М. І. ШКІЛЬ, З. І. СЛЄПКАНЬ, О. С. ДУБИНЧУК

АЛГЕБРА і початки аналізу

10 клас

ББК 22.14я721
Ш66

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(лист від 10 серпня 2001 р. № 1/11-3496)

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій Кузнецов — керівник проекту, розробник концепцій: структури, дизайну;
Микола Шкіль, Зінаїда Слєпкань, Олена Дубинчук — автори тексту, методичного апарату;
Олег Костенко — заступник керівника проекту;
Наталія Демиденко — редактор-організатор;
Цезарій Ганушкевич — розробник макета, художнього оформлення;
Валентина Максимовська — організатор виробничого процесу

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Василь Яковець — доктор фізико-математичних наук, ректор Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя;
Надія Нікітенко — учитель-методист школи № 170 м. Києва

Шкіль М. І. та ін.
Ш66 Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів/М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук.— К.: Зодіак-ЕКО, 2006.— 272 с.
ISBN 966-7090-21-3.

ББК 22.14я721

© Усі права захищені. Жодна частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути копійованими чи відтвореними у будь-якій формі і будь-якими засобами — як електронними, так і фотомеханічними, зокрема через ксерокопіювання, запис чи комп'ютерне архівування — без письмового дозволу видавця.

ISBN 966-7090-21-3

© «Зодіак-ЕКО», 2006
© М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук, 2006
© Ц. М. Ганушкевич. Макет, художнє оформлення, 2006
© Ю. Б. Кузнецов. Концепція дизайну, 2006

ВІД АВТОРІВ

Алгебра і початки аналізу — навчальний предмет, в якому об'єднано навчальний матеріал кількох галузей математичної науки.

Автори пропонованого підручника ставили за мету забезпечити диференційоване навчання алгебри і початків аналізу. В ньому представлений навчальний матеріал для трьох рівнів навчання — середній рівень (рівень освітнього стандарту з математики), який оцінюється 4—6 балами, достатній, який оцінюється 7—9 балами, і високий, який оцінюється 10—12 балами. Поглиблений рівень передбачений для тих учнів, які мають можливість і бажання засвоїти алгебру й початки аналізу в ширшому і глибшому обсягах. Перші два рівні разом становлять базовий рівень навчання.

Відповідно до поставленої мети в підручнику диференціюється як теоретичний матеріал, так і система вправ. Крім теоретичного матеріалу, передбаченого чинною програмою, до підручника включено деякі питання теорії, що виходять за межі програми і розраховані на учнів, які бажають вивчати предмет на поглибленому рівні (числові послідовності, границя числової послідовності, нескінченно малі й нескінченно великі послідовності, основні теореми про границі числових послідовностей та їх доведення; нескінченно малі функції і доведення основних теорем про границі функцій, комплексні числа).

Система вправ підручника представлена на трьох рівнях. Літерою **А** позначено вправи обов'язкового рівня, літерою **Б** — підвищеного рівня, літерою **В** — поглибленого рівня складності. Для переважної більшості вправ у підручнику подано відповіді.

З метою закріплення, контролю й самоконтролю щодо вивчення навчального матеріалу після кожного параграфа підручника пропонується система запитань і завдань. На кожне із запитань можна знайти пряму відповідь у тексті відповідного параграфа.

Вивчення алгебри й початків аналізу широко спирається на знання, навички й уміння учнів, здобуті ними під час вивчення математики в 5—6-х класах і курсу алгебри основної школи. Тому природно виникають потреба і можливість у поточному і підсумковому повторенні здобутих раніше знань і вмінь.

Автори сподіваються, що пропонований підручник сприятиме засвоєнню алгебри й початків аналізу і бажають учням успіхів у цій важливій справі.

МАТЕМАТИЧНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\boldsymbol{N}$ — множина всіх натуральних чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множина всіх раціональних чисел

$\boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, числова пряма

$[a; b]$ — відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b

$(a; b)$ — інтервал (відкритий проміжок)

$(a; b]$, $[a; b)$ — півінтервал та піввідрізок (піввідкриті проміжки) з кінцями a і b, $a<b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$ — нескінченні проміжки

$(-\infty; +\infty)$ — множина всіх дійсних чисел, числова пряма

$<a; b>$ — довільний проміжок з кінцями a і b, $a < b$

$\in$ — знак належності елемента до множини

$[x]$ — ціла частина числа x

$\{x\}$ — дробова частина числа x

$|x|$ — модуль числа x

$\sqrt{x}$ — арифметичний квадратний корінь із невід'ємного числа x

$f(x)$ — значення функції f у точці x

$D(f)$ — область визначення функції f

$E(f)$ — область значень функції f

$\sin x$ — функція синус

$\cos x$ — функція косинус

$\mathrm{tg}\, x$ — функція тангенс

$\mathrm{ctg}\, x$ — функція котангенс

$\arcsin x$ — функція арксинус

$\arccos x$ — функція арккосинус

$\mathrm{arctg}\, x$ — функція арктангенс

$\mathrm{arcctg}\, x$ — функція арккотангенс

РОЗДІЛ 1

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Функції потрібні не лише натуралістові, без них тепер не обійдеться і соціологія. Взагалі, нині немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.

К. Ф. Лебединцев

§ 1. Повторення і розширення відомостей про функції

1. Означення функції. Зростаючі, спадні, парні і непарні функції. Матеріальна єдність світу виявляється у взаємозв'язку і взаємозумовленості різних явищ і процесів, що відбуваються в природі. Розглядаючи їх, доводиться враховувати залежності одних змінних від інших. Наприклад, залежність шляху від часу, залежність кількості купленого товару на певну суму від ціни, залежність між площею круга і його радіусом. Необхідність вивчення на практиці залежностей між змінними різної природи привела до поняття **функції** в математиці.

Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Функцію позначають або однією літерою латинського алфавіту f, F, або за допомогою рівності $y = f(x)$, яка символічно означає залежність між двома змінними.

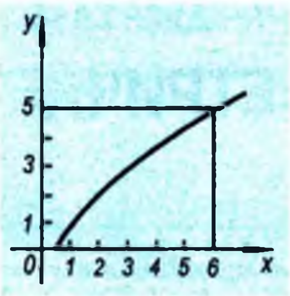
Змінну x називають **незалежною**, або **аргументом**, а змінну y — **залежною**.

Значенням функції називається значення залежної змінної y, якого вона набуває за деякого певного значення x.

Множина значень, яких набуває незалежна змінна x, називається **областю визначення функції**.

Множина відповідних значень залежної змінної y, яких вона набуває при всіх значеннях x з області визначення функції, називається **областю значень**, або **областю зміни функції**.

Приклад 1. Залежність шляху s тіла, яке рухається рівномірно, від часу t є функцією, що задається формулою $s = s_0 + vt$,



Мал. 1

де s_0 — початковий шлях; v — швидкість, яка є сталою в рівномірному русі.

Приклад 2. Якщо учні групи, яка складається з 25 осіб, чергують протягом січня, крім тих днів, які припадають на неділю, то кожному з днів січня відповідає певний черговий. Незалежною змінною тут є дні січня, залежною — черговий. Маємо функцію, областю визначення якої є множина днів січня (без неділь), а областю зміни — множина учнів групи.

Приклад 3. Активна електрична енергія, яка затрачається з колі змінного струму за час t, є функцією часу і за сталої 1отужності P виражається формулою $W_а = Pt$.

Окремо означається числова функція.

Числовою функцією з областю визначення X називається залежність, за якої кожному числовому значенню x з множини X ставиться у відповідність єдине деяке число y.

Нагадаємо основні способи задання функції: 1) за допомоюю формули (приклади 1 і 3); 2) за допомогою таблиці (наприклад, таблиці квадратів чисел, значень тригонометричних функцій та ін.); 3) за допомогою графіка (наприклад, якщо фіксувати протягом кількох років висоту дерева, яке росте, о, зобразивши по осі Ox вік дерева в роках, а по осі Oy — висоту в метрах, дістанемо графік функції) (мал. 1). Отже,

графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $M(x; f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

Проте слід пам'ятати, що не завжди формула задає функцію. Наприклад, формула $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома) задає пряму пропорційність (функцію від U) за сталого опору в колі і змінної напруги і обернену пропорційність (функцію від R) за сталої напруги і змінного опору. Але якщо з цієї формули виразити R, то $R = \frac{U}{I}$. Остання формула не задає функцію. Справді, R — величина стала для даного провідника і не залежить і від напруги, ні від сили струму. Якщо напругу збільшити, наприклад, у 2 рази, то в 2 рази збільшиться і сила струму, а відношення напруги до сили струму не зміниться. Опір R є функцією (прямою пропорційністю $y = kx$) довжини провідника за сталої площі поперечного перерізу і функцією площі поперечного перерізу (оберненою пропорційністю $y = \frac{k}{x}$) за сталої довжини провідника:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ — питомий опір матеріалу провідника (стала); l — довжина провідника; S — площа його поперечного перерізу.

Інколи функцію задають різними формулами на різних множинах значень аргументу (так звані кусково-задані функції). Наприклад, якщо турист був у дорозі 9 год і перші 5 год рухався зі швидкістю 4,5 км/год, потім відпочивав 0,5 год, а решту часу йшов зі швидкістю 4 км/год, то функцію шляху s залежно від часу t запишемо у такому вигляді:

$$s = \begin{cases} 4{,}5t, & \text{якщо } 0 \le t \le 5, \\ 22{,}5, & \text{якщо } 5 < t \le 5{,}5, \\ 22{,}5 + 4(t - 5{,}5), & \text{якщо } 5{,}5 < t \le 9. \end{cases}$$

Функція $y = f(x)$ називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 змінної x, взятих з області визначення, і таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 змінної x, взятих з області визначення, і таких, що $x_2 > x_1$, справджується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

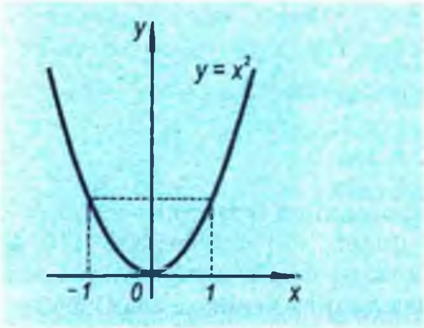
Для дослідження функцій на зростання або спадання (на множинність), виходячи з їх означень, можна сформулювати алгоритм.

Алгоритм дослідження функції на монотонність

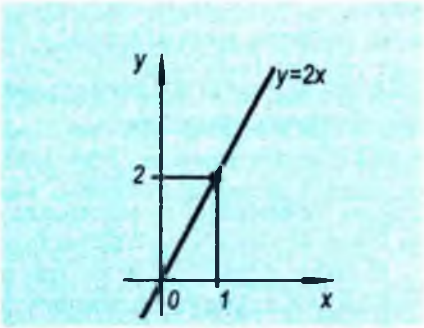
Щоб дослідити функцію на монотонність, треба:

1) вибрати будь-які два значення x_1 і x_2 з області визначення функції такі, що $x_2 > x_1$;

2) скласти різницю $f(x_2) - f(x_1)$ і з'ясувати (якщо це можливо), чи буде вона додатною (від'ємною) і, користуючись означенням числової нерівності, переконатися, що $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).



Мал. 2



Мал. 3

У зростаючої функції графік піднімається вгору, у спадної — опускається вниз.

Серед функцій розрізняють парні й непарні функції. Спільною властивістю парних і непарних функцій є те, що областю визначення кожної з них є множина значень x, симетрична відносно початку відліку, тобто точки O.

Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-якого значення x з області визначення значення $(-x)$ також належить області визначення і справджується рівність $f(-x) = f(x)$.

Інакше кажучи, у парних функцій їх значення для протилежних значень аргументу рівні. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (мал. 2).

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо для будь-якого значення x з області визначення значення $(-x)$ також належить області визначення і справджується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (мал. 3).

Прикладами парних функцій є $y = x^2$, $y = |x^3|$, а непарних — $y = 2x$, $y = x^3$. Областю визначення цих функцій є множина R, симетрична відносно початку координат, оскільки для будь-якого x з множини R значення $-x$ також належить R. Крім того, для перших двох функцій $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $f(-x) = |-x^3| = |x^3| = f(x)$, а для двох останніх — $f(-x) = 2(-x) = -2x = -f(x)$ і $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Функції $y = \sqrt{x}$ і $y = 2x - 3$ не належать ні до парних, ні до непарних функцій, оскільки для першої $x \geq 0$ (множина значень x несиметрична відносно початку 0), а для другої функції хоч множина $\boldsymbol{R}$ і симетрична відносно 0, але $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

Алгоритм дослідження функції на парність і непарність

Щоб дослідити функцію на парність чи непарність, треба:

1) перевірити виконання умови: для будь-якого x з області визначення число $(-x)$ також належить області визначення, тобто перевірити, чи є область визначення даної функції множиною, симетричною відносно початку відліку 0;

2) перевірити виконання умови: $f(-x) = f(x)$ чи $f(-x) = -f(x)$.

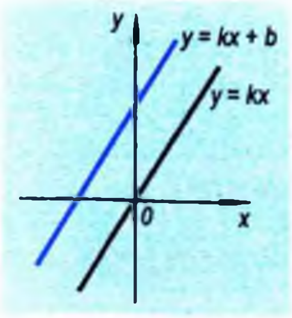
2. Огляд властивостей основних видів функцій. Лінійна функція $y = kx + b$.

Лінійною називається функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — числа.

Якщо $b = 0$, формула лінійної функції набирає вигляду $y = kx$. Ця формула, якщо $b = 0$, $k \neq 0$, наприклад, $k = 2$, задає пряму пропорційність (мал. 3). Графіком лінійної функції є пряма (мал. 4). Лінійна функція виражає залежності між змінними різної природи. Наприклад: а) залежність шляху s, який пройде тіло під час рівномірного руху, від часу t визначають за формулою $s = s_0 + vt$, де s_0 — початковий шлях; v — стала швидкість; б) залежність довжини металевого стержня від температури t при нагріванні задають формулою $l = l_0 + kt$, де l_0 — довжина стержня, якщо $t = 0$, k — коефіцієнт лінійного розширення; в) вартість N телеграми по Україні обчислюється за формулою $N = 5x + 5$, де x — кількість слів, 5 (к.) — вартість одного слова, 5 (к.) — тарифна оплата; г) вартість проїзду в таксі можна обчислити за формулою $P = 90n + 90$, де n — кількість кілометрів (відстань), що проїхав пасажир, 90 (к.) — вартість проїзду одного кілометра, 90 (к.) — сума, яка автоматично фіксується на лічильнику, коли пасажир сідає в таксі (ціни умовні).

Нагадаємо властивості лінійної функції.

1) Областю визначення лінійної функції, якщо вона задана



Мал. 4

формулою $y = kx + b$ без вказівки на характер залежності між змінними x і y, є множина R всіх дійсних чисел.

2) Зростання чи спадання функції залежить від знака коефіцієнта k. Якщо $k > 0$, функція зростає. Доведемо це, користуючись означенням зростаючої функції. Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in R$, $x_2 \in R$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - kx_1 - b = k(x_2 - x_1) > 0$, оскільки $k > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору k, x_1 і x_2. Тому $f(x_2) > > f(x_1)$ за означенням числової нерівності.

Якщо $k < 0$, лінійна функція спадна. Доведіть це самостійно.

3) Якщо $k \neq 0$ і $b \neq 0$, лінійна функція не є ні парною, ні непарною. Справді, хоча для будь-якого $x \in R$ і $-x \in R$ (область визначення є множиною, симетричною відносно точки 0), проте $f(-x) = -kx + b \neq f(x)$ і $f(-x) = -kx + b \neq -f(x)$.

Якщо $k \neq 0$ і $b = 0$, лінійна функція є непарною, бо $f(-x) = -kx = -f(x)$. Графіком її за цієї умови є пряма, що проходить через початок координат. Вона симетрична відносно початку координат.

Якщо $k = 0$ і b — довільне, лінійна функція парна, бо $f(-x) = b = f(x)$. Графік її — пряма, паралельна осі Ox (або збігається з нею) і тому симетрична відносно осі Oy.

Функція $y = \frac{k}{x}$. Ця функція виражає обернено пропорційну залежність.

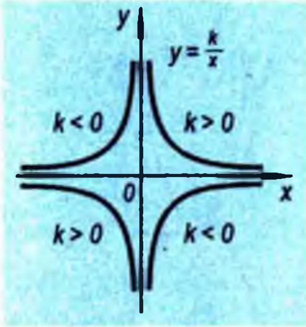
Оберненою пропорційністю називається функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна і число $k \neq 0$.

Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ є гіпербола, яка складається з двох віток. Гіпербола розміщується в I і III чвертях, якщо $k > 0$ і в II та IV чвертях, якщо $k < 0$ (мал. 5).

Функція $y = \frac{k}{x}$ виражає залежності між різними змінними. Наприклад: а) залежність кількості купленого товару на задану суму грошей від ціни товару; б) залежність сили струму від опору провідника за сталої напруги: $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома); в) залежність між тиском газу і об'ємом, який він займає: $p = \frac{k}{V}$ (закон Бойля—Маріотта), де k — стала; г) залежність часу від швидкості руху $t = \frac{s}{v}$, де s — сталий шлях, та ін.

