}\right]\cup[7;+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216};6\right]$; 3) $(3;9]\cup[81;+\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4};1\right)\cup[2;+\infty)$. **7.21.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2};-2\right)\cup\left(3;\frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$; 3) [1,5; +∞); 4) (3; +∞). **7.22.** 1) $\left[-2;1-\sqrt{5}\right)\cup\left(1+\sqrt{5};4\right]$; 2) $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **7.23.** 1) (2; 3); 2) (4,5; 5); 3) (0; 2); 4) (3,5; 5); 5) $(0;1)\cup[2;+\infty)$; 6) (1,5; 2]. **7.24.** 1) $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup$ $\cup(1;+\infty)$; 2) $(1;3)\cup(4;+\infty)$; 3) $(1;2)\cup(2{,}5;4)$; 4) (1; 2]. **7.25.** $\left[\log_5\frac{1}{2};1\right)$. **7.26.** $\left[\log_3\frac{11}{20};3\right)$. **7.27.** 1) $(3;4]\cup\{5\}$; 2) $\left[-\frac{9}{8};-1\right)\cup\{2,-2\}$; 3) $\left[\frac{9}{5};2\right)\cup(2;3]\cup\{1\}$. **7.28.** 1) $(2;3]\cup\{5\}$; 2) $(5;+\infty)\cup\{4\}$. **7.29.** Якщо $a\leqslant 8$, то $x\in[3;+\infty)$; якщо $a>8$, то $x\in[\log_2 a;+\infty)\cup\{3\}$. **7.30.** Якщо $a\leqslant 9$, то $x=2$; якщо $a>9$, то $x\in[2;\log_3 a]$. **7.31.** $(0;1)\cup\left[\pi;\frac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{11\pi}{6};2\pi\right)$. **7.32.** $(0;1)\cup\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$. **7.33.** 1; −20. **7.34.** $y=-x+2$.

8.5. 1) 0; 2) −2; 3) −15 ln 3. **8.6.** 1) 1; 2) 1; 3) −5 ln 4. **8.7.** 1) −1; 2) 3,5; 3) $-\frac{5}{2\ln 5}$; 4) $\frac{1}{2}$. **8.8.** 1) $\frac{6}{13}$; 2) 16; 3) $-\frac{1}{2\ln 10}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. **8.9.** 1) $\frac{2}{e}$; 2) $\frac{2}{3}$. **8.10.** 1) −1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **8.11.** 1) $y=-2x+1$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=(2+2\ln 2)x-2\ln 2$; 4) $y=18x\ln 6+18\ln 6+6$; 5) $y=4x-1$; 6) $y=4x+4$; 7) $y=\frac{2x}{3\ln 3}-\frac{2}{3\ln 3}+1$;

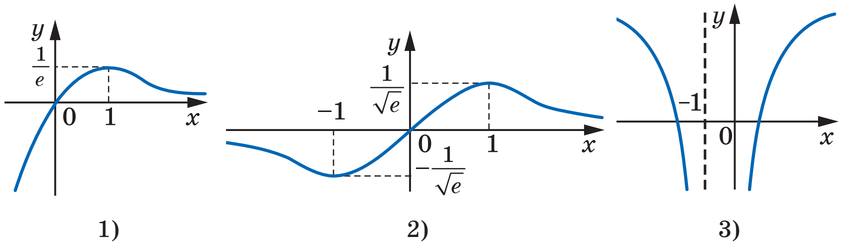
8) $y = x - 4 + 2\ln 2$. **8.12.** 1) $y = 5x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = 6x\ln 3 - 12\ln 3 + 3$; 4) $y = 4x - \ln 4$; 5) $y = 3x - 6$; 6) $y = \frac{x}{4\ln 2} - \frac{1}{4\ln 2} + 2$. **8.13.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.14.** $y = -1600$. **8.15.** 1) $y = ex$; 2) $y = 5x + 3$; 3) $y = -x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$; 4) $y = 3x - 3$. **8.16.** 1) $y = -7x + 7$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x + 1 + \ln 5$; 4) $y = -x$. **8.17.** 1) Зростає на проміжку $[0; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 2) зростає на проміжку $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $x_{min} = -\frac{1}{2}$; 3) зростає на проміжку $(-\infty; 0]$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$; 4) зростає на проміжку $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, спадає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = \frac{2}{\ln 2}$; 5) зростає на проміжку $(-\infty; 1]$, спадає на проміжку $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 6) зростає на проміжку $[0; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$; 7) зростає на проміжку $(-\infty; 2]$, спадає на проміжку $[2; +\infty)$, $x_{max} = 2$; 8) зростає на проміжку $[3; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{min} = 3$; 9) зростає на проміжку $(-\infty; 1]$, спадає на проміжку $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 10) зростає на проміжку $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 11) зростає на проміжку $(0; 1]$, спадає на проміжку $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$; 12) зростає на проміжку $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $x_{min} = e^{-\frac{1}{2}}$; 13) зростає на проміжку $[1; +\infty)$, спадає на проміжку $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 14) зростає на проміжку $[e; +\infty)$, спадає на проміжках $(0; 1)$ і $(1; e]$, $x_{min} = e$; 15) зростає на проміжку $(0; e^2]$, спадає на проміжку $[e^2; +\infty)$, $x_{max} = e^2$; 16) зростає на проміжках $[-1; 0)$ і $[1; +\infty)$, спадає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $(0; 1]$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 17) зростає на проміжках $(0; 1]$ і $[e; +\infty)$, спадає на проміжку $[1; e]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = e$; 18) зростає на проміжку $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \sqrt{10}\right]$, $x_{min} = \sqrt{10}$. **8.18.** 1) Зростає на проміжку $[-2; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; -2]$, $x_{min} = -2$; 2) зростає на проміжках $[-1; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $[0; 1]$, $x_{max} = 0$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 3) зростає на проміжку $[-1; 1]$, спадає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = -1$; 4) зростає на проміжку $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{min} = -\frac{1}{4}$; 5) зростає на проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, спадає на проміжку $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) зростає на проміжку $(-\infty; -2]$,

спадає на проміжку $[-2; +\infty)$, $x_{\max} = -2$; 7) зростає на проміжку $[1; +\infty)$, спадає на проміжку $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 8) зростає на проміжках $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $[1; +\infty)$, спадає на проміжку $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = 1$; 9) зростає на проміжку $(0; e]$, спадає на проміжку $[e; +\infty)$, $x_{\max} = e$; 10) зростає на проміжку $[1; +\infty)$, спадає на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 11) зростає на проміжках $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і $[e^2; +\infty)$, спадає на проміжку $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = e^2$; 12) зростає на проміжках $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$ і $[10; +\infty)$, спадає на проміжках $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і $[1; 10]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. **8.19.** 1) $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$; 2) e^2; 0; 3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2. **8.20.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **8.21.** Див. рисунок.



До задачі 8.21

8.22. Див. рисунок.



До задачі 8.22

8.25. $a \leqslant 0$. **8.26.** $a \geqslant 0$. **8.27.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.28.** 1) $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$; 2) $(-\infty; 0] \cup (7; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2] \cup$ $\cup [3; +\infty)$.

9.8. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **9.9.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=$ $=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **9.10.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$; 2) $y=\operatorname{tg} x+2\sqrt{3}$; 3) $y=\ln(-x)+4$; 4) $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}$. **9.11.** 1) $y=-\operatorname{ctg} x+1$; 2) $y=2\sqrt{x}+2$; 3) $y=\ln x-1$; 4) $y=x^2-24$. **9.15.** $\frac{1}{2}$. **9.16.** $-\frac{1}{2}$. **9.17.** 1) $(2; 2{,}12]$; 2) $[0{,}68; 0{,}7)$. **9.18.** 1) $3\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) 2.

10.5. 1) $F(x)=x-x^2+8$; 2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=-\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}+6{,}5$; 4) $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{3}$; 5) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 6) $F(x)=7\ln(x-4)+2\sqrt{x+4}$; 7) $F(x)=\sqrt{6x+1}+2$; 8) $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$; 9) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$; 10) $F(x)=$ $=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)$. **10.6.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=$ $=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{3}$; 5) $F(x)=8\sqrt{\frac{x}{2}-2}+4$; 6) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+3{,}5$; 7) $F(x)=\frac{1}{4}\ln(4x-3e^2)+5{,}5$; 8) $F(x)=-8\operatorname{ctg}\frac{x}{8}+5$. **10.7.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, первісна має ще один нуль, який дорівнює 1. **10.8.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **10.9.** 1) F_2; 2) F_2. **10.10.** F_1. **10.11.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **10.12.** $s(t)=2t^3+t-47$ або $s(t)=$

$=2t^3+t-67$. **10.13.** $y=2x^3-x^5+7$. **10.14.** $y=6\sqrt{x}+x-21$. **10.15.** 1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. *Вказівка.* Застосуйте формули пониження степеня; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. *Вказівка.* Застосуйте формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму; 3) $\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **10.16.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{18}\sin 9x+C$. **10.17.** $F_1(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{5}{6}$, $F_2(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-\frac{323}{24}$. **10.18.** $F_1(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{2}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4x-\frac{20}{3}$. **10.19.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **10.20.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **10.22.** 1) πn, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) πn, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.23.** 1) $(-\infty;-2{,}5)\cup(0;2{,}5]$; 2) $[-4;-2)\cup(3;+\infty)$; 3) $(-\infty;0)\cup(6;7]$; 4) $[-2;1)$.