Нагадаємо властивості функції $y = \frac{k}{x}$.

1) Областю визначення і областю зміни функції є всі дійсні числа, за винятком нуля, бо $x \neq 0$ і $y \neq 0$.



Мал. 5

2) Якщо $k > 0$, функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на множинах $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Доведемо, наприклад, якщо $k > 0$ і $x \in (-\infty;\ 0)$, то функція спадає.

Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in (-\infty;\ 0)$, $x_2 \in (-\infty;\ 0)$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = $
$= \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} < 0$, бо $x_1 \cdot x_2 > 0$ як добуток двох від'ємних чисел; $k > 0$, $x_1 - x_2 < 0$ за умовою вибору k, x_1 і x_2. Тому $f(x_2) < f(x_1)$. Так само доводимо, якщо $k > 0$ і $x \in (0;\ +\infty)$, функція спадає, а коли $k < 0$ — зростає, якщо $x \in (-\infty;\ 0)$ і $x \in (0;\ +\infty)$.

Доведіть самостійно, що коли $k < 0$, то $y = \frac{k}{x}$ зростає при $x \in (-\infty;\ 0)$ і $x \in (0;\ +\infty)$.

3) Функція $y = \frac{k}{x}$ непарна. Справді, областю визначення її є множина, симетрична відносно точки 0, і $f(-x) = \frac{k}{-x} = \frac{k}{x} = -f(x)$.

Графік функції $y = \frac{k}{x}$ симетричний відносно початку координат.

Функція $y = x^2$. Властивості цієї функції випливають із властивостей степеня з парним натуральним показником.

1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R$. Областю її зміни є множина невід'ємних чисел, тобто $y \in [0;\ +\infty)$.

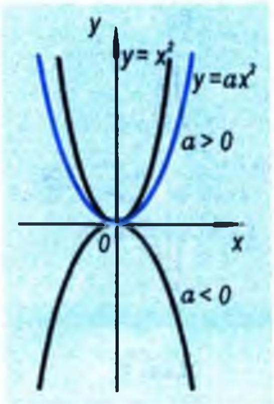
2) На множині $(-\infty;\ 0]$ функція спадає, а на $[0;\ +\infty)$ — зростає.

Доведемо, якщо $x \in (-\infty;\ 0]$, то функція спадає. Нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in (-\infty;\ 0]$, $x_2 \in (-\infty;\ 0]$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1) \times (x_2 + x_1) < 0$, бо $x_2 - x_1 > 0$ за умовою, $x_2 + x_1 < 0$ як сума двох чисел, з яких одне від'ємне, а друге недодатне. Тому $f(x_2) < f(x_1)$.

Доведіть самостійно: якщо $x \in [0;\ +\infty)$, то функція $y = x^2$ зростає.

3) Функція парна, оскільки область її визначення — множина, симетрична відносно 0, і $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Графік функції — парабола, симетрична відносно осі Oy (мал. 6).



Мал. 6

4) Якщо $x = 0$, то й $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат.

За допомогою функції $y = x^2$ виражають залежність площі квадрата від довжини його сторони. На практиці у фізиці, техніці частіше застосовують функцію $y = ax^2$, де a — число. За допомогою цієї функції виражають, наприклад: а) залежність площі круга від радіуса: $S = \pi r^2$; б) залежність між кінетичною енергією тіла і його швидкістю: $W_k = \frac{mv^2}{2}$; в) залежність шляху тіла, що вільно падає, від часу: $H = \frac{gt^2}{2}$ (якщо опором середовища нехтувати).

Графіком функції $y = ax^2$ є також парабола, симетрична відносно осі Oy. Якщо $a > 0$, вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$ — вниз.

Форму параболи $y = ax^2$ має ланцюг, що підтримує висячий міст за допомогою великої кількості стержнів (якщо вагою ланцюга нехтувати); траєкторія снаряда, що летить; осьовий переріз автомобільної фари; осьовий переріз вільної поверхні рідини під час обертання посудини з рідиною навколо її осі симетрії.

Функція $y = x^3$. Ця функція виражає, наприклад, залежність об'єму куба від довжини його сторони. Нагадаємо властивості цієї функції, що випливають із властивостей степеня з непарним натуральним показником.

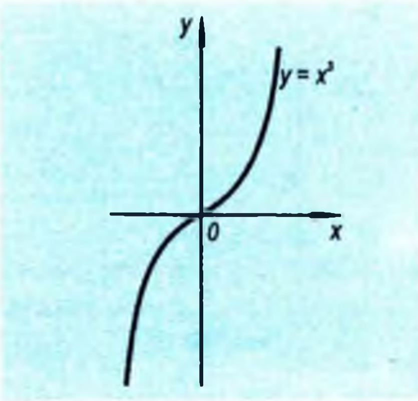
1) Області визначення і зміни функції — множина всіх дійсних чисел.

2) Функція зростаюча на всій області визначення. Справді, нехай $x_2 > x_1$, де $x_1 \in R$ і $x_2 \in R$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 =$

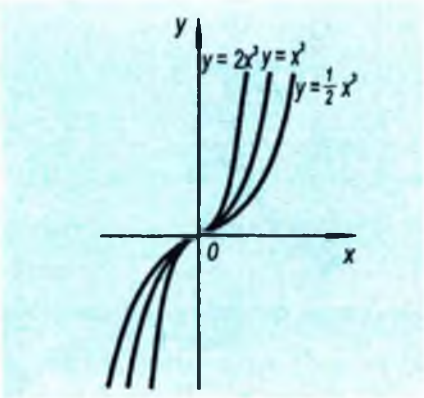
$$= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) = (x_2 - x_1)\left(\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right) >$$

> 0, оскільки $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору x_1 і x_2, сума $\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0$ за будь-яких $x_2 > x_1$ з області визначення. Тому $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $y = x^3$ — зростаюча.

3) Функція $y = x^3$ непарна, оскільки область її визначення — множина, симетрична відносно точки 0, і $f(-x) = (-x)^3 =$



Мал. 7



Мал. 8

$= -x^3 = -f(x)$. Графіком цієї функції є кубічна парабола, яка симетрична відносно початку координат (мал. 7).

4) Якщо $x = 0$, то й $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат.

На практиці використовують також функцію $y = ax^3$, яка має ті самі властивості, хоча коефіцієнт a дещо впливає на форму графіка (мал. 8). Графік $y = ax^3$ використовують проектувальники залізниць та автомобільних шляхів, якщо треба здійснити плавний перехід від прямолінійних до криволінійних ділянок шляху.

Функція $y = \sqrt{x}$. За допомогою цієї функції виражається, наприклад, залежність сторони квадрата від його площі S.

Властивості функції $y = \sqrt{x}$ випливають із властивостей арифметичного кореня.

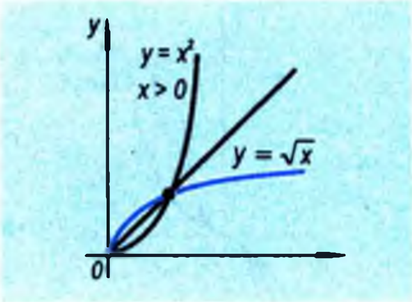
1) Області визначення і зміни функції — множина невід'ємних чисел, тобто $x \in [0; +\infty)$ і $y \in [0; +\infty)$.

2) Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення. Справді, якщо $x_2 > x_1$, де $x_1 \in [0; +\infty)$ і $x_2 \in [0; +\infty)$, то $f(x_2) -$

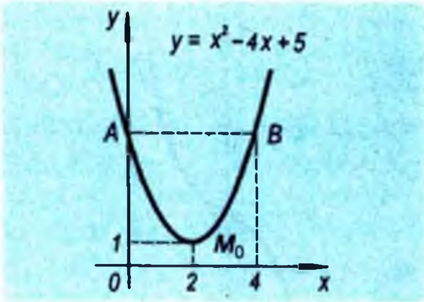
$$-f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0,$$

оскільки $x_2 - x_1 > 0$ за умовою вибору x_1, x_2 і $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$ як сума додатного і невід'ємного чисел. Отже, $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція $y = \sqrt{x}$ — зростаюча.

3) Функція $y = \sqrt{x}$ не належить ні до парних, ні до непарних функцій, оскільки її область визначення — множина, не симетрична відносно початку координат.



Мал. 9



Мал. 10

4) Якщо $x = 0$, то й $y = 0$, тобто графік проходить через початок координат, а оскільки x і y — невід'ємні, то він розміщений у I чверті (мал. 9). Графіком є розміщена у I чверті вітка параболи, симетрична вітці параболи $y = x^2$ $(x \geq 0)$ відносно прямої $y = x$.

На практиці використовують функцію $y = a\sqrt{x}$. Зокрема, за допомогою цієї функції виражають залежність періоду T малих коливань математичного маятника від його довжини l: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де g — прискорення сили тяжіння.

Квадратична функція.

Квадратичною називається функція, яка задається формулою $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дійсні числа, причому $a \neq 0$.

За допомогою квадратичної функції виражають залежність положення тіла у будь-який момент часу в прямолінійному рівноприскореному русі: $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_{0x}t^2}{2}$, де x_0 — початкова координата, v_{0x} —проекція початкової швидкості на вісь Ox, a_{0x} — проекція прискорення.

Графіком квадратичної функції є парабола (мал. 10), вершина якої міститься у точці M_0 з координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Це можна показати, якщо подати формулу $y = ax^2 + bx + c$ так:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Звідси випливає, що графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна дістати з графіка функції $y = ax^2$ такими геометричними перетвореннями: послідовне паралельне перенесення параболи $y = ax^2$ на $-\frac{b}{2a}$ одиниць вліво чи вправо по осі Ox залежно від того, яким буде знак числа $-\frac{b}{2a}$, і паралельне перенесення побудованого графіка по осі Oy вгору або вниз на $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ одиниць залежно від того, яким буде знак числа $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Функції $y = [x]$ та $y = \{x\}$. Кожне дробове число можна подати у вигляді суми двох доданків, один з яких — ціле число, а другий — невід'ємний правильний дріб. Наприклад: $10,7 = 10 + 0,7$; $\sqrt{2} \approx 1 + 0,41$; $0,5 = 0 + 0,5$; $-2,25 = -3 + 0,75$. Отже,

за цілу частину числа x візьмемо найбільше ціле число, яке не перевищує x

Цілу частину числа x позначають символом $[x]$, де $x = n + q$, $n \in Z$, а $0 \le q < 1$. Очевидно, що $[x] = n$.

При будь-якому x справджується подвійна нерівність

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Формула $y = [x]$, де $[x]$ — ціла частина x, задає функцію, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел.

Побудуємо графік функції $y = [x]$. З формул $x = n + q$, $n \in Z$, $0 \le q < 1$, $[x] = n$ випливає, що коли $0 \le x < 1$, то $y = 0$; якщо $1 \le x < 2$, то $y = 1$; якщо $2 \le x < 3$, то $y = 2$, якщо $-1 \le x < 0$, то $y = -1$ і т.д. Взагалі, якщо $n \le x < n + 1$, де n — ціле число, то $y = n$. Отже, на кожному з проміжків $[n; n + 1)$ значення функції y дорівнює n (мал. 11).

Графік, подібний до графіка функції $y = [x]$, дістанемо, якщо зобразимо графічно залежність між вагою вантажу і вартістю його перевезення, коли відомо, що за перевезення першої повної чи неповної тонни вантажу треба платити (умовно) 2 грн., а за кожну наступну повну чи неповну тонну — 1 грн.

Дробовою частиною числа x називається різниця між цим числом і його цілою частиною.

Дробову частину числа x позначають $\{x\}$. З означення випливає, що $\{x\} = x - [x]$.

Наприклад, $\{9,7\} = 9,7 - [9,7] = 9,7 - 9 = 0,7$; $\{-2,3\} = -2,3 - [-2,3] = -2,3 - (-3) = -2,3 + 3 = 0,7$.

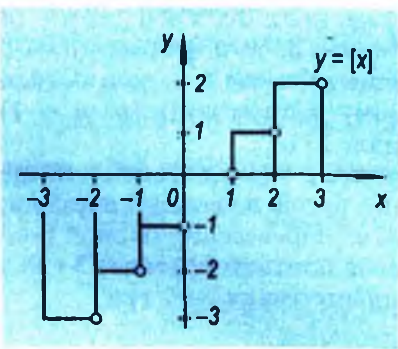
Формулою $y = \{x\}$, або $y = x - [x]$ задається функція, областю визначення якої є множина всіх дійсних чисел.

Будуючи графік $y = \{x\}$, враховуємо, що коли $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$ і формула $y = x - [x]$ набирає вигляду $y = x$, а графіком функції $y = \{x\}$ є частина прямої $y = x$. Якщо $x = 1$, то $y = 1 - 1 = 0$, тобто відповідна точка графіка буде на осі Ox. Якщо $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$ і $y = \{x\} = x - [x] = x - 1$, тобто графіком функції на цьому проміжку буде частина прямої $y = x - 1$.

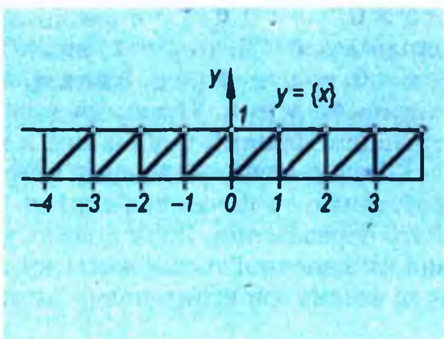
Взагалі, якщо $n \leq x < n + 1$, де $n \in Z$, то $[x] = n$, а $y = \{x\} = x - n$, тобто на кожному проміжку $[n; n + 1)$ графіком функції $y = \{x\}$ є частина прямої $y = x - n$ (мал. 12).

3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. У багатьох випадках графік певної функції можна побудувати за допомогою геометричних перетворень (паралельне перенесення, симетрія відносно прямої, стиснення до осі, розтягування від осі та ін.) графіка відомої функції, через яку виражається дана.

1. Нехай дано графік функції $y = f(x)$. Треба побудувати графік функції $y = -f(x)$. Наприклад, треба побудувати графік функції $y = -x^2$, якщо відомий графік $y = x^2$. Тут $y = f(x) = x^2$, а $y = -f(x) = -x^2$. Області визначення обох функцій збігаються, аргумент x — однаковий, а значення функцій y відрізняються лише знаком. Це означає, що кожній точці M_0 $(x_0; y_0)$, що належить графіку $y = f(x)$, відповідає точка $M(x_0; -y_0)$ на графіку функції $y = -f(x)$, тобто точки шуканого графіка симетричні точкам графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox. Отже,



Мал.11



Мал. 12

графік функції $y = -f(x)$ можна дістати з графіка відомої функції $y = f(x)$ за допомогою відображення симетрії відносно осі Ox (мал. 13).

2. Нехай відомий графік функції $y = f(x)$, а треба побудувати графік функції $y = f(-x)$. Наприклад, відомий графік $y = \sqrt{x}$. Треба побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$. Аргументи функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ різняться знаками. Нехай точка $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Знайдемо координати відповідної точки $M(x; y) \in f(-x)$. Введемо підстановку $x_0 = -x$, звідси $x = -x_0$, $y = f(-x) = f(x_0) = y_0$. Отже, точка M має протилежну абсцису і ту саму ординату, тобто $M(-x_0; y_0)$. Це означає, що графік функції $y = f(-x)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою відображення симетрії його відносно осі Oy (мал. 14).

3. Побудувати графік функції $y = f(|x|)$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{2}{|x|}$, якщо відомий графік функції $y = \frac{2}{x}$. Майже в усіх вправах, пов'язаних з модулем, доводиться звільнятися від модуля числа, користуючись його означенням:

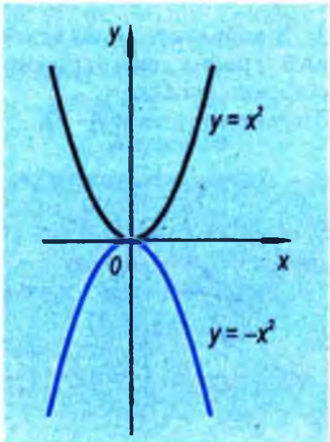
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Отже,

$$f(|x|) = \frac{2}{|x|} = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \frac{2}{-x}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = f(|x|)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, якщо $x \geq 0$, і з графіком $y = f(-x)$, якщо $x < 0$.

Для побудови графіка функції $y = \frac{2}{|x|}$ досить побудувати графік функ-

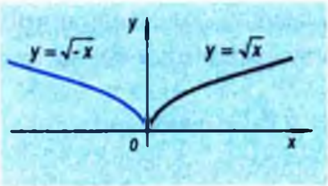


Мал. 13

1. Дано: графік $y = f(x) = x^2$.
Побудувати графік функції $y = -f(x) = -x^2$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.
2) Відобразити побудований графік симетрично відносно осі Ox.
Дістанемо графік функції $y = -f(x)$.



Мал. 14

2. Дано: графік функції

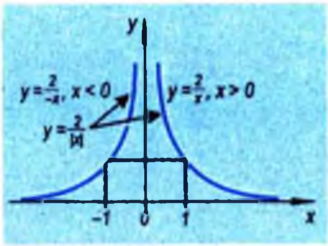
$$y = f(x) = \sqrt{x}.$$

Побудувати графік

$$y = f(-x) = \sqrt{-x}.$$

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.
2) Відобразити побудований графік симетрично відносно осі Oy.
Дістанемо графік $f(-x)$.



Мал. 15

3. Дано: графік функції

$$y = f(x) = \frac{2}{x}.$$

Побудувати графік

$$y = f(|x|) = \frac{2}{|x|}.$$

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$ для $x > 0$.
2) Відобразити побудований графік симетрично відносно осі Oy. Об'єднання цих графіків є графіком $y = f(|x|)$.

ції $y = \frac{2}{x}$, якщо $x > 0$, і графік функції $y = \frac{2}{-x}$, якщо $x < 0$. Об'єднавши дві побудовані криві, ми дістанемо графік функції $y = \frac{2}{|x|}$ (мал. 15).

Неважко довести, що функція $y = f(|x|)$ парна. Справді, область визначення її — множина значень x, симетричних відносно початку відліку, і $f(|-x|) = f(|x|) = f(x)$.

4. Побудувати графік функції $y = |f(x)|$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Нехай відомий графік функції $y = 2x + 1$, побудуємо графік $y = |2x + 1|$. Врахуємо, що

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ на проміжку, де $f(x) \geq 0$, і з графіком функції $y = -f(x)$ на проміжку, де $f(x) < 0$.

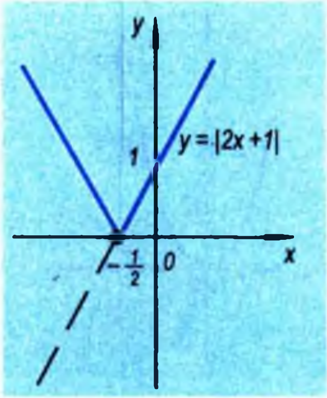
Отже, для побудови графіка функції $y = |2x + 1|$ досить побудувати графік лінійної функції $y = 2x + 1$, а ту частину прямої, яка розміщена нижче від осі Ox, відобразити симетрично відносно осі Ox. Ламана, яка лежить вище від осі Ox, включаючи точку на цій осі, буде графіком функції $y = |2x + 1|$ (мал. 16).

5. Побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm b$, де $b > 0$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$. Області визначення обох функцій збігаються, аргументи їх однакові, а значення

функцій відрізняються на b чи $-b$. Це означає, що всі точки, наприклад, графіка $y = f(x) + b$ мають ті самі абсциси, що і відповідні точки графіка $y = f(x)$, а ординати збільшені на b. Тому шуканий графік легко дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення його у напрямі осі Oy на b одиниць вгору.

Наприклад, графіки функцій $y = x^2 \pm 3$ можна дістати з графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення його на 3 одиниці вгору для $y = x^2 + 3$ і на 3 одиниці вниз для $y = x^2 - 3$ (мал. 17).

6. Відомий графік функції $y = f(x)$. Треба побудувати графік функції $y = f(x \pm a)$, де $a > 0$. Наприклад, нехай відомий графік функції $y = x^2$. Побудуємо графік функції $y = (x \pm 2)^2$.



Мал. 16

4. Дано: графік функції $y = f(x) = 2x + 1$. Побудувати графік $y = |f(x)| = |2x + 1|$.

Алгоритм

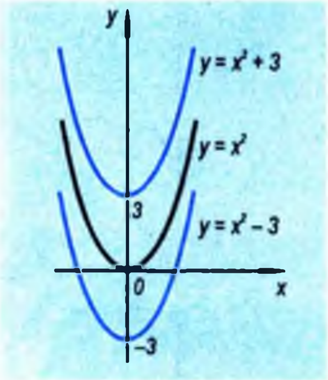
1) Побудувати графік функції $y = f(x)$.
2) Відобразити симетрично відносно осі Ox частину, нижчу від Ox.

Розглянемо випадок побудови графіка функції $y = f(x - a)$. Нехай $M_0(x_0;\ y_0) \in f(x)$. Знайдемо відповідну точку $M(x;\ y) \in f(x - a)$. Введемо підстановку: $x_0 = x - a$, звідси $x = x_0 + a$, $y = f(x - a) = f(x_0) = y_0$. Отже, абсциса точки $M(x_0 + a;\ y_0)$ на a одиниць більша від абсциси точки $M_0(x_0;\ y_0)$, а ордината та сама. Це означає, що будь-яка точка графіка функції $y = f(x)$ переходить у відповідну точку графіка функції $y = f(x - a)$ за допомогою паралельного перенесення її вправо у напрямі осі Ox на a одиниць.

Обґрунтуйте самостійно побудову графіка $y = f(x + a)$.

Таким чином, графіки функцій $y = (x \pm 2)^2$ можна дістати з графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення його на 2 одиниці вправо по осі Ox, якщо $y = (x - 2)^2$ і на 2 одиниці вліво, якщо $y = (x + 2)^2$ (мал. 18).

7. Побудувати графік функції $y = af(x)$, де $a > 0$, якщо відомий графік $y = f(x)$.

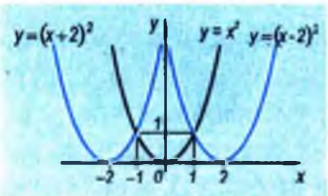


Мал. 17

5. Дано: графік функції $y = f(x) = x^2$. Побудувати графік функції $y = f(x) \pm b = x^2 \pm 3$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.
2) Паралельно перенести побудований графік у напрямі осі Oy вгору на b одиниць, якщо $y = f(x) + b$, і вниз на b одиниць, якщо $y = f(x) - b$.



Мал. 18

6. Дано: графік функції $y = f(x) = x^2$. Побудувати графік $y = f(x \pm a) = (x \pm 2)^2$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.
2) Паралельно перенести побудований графік у напрямі осі Ox вправо на a одиниць, якщо $y = f(x-a)$, і вліво на a одиниць, якщо $y = f(x + a)$.

Наприклад, побудуємо графік функції $y = 3x^3$ і $y = \frac{1}{3}x^3$, якщо відомий графік функції $y = x^3$.

Області визначення і аргументи обох функцій однакові. Значення функції при будь-якому x для функції $y = af(x)$ в a разів змінюється порівняно з функцією $y = f(x)$. Якщо $a > 1$, ордината збільшується в a разів, якщо $0 < a < 1$ — зменшується в a разів. Тому графік функції $y = af(x)$ можна дістати з графіка функції $y = = f(x)$ за допомогою розтягування його в a разів від осі Ox, якщо $a > 1$, і за допомогою стиснення в a разів до осі Ox, якщо $0 < a < 1$.

Зокрема, графік функції $y = 3x^3$ можна дістати з графіка $y = x^3$ за допомогою розтягування його від осі Ox у 3 рази, а графік функції $y = \frac{1}{3}x^3$ — за допомогою стиснення його до осі Ox у 3 рази (мал. 19).

8. Відомий графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(ax)$, де $a > 0$.

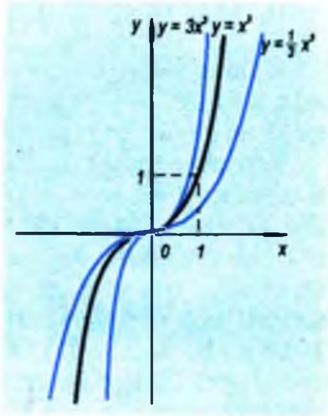
Наприклад, за відомим графіком функції $y = \{x\}$ побудуємо графіки функцій $y = \{2x\}$ та $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

Оскільки над змінною x у другій функції виконується дія множення на число a, введемо підстановку і знайдемо координати точки $M(x; y) \in f(ax)$, в яку перейде точка $M_0(x_0; y_0) \in f(x)$. Нехай $x_0 = ax$, звідси $x = \frac{x_0}{a}$, $y = f(ax) = f(x_0) = y_0$. Отже, $M\left(\frac{x_0}{a}; y_0\right)$. Це означає, що будь-яка точка графіка функції $y = f(x)$ перейде у точку графіка функції $y = f(ax)$ з абсцисою $\frac{x_0}{a}$ і тією самою ординатою. Очевидно, якщо $a > 1$, абсциса точки M зменшується в a разів, а якщо $0 < a < 1$ — збільшується в a разів. Це означає, що графік функції $y = f(ax)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою його розтягування або стиснення до осі Oy.

Графіки функцій $y = \{2x\}$ та $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$ зображено на малюнку 20.

Зауваження 1. Наведені вісім перетворень назвемо **основними.** Під час побудови графіків складних функцій основні перетворення можна виконувати в будь-якій послідовності. І все-таки перетворення (5) і (6) доцільніше робити останніми, оскільки стиснення і розтягування побудованих графіків (перетворення (7) і (8)) зручніше виконувати від початку координат.

Зауваження 2. Перш ніж виконувати перетворення (6), треба перевірити, чи дорівнює одиниці у формулі функції коефіцієнт біля аргументу x. Якщо ні, то слід перетворити формулу на потрібний вигляд. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{2-x}$, треба попередньо записати цю формулу у вигляді $y = \sqrt{-(x-2)}$ і перетворювати графік у такій послідовності: 1) побудувати відомий графік $y = \sqrt{x} = f(x)$; 2) побудувати графік $y = \sqrt{-x} = f(-x)$; 3) побудувати шуканий графік, виконавши паралельне перенесення попереднього графіка $y = \sqrt{-x}$ на дві одиниці вправо в напрямі осі Ox.

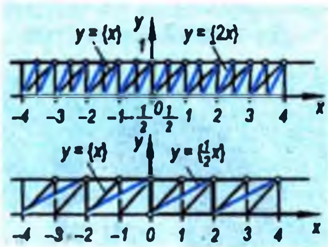


Мал. 19

7. Дано: графік функції $y = f(x) = x^3$. Побудувати графіки $y = af(x) = 3x^3$ і $y = \frac{1}{3}x^3$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.
2) Розтягнути його в a разів від осі Ox, якщо $a > 1$, стиснути до осі Ox в a разів, якщо $0 < a < 1$.



Мал. 20

8. Дано: графік функції
$y = f(x) = \{x\}$.
Побудувати графіки $y = f(ax) = \{2x\}$ і $y = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$.

Алгоритм

1) Побудувати графік $y = f(x)$.
2) Стиснути його до осі Oy в a разів, якщо $a > 1$, розтягнути від осі Oy в a разів, якщо $0 < a < 1$.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Ключовими поняттями математичного аналізу, початки якого вивчають у школі, є поняття функції, границі, похідної та інтеграла.

Термін «функція» вперше запропонував у 1692 р. видатний німецький філософ і математик **Готфрід Вільгельм Лейбніц** (1646—1716) для характеристики різних відрізків, що сполучають точки деякої кривої. Перше означення функції, яке вже не було пов'язане з геометричними уявленнями, сформулював **Йоганн Бернуллі** (1667—1748) у 1718 р. Пізніше, у 1748 р. дещо уточнене означення функції дав учень Й. Бернуллі **Леонард Ейлер** (1707—1783). Ейлеру належить і символ функції $f(x)$.

В означеннях Бернуллі й Ейлера функцію ототожнювали з аналітичним виразом (формулою), яким вона задається. Ейлер також вважав, що одну й ту саму функцію на різних множинах можна задавати різними аналітичними виразами. Ці так звані кусково-задані функції широко застосовуються на практиці.

Уже за часів Ейлера стало зрозумілим, що ототожнення функції з її аналітичним виразом звужує саме поняття функції, бо, по-перше, одним і тим самим виразом можна задати різні функції, по-друге, не завжди функцію можна задати аналітично. Вже Ейлер припускав можливість задання функції лише графіком.

Дальший розвиток математичного аналізу та практичне застосування математики привели до розширення поняття функції. У 1834 р. видатний російський математик **М. І. Лобачевський** (1792—1856) сформулював означення функції, в основу якого було покладено ідею відповідності: «Загальне поняття вимагає, щоб функцією від x називати число, яке дається для кожного x і разом з x поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засіб випробування всіх чисел і вибору одного з них, або, нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою».

Леонард ЕЙЛЕР
(1707—1783)

Уже через три роки німецький математик **Лежен Діріхле**

Йоганн БЕРНУЛЛІ
(1667—1748)

Микола Іванович
ЛОБАЧЕВСЬКИЙ
(1792—1856)

(1805— 1859) зробив таке узагальнення поняття функції: «y є функція змінної x (на відрізку $a \leq x \leq b$), якщо кожному значенню x відповідає цілком певне значення y, причому не має значення, яким чином встановлена ця відповідність — аналітичною формулою, графіком, таблицею чи навіть просто словами».

У другій половині XIX ст. після створення теорії множин до означення функції крім ідеї відповідності було залучено ідею множини, а тому сучасне означення функції формулюють так: «Відповідність між множинами X і Y, при якій кожному елементу x множини X відповідає певний елемент y множини Y, називають функцією».

У XX ст. відбулося подальше розширення поняття функції, викликане потребами фізики. У 1930 р. англійський фізик **Поль Дірак** (1902— 1984) ввів поняття так званої дельта-функції, а в 1936 р. російський математик і механік **С. Л. Соболєв** (1908—1990) увів ширше поняття узагальненої функції, яке охоплює і дельта-функцію.

Отже, поняття функції розвивається і розширюється відповідно до потреб розвитку математичної науки та її практичного застосування.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається функцією? Як позначають функції? Навести приклади функцій.

2. Що таке область визначення функції?

3. Що таке область значень, або область зміни функції? Навести приклади.

4. Назвати основні способи задання функцій.

5. Чи будь-яка формула задає функцію?

6. Яка функція називається зростаючою? Навести приклади.

7. Яка функція називається спадною? Навести приклади.

8. Як дослідити функцію на зростання або спадання за допомогою означення?

9. Яка функція називається парною? Навести приклади.

10. Яка функція називається непарною? Навести приклади.

11. Як дослідити функцію на парність чи непарність?

12. Які властивості графіків парної і непарної функцій вам відомі?

13. Яка функція називається лінійною? Який її графік?

14. Назвати властивості лінійної функції. Довести одну з них.

15. Навести приклади залежностей, які задаються за допомогою лінійної функції.

16. Яка функція називається оберненою пропорційністю? прямою пропорційністю? Навести приклади залежностей, які задаються за допомогою цих функцій.

17. Назвати властивості функції $y = \frac{k}{x}$. Довести властивість непарності функції $y = \frac{k}{x}$.

18. Що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?

19. Назвати властивості функції $y = x^2$. Довести властивість спадання цієї функції на множині $(-\infty; 0]$.

20. Назвати властивості функції $y = x^3$ і довести властивість її зростання. Що є графіком цієї функції?

21. Назвати властивості функції $y = \sqrt{x}$. Довести властивість зростання цієї функції.

22. Яка функція називається квадратичною? Навести приклад залежності, яка задається за допомогою квадратичної функції.

23. Що є графіком квадратичної функції?

24. Довести, що вершиною графіка квадратичної функції є точка $M\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

25. Побудувати графік функції $y = [x]$.

26. Побудувати графік функції $y = \{x\}$.

27. Назвати основні види перетворень при побудові графіків функції за допомогою графіків відомих функцій.

28. Як побудувати графіки функцій $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, якщо дано графік функції $y = f(x)$?

29. Як побудувати графіки функцій $y = |f(x)|$ і $y = f(|x|)$, якщо дано графік функції $y = f(x)$?

30. Як побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm a$, $y = f(x \pm a)$, якщо дано графік функції $y = f(x)$ і $a > 0$?

31. Як побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(kx)$, якщо дано графік $y = f(x)$ і $k > 0$?

ВПРАВИ[1]

1. Знайти область визначення функції:

А

1) $y = \frac{6}{x-1}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$; 3) $y = \sqrt[3]{\frac{3x-5}{x+2}}$;

4) $y = \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$; 5) $y = \frac{2x}{x^2-5x+6}$; 6) $y = \sqrt{x^2+x-2}$;

7) $y = \frac{3}{x^2-1}$; 8) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-5}$.

Б

9) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$; 10) $y = \frac{x}{x^2+x+1}$; 11) $y = \sqrt{16-x^2}$;

12) $y = \sqrt{4-|x|}$; 13) $y = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$; 14) $y = \frac{4}{\sqrt{25-x^2}}$;

15) $y = \frac{2-x}{\sqrt[3]{2x-6}}$; 16) $y = \frac{x}{|x|}$.

В

17) $y = \frac{3}{4-\sqrt{x^2}}$; 18) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt[4]{x-2} + \frac{4}{x-3}$;

---

[1] Тут і далі літерами **А**, **Б**, **В** позначено вправи трьох рівнів складності: обов'язкового, підвищеного і поглибленого.

У вправах на с. 25—27 усі корені — арифметичні, де арифметичним коренем будь-якого натурального степеня з невід'ємного числа a називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

19) $y = \frac{5}{\sqrt{9-|x|}} + \frac{1}{x-5}$; 20) $y = \frac{2}{|x|-1} + \frac{1}{x}$.

2. Дослідити на парність і непарність функцію:

А

1) $y = x + x^3$; 2) $y = x^2 - 2$; 3) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;

4) $y = x + \frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{1-x^2}$; 6) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Б

7) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; 8) $y = \sqrt{x}$; 9) $y = \sqrt[3]{x}$;

10) $y = x^3 - 5x + 1$; 11) $y = \frac{x^2-x}{x-1}$; 12) $y = x^2 - |x|$.