11.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3e^2-1}{e^2}$; 10) 18. **11.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) 8 ln 2; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{72-2\ln 3}{\ln 3}$. **11.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e-6$; 11) $-\frac{1}{9}$; 12) 240. **11.9.** 1) -45; 2) 6; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{288}$; 7) $\frac{1}{3}\ln 10$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{78}{7}$. **11.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-1; 4) 4 ln 4 − 3; 5) 12 − 4 ln 4; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) 24 − 7 ln 7; 14) 2; 15) $\sqrt{2}-1$. **11.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) 6 − 3 ln 3; 7) 1; 8) 12 − 5 ln 5. **11.12.** 3. **11.13.** 3; −3. **11.14.** 2; −2. **11.15.** 6. **11.16.** $-\sqrt[4]{8}$. **11.17.** 1) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; 2) $(\log_{0,2}6;+\infty)$. **11.18.** $(1;+\infty)$. **11.19.** 1) $\frac{4-\pi}{12}$; 2) $\pi-2$; 3) 0; 4) $\frac{3e^2+8e-8}{8e^2}$. **11.20.** 1) $\frac{20-5\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0,2; 4) $e^2-e-\frac{1}{2}$. **11.21.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) 8 − 4 ln 2. **11.22.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4,5; 4) 9. **11.23.** 1) $5\frac{1}{3}$; 2) 1,5. **11.24.** 1) $2\frac{5}{6}$; 2) 3. **11.25.** $1\frac{1}{12}$. **11.26.** $\frac{1}{6}$. **11.27.** 1) $\frac{\pi}{2}$. *Вказівка.*

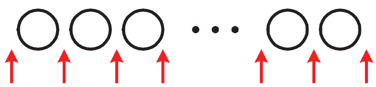
Використайте геометричний зміст визначеного інтеграла; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 4π; 4) $\frac{9\pi}{2}$; 5) 8,5; 6) 6,5. **11.28.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 3π; 3) 2π; 4) 5. **11.29.** 1. *Вказівка.* Зобразіть криволінійну трапецію, площа якої дорівнює шуканому інтегралу, і розгляньте функцію, обернену до підінтегральної функції. **11.30.** $\frac{\pi}{2}-1$. **11.31.** 1; 2; 4. **11.32.** 3.

12.1. 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **12.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **12.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$. **12.6.** 1) −1,5; 2) 1; 3) 1. **12.7.** 1) 1; 2) 2; 3) 83; 4) 1; 5) −58; 6) 4.

13.3. 1) $3 \cdot 2$; 2) $3 \cdot 3$. **13.4.** Коли Антон узяв яблуко. **13.5.** $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$. **13.6.** $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5$. **13.7.** $5 \cdot 5$, $5 \cdot 4$. **13.8.** 5!. **13.9.** 1) 4!; 2) 3!. **13.10.** 6^4. **13.11.** 5^3. **13.12.** $5 \cdot 6^3$. **13.13.** $4 \cdot 5^2$. **13.14.** $9 \cdot 10^6$. **13.15.** 2^4. **13.16.** 6^3. **13.17.** $6 \cdot 7 \cdot 4$. **13.18.** $6 \cdot 7 \cdot 3$. **13.19.** І спосіб. $4 \cdot 4!$; ІІ спосіб. $5! - 4!$. **13.20.** $4! \cdot 2$. **13.21.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **13.22.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **13.23.** $64 \cdot 49$. **13.24.** $4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4$. **13.25.** $5^5 + 4 \cdot 5^6$. **13.26.** $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$. **13.27.** 2^{10}. **13.28.** $(7! \cdot 4! \cdot 2!) \cdot 3!$. **13.29.** $(5!)^2$. **13.30.** $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4$. *Вказівка.* Кількість усіх п'ятицифрових чисел дорівнює $9 \cdot 10^4$. Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких є парними, дорівнює $4 \cdot 5^4$. **13.31.** $9 \cdot 10^4 - 5^5$. **13.32.** $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. *Вказівка.* Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, дорівнює $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **13.33.** $6^3 - 5^3$. **13.34.** $2 \cdot 9!$. *Вказівка.* Припустимо, що знайомі сіли на один стілець. Розмістити 9 людей на 9 стільцях можна 9! способами. Оскільки знайомі можуть сісти справа або зліва один від одного, то всього варіантів $2 \cdot 9!$. **13.35.** $5! - 2 \cdot 4!$. **13.36.** 1) $\frac{6!}{3!}$. *Вказівка.* Якщо вважати всі букви цього слова різними (це умовно можна записати так: $МО_1ЛО_2КО_3$), то отримаємо 6! різних слів. Проте слова, які відрізняються лише перестановкою букв $О_1$, $О_2$, $О_3$, насправді є однаковими; 2) $\frac{10!}{3!2!2!}$; 3) $\frac{13!}{2!2!2!}$. **13.37.** 140. *Вказівка.* Будь-який дільник даного числа має вигляд $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3}$, де k_1, k_2, k_3 — цілі числа, які задовольняють умови $0 \leqslant k_1 \leqslant 4$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 6$. Кількість дільників даного числа дорівнює кількості наборів, які можна скласти із чисел k_1, k_2, k_3 (при цьому набори, які відрізняються один від одного порядком слідування елементів, вважаються різними). Число k_1 можна вибрати 5 способами, число k_2 — 4 способами, число k_3 — 7 способами.

Отже, зазначений набір можна скласти $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ способами.
13.39. 1) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
3) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

14.1. 7!. **14.2.** 20!. **14.3.** 5!. **14.4.** A_{11}^2. **14.5.** A_{15}^3. **14.6.** A_{12}^6. **14.7.** A_{16}^3. **14.8.** A_{32}^2. **14.9.** C_{29}^5. **14.10.** C_n^4. **14.11.** C_{10}^3. **14.12.** $A_3^2 \cdot A_5^4$. **14.13.** $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. **14.14.** $C_{12}^3 \cdot C_{88}^7$. **14.15.** $7C_{12}^2 + 12C_7^2$. **14.16.** I спосіб. $C_9^3 + 15C_9^2 + 9C_{15}^2$; II спосіб. $C_{24}^3 - C_{15}^3$. **14.17.** $C_{30}^7 - C_{13}^7$. **14.18.** $C_{80}^6 - C_{65}^6$. **14.19.** $\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3!}$.
14.20. $\frac{C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5}{4!}$. **14.21.** C_{m+1}^n. *Вказівка.* Розмістимо в ряд m білих куль. Чорна куля може зайняти одне з $m + 1$ положень: крайня зліва, між будь-якими двома білими кулями, крайня справа (див. рисунок).



До задачі 14.21

До задачі 14.22

14.22. C_{16}^4. *Вказівка.* Розмістимо кулі в ряд. Чотири «перегородки» ділять ці кулі на п'ять груп (див. рисунок). Отже, кількість способів розкладання куль по ящиках дорівнює кількості способів розміщення 4 перегородок на 16 місцях. **14.23.** C_{n-1}^{k-1}. *Вказівка.* Запишемо $n = 1 + 1 + + 1 + \dots + 1$. Далі скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 14.22. **14.24.** 6. **14.25.** 4.

15.1. «синій», «червоний». **15.2.** 0, 1, 2, 3. **15.3.** $\Omega = \{М, А, Т, Е, И, К\}$. **15.4.** $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$. **15.5.** $\Omega = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0), (0; 2), (1; 1), (2; 0), \dots\}$. **15.6.** $\Omega = (0; +\infty)$. **15.9.** 1) $\bar{A} = Y$; 2) $A \cup B = T$; 3) $A \setminus B = \mathbb{Z}$. **15.14.** 1) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[0; 1)$; 5) $[1; 2]$. **15.17.** 26 %. **15.18.** 51 %. **15.19.** $\frac{6}{7}$.
15.21. 1) *Вказівка.* Подія A є об'єднанням несумісних подій $X = A \cap B$ і $Y = A \setminus B$, тому $P(A) = P(X) + P(Y) \geqslant P(X)$. Звідси випливає, що $0 \leqslant P(X) \leqslant$ $\leqslant P(A) = 0$. **15.22.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 15.1. **15.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{13}{36}$. **15.25.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{3}{8}$. **15.26.** 1) 35 %; 2) 25 %. **15.28.** 12 %. *Вказівка.* Нехай подія A полягає в тому, що даний абітурієнт — призер обласної олімпіади, а подія B — відмінник. Тоді

подія $A \cap B$ полягає в тому, що даний абітурієнт буде призером обласної олімпіади та відмінником в одній особі. Далі скористайтеся теоремою 15.1. **15.29.** 0,7. **15.30.** 0,67. **15.31.** 1) 0,03; 2) 0,01; 3) 0,05; 4) 0,04. **15.32.** 1) 40 %; 2) 20 %; 3) 10 %; 4) 30 %. **15.33.** Так. *Вказівка.* Розглянемо такі події: A — «вибраний випускник знає англійську та німецьку мови», B — «вибраний випускник знає німецьку та французьку мови», C — «вибраний випускник знає англійську та французьку мови». Далі доведіть, що для цих подій виконується рівність $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B \cap C)$, і скористайтеся тем, що $P(A \cup B \cup C) \leqslant 1$. **15.35.** 1) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

16.3. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0. **16.4.** $\frac{1}{4}$. **16.8.** 1) 0,2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,4. **16.9.** 1) 0,5; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{12}$. **16.12.** $\frac{8}{29}$. **16.13.** $\frac{10}{11}$. **16.14.** 1) $\frac{7}{9}$; 4) 1. **16.15.** 1) $\frac{5}{7}$; 4) $\frac{1}{2}$. **16.16.** $\frac{14}{15}$. **16.17.** 75 %. **16.18.** 82 %. *Вказівка.* Нехай подія H_1 означає, що вибрана ручка синя, а подія H_2 — що ручка червона. Далі скористайтеся формулою повної ймовірності $P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2)$. **16.19.** 39,2 %. **16.20.** 2,4 %. **16.21.** $\frac{10}{27}$. **16.22.** $\frac{1}{3}$. **16.23.** 0,648 усіх цукерок треба віддати Світланці, решту — Сергійку. *Вказівка.* Складіть дендрограму, як міг би продовжуватися цей матч, і знайдіть ймовірність того, що в матчі перемогла б Світланка.

17.1. 24 %. **17.3.** $p(1-p)^5$. **17.5.** *Вказівка.* Оскільки подія B є об'єднанням несумісних подій $\bar{A} \cap B$ і $A \cap B$, то $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$. **17.7.** Ні. *Вказівка.* Якщо A і B — несумісні й незалежні події, то $P(A \cap B) = 0$ і $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. **17.9.** 1) 14 %; 2) 9 %; 3) 6 %; 4) 36 %; 5) 41 %; 6) 55 %. **17.10.** 1) 72,9 %; 2) 24,3 %; 3) 2,7 %; 4) 0,1 %. **17.11.** 1) 6,25 %; 2) 40,96 %; 3) 10,24 %; 4) 40,96 %. **17.12.** $2p - p^2$. **17.13.** $1 - (1-p)^4$. **17.14.** $2p^3 - p^6$. У разі використання схеми, зображеної на рисунку 17.8, ймовірність безвідмовної роботи збільшиться (не зменшиться при $p = 0$ або $p = 1$) і дорівнюватиме $p^3(2-p)^3$. **17.15.** $(1-(1-p_1)^2)(1-(1-p_2)^3)p_3$. **17.17.** 10 запитань. **17.18.** $P(A) = \frac{A_{30\,000}^{1} \cdot A_{470\,000}^{14}}{A_{500\,000}^{15}}$, $P(A) \approx \frac{3}{50}\left(\frac{47}{50}\right)^{14} \approx 2{,}5\,\%$. **17.19.** 8 %.

18.1. Елементарним наслідком є список відсутніх, тобто будь-який набір прізвищ учнів та учениць класу. Випадкова величина, яку розглядає заступник директора, дорівнює кількості відсутніх на уроці (кількості прізвищ у списку відсутніх). Множина значень випадкової величини складається із цілих невід'ємних чисел, які не перевищують кількості учнів та учениць у класі. **18.7.** 2) 0,1; 3) 0; 4) 0,5. **18.8.** Ні. **18.9.** 3) $\frac{1}{30}$. **18.10.** 3) 30 %; 4) 35 %; 5) 72 %. **18.11.** 1) 0,11; 2) 0,53; 3) 1; 4) 0,78. **18.12.** 1) Див. табл. 1; 4) див. табл. 2.

Таблиця 1

Значення $x+1$	2	8	11	14
Ймовірність, %	40	30	20	10

Таблиця 2

Значення $(x-7)^2$	0	9	36
Ймовірність, %	30	20	50

18.13. 1) Див. табл. 3; 4) див. табл. 4.

Таблиця 3

Значення $y-4$	−7	−3	−2	−1
Ймовірність, %	15	30	25	30

Таблиця 4

Значення $(2-y)^2$	0	1	25
Ймовірність, %	25	60	15

18.14. 1) 0,2; 3) 0,6; 4) 0,8. **18.16.** Див. табл. 5.

Таблиця 5

Значення z	0	2	6
Ймовірність	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

18.17. Див. табл. 6.

Таблиця 6

Значення z	0	1	2	3	4	5	6
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

18.18. Див. табл. 7.

Таблиця 7

Значення x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ймовірність	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

18.20. Див. табл. 8.

Таблиця 8

Значення x	1	2	3	4
Ймовірність	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

18.21. Див. табл. 9.

Таблиця 9

Значення x	1	2	3	4	5
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

18.22. Див. табл. 10.

Таблиця 10

Значення x	1	2	3
Ймовірність	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

19.1. 1) $M(y) = 2$; 2) $M(y) = 10$; 3) $M(y) = -4$; 4) $M(y) = 3$. **19.4.** $M(t_C) = 10\,°C$. **19.5.** 2. **19.6.** 5. **19.9.** Ні. **19.10.** 0. **19.11.** *Вказівка*. Знайдіть математичне сподівання виграшу. **19.13.** 200 грн. **19.14.** 1,5. **19.15.** 1,44. **19.16.** 3. **19.17.** $\frac{55}{9}$. **19.19.** 0,5. **19.20.** 2,5. **19.21.** 3) $M(x) \approx 4$. **19.22.** 2) 1,2.

20.3. Моду. **20.4.** Медіану та моду. **20.10.** 2,21875 ≈ 2,2 м'яча за гру. **20.16.** 1) 7,9; 2) 7,7. **20.17.** 1) 50,08 %; 2) 49,68 %. **20.18.** 1) 1,4 год/добу; 2) 1,35 год/добу. **20.19.** 1) 6; 2) 3. **20.20.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) 1.

21.6. 5) Може звузитися на число -1, тобто може бути загублено корінь $x = -1$. Якщо $-1 \notin D(f)$ або $f(-1) = 1$, то множина коренів не зміниться; 7) якщо $-1 \in D(f) \cap D(g)$ і $f(-1) = g(-1)$, то буде отримано сторонній корінь -1; якщо $-1 \notin D(f) \cap D(g)$ або $f(-1) \neq g(-1)$, то множина коренів не зміниться. **21.7.** 1) Коренів немає; 2) 0. **21.8.** 1) 0,6; 2) 0. **21.9.** 1) $\frac{\sqrt{29}-1}{2}$; 2) 1,5. **21.10.** 1) $\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$; 2) 7. **21.11.** 1) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **21.12.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **21.13.** 0, ± 1, $\pm\frac{4}{3}$. **21.14.** $\pm\frac{5}{2}$, ± 1. **21.15.** 1) 5. *Вказівка.* Помноживши обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{2x^2-7x+10}$, отримаємо: $6(x-1)=$ $=3(x-1)\left(\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{2x^2-7x+10}\right)$. Зазначимо, що число 1 не є коренем початкового рівняння. Далі додамо почленно початкове рівняння та рівняння $\sqrt{2x^2-x+4}-\sqrt{2x^2-7x+10}=2$; 2) -1. *Вказівка.* Помножте обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x+1}-1$. **21.16.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2. **21.17.** 1) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $4\pi+8\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos x=1,\\ \cos\frac{3x}{2}=1,\\ \sin\frac{x}{8}\neq 0.\end{cases}$ **21.18.** 1) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $3\pi+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **21.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **21.20.** $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **21.21.** $k,\ k\in\mathbb{N},\ k>1$. **21.22.** $1+4k,\ k\in\mathbb{N}$. **21.23.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **21.24.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **21.25.** Коренів немає. **21.26.** $\frac{3}{5}$. **21.27.** $a=1$. *Вказівка.* Оскільки $9-|x-1|\leqslant 9$, то $\log_3(9-|x-1|)\leqslant 2$. Оскільки $x^2-2x+5=$ $=(x-1)^2+4\geqslant 4$, то $\log_2(x^2-2x+5)\geqslant 2$. Тоді ліва та права частини першого рівняння мають набувати значення, що дорівнює 2. Звідси $x=1$ — єдиний корінь першого рівняння. Для рівносильності рівнянь необхідно, щоб $x=1$ був єдиним коренем другого рівняння. Звідси $a^2-(a+1)+4a-3=0$; $\left[\begin{array}{l}a=-4,\\ a=1.\end{array}\right.$ При $a=-4$ друге рівняння набуває вигляду $16x^2+3x-19=0$. Це рівняння має два корені. При $a=1$ друге рівняння набуває вигляду $x^2-2x+1=0$. Воно має єдиний корінь $x=1$. **21.28.** $a=1$. *Вказівка.* Множиною розв'язків нерівності $\log_2(3-x)+\log_2 2x\geqslant 2$ є відрізок [1; 2]. Для рівносильності нерівності та рівняння необхідно, щоб $x=1$ був коренем рівняння. Підставивши в рівняння $x=1$, отримуємо: $a=a^2$. Звідси

$a=0$ або $a=1$. При $a=0$ маємо: $|x-1|=0$. Відрізок [1; 2] не є розв'язком цього рівняння. Таким чином, $a=0$ не задовольняє умову задачі. При $a=1$ отримуємо рівняння $|x-1|+|x-2|=1$. Коренями цього рівняння є всі числа відрізка [1; 2]. *Зауваження*. Якщо замість $x=1$ підставити $x=2$, то отримаємо $a^2=1$ і замість рівняння $|x-1|=0$ доведеться з'ясовувати ситуацію з рівнянням $|x-1|-|x-2|=1$. Це, звісно, складніше, але розв'язувати це рівняння не обов'язково, достатньо зауважити, що $x=1$ не є його коренем.