В

13) $y = |x^5|$; 14) $y = \frac{\sqrt[4]{4-x^2}}{x}$; 15) $y = \frac{2x}{x-3}$;

16) $y = \frac{2x}{x^2+|x|+1}$; 17) $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$; 18) $y = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$.

3. Побудувати графік функції:

А

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{x+2}$; 3) $y = \frac{1}{x-2}$; 4) $y = \sqrt{x}$;

5) $y = -\sqrt{x+1}$; 6) $y = -\sqrt{x-1}$; 7) $y = |x|$; 8) $y = |x - 3|$;

9) $y = |x + 3|$; 10) $y = x^3$; 11) $y = |x^3| + 4$; 12) $y = \frac{1}{2}|x^3| + 4$;

13) $y = x^2 - 5x + 6$; 14) $y = x^2 - 5|x| + 6$.

Б

15) $y = \frac{6}{2-x}$; 16) $y = \sqrt{1-x}$; 17) $y = (x + 3)^3 + 1$;

18) $y = |x^2 - 5x + 6|$; 19) $y = 2-\sqrt{-x}$; 20) $y = |2x + 3|$;

21) $y = \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^3 + 1$; 22) $y = (2x + 1)^2$; 23) $y = |x^3 - 1| - 3$;

В

24) $y = \frac{6}{2-x} + 3$; 25) $y = \frac{2-x}{3x+1}$; 26) $y = \frac{3}{3x-2}$;

27) $y = \sqrt{2-x}$; 28) $y = \sqrt{2x-1} + 3$; 29) $y = 2\sqrt{1-3x}$;

30) $y = |2x - 3|$; 31) $y = -(x - 1)^3$; 32) $y = 2 - \sqrt{1-|x|}$;

33) $y = \frac{|x|}{x}$; 34) $y = |x + 1| - x$; 35) $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

§ 2. Тригонометричні функції кута

У курсі геометрії 8-го класу було введено означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута як відношення сторін у прямокутному трикутнику.

Синусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\sin\alpha$) називається відношення протилежного катета a до гіпотенузи c (мал. 21).

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

Косинусом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\cos\alpha$) називається відношення прилеглого катета b до гіпотенузи c.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

Тангенсом гострого кута α прямокутного трикутника (позначається $\operatorname{tg}\alpha$) називається відношення протилежного катета a до прилеглого b.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$$

Було доведено, що синус і косинус гострого кута трикутника залежать лише від міри кута і не залежать від довжини сторін трикутника, його розміщення, тобто синус, косинус, а отже, і тангенс є функціями міри кута. Пізніше для кутів від 0° до 180° означення цих функцій було введено за допомогою кола з радіусом R у системі координат (координатний спосіб означення).

Синусом кута α **називається відношення ординати** y **точки** $P_\alpha(x;\ y)$ **кола до його радіуса** R (мал. 22).

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{R}}$$

Косинусом кута α **називається відношення абсциси** x **точки** $P_\alpha(x;\ y)$ **кола до його радіуса** R**.**

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{R}}$$

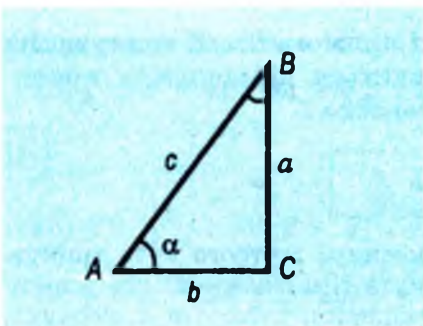
Тангенсом кута α **називається відношення ординати** y **точки** $P_\alpha(x;\ y)$ **кола до абсциси** x **цієї точки.**

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}}$$

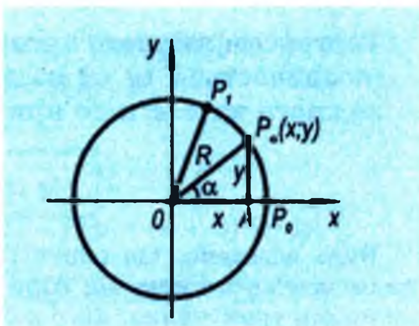
Для $\operatorname{tg}\alpha$ кут $\alpha = 90^\circ$ виключають, бо при $\alpha = 90^\circ$ абсциса дорівнює 0, а ділити на 0 не можна.

При такому означенні тригонометричних функцій $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$. Якщо взяти до уваги, що промені, які збігаються, утворюють кут 0°, то $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$.

Нагадаємо, що для будь-якого кута $0^\circ < \alpha < 180^\circ$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Для кута $\alpha \neq 90^\circ$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.



Мал. 21



Мал. 22

Котангенсом кута α називається відношення абсциси x точки $P_\alpha(x; y)$ кола до ординати y цієї точки.

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}}$$

Якщо будь-який кут розглядати як фігуру, утворену обертанням променя навколо початкової точки у двох можливих напрямах (додатному, проти годинникової стрілки і від'ємному, за годинниковою стрілкою), то введені означення тригонометричних функцій можна розширити на будь-які кути.

$\sin \alpha = \frac{y}{R}$	$\cos \alpha = \frac{x}{R}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$
$\cos 90° = 0$	$\sin 180° = 0$	$\cos 180° = -1$	$\operatorname{tg} 180° = 0$
$\sin 0° = 0$	$\cos 0° = 1$	$\operatorname{tg} 0° = 0$	
$\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$		$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$	
$\operatorname{tg} (180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, де $\alpha \neq 90°$			

Кути довільного розміру описують стрілки годинника, точки обертових частин механізмів тощо.

Приклад 1. Записати кут β у вигляді $\beta = \alpha + 360°n$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, α — додатний кут, менший від 360°, якщо:

1) $\beta = 2000°$; 2) $\beta = -490°$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Поділимо 2000° на 360°. Отже, даний кут складається з 5 повних обертів і ще 200°. Тому $\beta = 2000° = 200° + 360° \cdot 5$, $n = 5$, $\alpha = 200°$.

2) З рівності $-490° = \alpha + 360°n$ знайдемо умову, яку має задовольняти n, щоб кут α був додатним. Розв'яжемо останнє рівняння відносно α : $\alpha = -490° - 360°n$.

За умови $\alpha > 0$ маємо: $-490° - 360°n > 0$. Розв'яжемо цю нерівність відносно n: $360°n < -490°$; $n < -\frac{490°}{360°}$, або $n < -1\frac{13}{36}$.

Найближче ціле число n, яке задовольняє цю нерівність, є $n = -2$. З рівності $\alpha = -490° - 360°n$ знайдемо α, підставляючи значення n. Маємо: $\alpha = -490° - 360° \cdot (-2) = -490° + 720° = 230°$. Отже, $-490° = 360° \cdot (-2) + 230°$, $n = -2$, $\alpha = 230°$.

Приклад 2. Стрілки годинника показують рівно 12 год. Через який найменший інтервал часу хвилинна стрілка знову суміститься з годинною?

Р о з в' я з а н н я. Хвилинна стрілка робить повний оберт, тобто повертається на кут у 360°, за 60 хв. Тому за 1 хв вона повертається на $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Годинна стрілка робить повний оберт за 12 год, або за 720 хв. Отже, за 1 хв вона повертається на $\frac{360^\circ}{720} = 0{,}5^\circ$.

Коли годинник показує 12 год, то найменший відмінний від нуля кут між годинною і хвилинною стрілками дорівнює 360°. Позначаючи шуканий інтервал часу у хвилинах через x, дістанемо рівняння $6x - \frac{1}{2}x = 360^\circ$. Звідси $x = 65\frac{5}{11}$ (хв), або 1 год $5\frac{5}{11}$ хв.

Отже, хвилинна стрілка суміститься з годинною щонайменше через 1 год $5\frac{5}{11}$ хв.

У геометрії термін «кут» використовують для позначення двох понять: 1) геометричної фігури, утвореної двома променями зі спільним початком; 2) величини, що характеризує міру відхилення одного променя від іншого ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), або однієї прямої від іншої при їх перетині ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), або кута повороту ($-\infty < \alpha < +\infty$).

Коли йдеться про аргумент тригонометричної функції, то термін «кут» (синус кута, косинус кута) використовують у розумінні величини, а не фігури.

Відомо, що кожному центральному куту відповідає певна дуга кола заданого радіуса. Якщо розгорнутий центральний кут поділити на 180 рівних частин (кожна частина називається градусом), то і відповідна дуга (півколо) також поділиться на 180 рівних частин. Величину кожної з дуг, на які розіб'ється півколо, також називають градусом. Інколи для кута використовують термін «кутовий градус», а для дуги — «дуговий градус».

Існують різні системи вимірювання кутів і дуг. Крім градуса, його частин (мінути, секунди) в геометрії як одиницю вимірювання кутів використовують прямий кут. Цю одиницю позначають літерою d. Наприклад, кут α, що дорівнює 30°, в одиницях прямого кута позначають так: $\alpha = \frac{1}{3}d$.

В астрономії за одиницю вимірювання кутів узято кутову годину. Це кут, який становить $\frac{1}{6}$ частину прямого.

У техніці за одиницю вимірювання кутів взято повний оберт. Ідеться про число обертів вала, шківа, махового колеса тощо.

В артилерії кути вимірюють у так званих поділках кутоміра. Велика поділка кутоміра — це $\frac{1}{60}$ частина повного оберту. Мала поділка кутоміра дорівнює $\frac{1}{100}$ частині великої поділки. Кут, виміряний у таких одиницях, записують так: 28—32, що означає 28 великих і 32 малих поділки кутоміра.

Моряки вимірюють кути в румбах. Ця одиниця дорівнює $\frac{1}{16}$ частині розгорнутого кута.

У картографії в деяких країнах за одиницю вимірювання кутів узято град. Град дорівнює $\frac{1}{200}$ частині розгорнутого кута і позначається символом g. Наприклад, $\angle AOB = 5^g$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати означення тригонометричних функцій гострого кута у прямокутному трикутнику.

2. Сформулювати означення синуса і косинуса довільного кута.

3. Як означаються тангенс і котангенс кута?

4. Які існують системи вимірювання кутових величин?

ВПРАВИ

4. Записати кут β у вигляді $\beta = \alpha + 360°n$, де $n \in Z$, а α — додатний кут, менший від 360°, якщо: 1) $\beta = -180°$; 2) $\beta = -780°$; 3) $\beta = 1580°$; 4) $\beta = 7242°$; 5) $\beta = -1690°$.

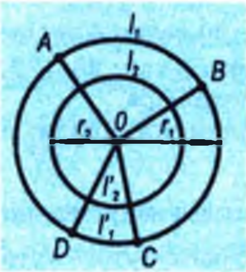
5. Зобразити на колі у системі координат кут $\beta = \alpha + 360°n$ при таких значеннях n і α: 1) $n = 3$, $\alpha = 40°$; 2) $n = -2$, $\alpha = 30°$; 3) $n = 5$, $\alpha = -25°$; 4) $n = -3$, $\alpha = 48°$.

6. Колесо машини за 2 с робить 6 обертів. Записати у градусах кут, на який повернеться колесо за 1 с; 10 с.

7. Через скільки хвилин після того, як годинник покаже 3 год, хвилинна стрілка наздожене годинну?

§ 3. Радіанна система вимірювання кутів і дуг

У математиці, астрономії, фізиці, техніці використовують радіанну систему вимірювання кутів і дуг, яка має певні переваги перед іншими системами. Введення радіанної системи зумовлене певною властивістю дуг, які відповідають кожному центральному куту. Розглянемо два концентричні кола з радіусами r_1 і r_2 (мал. 23) і два різні центральні кути $\angle AOB =$



Мал. 23

$= \alpha^\circ$ і $\angle DOC = \beta^\circ$ з відповідними дугами l_1 і l_2, l'_1 і l'_2. За відомою формулою довжини дуги маємо:

$$l_1 = \frac{\pi\alpha^\circ r_1}{180^\circ}; \quad l_2 = \frac{\pi\alpha^\circ r_2}{180^\circ};$$

$$l'_1 = \frac{\pi\beta^\circ r_1}{180^\circ}; \quad l'_2 = \frac{\pi\beta^\circ r_2}{180^\circ}.$$

Поділивши обидві частини кожної з цих чотирьох рівностей на відповідний радіус, дістанемо:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}; \quad \frac{l_2}{r_2} = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}; \quad \frac{l'_1}{r_1} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}; \quad \frac{l'_2}{r_2} = \frac{\pi\beta^\circ}{180^\circ}.$$

Звідси $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = m$, $\frac{l'_1}{r_1} = \frac{l'_2}{r_2} = n$. Якщо $\alpha^\circ > \beta^\circ$, то $m > n$.

Отже, для даного центрального кута відношення довжин дуг концентричних кіл до довжин відповідних радіусів є величиною сталою. Це відношення залежить від кута, тому може бути характеристикою величини центрального кута:

$$\frac{l}{r} = a.$$

Число a характеризує міру даного центрального кута. Якщо $l = r$, то $a = 1$. Тому

в радіанній системі за одиницю вимірювання кутів і дуг взято такий центральний кут, для якого довжина відповідної дуги дорівнює довжині радіуса.

Оскільки довжина півкола з радіусом r дорівнює πr, то радіанна міра розгорнутого кута дорівнює $\frac{\pi r}{r} = \pi$ радіанів. Враховуючи, що градусна міра розгорнутого кута становить 180°, а його радіанна міра дорівнює π радіанів, то 1 рад $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, а $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад $\approx 0{,}01745$ рад.

Нехай α° — градусна міра деякого кута, а a — його радіанна міра. Оскільки градусна міра кута, утвореного при одному оберті точки $P_0(1; 0)$, дорівнює 360°, а його радіанна міра дорівнює 2π, то $\frac{360^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{2\pi}{a}$.

Звідси $a = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$ і $\alpha^\circ = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}$, тобто ми дістали формули переходу від градусної міри кута до радіанної і навпаки.

Використовуючи ці формули для обчислення радіанної і градусної мір кута, слід враховувати правила наближених обчислень. Навіть тоді, коли наперед задати точне значення градусної чи радіанної міри кута (це може бути лише у теоретичних розрахунках), обчислені за формулами переходу значення будуть наближеними з точністю, яка залежить від вибору наближеного значення числа π.

Приклад 1. Визначити радіанну міру кута $108°$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо $a = \frac{\pi\alpha°}{180°}$, $a = \frac{\pi \cdot 108°}{180°} = \frac{3}{5}\pi$. Якщо $\pi \approx 3{,}14$, то $a \approx \frac{3}{5} \cdot 3{,}14 = 0{,}6 \cdot 3{,}14 = 1{,}884 \approx 1{,}88$ (рад), коли вважати, що градусна міра задана точним значенням.

Приклад 2. Визначити градусну міру кута, радіанна міра якого наближено дорівнює 2,3 рад.

Р о з в' я з а н н я. Маємо $\alpha° = \frac{a \cdot 180°}{\pi}$, $\alpha° \approx \frac{2{,}3 \cdot 180°}{\pi}$; при $\pi \approx 3{,}14$, $\alpha° \approx \frac{2{,}3 \cdot 180°}{3{,}14} \approx 132° \approx 130°$.

У радіанній системі не було введено позначення одиниці вимірювання, тобто позначення радіана. Тому, якщо кут як аргумент тригонометричної функції виміряний у радіанах, під знаком тригонометричної функції записують тільки числове значення міри кута. Наприклад, $\sin 2$, $\cos \frac{\pi}{4}$.

Особливістю радіанної міри є й те, що її одиниця (один радіан) міститься у розгорнутому куті не ціле число разів, як наприклад $1°$, а ірраціональне: $\pi \approx 3{,}14$.

Перевага радіанної міри перед іншими полягає в тому, що для малих кутів, виміряних у радіанах, справджуються наближені рівності: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$.

Справді, нехай $\alpha = 3°$. За таблицею переходу від градусної міри до радіанної знаходимо, що $3° \approx 0{,}0524$ рад. За таблицями значень тригонометричних функцій для кутів, виміряних у градусній мірі, $\sin 3° \approx 0{,}0523$. Якщо кут α виміряно у радіанній мірі, то $\sin 0{,}0524 \approx 0{,}0523$, тобто $\sin \alpha \approx \alpha$.

У градусній мірі аналогічна наближена рівність $\sin 3° \approx 3$ не має сенсу. Вказана перевага радіанної міри широко застосовується у математичному аналізі та інших науках.

Перевага радіанної міри полягає ще і в тому, що відома з геометрії формула довжини дуги, виміряної у градусах, $l = \frac{\pi r\alpha°}{180°}$ і формула площі сектора $S = \frac{\pi r^2\alpha°}{360°}$ у радіанній мірі спрощуються і мають вигляд $l = ra$, $S = \frac{ar^2}{2}$, де r — радіус кола, a — радіанна міра дуги.

Радіанна міра дає змогу ввести поняття тригонометричної функції довільного числового аргументу.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що покладено в основу введення радіанної системи вимірювання кутових величин?

2. Що таке радіан?

3. Які переваги й особливості радіанної системи вимірювання кутових величин порівняно з іншими системами?