22.1. 1) 1; 7; $3\pm\sqrt{10}$; 2) 4; $1+\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 3; 5) 0; 6) −3. **22.2.** 1) −2; −1; 3; 4; 2) −12; −4; 2; 3) 1; 4; 4) 4; 5) $\pm\sqrt{3}$; 6) 4. **22.3.** 1) −2; −1; 3; 2) 1; 3; 3) −1; 2; −3. **22.4.** 1) −2; 2) 1; −2. **22.5.** 1) −6; −4; −1; 1; 2) −1; −3; 1; 3) −1; 1; 2; 4; 4) −3; 1. **22.6.** 1) −6; −2; $-4\pm2\sqrt{5}$; 3) −2; 1; 3) −2; −1; 0; 1; 4) −3; 0; $\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. **22.7.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **22.8.** 1) −2; −1; 2; 3; 2) πn, $n\in\mathbb{Z}$. **22.9.** 2; 9. **22.10.** 1) −1; 12. *Вказівка*. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)$; 2) $-4\pm\sqrt{21}$. **22.11.** 1) $-5\pm\sqrt{95}$; 2) $-4\pm\sqrt{5}$. **22.12.** 1) −2; $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Подайте дане рівняння у вигляді $\left(2x-5+\frac{2}{x}\right)\left(2x+7+\frac{2}{x}\right)=-20$; 2) −6; −4; $\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$. **22.13.** 1) −8; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$; 2) −4; 5; $-5\pm3\sqrt{5}$. **22.14.** 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$. *Вказівка*. Заміна $x+\frac{1}{x}=t$; 2) $-3\pm\sqrt{15}$. **22.15.** 1) 1; $\frac{-11\pm\sqrt{85}}{6}$; 2) $5\pm\sqrt{31}$; $\frac{3\pm\sqrt{159}}{5}$. **22.16.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$. *Вказівка*. Подайте дане рівняння у вигляді $\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+$ $+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1$; 2) 3; 5; $9\pm\sqrt{66}$. **22.17.** 1) $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; 2) 1; 4. **22.18.** 1) 2; 4; −1; $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Поділіть обидві частини рівняння на $(x-1)^2$; 2) 3; $\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$. **22.19.** 1) $-3\pm\sqrt{3}$; $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 2) 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. **22.20.** 1) $\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) $\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Помножте праву частину даного рівняння на $\sin^2 x+\cos^2 x$. **22.21.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{7}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **22.22.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $5\left(3\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)+$

$+2\left(9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5=0$. Зробіть заміну $3\cos x+\frac{1}{\cos x}=y$, тоді $9\cos^2 x+$ $+\frac{1}{\cos^2 x}=y^2-6$. **22.23.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $(\mathrm{tg}^3\, x+\mathrm{ctg}^3\, x)+(\mathrm{tg}^2\, x+$ $+\mathrm{ctg}^2\, x)-4=0$. Зробіть заміну $\mathrm{tg}\, x+\mathrm{ctg}\, x=y$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{17}-5}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **22.24.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Виконайте заміну $\sin x+\cos x=t$. **22.25.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **22.26.** 1) 8; 2) 10. *Вказівка*. Заміна $\sqrt[3]{x-2}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. Тоді $a^3-b^2=-1$. Інше розв'язання можна отримати, якщо врахувати зростання функції $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}$. **22.27.** 1) $-\frac{17}{5}$; $\frac{63}{5}$; 2) 1; 2; 10. **22.28.** 1) 4; 2) коренів немає. **22.29.** 1) 3; 2) коренів немає. **22.30.** 1) $4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **22.31.** 1) $6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{9\pi}{4}+3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **22.32.** 2. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $0\leqslant\log_2(\cos^2\pi x+1)\leqslant 1$, $4x-x^2-3\leqslant 1$. **22.33.** 2. **22.34.** 1) 2; 2) 4. **22.35.** 1) 9; 2) 2. **22.36.** 0. **22.37.** 0. **22.38.** $a\in\left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right]$. *Вказівка.* Легко встановити, що рівняння $\mathrm{tg}\,\pi x-1=0$ на відрізку [0; 1] має єдиний корінь $x=\frac{1}{4}$. Рівняння $x^2-2(a+1)x+6a-3=0$ має такі корені: $x_1=3$, $x_2=2a-1$. Маємо: $x_1\notin[0;1]$. Необхідно, щоб $x_2\in[0;1]$, тобто $0\leqslant 2a-1\leqslant 1$. Звідси $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Для того щоб початкове рівняння на відрізку [0; 1] мало рівно два різних корені, потрібно до умови $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ додати вимогу $x_2\neq\frac{1}{4}$, тобто $a\neq\frac{5}{8}$. Здавалося б, розв'язання завершено. Проте коли $x_2=\frac{1}{2}$, тобто $a=\frac{3}{4}$, то корінь x_2 не входить до області визначення початкового рівняння. Отже, виникає ще одне обмеження: $a\neq\frac{3}{4}$. **22.39.** $a\in(-\infty;-2]\cup\{-1,0\}\cup$ $\cup[1;+\infty)$. *Вказівка.* Рівняння має такі корені: 1; 2; $a+2$. Область визначення рівняння — усі значення x, які задовольняють умову $\frac{\pi x}{3}\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, тобто на розглядуваному проміжку рівняння не визначене при $x=0$

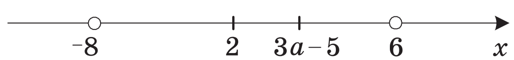
і $x=3$. Корені 1 і 2 належать проміжку [0; 3]. Отже, два різних корені вже наявні. Для того щоб корінь $a+2$ не став третім коренем на даному проміжку, має виконуватися одна з умов: 1) корінь $a+2$ дорівнює одному з коренів 1 або 2, тобто $a+2=1$ або $a+2=2$, звідси $a=-1$ або $a=0$; 2) значення $a+2$ належить даному проміжку, проте не входить до області визначення початкового рівняння, тобто $a+2=0$ або $a+2=3$, звідси $a=-2$ або $a=1$; 3) корінь $a+2$ не належить розглядуваному проміжку, тобто $a+2<0$ або $a+2>3$, звідси $a<-2$ або $a>1$.

23.1. 1) $\left[\frac{5}{3};5\right]$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(3;+\infty)$. **23.2.** 1) $\left(\frac{2}{7};\frac{2}{5}\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **23.3.** 1) $(-1-\sqrt{5};-2)\cup(-2;-1+\sqrt{5})$; 2) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; 3) $(-5;3+2\sqrt{2})$; 4) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **23.4.** 1) $\left(-\frac{3}{4};1\right)$; 2) $(-\infty;-3]\cup[1;5)\cup(5;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. **23.5.** 1) $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{15}}{2}\right)$; 2) $(2;2\sqrt{2}]$; 3) $[-4;-3]\cup\left[-\frac{1}{3};0\right]$; 4) розв'язків немає. **23.6.** 1) $[9;+\infty)$; 2) $\left[0;\frac{1}{2}\right)$; 3) [2; 4]; 4) $\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$. **23.7.** 1) $\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$; 2) $(-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$; 3) [0; 4]. **23.8.** 1) $\left[-2;-\frac{8}{5}\right)\cup(0;2]$; 2) $(-\infty;-3]$; 3) [2; 3]. **23.9.** 1) Розв'язків немає; 2) $(-\infty;-10]\cup[1;+\infty)$; 3) $(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$. **23.10.** 1) $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$; 2) $[-6;-4+\sqrt{2}]$; 3) $(-\infty;-3]\cup(0;+\infty)$.

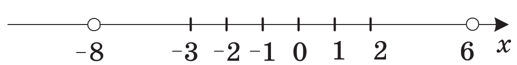
23.11. 1) 4; 2) [−4; −1]; 3) $(-\infty;-8]\cup\{1,4\}$; 4) $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)\cup\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$. **23.12.** 1) [3; 12]; 2) $[7;+\infty)$; 3) $(-\infty;-3]\cup\{2;1\}$; 4) $\left(-\infty;-\frac{17}{2}\right]\cup[1;10)$. **23.13.** 1) $\left[-5;-\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$; 2) $\left[\frac{1}{2};1\right]$. **23.14.** 1) $(2;+\infty)$; 2) 5.
23.15. 1) $\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\cup\left(\operatorname{arctg}2+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **23.16.** 1) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\operatorname{arctg}2+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
23.17. 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(-\pi+2\pi k;-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\right.$

$+2\pi k; 2\pi k\Big)\cup\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\Big), k\in\mathbb{Z}$; 3) $\Big(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\Big), k\in\mathbb{Z}$; 4) $\Big[2\pi k; \frac{\pi}{3}+$ $+2\pi k\Big]\cup\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\Big]\cup\Big[\frac{4\pi}{3}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\Big), k\in\mathbb{Z}$. **23.18.** 1) $\Big(-\pi+2\pi k;$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi k\Big)\cup\Big(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\Big)\cup\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\Big), k\in\mathbb{Z}$; 2) $\Big(\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\Big)\cup\Big(\frac{\pi}{2}+\pi k;$ $\frac{2\pi}{3}+\pi k\Big), k\in\mathbb{Z}$; 3) $\Big(2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\Big]\cup\Big[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\Big)\cup\Big[\frac{3\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\Big], k\in\mathbb{Z}$.
23.19. 1) $[3; 11]\cup\{2\}$; 2) $(0; 21]\cup\{-21\}$. **23.20.** 1) $[2; 10]\cup[37; +\infty)$; 2) $[-6; 0)\cup\{6\}$. **23.21.** 1) $[-79; 83]$; 2) $[-5; 11]$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $[-2; +\infty)$; 5) $[1; +\infty)$. **23.22.** 1) $[-57; 71]$; 2) $[-31; 33]$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$. **23.23.** $\Big(\frac{2}{3}; 1\Big]$.

Вказівка. Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2-(3a-3)x+6a-10\leqslant 0, \\ -x^2-2x+48>0, \end{cases}$ звідси $\begin{cases} (x-2)(x-(3a-5))\leqslant 0, \\ -8<x<6. \end{cases}$ Розгляньте такі можливості. 1) $3a-5>2$. Тоді множиною розв'язків системи є перетин проміжків $[2; 3a-5]$ і $(-8; 6)$ (див. рисунок). Оскільки проміжок $[2; 6)$ містить тільки 4 цілих числа, то перетин зазначених проміжків не може містити 5 цілих чисел, отже, у цьому випадку значень параметра, які задовольняють умову задачі, не існує. 2) $3a-5<2$. Тоді множиною розв'язків системи є перетин проміжків $[3a-5; 2]$ і $(-8; 6)$. Маємо: $-8<3a-5<2$ (див. рисунок). Тоді множиною розв'язків нерівності є відрізок $[3a-5; 2]$. Умова задачі виконуватиметься, якщо $-3<3a-5\leqslant -2$, звідси $\frac{2}{3}<a\leqslant 1$. 3) Якщо $3a-5=2$, то система може мати єдиний розв'язок (при $3a-5=2$), тому цей варіант очевидно не може задовольняти умову задачі.



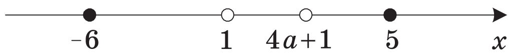
До задачі 23.23 (1)



До задачі 23.23 (2)

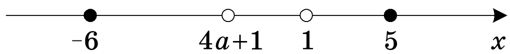
23.24. $\Big[-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}\Big]$. *Вказівка.* Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} \log_{12}(6-x)+\log_{12}(7-x)-1\geqslant 0, \\ x^2-2(2a+1)x+4a+1>0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} -6\leqslant x\leqslant 5, \\ (x-1)(x-(4a+1))>0. \end{cases}$ Розглянемо дві можливості.

1) $1 \leqslant 4a+1 \leqslant 5$ (див. рисунок).



До задачі 23.24 (1)

У цьому разі множина розв'язків системи нерівностей містить проміжок $[-6; 1)$, а отже, значень a, які задовольняють умову задачі, не існує.
2) $-6 \leqslant 4a+1 < 1$ (див. рисунок).



До задачі 23.24 (2)

У цьому разі множиною розв'язків системи нерівностей є множина $[-6; 4a+1) \cup (1; 5]$. Проміжок $(1; 5]$ містить 4 цілих числа. Тоді проміжок $[-6; 4a+1)$ повинен містити одне ціле число. Маємо: $-6 \leqslant 4a+1 \leqslant -5$. Звідси $-\frac{7}{4} \leqslant a \leqslant -\frac{3}{2}$.

24.1. 1) $(1; 1)$, $(1; -1)$; 2) $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; \sqrt{5})$, $(-2; -\sqrt{5})$, 3) $(-3; \sqrt{7})$, $(-3; -\sqrt{7})$. **24.2.** 1) $(1; 1)$, $(2; 0)$; 2) $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 2)$; 3) $(2; 1)$, $(-2; 1)$. **24.3.** 1) $\left(2; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(2; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$, $(-1; -3)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$; 3) $(-4; 6)$, $(-4; -6)$, $\left(\frac{4}{7}; 2\frac{4}{7}\right)$; 4) $(-1; 4)$, $(4; -1)$, $(-5; 2)$, $(2; -5)$. **24.4.** 1) $(2; 3)$, $(0; 1)$, $(1{,}5; 1)$; 2) $(1; 1)$, $\left(1; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(1; \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)$, $(0; 2)$, $(-6; 2)$; 3) $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{2}\right)$; 4) $(2; -1)$, $(-1; 2)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$. **24.5.** 1) $(6; 2)$, $(-6; -2)$; 2) $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 3) $(9; 12)$, $(-12; -9)$. *Вказівка*. Виконайте заміну $x - y = u$, $xy = v$; 4) $\left(8; \frac{8}{5}\right)$, $\left(-4; \frac{4}{7}\right)$. **24.6.** 1) $(-1; 2)$, $(-2; 1)$; 2) $(2; 3)$, $(-2; -3)$; 3) $(11; 1)$; 4) $(2; 1)$, $(6; -3)$, $\left(6+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3}\right)$, $\left(6-2\sqrt{3}; -2+2\sqrt{3}\right)$. **24.7.** 1) $(-2; 0)$, $(-2; -1)$, $(1; 0)$, $(1; -1)$; 2) $(3; 2)$, $(-3; -2)$; 3) $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $\left(12; -\frac{7}{2}\right)$, $\left(-12; \frac{7}{2}\right)$; 4) $(-1; -1)$. *Вказівка*. Відніміть від першого рівняння системи друге рівняння; 5) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **24.8.** 1) $(2; -1)$,

$(-1;\ t)$, де t — будь-яке число; 2) $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$; 3) $(1;\ 1)$, $(-1;\ -1)$, $\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$; 4) $(2;2)$; 5) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **24.9.** 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right);\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{2}-k;\frac{1}{4}+\frac{n}{2}+k\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$. **24.10.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(\pm\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k);\mp\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n+k);\mp\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(n-k)\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$. **24.11.** 1) $(-1;\ 1)$; 2) $(-1;\ 1)$, $\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$; 3) $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$; 4) $(3;\ -1)$, $\left(-6\frac{3}{8};-4\frac{3}{4}\right)$. *Вказівка.* Розкладіть ліві частини кожного з рівнянь на множники; 5) $(2;\ 2)$, $\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$; 6) $(4;\ 2)$, $(-4;\ -2)$. **24.12.** 1) $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$; 2) $\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$; 3) $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$; 4) $(1;\ 1)$, $(7;\ -2)$. *Вказівка.* Почленно поділіть ліві і праві частини рівнянь системи, попередньо перетворивши перше рівняння до вигляду $(x+3y)(x+1)=8$, а друге — до вигляду $(x+3y)(y-2)=-4$; 5) $(1;\ 3)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; 6) $(3;\ -1)$, $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$. **24.13.** 1) $\left(\frac{2}{3};-2\right)$. *Вказівка.* Виконайте заміну $\sqrt{9x^2+2y+1}=t$; 2) $(2;\ -2)$. **24.14.** $(2;\ 3)$, $\left(-\frac{14}{9};\frac{17}{27}\right)$. **24.15.** $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. *Вказівка.* Виконайте заміну $\frac{x}{y}=t$. **24.16.** 1) $(-2;\ 3)$, $(12;\ 24)$. *Вказівка.* Виконайте заміну $\sqrt{4-x+y}=u$, $\sqrt{9-2x+y}=v$; 2) $(2;\ 3)$, $(-2;\ -3)$, $(-2;\ 3)$, $(2;\ -3)$. **24.17.** 1) $(-10;\ 26)$, $(4;\ 5)$; 2) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. **24.18.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi m;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$. **24.19.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n);\pi(k-n)\right)$, $\left(\pi(k+n);-\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k+n);\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(n-3k)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$. **24.20.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left((-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$;

2) $\left((-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k; 2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.21.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k;\ 2\pi+4\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+4\pi k; 2\pi+4\pi n\right)$, $\left(2\pi+4\pi k; \frac{\pi}{2}+4\pi n\right)$, $\left(2\pi+4\pi k; -\frac{\pi}{2}+4\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. *Вказівка*. Перетворіть перше рівняння: $2\cos^2 x-1+2\cos^2 y-1=1$; $\cos^2 x+\cos^2 y=1{,}5$ і т. д.; 2) $\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\pi}{2}(2k+n);\right.$ $\left.(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)+\right.$ $+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\pi}{2}(2k+n);$ $(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)+$ $\left.+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.22.** 1) (1; 2), (−1; −2); 2) (4; 2), (−4; −2); 3) (1; 1), (−1; −1), $\left(-\frac{25}{3\sqrt{149}}; \frac{1}{\sqrt{149}}\right)$, $\left(\frac{25}{3\sqrt{149}}; -\frac{1}{\sqrt{149}}\right)$; 4) $\left(-\frac{8}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, (3; 4), (−3; −4). **24.23.** 1) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, (2; −1), (−2; 1); 2) (1; 2), (−1; −2); 3) (2; 1), (−2; −1); 4) (2; −1), (−2; 1), $\left(-\frac{5}{\sqrt{78}}; \frac{23}{\sqrt{78}}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{78}}; -\frac{23}{\sqrt{78}}\right)$. **24.24.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (2; 1). **24.25.** (2; 1), (−1; −2). **24.26.** 1) (3; 4), (4; 3), $\left(11+2\sqrt{31}; 11-2\sqrt{31}\right)$, $\left(11-2\sqrt{31}; 11+2\sqrt{31}\right)$; 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (0; −3), (−3; 0). **24.27.** 1) (2; 2), $\left(-2-2\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2+2\sqrt{2}; -2-2\sqrt{2}\right)$. *Вказівка*. Розкрийте дужки в першому рівнянні системи; 2) (−2; 3), (3; −2). **24.28.** 1) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (2; −1), (−1; 2), (−2; −1), (−1; −2); 2) (2; 1), (1; 2), (−2; −1), (−1; −2), (0; 2), (2; 0), (0; −2), (−2; 0); 3) (2; −1), (−1; 2), (−2; 1), (1; −2). **24.29.** 1) (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1); 2) (−3; −2), (−2; −3), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **24.30.** (1; 0), (−1; 0). *Вказівка*. Перемноживши відповідно ліві і праві частини рівнянь системи, отримаємо рівняння $x^8=1$, яке є наслідком даної системи. **24.31.** (1; 0). **24.32.** 1) (4; 2), (−4; −2). *Вказівка*. Перемноживши рівняння системи, отримаємо рівняння, лінійне відносно xy; 2) (3; 1), $\left(-32; \frac{1}{8}\right)$. **24.33.** 1) (1; 2), (−1; 2); 2) (1; 1), (−1; −1), (1; −1), (−1; 1). **24.34.** (1; −2), (−2; 1), (−1; 2), (2; −1). *Вказівка*. Перше рівняння системи розкладіть на

множники. **24.35.** (1; 1), (−1; −1), $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **24.36.** 1) (5; 4), (−5; −4), (15; −12), (−15; 12); 2) (5; 3), (5; −3), $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$.