4. Яка існує залежність між градусною і радіанною мірами кута?

ВПРАВИ

8. Записати у радіанній мірі кути: 15°, $22^\circ 30'$, 51°, $157^\circ 30'$, 162°.

9. Записати у градусній мірі кути, виміряні у радіанах: $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{10\pi}{5}$; 1,5; 2,50.

10. Знайти кутову величину дуги в градусах, якщо її радіанна міра дорівнює:

А

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{3\pi}{4}$;

Б

4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{12}$; 7) 7π; 8) $\frac{5\pi}{2}$;

В

9) 0,5; 10) $0{,}75\pi$; 11) 1,882.

11. У якій чверті закінчується кут:

А

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 3; 3) 128°?

Б

4) 216°; 5) 7π; 6) 0,80?

В

7) $\frac{21\pi}{4}$; 8) 100; 9) −0,25?

12. Розв'язати задачу:

А

1) Зубчасте колесо, що має 56 зубців, повернулося на 14 зубців проти годинникової стрілки. Виразити в радіанах кут повороту колеса.

2) Визначити радіанну міру дуги, довжина і радіус якої дорівнюють 17 см і 20 см, відповідно.

Б

3) Визначити довжину дуги кола з радіусом 25 см, якщо:
а) радіанна міра дуги дорівнює 1,25 рад;
б) градусна міра дуги дорівнює 144°.

В

4) Знайти радіанну міру кута сектора, довжина дуги якого:
а) втричі менша від периметра сектора;
б) становить половину периметра сектора.

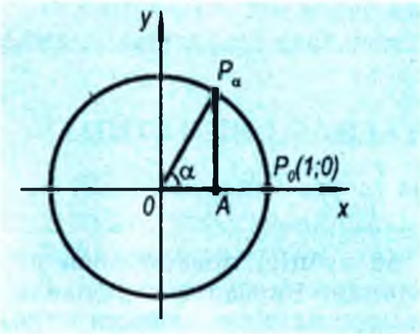
§ 4. Тригонометричні функції числового аргументу

Перш ніж вводити означення тригонометричних функцій числового аргументу, пригадаємо, що синус, косинус, тангенс і котангенс довільного кута не залежать від радіуса R кола. Тому покладемо $R = 1$, а відповідне коло назвемо одиничним (мал. 24).

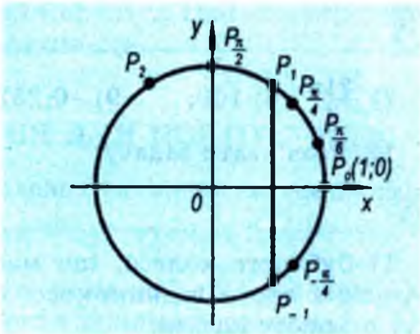
Виконаємо таку вправу: побудуємо на одиничному колі точки, на які відображується початкова точка $P_0(1; 0)$ під час повороту навколо центра кола на кут α радіанів, якщо: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; в) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -1$; ґ) $\alpha = 2$.

Р о з в' я з а н н я. а) Числу 0 на одиничному колі (мал. 25) відповідає точка $P_0(1; 0)$ — початок відліку.

б) Оскільки кут 90° дорівнює $\frac{\pi}{2}$ рад, то, поділивши на 3 кут $\frac{\pi}{2}$ рад, матимемо кут обертання $\frac{\pi}{6}$ рад, якому відповідає



Мал. 24



Мал. 25

на колі точка $P_{\frac{\pi}{6}}$, що відсікає $\frac{1}{3}$ частину дуги $P_0 P_{\frac{\pi}{2}}$.

в) Відомо, що кути, градусна чи радіанна міра яких виражається від'ємним числом, відкладають від радіуса OP_0 за годинниковою стрілкою; розділимо прямий кут, тобто кут $\frac{\pi}{2}$ рад навпіл і відкладемо кут $-\frac{\pi}{4}$ від радіуса OP_0 у IV чверті, дістанемо точку $P_{-\frac{\pi}{4}}$.

г) Куту 1 рад відповідає дуга одиничного кола, довжина якої дорівнює радіусу $R = 1$; оскільки $\frac{\pi}{4} \approx \frac{3,14}{4} \approx 0,78$, а $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3,14}{2} \approx 1,57$, то точка P_1 лежить вище від точки $P_{\frac{\pi}{4}}$. Точка P_{-1} буде симетричною їй відносно осі Ox і розміщена на одиничному колі у IV чверті.

ґ) Щоб знайти на одиничному колі точку P_2, досить відкласти від початкової точки у напрямі, протилежному рухові годинникової стрілки, дві дуги P_0P_1 послідовно.

Розв'язуючи цю вправу, помічаємо, що кожному дійсному числу α на одиничному колі відповідає точка P_α, положення якої залежить від числа α.

Кожній точці P_α на одиничному колі відповідають певні абсциса і ордината, які також залежать від α.

Отже, маємо залежності між дійсним числом α і абсцисою та ординатою відповідної точки одиничного кола, на яку відображується початкова точка $P_0(1; 0)$ під час повороту навколо центра кола на кут α рад. Ці залежності дістали назву **тригонометричних функцій числа, або тригонометричних функцій числового аргументу**.

Оскільки $R = 1$, то означення тригонометричних функцій як відношення ординати і абсциси до радіуса, які було введено для довільних кутів α і R, спрощуються.

Синусом числа α називається ордината точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1;\ 0)$ під час повороту навколо центра кола на кут α рад, і ~~позначається~~ $\sin \alpha$.

Косинусом числа α називається абсциса точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1;\ 0)$ під час повороту навколо центра кола на кут α рад, і ~~позначається~~ $\cos \alpha$.

Тангенсом числа α називається відношення $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, а котангенсом числа α — відношення $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, і позначаються вони відповідно $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$.

Отже, за означенням,

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}, \qquad \boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}.$$

Оскільки кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність дійсні числа $\sin x$ і $\cos x$, то вважатимемо, що на множині $\boldsymbol{R}$ задано функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Оскільки $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ визначений для всіх x, крім тих, при яких $\cos x = 0$, то кожному дійсному числу x, крім $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, відповідає єдине число $\operatorname{tg} x$ (значення y залежить від x), тобто вважатимемо, що задана функція

$$y = \operatorname{tg} x, \text{ де } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Можна вважати, міркуючи аналогічно, що на множині $\boldsymbol{R}$ при $x \neq n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$ задана функція $y = \operatorname{ctg} x$.

Для побудови графіків функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ та розв'язування деяких інших задач доцільно ввести поняття «лінія тангенса» і «лінія котангенса».

Проведемо дотичну t до одиничного кола у точці P_0 (1; 0) (мал. 26).

Для довільного числа α, якщо $\alpha \neq 0$, відповідна точка $P_\alpha(\cos \alpha, \sin \alpha)$ не лежить на осі Oy, а тому промінь OP_α перетинає дотичну в деякій точці T_α з абсцисою, що дорівнює 1.

Для знаходження ординати точки T_α скористаємось подібністю трикутників OAP_α і OP_0T_α.

З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{P_\alpha A}{OA} = \frac{T_\alpha P_0}{OP_0} = T_\alpha P_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким чином, ордината точки перетину прямої OP_α з прямою t дорівнює тангенсу кута α. Тому дотична t дістала назву **лінії тангенса**.

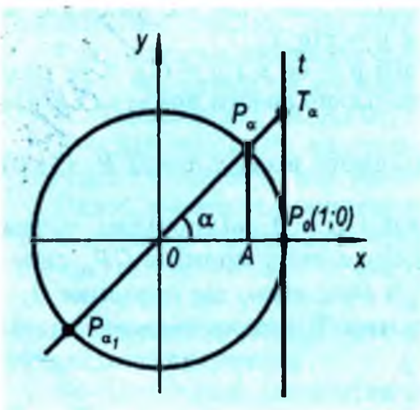
Щоб ввести поняття лінії котангенса, проведемо дотичну q до одиничного кола у точці $P_{\frac{\pi}{2}}$ (мал. 27). Для довільного числа α, якщо $\sin\alpha \neq 0$, відповідна точка $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ не лежить на осі Ox, а тому промінь OP_α перетинає пряму q у деякій точці Q_α з ординатою, що дорівнює 1. Знайдемо абсцису цієї точки.

Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через початок координат. Воно має вигляд $y = kx$, де $k = \operatorname{tg}\alpha$. Оскільки ордината точки Q_α дорівнює 1, то, підставляючи значення k і $y = 1$ у рівняння $y = kx$, дістанемо рівність $1 = x\operatorname{tg}\alpha$. Звідси $x = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

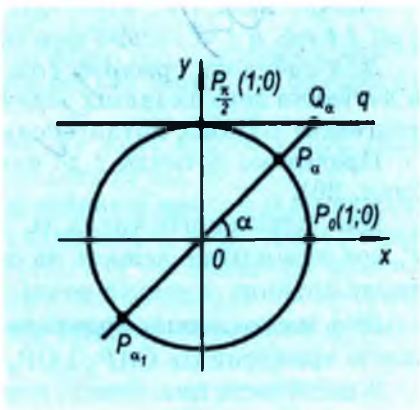
Таким чином, абсциса точки перетину прямої OP_α з прямою q дорівнює котангенсу кута α. Тому дотична q дістала назву **лінії котангенса**.

Оскільки кожному дійсному числу α на одиничному колі відповідає певна точка P_α, а цій точці відповідають певні абсциса $\cos\alpha$ і ордината $\sin\alpha$, то областю визначення функцій $y = \cos x$ і $y = \sin x$ є множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$. Абсциса і ордината точки P_α одиничного кола змінюються від -1 до 1, тому областю значень цих функцій є відрізок $[-1; 1]$.

Областю визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина всіх чисел, для яких $\cos x \neq 0$, тобто множина всіх дійсних чисел, крім чисел $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де n — будь-яке ціле число, тобто $n \in \boldsymbol{Z}$.



Мал. 26



Мал. 27

Областю визначення функції $y = \mathrm{ctg}\ x$ є множина всіх дійсних чисел, для яких $\sin x \neq 0$, тобто множина всіх дійсних чисел, крім чисел $x = n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

Областю значень функцій $y = \mathrm{tg}\ x$ і $y = \mathrm{ctg}\ x$ є множина всіх дійсних чисел. Справді, якщо α — довільне дійсне число, йому відповідає на лінії тангенса (див. мал. 26) точка $T_\alpha(1; y_0)$ така, що $\mathrm{tg}\ \angle T_\alpha Ox = y_0$, а на лінії котангенса — точка $Q_\alpha(y_0; 1)$ така, що $\mathrm{ctg}\ \angle Q_\alpha Ox = y_0$ (див. мал. 27). Отже, функції $y = \mathrm{tg}\ x$ і $y = \mathrm{ctg}\ x$ набувають будь-яких дійсних значень y_0.

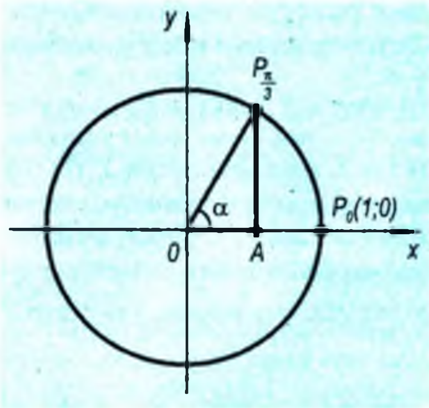
Приклад 1. Знайти значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Числу $\frac{\pi}{3}$ на одиничному колі відповідає точка $P_{\frac{\pi}{3}}$ (мал. 28). Щоб знайти $\sin \frac{\pi}{3}$ і $\cos \frac{\pi}{3}$, достатньо знайти ординату і абсцису точки $P_{\frac{\pi}{3}}$. У прямокутному трикутнику $OAP_{\frac{\pi}{3}}$ $\angle OP_{\frac{\pi}{3}}A = \frac{\pi}{6}$ рад, або $\angle OP_{\frac{\pi}{3}}A = 30°$. Оскільки у прямокутному трикутнику катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи, то $OA = \frac{1}{2}$. За теоремою Піфагора, $P_{\frac{\pi}{3}}A = \sqrt{OP_{\frac{\pi}{3}}^2 - OA^2}$; $P_{\frac{\pi}{3}}A = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, $\sin \frac{\pi}{3} = = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. За означенням, $\mathrm{tg}\ \alpha = = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тому $\mathrm{tg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$; $\mathrm{ctg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

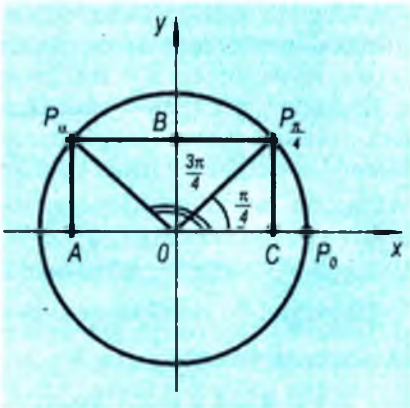
Аналогічно можна знайти значення тригонометричних функцій чисел $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, що дорівнюють тригонометричним функціям відповідних кутів у градусній і радіанній мірах. Доцільно пам'ятати ці значення, як і значення функцій для чисел (кутів) 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, оскільки їх часто використовують під час розв'язування задач. Значення тригонометричних функцій таких чисел (кутів) систематизовано у таблиці 1.

Приклад 2. Знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\ \alpha$, $\mathrm{ctg}\ \alpha$, якщо $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання. Нехай точка P_α утворена з точки $P_0(1; 0)$ при її повороті на кут $\frac{3\pi}{4}$ (мал. 29). Точки A і B — проекції точки P_α на осі абсцис і ординат. У прямокутному трикутнику $P_\alpha AO$ $\angle P_\alpha OA = \frac{\pi}{4}$, тому $\Delta P_\alpha AO$ — рівнобедрений. Оскільки



Мал. 28



Мал. 29

$\Delta P_\alpha AO = \; = \Delta P_{\frac{\pi}{4}} CO$, то $P_\alpha A = \; P_{\frac{\pi}{4}} C = \sin\frac{\pi}{4}$, $AO = OC = \cos\frac{\pi}{4}$.

Відомо (див. табл. 1), що $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. За означенням, cos α і sin α є відповідно абсцисою і ординатою точки P_α. Тому $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, оскільки ординати точок II чверті додатні, а абсциси — від'ємні.

Таблиця 1

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	0	Не існує	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не існує	0	Не існує

За означенням, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тому

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1; \quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} = -1.$$

Приклад 3. Дослідити зміну $\cos\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

Р о з в' я з а н н я. За означенням, $\cos\alpha$ є абсцисою точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка $P_0(1; 0)$ при повороті навколо центра кола на кут α рад.

Якщо α збільшується від 0 до π (I і II чверті), то абсциса зменшується від 1 до -1. Отже, при зростанні аргументу від 0 до π функція косинус спадає від 1 до -1.

Якщо α збільшується від π до 2π (III і IV чверті), абсциса збільшується від -1 до 1, тобто при зростанні аргументу від π до 2π функція косинус зростає від -1 до 1.

Аналогічно досліджують зміну функції синус.

Характер зміни тангенса і котангенса легко дослідити, користуючись лініями тангенса і котангенса.

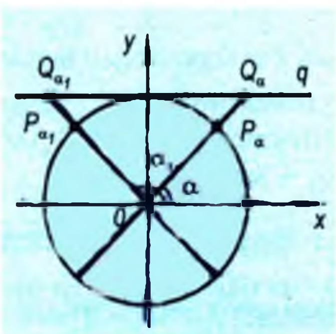
Приклад 4. Дослідити знаки синуса і котангенса у кожній з чотирьох координатних чвертей.

Р о з в' я з а н н я. Можна скористатися одиничним колом і означенням синуса числа. Відомо, що ординати точок y у I і II чвертях додатні, тому синус чисел α, для яких відповідна точка P_α належить I і II чвертям, додатний.

Досліджуючи знак котангенса, можна скористатися лінією котангенса (мал. 30). Якщо врахувати, що значення котангенса додатні на промені, який розміщений справа від осі Oy, і від'ємні на промені, який розміщений зліва від осі Oy, то для чисел α, відповідна точка яких P_α належить I і III чвертям, котангенс додатний, а для тих, що P_α належить II і IV чвертям, — від'ємний.

Можна дослідити знак котангенса інакше: попередньо дослідити знаки синуса і косинуса. Тоді за означенням неважко встановити знаки котангенса.

Знаки тригонометричних функцій у координатних чвертях схематично показано на малюнку 31.

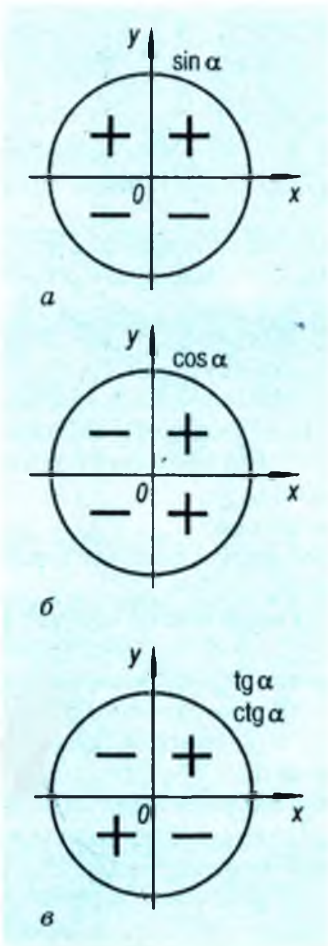


Мал. 30

Приклад 5. На одиничному колі побудувати такі кути α, щоб:

а) $\sin\alpha = -1$; б) $\cos\alpha = 0{,}5$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.