Вказівка. Перепишемо перше рівняння системи так: $x^2 - y^2 + (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 20$. Нехай $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = t$. Тоді $t^2 + t - 20 = 0$. Звідси $t = -5$ або $t = 4$. Маємо: $\left[\begin{array}{l} (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = -5, \\ (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\sqrt{(x+y)(x-y)} = -5, \\ x+y < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{(x+y)(x-y)} = 4, \\ x+y > 0; \end{cases} \end{array}\right.$ 3) (−1; −1), (−1; 3), (2; −1), (2; 3). *Вказівка*. Виконайте заміну $x^2 - x = u$, $y^2 - 2y = v$; 4) (1; 1). *Вказівка*. Поділіть обидві частини другого рівняння системи на xy. **24.37.** 1) (5; 4), (5; −4), $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, (1; 3), $\left(-\frac{5+\sqrt{11}}{4}; 2+\sqrt{11}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{11}-5}{4}; 2-\sqrt{11}\right)$. **24.38.** 1) $(\sqrt{6}; -2\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6}; 2\sqrt{6})$. *Вказівка*. Розгляньте перше рівняння системи як квадратне відносно x і доведіть, що $y^2 \geqslant 24$; 2) (1; −1). *Вказівка*. Розглянувши кожне рівняння системи як квадратне відносно x, можна показати, що y задовольняє умову $\begin{cases} y^4 \leqslant 1, \\ y^3 \leqslant -1; \end{cases}$ 3) (2; 2). **24.39.** 1) $\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; 2) (−2; −1); 3) (2; −1). **24.40.** 1) (2; 1), (2; −1). *Вказівка*. Запишіть перше рівняння системи так: $y^2 = (x-2)^2 + 1$. Тоді зрозуміло, що $y^2 \geqslant 1$; 2) (8; −1). *Вказівка*. З першого рівняння системи випливає, що $x - y \leqslant 9$, а з другого рівняння — $x - y \geqslant 9$. **24.41.** 1) (2; 3), (−2; 3); 2) (3; 2). **24.42.** 1) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$,

$\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.43.** 1) $(\pi k; 2\pi n)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $(2\pi k; \pi+2\pi n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. **24.44.** 1) (1; 1), (−1; 1). *Вказівка*. З першого рівняння системи виразіть x^4 через y. Підставте отриманий вираз у друге рівняння системи. Покажіть, що отримане рівняння має єдиний корінь, який задовольняє умову $y \geqslant \frac{1}{2}$; 2) (0; 1), (1; 0). *Вказівка*. З першого рівняння системи випливає, що $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Тоді $x^5 \leqslant x^2$, $y^5 \leqslant y^2$, звідси $x^5 + y^5 \leqslant x^2 + y^2 = 1$; 3) (0; 0), (1; 1). *Вказівка*. Віднімемо від першого рівняння системи друге, отримаємо: $(y^3 - y^2 + y) - (x^3 - x^2 + x) = x^2 - y^2$. Звідси $x^3 + x = y^3 + y$. Далі скористайтеся тим, що функція $f(t) = t^3 + t$ є зростаючою; 4) (0; 0), (1; 1), (−1; −1). *Вказівка*. Слід зауважити, що всі розв'язки системи задовольняють умову $|x| \leqslant 1$ і $|y| \leqslant 1$. Зрозуміло, що пара (0; 0) — розв'язок системи. Далі, перемноживши рівняння системи, отримаємо: $\frac{4xy}{(1+x^2)(1+y^2)} = xy$. При $x \neq 0$ і $y \neq 0$ маємо: $\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Остання рівність можлива лише за умови $\begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ **24.45.** 1) (3; 1), (3; −1); 2) (0; 1), (1; 0). *Вказівка*. Доведіть, що $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; 3) (0; 0), (3; 3), (−3; −3); 4) (0; 0), (1; 1). **24.46.** 1) −2. *Вказівка*. Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи, то пара $(y_0; x_0)$ також є її розв'язком; 2) 2. **24.47.** −1; $\frac{4}{3}$. **24.48.** $a = 0$. *Вказівка*. Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком даної системи, то й пара $(y_0; x_0)$ також є розв'язком. Тоді умова $x_0 = y_0$ є необхідною для того, щоб розв'язок був єдиним. Поклавши в даній системі $x = y$, отримаємо: $\begin{cases} 2x = 2a, \\ 8x^3 + 2x = 2a. \end{cases}$ Звідси $4a^3 + 2a = 2a$; $a = 0$. Перевіримо, скільки розв'язків має дана система при $a = 0$. Маємо: $\begin{cases} (x-y)^2 + x + y = 0, \\ (x+y)^3 + x + y = 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$ Ця система має єдиний розв'язок. **24.49.** $a = 0$. *Вказівка*. Маємо: $2+\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$. Тому коли пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком даної системи, то й пара $(-x_0; y_0)$ також є розв'язком. Тоді умова $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$, є необхідною для того, щоб розв'язок був єдиним. Поклавши в даній системі $x = 0$, отримуємо: $\begin{cases} y = 2, \\ y = a + 2. \end{cases}$ Звідси $a = 0$. Перевіримо, скільки розв'язків має дана система при $a = 0$. При $a = 0$ отримуємо: $\begin{cases}(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = y, \\ y = 2.\end{cases}$

Звідси $(2+\sqrt{3})^x + \dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = 2;$ $(2+\sqrt{3})^x = 1;$ $x = 0$. Отже, при $a = 0$ система має єдиний розв'язок (0; 2). **24.50.** $a = 0$, $a = 1$. *Вказівка*. З другого рівняння отримуємо: $y = x + \dfrac{1}{x}$, де $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Тоді перше рівняння набуває такого вигляду: $a^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + (1-a)\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 2 + 2a^2$. Необхідно, щоб отримане рівняння мало єдиний розв'язок. Якщо число x_0 — корінь цього рівняння, то й число $\dfrac{1}{x_0}$ також є його коренем. Тоді умова $x_0 = \dfrac{1}{x_0}$ є необхідною для того, щоб розв'язок був єдиним. Маємо: $x_0 = \dfrac{1}{x_0}$, де $x_0 > 0$. Звідси $x_0 = 1$. Поклавши в розглядуваному рівнянні $x = 1$, отримуємо: $4a^2 + 2(1-a) = 2 + 2a^2$. Звідси $a = 0$ або $a = 1$. Обов'язково перевіряємо знайдені значення. Вони обидва задовольняють умову задачі. **24.51.** $a = 3$. *Вказівка*. Перепишіть дану систему у вигляді $\begin{cases} y = -(4b-1)x + b, \\ y = -(3b+2)x + a.\end{cases}$ Графіками рівнянь системи є прямі з кутовими коефіцієнтами $k_1 = -(4b - 1)$ і $k_2 = -(3b + 2)$. Якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі перетинаються і система має розв'язок. Розглянемо випадок, коли $k_1 = k_2$. Маємо: $-(4b - 1) = -(3b + 2)$; $b = 3$. Отримуємо систему $\begin{cases} y = -11x + 3, \\ y = -11x + a.\end{cases}$ Якщо $a \neq 3$, то прямі паралельні й система розв'язків не має. При $a = 3$ прямі збігаються і система має безліч розв'язків. Отже, при $a \neq 3$ система має розв'язок тільки для тих значень параметра b, для яких $k_1 \neq k_2$, тобто значення $a \neq 3$ не задовольняє умову задачі. При $a = 3$ система має або безліч розв'язків (якщо $k_1 = k_2$), або один розв'язок (якщо $k_1 \neq k_2$), тобто має розв'язок при будь-яких значеннях параметра b. **24.52.** $a = 3$, $a = 4$. *Вказівка*. Здавалося б, одночасне виконання умов $3x - y = 2$ та $x + y = 2$ потребує шукати значення параметра, при яких пара (1; 1) є розв'язком кожної з даних систем, тобто обмежитися відповіддю $a = 4$. Але при цьому не буде розглянуто можливість, коли кожна з даних систем не має розв'язків. Очевидно, що перша система не має розв'язків при $a = 3$. Підставляючи $a = 3$ в другу систему, переконуємось, що вона теж розв'язків не має.

25.13. 4. **25.14.** 2. **25.15.** 11 букетів. **25.16.** $\frac{a^2}{2}$. **25.17.** $\frac{a}{b}=2$. **25.18.** $\frac{b^2}{a}$. **25.19.** 3. **25.20.** 4. **25.24.** 1) 6; 2) 3; 3) 3. **25.27.** 1) 15; 2) 24. **25.29.** 1) 22; 2) 18. **25.32.** 1) $\frac{9}{20}$. *Вказівка.* $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{19\cdot20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}$; 2) $\frac{28}{93}$. **25.33.** 1) *Вказівка.* Кожний доданок даної суми більший за $\frac{1}{18}$. Тоді $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{18}>\underbrace{\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{18}}_{\text{9 доданків}}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$. **25.35.** Див. рисунок.