Мал. 31

Р о з в' я з а н н я. а) Ординату, що дорівнює -1, мають кути $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, де $n \in \boldsymbol{Z}$ (мал. 32).

б) Відкладемо на осі Ox відрізок завдовжки 0,5 і через кінець його проведемо пряму, паралельну осі Oy. Вона перетне одиничне коло у точках $P_{\frac{\pi}{3}}$ і $P_{-\frac{\pi}{3}}$. Цим двом точкам відповідають не лише кути $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ і $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3}$, а й усі кути, радіанна міра яких дорівнює $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

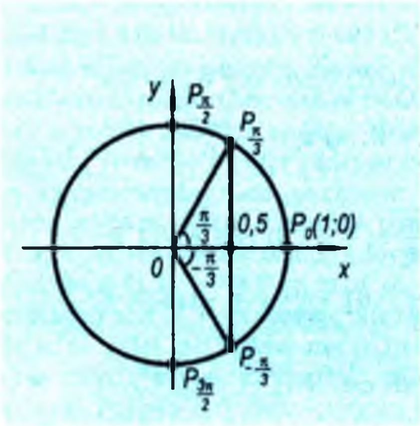
в) На одиничному колі побудуємо лінію тангенсів і на ній від точки P_0 відкладемо відрізок P_0T завдовжки 1,5 (мал. 33). Через кінець відрізка проведемо пряму $T_{1,5}O$, яка перетне коло у двох точках P_1 і P_2. Шуканими є кути $P_0OP_1 = \alpha_1$ і $P_0OP_2 = \alpha_2$, а також усі кути $\alpha_1 + 2n\pi$ і $\alpha_2 + 2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Оскільки $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, то $\alpha_2 + 2n\pi = \alpha_1 + \pi + 2n\pi = \alpha_1 + (2n + 1)\pi$.

Дві формули $\alpha_1 + 2n\pi$ і $\alpha_1 + (2n + 1)\pi$ можна об'єднати в одну $\alpha_1 + k\pi$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. Отже, шуканими є кути виду $\alpha_1 + k\pi$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

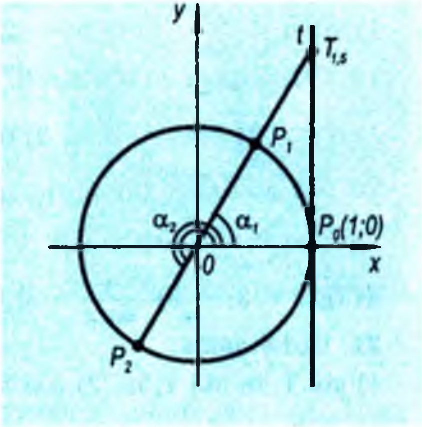
г) На лінії котангенса вліво від осі Oy відкладемо відрізок $P_{\frac{\pi}{2}}C$ завдовжки 2. Через кінець C проведемо пряму CO, яка перетне коло у двох точках P_1 і P_2. Шуканими є кути $P_0OP_1 = \alpha_1$ і $P_0OP_2 = \alpha_2$, а також усі кути $\alpha_1 + k\pi$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати означення синуса і косинуса довільного числа.
2. Як означаються тангенс і котангенс числового аргументу? Яка геометрична інтерпретація їх на одиничному колі?



Мал. 32



Мал. 33

3. Назвати числові значення тригонометричних функцій чисел $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

4. Дослідити зміну $\cos\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

5. Дослідити зміну $\sin\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

6. Як змінюються $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π ?

7. Назвати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей.

ВПРАВИ

13. Побудувати на одиничному колі точки P_α, на які відображується початкова точка $P_0(1;\ 0)$ під час повороту навколо центра кола на α рад, якщо:

1) $\alpha = \frac{\pi}{12}$; 2) $\alpha = 2{,}5$; 3) $\alpha = 2$; 4) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

14. Довести, що

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

15. Знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

16. Обґрунтувати знаки синуса у кожній з чотирьох координатних чвертей.

17. Дослідити характер зміни $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ при зростанні числа α від 0 до 2π.

18. На одиничному колі побудувати кут α такий, що:

1) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -2$; 3) $\cos\alpha = -0{,}5$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$.

19. Визначити знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha = 0{,}3$; 2) $\alpha = \frac{12}{7}\pi$; 3) $\alpha = 2$; 4) $\alpha = -\frac{13\pi}{6}$.

20. Чи можлива рівність:

1) $\sin x = \frac{1}{5}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$; 3) $\cos x = 1{,}2$;

4) $\operatorname{tg} x = 3$; 5) $\frac{1}{\sin x} = 0{,}9$; 6) $\frac{1}{\cos x} = -1{,}5$?

21. Що більше:

1) $\sin 1$ чи $\sin 1{,}5$; 2) $\cos 2$ чи $\cos 2{,}1$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ чи $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$ чи $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3{,}2}$?

22. Обчислити:

1) $3\cos\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;

2) $2\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}$;

3) $2\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;

4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}$.

23. Знайти найбільше і найменше значення виразу:

1) $2\cos x$; 2) $2\sin x - 3$; 3) $3 - \cos^2 x$;

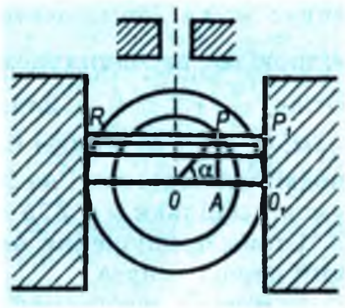
4) $-5\sin x$; 5) $5\cos t + 1$; 6) $\frac{1}{2+\cos x}$;

7) $3 + 2\sin x$; 8) $2 + 3\sin^2 x$; 9) $\frac{1}{3-\sin x}$.

§ 5. Періодичність тригонометричних функцій

До поняття періодичної функції приводять періодичні процеси, в яких значення певних змінних повторюються. Прикладами таких процесів є рух колінчастого вала і поршня у двигунах внутрішнього згоряння, різні обертальні рухи та ін.

На малюнку 34 зображено простий пристрій, який перетворює обертальний рух на прямолінійний. Колесо, яке обертається, насаджене на вісь і з'єднане за допомогою «пальця» *P* з рамкою *R*. Під час обертання колеса «палець» *P* здійснює обертальний рух, захоплює за собою рамку *R*, яка рухається вздовж бічних напрямних станин, і здійснює прямолінійний періодичний рух (якщо колесо обертається рівномірно). Якщо позначити $OP = r$, а точку дотику рамки до станин — P_1, то шлях O_1P_1 кінця рамки змінюватиметься залежно від зміни кута α, який утворює радіус кола з горизонтальним діаметром. Оскільки $O_1P_1 = AP = r\sin\alpha$, то, позначивши O_1P_1 через y, дістанемо $y = r\sin\alpha$, тобто періодичну функцію. Через кожний оберт колеса (через 2π) положення точки P повторюється. Тому найменший додатний період функції $y = r\sin\alpha$ дорівнює 2π.



Мал. 34

Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області визначення функції числа $x + T$ та $x - T$ також належать області визначення і виконується умова $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$

Неважко довести, що коли T період функції $y = f(x)$, то всі числа виду nT, де $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, також є періодами функції.

Справді, застосовуючи кілька разів означення періодичної функції, дістанемо $f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$.

Використовуючи означення синуса і косинуса числового аргументу та враховуючи їх геометричну інтерпретацію на одиничному колі, маємо:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Будь-яке число виду $2n\pi$, де $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, є періодом синуса і косинуса.

Використовуючи лінії тангенса і котангенса, неважко зробити висновок, що $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + + \pi) = \operatorname{ctg} x$.

Будь-яке число виду $n\pi$, де $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, є періодом тангенса і котангенса.

Доведемо, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π, а тангенса і котангенса — число π.

Доведення виконаємо методом від супротивного.

1) Вище було показано, що число 2π є періодом синуса. Припустимо, що існує додатне число $l < 2\pi$ таке, що $\sin(x + + l) = \sin x$. Нехай $x = \frac{\pi}{2}$, тоді $\sin\left(\frac{\pi}{2} + l\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Але

синус може дорівнювати 1 лише в точці $P_{\frac{\pi}{2}}$ (мал. 35), яка відповідає на одиничному колі числам $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Отже, $\frac{\pi}{2} + l = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, звідси $l = 2n\pi$. Проте, за припущенням, $0 < l < 2\pi$, тобто $0 < 2n\pi < 2\pi$. Поділивши всі частини подвійної нерівності на 2π, дістанемо $0 < n < 1$, що суперечить умові, оскільки $n \in \boldsymbol{Z}$, а між 0 і 1 немає жодного цілого числа.

Отже, припущення неправильне, 2π — найменший додатний період синуса.

2) Відомо, що число π є періодом тангенса. Припустимо, що існує додатне число $0 < l < \pi$ і $\operatorname{tg}(x + l) = \operatorname{tg} x$. Нехай $x = 0$, тоді $\operatorname{tg}(0 + l) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Але тангенс дорівнює нулю лише у двох точках P_0 і P_1 одиничного кола, які відповідають числам виду $n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Тому $l = n\pi$. За припущенням, $0 < l < \pi$, тобто $0 < n\pi < \pi$. Звідси $0 < n < 1$, що суперечить умові.

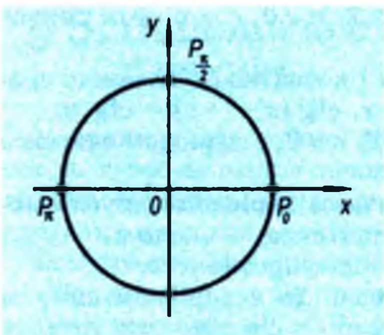
Отже, припущення неправильне, π — найменший додатний період тангенса.

Самостійно доведіть, що найменшим додатним періодом косинуса є 2π, а котангенса — число π.

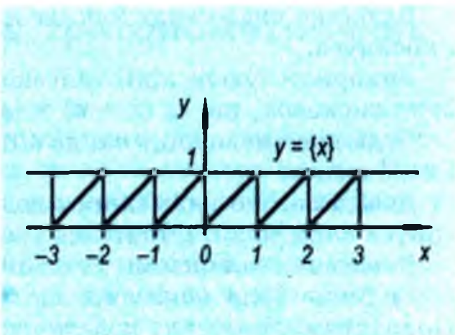
Не слід думати, що періодичними є лише тригонометричні функції. Прикладом періодичної є функція $y = \{x\}$ (y дорівнює дробовій частині x) (мал. 36). Найменшим додатним періодом цієї функції є число 1.

Лінійна функція $y = kx + b$ є періодичною при $k = 0$. Для неї періодом є будь-яке дійсне число $T \neq 0$, оскільки $f(x + T) = f(x) = b$. Найменшого додатного періоду ця функція не має.

За найменшим додатним періодом тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ можна знайти найменший додатний період складеної тригонометричної функції, проміжним аргументом якої є, зокрема, лінійна функція.



Мал. 35



Мал. 36

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Приклад 1. Знайти найменший додатний період функції $y = \sin(kx + b)$, де k, b — числа.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $T > 0$ — шуканий період. За означенням періодичної функції, $\sin(k(x + T) + b) = \sin(kx + b)$, або $\sin(kx + kT + b) = \sin(kx + b)$.

Позначимо $x_1 = kx + b$ і підставимо значення x_1 замість $kx + b$ в останню рівність. Дістанемо $\sin(x_1 + kT) = \sin x_1$.

Оскільки найменшим додатним періодом синуса є 2π, то $|k| \cdot T = 2\pi$, звідси $T = \frac{2\pi}{|k|}$.

Користуючись знайденим результатом, можна стверджувати, що найменшим додатним періодом функції $y = \sin 2x$ є число $\frac{2\pi}{2} = \pi$, функції $y = \sin\frac{1}{2}x$ — число $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, функції $y = \sin kx$ — число $\frac{2\pi}{|k|}$.

Враховуючи властивість періодичності тригонометричних функцій, можна знаходити значення функцій будь-якого аргументу через значення функцій аргументу $0 < x < 2\pi$ для синуса і косинуса та аргументу $0 < x < \pi$ — для тангенса і котангенса.

Період функції, яка є сумою неперервних і періодичних функцій, дорівнює найменшому спільному кратному періодів доданків, якщо він існує.

Приклад 2. Знайти період функції:

1) $y = \sin 2x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y = \cos\frac{x}{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{5}$;

3) $y = \sin\frac{3x}{4} + 5\cos\frac{2x}{3}$; 4) $y = 2\operatorname{ctg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Перший доданок можна записати у вигляді $\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)$, тому його період дорівнює π: $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Другий доданок можна записати у вигляді $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{x+2\pi}{2}$, тому його період дорівнює 2π: $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Періодом заданої функції буде найменше спільне кратне (НСК) періодів доданків, тобто $T = 2\pi$.

2) Перший доданок можна записати у вигляді $\cos\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{x+6\pi}{3}$, тому його період дорівнює 6π: $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Другий доданок можна записати у вигляді $\operatorname{tg}\frac{x}{5}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}+\pi\right)=$ $=\operatorname{tg}\frac{x+5\pi}{5}$, тому його період дорівнює 5π : $T_2=\frac{\pi}{\frac{1}{5}}=5\pi$. Період T даної функції дорівнює НСК $(6\pi; 5\pi)$, тобто 30π.

3) Перший доданок можна записати у вигляді $\sin\frac{3x}{4}=$ $=\sin\left(\frac{3x}{4}+2\pi\right)=\sin\frac{3}{4}\left(x+\frac{8\pi}{3}\right)$, тому його період $T_1=\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=$ $=\frac{8\pi}{3}$. Другий доданок можна записати у вигляді $\cos\frac{2x}{3}=$ $=\cos\left(\frac{2x}{3}+2\pi\right)=\cos\frac{2}{3}(x+3\pi)$, тому його період $T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$. Період T даної функції дорівнює НСК $\left(\frac{8\pi}{3}; 3\pi\right)$, тобто 24π.

4) Перший доданок можна записати у вигляді $\operatorname{ctg} 3x=$ $=\operatorname{ctg} 3(x+\pi)$, тому його період $T_1=\frac{\pi}{3}$. Другий доданок можна записати у вигляді $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 2(x+\pi)$, тому його період $T_2=$ $=\frac{\pi}{2}$. Період T даної функції дорівнює НСК $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто π.

Приклад 3. Звести до однойменної функції гострого кута:
1) $\cos 1827^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 978^\circ$; 3) $\sin(-800^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg} 1305^\circ$;
5) $\sin\frac{26\pi}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{35\pi}{9}\right)$.

Розв'язання.

1) $\cos 1827^\circ=\cos(360^\circ\cdot 5+27^\circ)=\cos 27^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 978^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ\cdot 5+78^\circ)=\operatorname{tg} 78^\circ$;

3) $\sin(-800^\circ)=\sin(360^\circ\cdot(-2)-80^\circ)=\sin(-80^\circ)$;

4) $\operatorname{ctg} 1305^\circ=\operatorname{ctg}(180^\circ\cdot 7+45^\circ)=\operatorname{ctg} 45^\circ=1$;

5) $\sin\frac{26\pi}{5}=\sin\left(5\pi+\frac{1}{5}\pi\right)=\sin\left(4\pi+\left(\pi+\frac{1}{5}\pi\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{1}{5}\pi\right)=$ $=-\sin\frac{1}{5}\pi$;

6) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{35\pi}{9}\right)=\operatorname{tg}\left(\pi(-4)+\frac{1}{9}\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{9}\pi$.

Приклад 4. Обчислити значення тригонометричної функції:
1) $\cos 1125^\circ$; 2) $\cos(-315^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$; 4) $\cos\frac{13\pi}{6}$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $\cos 1125^\circ = \cos (360^\circ \cdot 3 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin (-315^\circ) = \sin (-360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} \left(-\frac{17}{3}\pi\right) = \operatorname{tg} \left(\pi(-6) + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

4) $\cos \frac{13\pi}{6} = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яка функція називається періодичною? Навести приклади періодичних функцій.

2. Довести, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π.

3. Довести, що найменшим додатним періодом тангенса і котангенса є число π.

ВПРАВИ

24. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайти:

1) $\sin 29^\circ$; 2) $\sin 0{,}48$; 3) $\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $-\operatorname{ctg} 2{,}5$; 5) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 48^\circ 32'$; 7) $-\cos 0{,}7$; 8) $\operatorname{ctg} 100^\circ 42'$.

25. Звести до однойменної функції гострого кута:

1) $\sin 425^\circ$; 2) $\operatorname{tg} \frac{14\pi}{6}$; 3) $\cos (-1750^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{3}$;

5) $\sin \frac{43}{3}\pi$; 6) $\cos (-1125^\circ)$; 7) $\operatorname{ctg} (-12{,}3\pi)$; 8) $\operatorname{tg} 600^\circ$.