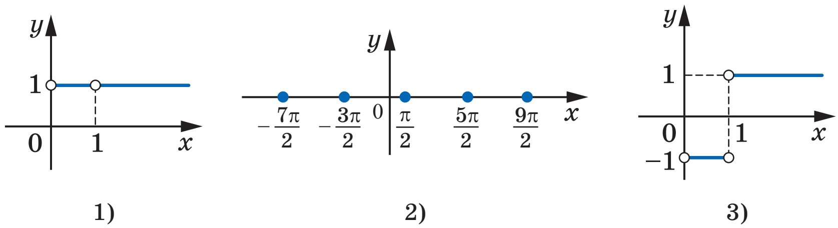
	А	Б	В	Г	Д
1			X		
2	X				
3					X
4		X			

До задачі 25.35

25.37. 48. **25.38.** $\frac{a^2}{b^2}$. **25.39.** 2. **25.40.** 56. **25.41.** $a+b$. **25.42.** $b<0$. **25.43.** 1) 9 зошитів; 2) 27 зошитів. **25.44.** У 2 рази. **25.45.** 54 год. **25.47.** 20 днів. **25.48.** 9,6 грн, 38,4 грн. **25.49.** В 1,5 раза. **25.50.** 700 кг. **25.51.** 40 %. **25.53.** 4 %. **25.55.** 300 %. **25.56.** 75 %. **25.58.** 70 кульок. **25.60.** Зменшилася на 25 %. **25.61.** 9 %. **25.62.** 3 кг, 2,5 кг. **25.63.** 18 грн, 24 грн. **25.64.** 9000 грн, 3000 грн. **25.73.** 72 600 грн. **25.74.** 20 %. **25.75.** 5 %. **25.76.** 200 г, 400 г. **25.77.** 20 кг, 30 кг. **25.78.** 10 %. **25.79.** 10 кг або $5\frac{1}{3}$ кг. **25.80.** 20 кг. **25.83.** 20 %. **25.84.** 80 г. **25.85.** 30 кг. **25.86.** 6,8 %. **25.87.** 10. **25.91.** 202 см. **25.93.** 2 год 15 хв, 2 год 24 хв. **25.149.** 12 км/год, 60 км/год. **25.150.** 4 роки. **25.151.** 60 грн. **25.152.** 40 л, 80 л. **25.153.** 50 км/год, 20 км/год. **25.154.** 71 турист. **25.155.** 100 задач. **25.156.** 11 купюр, 8 купюр. **25.157.** 100 кг, 200 кг. **25.158.** 6 грн, 4 грн. **25.159.** 4 км/год, 16 км/год. **25.160.** 72 грн, 168 грн. **25.161.** 12 км/год. **25.162.** 320 г, 480 г. **25.168.** 30 м^3, 25 м^3. **25.169.** 31 км/год. **25.170.** 3 км/год. **25.171.** 8 км/год. **25.172.** 45 днів, 36 днів. **25.173.** 15 год, 10 год. **25.174.** 5 год. **25.175.** 80 км/год, 40 км/год. **25.176.** 15 км/год. **25.177.** 6 км/год, 4 км/год. **25.178.** 24 год, 12 год. **25.179.** 20 днів, 30 днів. **25.180.** 5 км/год. **25.181.** 4 км/год, 6 км/год, 54 хв. **25.191.** 3) $\left(\frac{24}{31};+\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ 11{,}5]$. **25.194.** 5 розв'язків. **25.195.** 8 розв'язків. **25.196.** 1) $a<-\frac{9}{4}$; 2) $a\leqslant1{,}6$. **25.197.** 2) Розв'язків немає. **25.200.** 1) При $a>3$; 2) при $a\leqslant3$. **25.201.** 1) Якщо $a<2$, то $x\leqslant a$; якщо $a\geqslant2$, то $x<2$; 2) якщо $a<-3$, то $a<x<-3$; якщо $a\geqslant-3$, то розв'язків немає. **25.202.** При $8\leqslant a<9$.

25.203. При $-6 \leqslant b < -5$. **25.204.** 8) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$. **25.205.** 1) 11; 2) 4. **25.206.** 1) −6; 2) −2. **25.207.** 1) 1; 2) −3. **25.208.** 1) $-4 < a < 4$; 2) $-8 < a < 12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **25.209.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ або $b > 1$; 2) $b < 4$ або $b > 10$. **25.210.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup [5; 9)$. **25.211.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **25.215.** 3) $(-\infty; -1) \cup \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 4) $\left(-3; \frac{3}{4}\right) \cup [2; 6]$; 5) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right] \cup (-1; 0) \cup \left(1; \sqrt{3}\right]$; 6) $[-4; -3) \cup \cup (-2; 2) \cup (3; 4]$. **25.218.** 4) $-\frac{1}{6}$; 5) $\frac{4}{7}$. **25.219.** 3) 13. **25.237.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\sqrt{x}$; 4) $\frac{22}{9-a}$. **25.238.** 2,5. **25.239.** 1) −3; 2) 3; 3) 19. **25.240.** 1) $\sqrt{2}+4$; 2) 0; 3) 6. **25.242.** 1) $1 - 2a$; 2) −2. **25.244.** 7. **25.246.** 5) $\frac{196}{9}$; 6) $\frac{1}{32}$. **25.248.** 2) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\frac{x^{\frac{1}{6}} - 3}{2x^{\frac{1}{6}}}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **25.249.** 1. **25.250.** 4. **25.251.** 1) 1 корінь; 2) 2 корені; 3) 2 корені. **25.252.** −2. **25.253.** 24. **25.254.** 5) 4; 6) 7; 8) −1; 2; 9) 7; 10) коренів немає. **25.255.** 5) 7; −7; 6) −4; 2; 9) −1; 3; 10) $\frac{8}{27}$; $-\frac{1}{8}$; 11) −2; 9; 12) $-\frac{9}{2}$; 3. **25.256.** 3) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; +\infty)$; 5) $[-5; 3]$; 6) $\{2\}$; 13) $\varnothing$; 8) $\left(0; \frac{1}{4}\right)$; 9) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; 10) $(-\infty; -2] \cup [2; 5) \cup (5; +\infty)$; 11) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. **25.257.** $y = -\sqrt{-x}$. **25.258.** 3) $[5; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 6) $\{0\}$; 7) $[0; 1]$; 8) $[5; +\infty)$; 9) $(-\infty; 0]$; 10) $[-23; +\infty)$; 11) $(-\infty; 3]$; 12) $(0; 1]$. **25.267.** 2) $(-1; 5)$, $\left(\frac{7}{3}; \frac{35}{9}\right)$; 3) $(0; 0)$, $\left(\sqrt{2}; 8\right)$, $\left(-\sqrt{2}; 8\right)$; 5) $(-5; 5)$; 6) $(2; 2)$. **25.272.** $y = 2x^2 - 5$. *Вказівка*. Шукана парабола задається формулою виду $y = ax^2 + b$. **25.273.** $p = -8$, $q = 23$. **25.274.** $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{16}{9}$, $c = \frac{25}{9}$. **25.276.** $c = -12$. **25.279.** Графіки всіх трьох функцій різні. **25.280.** *а*) $k > 0$, $b < 0$; *б*) $k < 0$, $b > 0$. **25.281.** *а*) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$; *б*) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. **25.282.** $a < 0$, $b > 0$. **25.283.** $a > 0$, $b > 0$. **25.292.** При $m = 0$ маємо: 0, 2, 4; при $m = 2$ маємо: 6, 6, 6. **25.296.** $a_1 = -1$, $d = 8$. *Вказівка*. $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$. **25.298.** 2079. **25.299.** 120. **25.300.** 450.