26. Довести, що найменшим додатним періодом функції $y = \cos (kx + b)$ є число $T = \frac{2\pi}{|k|}$, а функції $y = \operatorname{tg} (kx + b)$ — число $T = \frac{\pi}{|k|}$.

27. Які з даних функцій періодичні? Знайти для періодичних функцій найменший додатний період:

1) $y = \operatorname{tg} 3x$; 2) $y = 5$; 3) $y = \cos \frac{x}{3}$; 4) $y = \{3x\}$; 5) $y = [x]$.

28. Обчислити: $$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{17}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)}{\sin \frac{26\pi}{6}}.$$

29. Спростити:

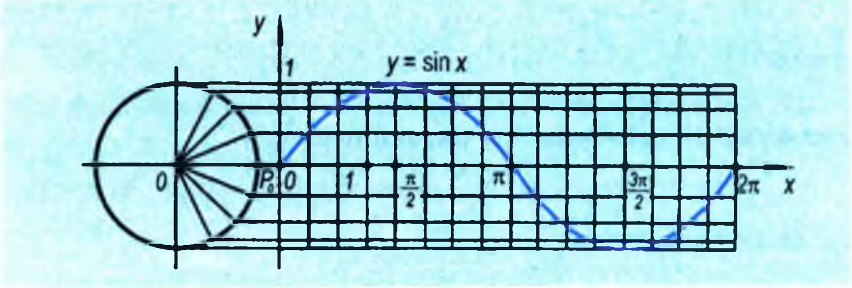
1) $\dfrac{\sin^2(3\alpha+6\pi)}{\operatorname{tg}^2(2\pi+3\alpha)+\operatorname{tg}(5\pi+3\alpha)\operatorname{ctg}(3\alpha+\pi)}$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+6\pi)\ \operatorname{ctg}(5\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)\ \operatorname{ctg}(5\pi+\alpha)}$.

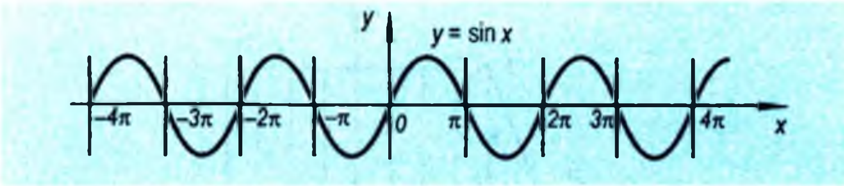
§ 6. Побудова графіків тригонометричних функцій

Графік кожної з тригонометричних функцій досить побудувати на проміжку, що дорівнює найменшому додатному періоду, а потім його можна продовжити на всю область визначення. Для побудови графіків за точками скористаємось геометричним тлумаченням кожної з тригонометричних функцій на одиничному колі.

Графік функції $y = \sin x$ побудуємо на відрізку $[0;\ 2\pi]$. Оскільки синус числа α — це ордината точки одиничного кола, в яку переходить точка $P_0(1;\ 0)$ під час повороту навколо центра на α рад, то побудуємо систему координат. Позначимо на осі Ox відрізок $[0;\ 2\pi]$, довжина якого наближено дорівнює $2\pi \approx 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$ (мал. 37). Побудуємо також поза цим відрізком коло з центром на осі Ox і радіусом, що дорівнює 1. Довжина кола також наближено дорівнює $2\pi \approx 6{,}28$. Поділимо відрізок $[0;\ 2\pi]$ і коло, починаючи від точки P_0, на 16 рівних частин. Через кожну точку поділу кола проведемо прямі, паралельні осі Ox. З кожної точки P_α поділу кола проведемо перпендикуляри до осі Ox, довжини яких дорівнюють ординаті, а значить, синусу кута, утвореного радіусом OP_α і віссю Ox і виміряного у радіанах. Кожна з цих ординат відповідає абсцисам α, позначеним точками поділу відрізка $[0;\ 2\pi]$ на осі Ox. Провівши прямі, паралельні осі Oy у кожній точці поділу



Мал. 37



Мал. 38

цього відрізка, до перетину з відповідною паралельною прямою, дістанемо в перетині точки графіка функції $y = \sin x$. Проведена через ці точки плавна крива називається **синусоїдою.**

Оскільки функція $y = \sin x$ періодична з періодом $2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, тобто $y = \sin\ (x + 2n\pi)$, то для продовження графіка за межі відрізка $[0;\ 2\pi]$ досить виконати побудову графіків функцій виду

$$y = \sin (x + 2\pi),\ y = \sin\ (x-2\pi),\ y = \sin\ (x + 4\pi),$$

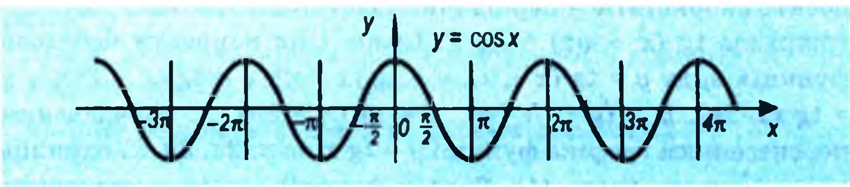
$$y = \sin (x-4\pi),\ \ y = \sin\ (x + 6\pi),\ \ y = \sin\ (x-6\pi),\ \ldots,$$

паралельно переносячи графік функції $y = \sin x$ на 2π, 4π, 6π, ... одиниць вліво і вправо (мал. 38).

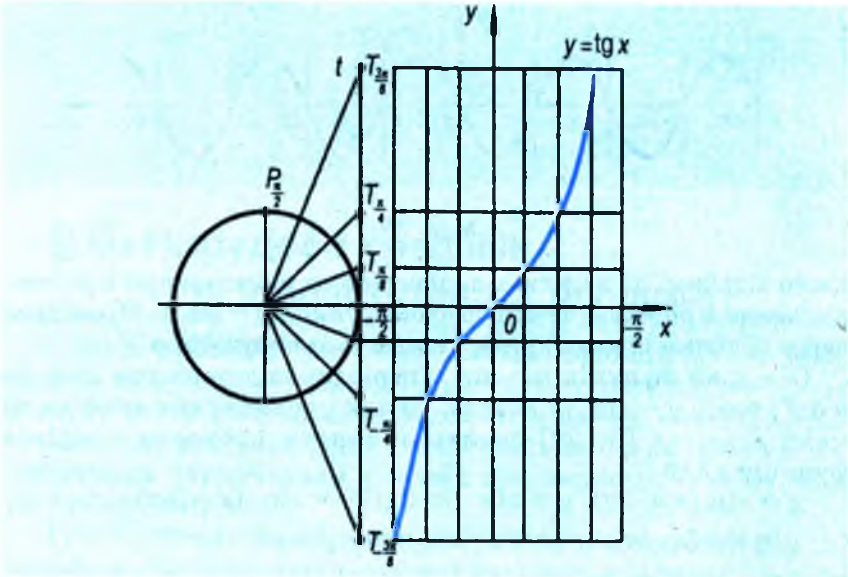
Графік функції $y = \cos x$ побудуємо, скориставшись геометричним перетворенням відомого графіка. Отже, $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, тобто графік функції $y = \cos x$ можна дістати з графіка функції $y = \sin x$ паралельним перенесенням його вліво вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{2}$ одиниць (мал. 39).

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ побудуємо за допомогою лінії тангенса на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, довжина якого дорівнює періоду π цієї функції.

Побудуємо систему координат і виділимо на осі Ox проміжок $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Поза ним побудуємо одиничне коло з центром на осі Ox і лінію тангенса. Поділимо проміжок $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ і праве півколо на 8 рівних частин (мал. 40). Через центр кола



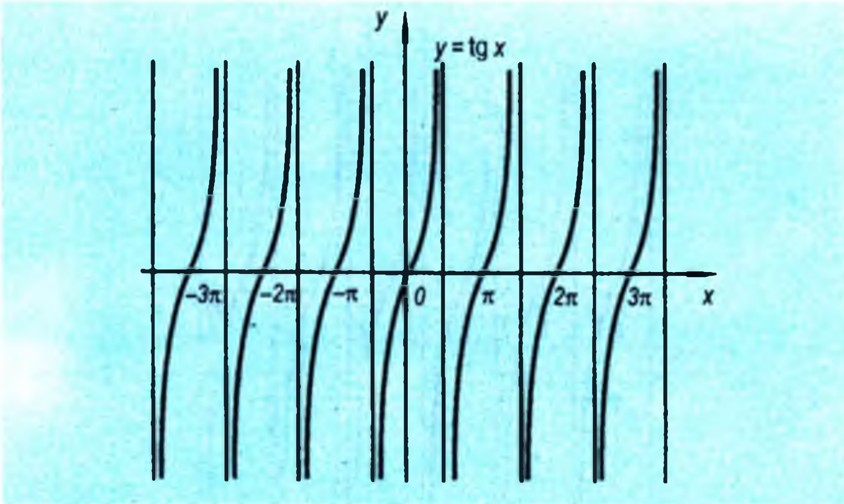
Мал. 39



Мал. 40

і точки поділу його проведемо прямі до перетину з лінією тангенса. Утворені точки T_α перетину визначають відрізки на лінії тангенса, довжини яких дорівнюють тангенсу відповідного кута повороту, виміряного у радіанах. Числові значення цих кутів, позначені на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ осі Ox, дорівнюють $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{8}$, 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$.

Через точки T_α на лінії тангенса проведемо прямі, паралельні осі Ox, а через точки поділу проміжка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ — паралельні осі Oy. Попарний перетин цих паралельних прямих визначає точки, що належать графіку $y = \operatorname{tg} x$. Провівши плавну криву через ці точки, дістанемо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Щоб побудувати графік за його межами, досить скористатися періодичністю функції тангенс, тобто тотожністю $\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x$. Отже, слід виконати побудову функцій виду $y = \operatorname{tg}(x + \pi)$, $y = \operatorname{tg}(x - \pi)$, $y = \operatorname{tg}(x + 2\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x - 2\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x + 3\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x - 3\pi)$, ... паралельним перенесенням графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ на π, 2π, 3π, ... одиниць вліво і вправо (мал. 41). Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називають **тангенсоїдою**.



Мал. 41

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ легко дістати, скориставшись формулами $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ і двома геометричними перетвореннями —паралельним перенесенням тангенсоїди на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вліво і перетворенням симетрії утвореного графіка відносно осі Ox (мал. 42). Доведіть самостійно формулу $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$, користуючись одиничним колом та лініями тангенса і котангенса.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Приклад 1. Користуючись одиничним колом і графіком функції $y = \sin x$, відповісти на такі запитання:

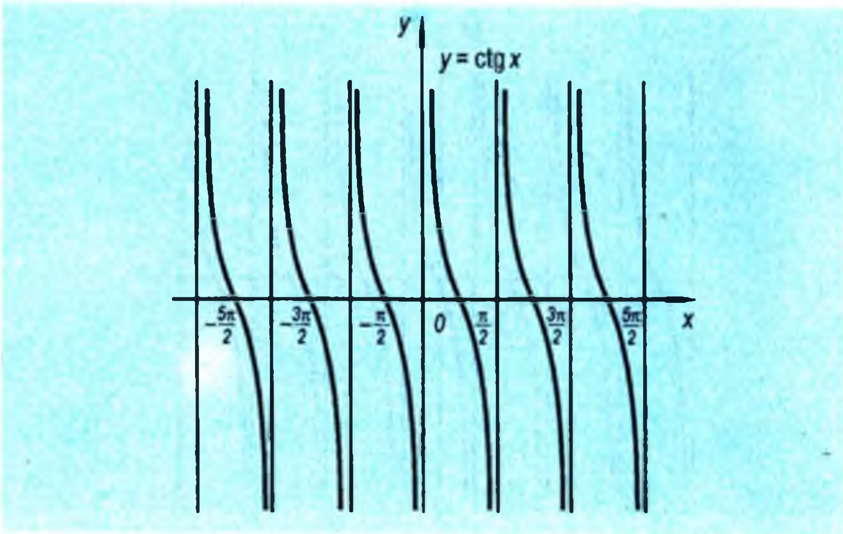
1) як змінюється значення функції $y = \sin x$ у кожній координатній чверті при зміні аргументу від 0 до 2π ?

2) які знаки мають значення функції $y = \sin x$ у кожній чверті?

3) при яких значеннях аргументу функція дорівнює нулю на відрізку $[0; 2\pi]$?

4) чому дорівнює $y = \sin x$, якщо x дорівнює: $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$?

5) назвати числа з відрізка $[0; 2\pi]$, синус яких дорівнює:



Мал. 42

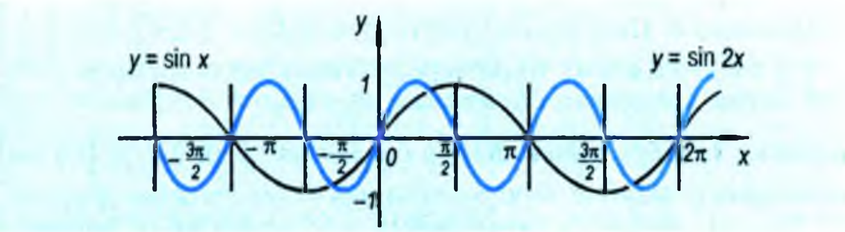
$$\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1;\ -1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};$$

6) яких найбільших і найменших значень набуває функція $y = \sin x$ на відрізку $[0;\ 2\pi]$; при яких значеннях аргументу вона набуває цих значень?

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки синус числа α — це ордината точки одиничного кола, то при збільшенні числа α (а значить, і кута повороту) від 0 до $\frac{\pi}{2}$ (I чверть) ордината ($\sin \alpha$) збільшується від 0 до 1. При збільшенні аргументу від $\frac{\pi}{2}$ до π (II чверть) синус зменшується від 1 до 0. При збільшенні аргументу від π до $\frac{3\pi}{2}$ (III чверть) синус продовжує зменшуватися від 0 до -1. При збільшенні аргументу від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π (IV чверть) значення функції синус збільшуються від -1 до 0. Аналіз графіка функції $y = \sin x$ підтверджує такий характер зміни значень цієї функції: у I чверті синусоїда піднімається вгору, у II і III чвертях опускається вниз, у IV чверті знову піднімається вгору.

2) Знаки функції синус в координатних чвертях визначає знак ординати точок одиничного кола: у I і II чвертях синус додатний, у III і IV — від'ємний.

3) Значення синуса дорівнює нулю при тих значеннях аргументу, при яких ординати точок одиничного кола дорівнюють нулю, тобто, якщо $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.



Мал. 43

4) Користуючись означенням синуса та одиничним колом або графіком функції $y = \sin x$, зробимо висновок, що $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

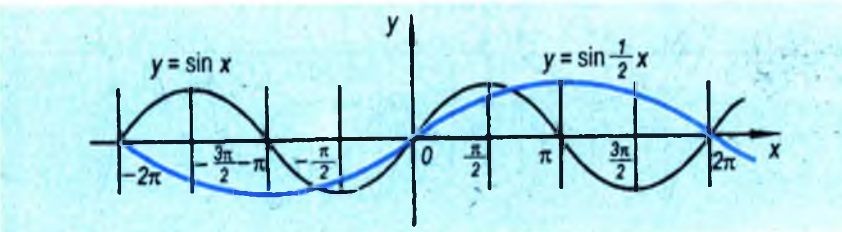
5) Це числа $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$.

6) Аналіз зміни значень функції $y = \sin x$ на одиничному колі і за графіком показує, що найбільшого значення 1 функція набуває при значенні аргументу, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, а найменшого -1 — при значенні аргументу, що дорівнює $\frac{3\pi}{2}$.

Приклад 2. Побудувати графіки функцій $y = \sin 2x$, $y = \sin\frac{1}{2}x$.

Р о з в' я з а н н я. Використаємо геометричне перетворення відомого графіка функції $y = \sin x$. Якщо $\sin x = f(x)$, то $\sin 2x = f(kx)$. Відомо, що графік функції $y = f(kx)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$, стиснюючи його до осі Oy, якщо $k > 1$, і розтягуючи від осі Oy, якщо $0 < k < 1$.

Отже, графік функції $y = \sin 2x$ можна дістати, стиснюючи у 2 рази (мал. 43), а графік $y = \sin\frac{1}{2}x$ — розтягуючи у 2 рази (мал. 44) відомий графік функції $y = \sin x$.



Мал. 44

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Р о з в' я з а н н я. Перетворимо вираз даної функції так, щоб перед аргументом у дужках залишився коефіцієнт, що дорівнює 1, тобто подамо його у вигляді $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Це дасть змогу пізніше використати побудову графіка функції $y = f(x - a)$, де $a > 0$, паралельним перенесенням у напрямі осі Ox уже відомого графіка функції.