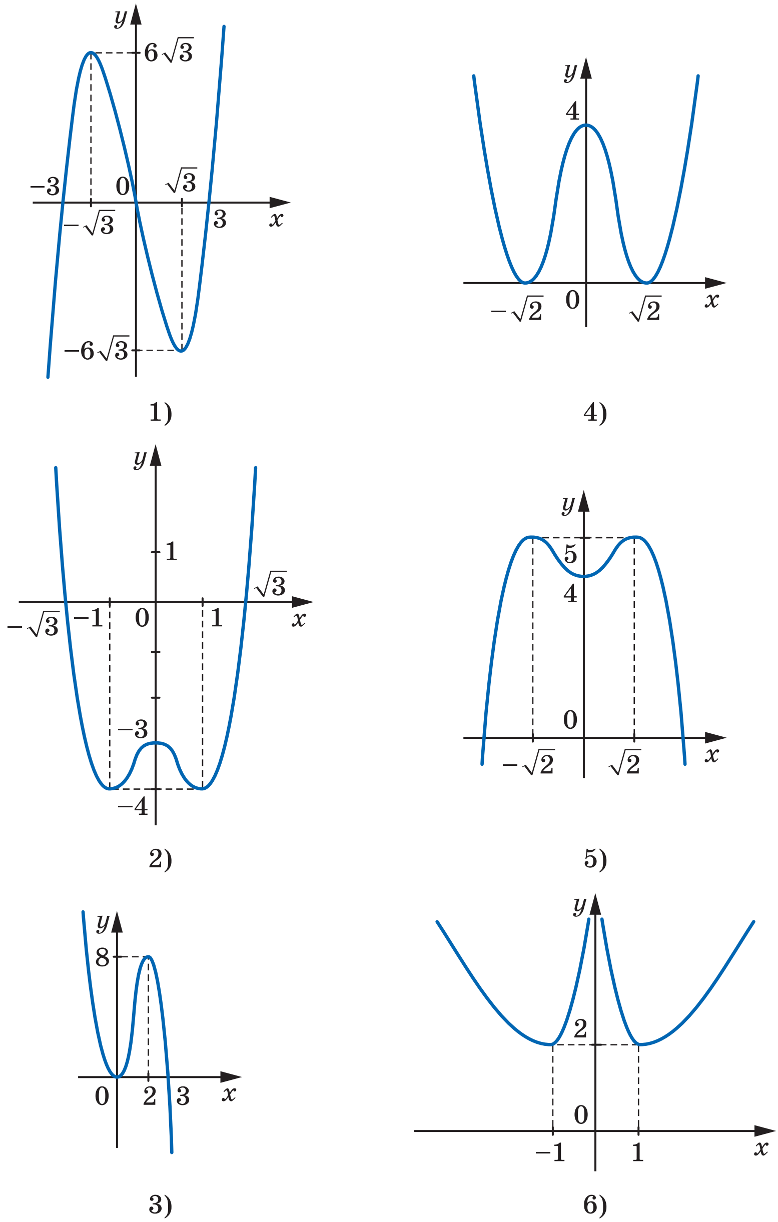
25.301. 420. **25.302.** 728. **25.307.** При $x=4$ маємо: 9, 6, 4; при $x=-\frac{1}{3}$ маємо: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$. **25.311.** $-\frac{3}{2}$. **25.313.** 5. **25.314.** 1) $-3\leqslant a\leqslant -1$; 2) $a=2$. **25.315.** 1) 6; −4; 2) 5; 4; 3) вираз не набуває ні найбільшого, ні найменшого значень. *Вказівка*. Даний вираз не визначений при $\alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **25.320.** 1) 3; −4; 2) вираз не набуває ні найбільшого, ні найменшого значень. *Вказівка*. Області визначення даного виразу не належать значення α, при яких $\sin\alpha=0$ і $\sin^2\alpha=1$. **25.321.** 1) $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\cos\alpha-\sin\alpha$. **25.322.** 1) $\frac{a^2-1}{2}$. *Вказівка*. Піднесіть обидві частини рівності $\sin\alpha+\cos\alpha=a$ до квадрата; 2) $\frac{a(3-a^2)}{2}$. *Вказівка*. Скористайтеся формулою суми кубів і результатом прикладу (1); 3) $\frac{1-a^4+2a^2}{2}$. *Вказівка*. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\frac{1+6a^2-3a^4}{4}$; 5) $\frac{2}{a^2-1}$; 6) $\sqrt{2-a^2}$ або $-\sqrt{2-a^2}$. *Вказівка*. Позначивши $\sin\alpha-\cos\alpha=x$, піднесіть обидві частини отриманої рівності до квадрата. **25.324.** 1) 2. *Вказівка*. $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)$; 2) 5. *Вказівка*. $3\sin\alpha+4\cos\alpha=\sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin\alpha+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos\alpha\right)=5\left(\frac{3}{5}\sin\alpha+\frac{4}{5}\cos\alpha\right)=$ $=5\sin(\alpha+\varphi)$, де $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$. **25.328.** $-\frac{1}{7}$. **25.330.** 1) −2; 2) $-2\cos\alpha$. **25.333.** 3) $-2\cos 2\alpha$; 4) $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$. **25.347.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, або $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **25.348.** $-\frac{\pi}{2}$. **25.349.** $\frac{3\pi}{8}$. **25.353.** 4) (−1; 4]; 5) [0; 4]; 6) [0; 4]; 7) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; 8) $[2;3)\cup[7;+\infty)$; 9) $(-\infty;-1)\cup(3;6]$; 10) (−3; 0). **25.354.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 12. **25.355.** 1) (2; +∞); 2) (−∞; 3); 3) (0; +∞); 4) (2; +∞); 5) (−∞; 3]; 6) (−∞; −1]. **25.356.** 1) 4; 2) $\log_7 5$; 3) 1; 4) 3; 3 $\log_6 2$; 5) 0; 3; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 7) 3; 8) 1; $\log_3\frac{5}{4}$. **25.357.** 1) (1; +∞); 2) [−2; +∞); 3) (−∞; 2]; 4) $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. **25.358.** 1) $\log_{1,5}10$; 2) −2; 3) 0; 4) −1; 0; 1. **25.360.** 3) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; 4) (1; +∞); 5) $(0;1)\cup(1;2)$; 6) $(2;3)\cup(3;+\infty)$. **25.366.** Див. рисунок.



До задачі 25.366

25.367. 3) $\sqrt{1,5}$; 4) 2; 5) 64; 6) коренів немає. **25.368.** 3) $[-5;-4)\cup(0;1]$; 4) $(-3;-2)\cup(-2;-1)$; 5) $(-1;0)\cup(0;2)$. **25.369.** 2) Коренів немає; 3) 5; 4) −3; 5) −4. **25.370.** 2) (1; 3); 3) (−1; 1); 4) (−∞; −5). **25.371.** 1) (−∞; −1); 2) (2; +∞). **25.372.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $1+\sqrt{10}$; 3) 2; 3; 4) −1. **25.373.** 1) (0; 1]; 2) (1; 3]; 3) [3; +∞); 4) (−2; 0]. **25.374.** 1) $\frac{1}{4}$; 8; 2) e^3; 3) 10; 100; 4) 27; $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{7}$; 1. **25.375.** 1) $(0;1]\cup[10;+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e};1\right]$; 3) $\left(0;\frac{1}{32}\right]\cup[8;+\infty)$; 4) $\left[-3;-\frac{1}{9}\right]$; 5) $(10;100)\cup(100;+\infty)$; 6) $\left(0;\frac{1}{216}\right)\cup(1;36)$. **25.376.** 1) $\frac{1}{5}$; 125; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 7; $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 4) 6; $\frac{1}{36}$. **25.378.** −2 м/с² або 2 м/с². **25.379.** 3,5 м/с, 5 Н. **25.382.** 1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $y=-\frac{1}{2}x-2$; 3) $y=\frac{x\sqrt{2}}{6}-\frac{\pi\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $y=4x-7$. **25.383.** (2; 3). **25.384.** (12; 0) і (0; 12); (0; 0). **25.385.** (1; 0). **25.386.** $y=5x$ і $y=5x-27$. **25.387.** $\frac{8}{3}$. **25.388.** 1) Зростає на $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right]$, спадає на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ і $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$, $x_{max}=\frac{1}{4}$, $x_{min}=-\frac{1}{3}$; 2) зростає на (−∞; −4] і [4; +∞), спадає на [−4; 0) і (0; 4], $x_{max}=-4$, $x_{min}=4$; 3) зростає на (−∞; −2), (−2; 1], [4; +∞), спадає на [1; 2) і [2; 4], $x_{max}=1$, $x_{min}=4$; 4) зростає на (−∞; 0] і [2; +∞), спадає на [0; 2], $x_{max}=0$, $x_{min}=2$; 5) зростає на (−∞; −2) і (−2; +∞); 6) зростає на (−∞; −1], спадає на [−1; +∞), $x_{max}=-1$; 7) зростає на (−∞; −1], спадає на [−1; +∞), $x_{max}=-1$; 8) зростає на [2; +∞), спадає на (0; 2], $x_{min}=2$; 9) зростає на $[e^2;+\infty)$, спадає на $(0;e^2]$, $x_{min}=e^2$. **25.389.** 1) 57; −55; 2) 11; −9; 3) $\frac{3}{5}$; −1; 4) 1; $-\sqrt{2}$; 5) 4; 0; 6) $\frac{4}{5}$; −1. **25.390.** 15 = 10 + 5. **25.391.** 10; 10. **25.392.** −1. **25.393.** 1250 см².

25.394. Див. рисунок.



До задачі 25.394

25.395. 3) $\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}+C$; 4) $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 3x+C$; 5) $2x+4\ln(1-x)+C$; 6) $\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{7}{4}e^{-4x}+C$; 7) $\sqrt{2x+1}-4\sin\frac{x}{4}+C$; 8) $\frac{1}{9}\sqrt{(6x-2)^3}+C$. **25.396.** 1) $F(x)=x^2+4x-11$; 2) $F(x)=x^4-x^2+3x+5$; 3) $F(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos 5x$; 4) $F(x)=-\sqrt{1-2x}+4$; 5) $F(x)=2x^3+4e^{\frac{x}{4}}-16$; 6) $F(x)=\frac{(5x-3)^5-7}{25}$. **25.397.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+1$. **25.398.** $f(x)=2\sqrt{x}-1$. **25.399.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 5) 18; 6) $4\ln 3-4$; 7) 2; 8) 20; 9) $\frac{e^2-1}{e^4}$; 10) $\frac{1}{4}\ln 21$. **25.400.** 1) 6; 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 3) $\ln 3$; 4) e^2-3; 5) $2\frac{5}{6}$; 6) 1,5; 7) 4,5; 8) $\frac{32}{3}$; 9) $\frac{8}{3}$; 10) $7-5\ln 2$. **25.401.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 1.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Форзац 3

Таблиця первісних деяких функцій

Функція f	Первісна функції f
k (стала)	kx
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x

Правила інтегрування

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx,$$

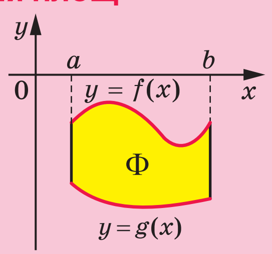
$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Формула Ньютона—Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Обчислення площ

$$S = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$



Форзац 4

Ймовірність об’єднання подій

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Умовна ймовірність

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Формула повної ймовірності

$$P(A) = P_{H_1}(A)\cdot P(H_1) + P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)$$

Ймовірність перетину незалежних подій

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Математичне сподівання

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots + x_np_n$$

Властивості математичного сподівання

$$M(x+c) = M(x) + c$$

$M(cx) = cM(x)$, де c — деяка стала

Середнє значення вибірки

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Перестановки	Розміщення	Комбінації
$P_n = n!$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

9 789664 743249