Послідовність побудови шуканого графіка може бути такою (мал. 45):

будуємо відомий графік функції $y = \cos x$;

будуємо графік функції $y = \cos 2x$, стиснюючи графік функції $y = \cos x$ у 2 рази до осі Oy;

будуємо графік $y = 3\cos 2x$, розтягуючи у 3 рази від осі Ox графік функції $y = \cos 2x$;

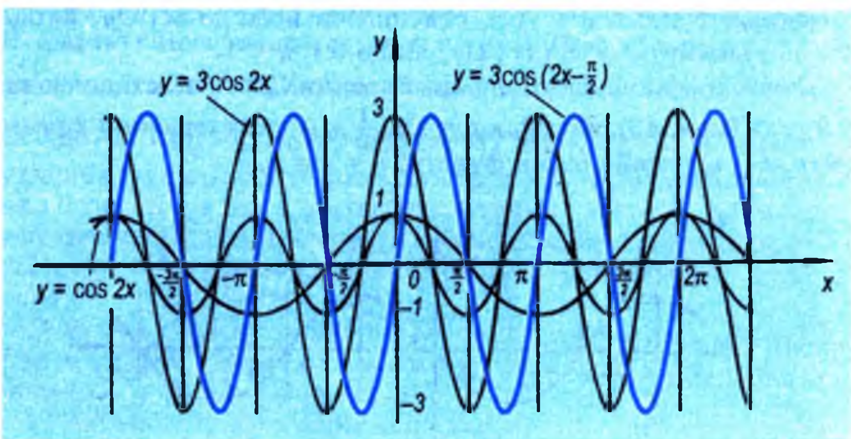
будуємо шуканий графік $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, паралельно переносячи графік $y = 3\cos 2x$ вправо вздовж осі Ox на відстань $\frac{\pi}{4}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як побудувати графіки тригонометричних функцій числа? Побудувати графіки функцій $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.

2. Побудувати графіки функцій $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

3. Як побудувати графік функції $y = \sin\frac{1}{2}x$?



Мал. 45

4. Як побудувати графік функції $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$?

5. Як побудувати графік функції $y = A\sin\ (kx + \varphi)$?

ВПРАВИ

30. Побудувати графік функції:

А

1) $y = \cos\frac{1}{2}x$; 2) $y = |\cos x|$;

3) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Б

5) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$; 6) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

7) $y = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $y = \left|2\sin\frac{x}{2}\right|$.

В

9) $y = 2\sin|x|$, 10) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$;

11) $y = |\mathrm{tg}\ x|$; 12) $y = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 7. Властивості тригонометричних функцій

Функція $y = \sin x$. 1) Оскільки синус існує для будь-якого дійсного числа і як ордината точки одиничного кола (див. мал. 22) змінюється на відрізку від -1 до 1, то областю визначення цієї функції є множина R усіх дійсних чисел, а областю значень — відрізок $[-1; 1]$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат (див. мал. 38), тобто функція $y = \sin x$ — непарна. Доведемо це, користуючись одиничним колом.

Оскільки областю визначення функції $y = \sin x$ є множина $\boldsymbol{R}$, яка симетрична відносно початку (нуля) відліку, то залишається довести, що $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

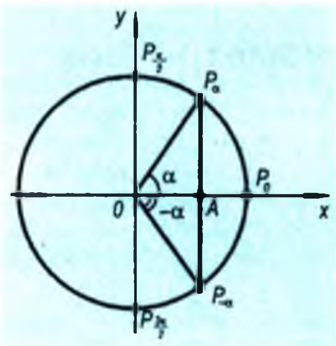
Позначимо на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$, які відповідають числам α і $-\alpha$ (мал. 46). Оскільки прямокутні трикутники $P_\alpha OA$ і $P_{-\alpha}OA$ рівні, бо гіпотенузи OP_α і $OP_{-\alpha}$ рівні як радіуси кола, а катет OA — спільний, то абсциси точок P_α і $P_{-\alpha}$ рівні, а ординати — протилежні числа. Тому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

3) Функція $y = \sin x$ періодична з періодом $2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$. Справді, означення синуса числа як ординати точки одиничного кола і графік функції свідчать про те, що кожне своє значення функція повторює через повний оберт. Вище вже було доведено, що найменшим додатним періодом цієї функції є число 2π.

4) Функція набуває значення, що дорівнює 0 (нуль функції), якщо $x = k\pi$, де $k \in \boldsymbol{Z}$, оскільки ординати точок одиничного кола перетворюються на нуль на відрізку $[0; 2\pi]$ у двох точках $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = \pi$, а функція періодична. Числа $0 + 2n\pi = 2n\pi$, $\pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi$ утворюють множину $k\pi$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

5) Проміжки зростання функції — відрізки $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Оскільки $y = \sin x$ — функція періодична, достатньо довести зростання на одному з указаних відрізків, наприклад на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Скористаємось одиничним колом. Точка P_α, рухаючись на одиничному колі в додатному напрямі від точки P_0 до точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, весь час піднімається вгору і переміщується вліво (мал. 46). Це означає, що ордината точки P_α зростає від 0 до 1.



Мал. 46

На відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ під час руху точки P_α на одиничному колі в додатному напрямі ордината зростає від -1 до 0.

Аналогічно можна показати, що синус спадає на відрізках $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Обґрунтуйте це самостійно.

Пізніше, після вивчення тотожності віднімання синусів властивість зростання і спадання синуса за допомогою означень зростаючої і спадної функцій буде доведено аналітично.

6) Проміжками, де синус додатний, є $(2n\pi; \pi + 2n\pi)$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду 2π, функція додатна на проміжку $(0; \pi)$. Синус від'ємний на проміжках $(\pi + 2n\pi; 2\pi + 2n\pi)$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ він від'ємний на проміжку $(\pi; 2\pi)$.

Враховуючи періодичність функції, дістанемо всі можливі проміжки знакосталості.

7) Синус досягає найбільшого значення, що дорівнює 1, у точках $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, а найменшого значення, що дорівнює -1, — у точках $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, оскільки на відрізку $[0; 2\pi]$ ордината точки одиничного кола дорівнює 1, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і -1, якщо $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Функція $y = \cos x$. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$, а областю значень — відрізок $[-1; 1]$, оскільки косинус існує для будь-якого дійсного числа і як абсциса точки одиничного кола (див. мал. 24) змінюється на відрізку $[-1; 1]$.

•2) Графік функції симетричний відносно осі Oy (див. мал. 39). Отже, функція парна. Доведемо це для відрізка $[0; 2\pi]$, користуючись одиничним колом.

Оскільки областю визначення функції $y = \cos x$ є множина $\boldsymbol{R}$, симетрична відносно початку (нуля) відліку, то залишається довести, що $\cos(-x) = \cos x$.

Позначимо на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$, які відповідають числам α і $-\alpha$ (див. мал. 46). Вище було показано, що абсциси цих точок однакові, тому $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

3) Функція $y = \cos x$ періодична з періодом $2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, оскільки означення косинуса числа як абсциси точки одиничного кола (див. мал. 24) і графік функції (див. мал. 39) свідчать про те, що кожне своє значення функція повторює через повний оберт. Раніше було доведено, що найменшим додатним періодом функції є число 2π.

4) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \in \boldsymbol{Z}$, оскільки абсциси точок одиничного кола на відрізку $[0; 2\pi]$ дорівнюють 0 у двох точках $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ і $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$. Додавши до цих чисел період $2n\pi$, матимемо дві множини чисел, які разом дають множину $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

5) Проміжки зростання функції — відрізки $[-\pi + 2n\pi; 2n\pi]$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Оскільки функція $y = \cos x$ періодична, то досить довести зростання на одному з указаних проміжків, наприклад на відрізку $[\pi; 2\pi]$.

Відрізку $[\pi; 2\pi]$ відповідають на одиничному колі третя і четверта чверті. Коли точка P_α рухається на одиничному колі в додатному напрямі по дугах, що відповідають указаним чвертям, від точки P_π до $P_{2\pi}$ абсциса її зростає від -1 до $+1$.

Аналогічно можна показати, що косинус спадає на відрізках $[2n\pi; \pi + 2n\pi]$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Обґрунтуйте це самостійно.

Пізніше, після вивчення формул віднімання косинусів, властивість зростання і спадання функції $y = \cos x$ буде доведено аналітично.

6) Проміжками, де косинус додатний, є $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, а від'ємний, є $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Справді, у I і IV чвертях, тобто на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, косинус набуває додатних значень, а у II і III, тобто на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, — від'ємних. Враховуючи періодичність функції, дістанемо всі можливі проміжки знакосталості.

7) Косинус досягає найбільшого значення, що дорівнює 1, у точках $x = 2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, а найменшого значення, що дорівнює -1, — у точках $x = \pi + 2n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$. 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім тих, косинус яких дорівнює 0, тобто чисел $\frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$; областю значень є множина $\boldsymbol{R}$.

2) Графік тангенса (див. мал. 41) симетричний відносно початку координат, тобто функція непарна. Довести це твердження можна, користуючись непарністю синуса і парністю косинуса.

Справді, область визначення тангенса — множина, симетрична відносно нуля — початку відліку, і

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

3) Функція $y = \operatorname{tg} x$ періодична, з періодом $n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, оскільки кожне своє значення як довжину відрізка лінії тангенса вона повторює через половину оберту (див. мал. 26). Вище було доведено, що найменшим додатним періодом тангенса є число π.

4) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x = n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$, оскільки тангенс дорівнює нулю у тих

точках, де синус дорівнює нулю, а косинус не дорівнює нулю. Про це свідчать інтерпретація на одиничному колі та графік функції.

5) Проміжки зростання функції $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

Враховуючи періодичність функції, досить довести зростання на одному з проміжків, наприклад на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Побудований графік (див. мал. 41) ілюструє властивість зростання функції $y = \operatorname{tg} x$. Аналітично це буде доведено пізніше, після вивчення тригонометричної тотожності різниці тангенсів.

6) Оскільки тангенс набуває додатних значень у I і III чвертях, а від'ємних — у II і IV чвертях, то $\left(n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ і $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; n\pi\right)$ є відповідно проміжками, де тангенс додатний і від'ємний. Враховуючи періодичність тангенса, дістали всі можливі проміжки знакосталості.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$. Обґрунтуйте самостійно всі властивості функції котангенс.

1) Областю визначення є множина всіх дійсних чисел, крім $x = n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Функція непарна.

3) Періодична з періодом $n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; найменшим додатним періодом є число π.

4) Функція набуває значень, що дорівнюють 0 (нулі функції), якщо $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

5) Проміжками спадання є $(n\pi; \pi + n\pi)$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

6) Проміжками, де котангенс додатний, є $\left(n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, а від'ємний — $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; n\pi\right)$ при $n \in \boldsymbol{Z}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Приклад 1. Знайти область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$; 3) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Дріб $\frac{1}{\sin x - 1}$ існує, якщо знаменник $\sin x - 1 \neq 0$. Звідси $\sin x \neq 1$. Користуючись графіком синусоїди, знаходимо точки, в яких $\sin x = 1$. Відкидаючи їх, дістанемо

$$x \neq -\frac{3\pi}{2}; \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \quad x \neq \frac{5\pi}{2}, \ldots .$$

Записуючи всі ці числа у вигляді однієї формули, маємо $x \neq (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Вираз $\sqrt{\cos x}$ існує, якщо $\cos x \geq 0$. Вище було доведено, що $\cos x > 0$ на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ і $\cos x = 0$ у точках $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Об'єднавши ці множини чисел, маємо $\cos x \geq 0$ на відрізках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. Ці відрізки є областю визначення функції $y = \sqrt{\cos x}$.

3) Вираз $\frac{1}{\text{ctg} x}$ існує при всіх x, для яких існує $\text{ctg}\, x$ і $\text{ctg}\, x \neq 0$. Котангенс існує, якщо $x \neq k\pi$, а не дорівнює нулю при всіх $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$. Якщо записати першу множину чисел $k\pi$ у вигляді $2k\frac{\pi}{2}$, то можна об'єднати обидві множини, враховуючи, що всі парні ($2k$) і непарні ($2k + 1$) числа утворюють множину цілих чисел. Отже, областю визначення функції $y = \frac{1}{\text{ctg} x}$ є множина всіх чисел x таких, що $x \neq n\frac{\pi}{2}$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

4) Вираз $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ існує, якщо $x - \frac{\pi}{4} \neq (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, тобто $x \neq 2n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Звідси $x \neq 2n \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$, або $x \neq \frac{3\pi}{4} + n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 2. Знайти область значень функції:

1) $y = \frac{1}{2}\cos x$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = \cos^2 x + 1$;

4) $y = \frac{1}{2}\text{tg}^2 x + 1$; 5) $y = \sin 2x$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $\cos x$ змінюється від -1 до 1, то областю зміни функції $y = \frac{1}{2}\cos x$ є відрізок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

2) У виразі $\sin x + 1$ найменше значення першого доданка -1, а найбільше 1. Тому найменшим значенням виразу $\sin x + 1$ є число 0, а найбільшим — число 2. Отже, областю значень функції $y = \sin x + 1$ є відрізок $[0; 2]$.

3) У виразі $\cos^2 x + 1$ перший доданок змінюється від 0 до 1, а весь вираз — від 1 до 2. Отже, областю значень функції $y = \cos^2 x + 1$ є відрізок $[1; 2]$.

4) Перший доданок виразу $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$ змінюється від 0 до $+\infty$, оскільки $\operatorname{tg} x$ змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, а $\operatorname{tg}^2 x$ — число невід'ємне. Тому областю значень функції $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$ є множина $[1; +\infty)$.

5) При будь-яких дійсних значеннях x областю значень функції $y = \sin 2x$ є множина $[-1; 1]$.

Приклад 3. Яке число більше:

1) $\sin\frac{\pi}{9}$ чи $\sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{\pi}{9}$ чи $\cos\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ чи $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ чи $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$?

Р о з в' я з а н н я. 1) Числам $\alpha_1 = \frac{\pi}{9}$ і $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ відповідають точки одиничного кола P_{α_1} і P_{α_2}, які належать I чверті, де синус зростає. Оскільки $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{9}$, то $\sin\frac{\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{9}$.

2) Косинус у I чверті спадає, тому $\cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{9}$.

3) Числу $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ відповідає точка P_{α_1}, яка належить I чверті, а числу $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}$ — точка P_{α_2}, яка належить II чверті. Оскільки тангенс у I чверті додатний, а у II — від'ємний, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} > \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

4) Числам $-\frac{\pi}{8}$ і $-\frac{\pi}{6}$ відповідають точки P_{α_1} і P_{α_2}, які належать IV чверті, тобто проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Оскільки котангенс — функція спадна на кожному з проміжків області визначення, а $-\frac{\pi}{8} > -\frac{\pi}{6}$, то $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right) < \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Приклад 4. У яких чвертях може закінчуватися кут α, якщо:

1) $|\sin(-\alpha)| = -\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$;
3) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)| = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки синус — непарна функція, то дану рівність можна записати у вигляді $|-\sin\alpha| = -\sin\alpha$. Модуль будь-якого числа — число невід'ємне, тому невід'ємним має бути вираз $-\sin\alpha$. Це означає, що $\sin\alpha \le 0$. Тому кут α може закінчуватися у III або у IV чверті.

2) За означенням модуля числа, модуль від'ємного числа дорівнює протилежному числу. Тому $\cos\alpha$ за умовою набуває

лише від'ємних значень. Це означає, що кут α може закінчуватися у II або у III чверті.

3) За означенням модуля, $\operatorname{tg}\alpha$ — число невід'ємне. Тому кут α може закінчуватися у I або у III чверті.

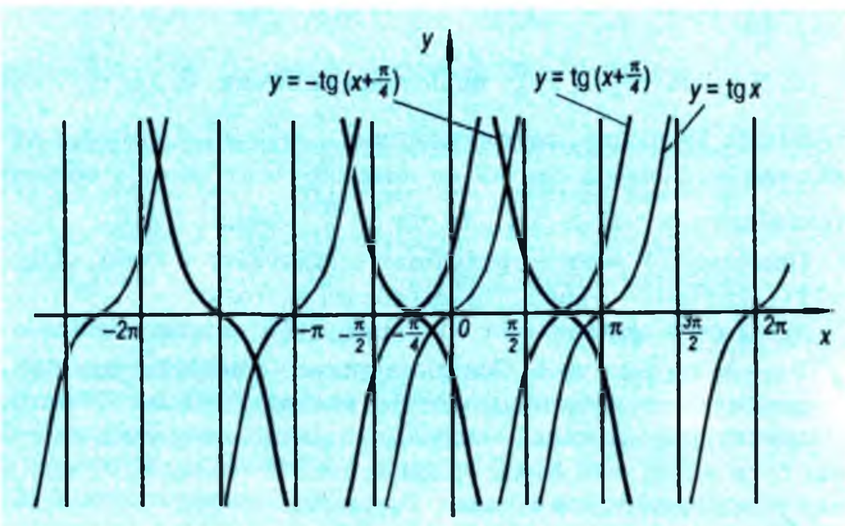
4) Оскільки $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, то згідно з означенням модуля $-\operatorname{ctg}\alpha$ має бути числом невід'ємним. Тому кут α може закінчуватися у II або у IV чверті.

Приклад 5. Побудувати графік функції:

1) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Графік даної функції побудуємо за допомогою геометричних перетворень відомого графіка функції $y = \operatorname{tg} x$.

Якщо $\operatorname{tg} x = f(x)$, то $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -f(x + a)$, де $a = \frac{\pi}{4}$. Застосуємо відомі алгоритми побудови графіків за допомогою геометричних перетворень: а) побудуємо графік функції $y = \operatorname{tg} x$; б) побудуємо графік $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, паралельно перенісши здобутий графік на відстань $\frac{\pi}{4}$ вліво уздовж осі Ox; в) побудуємо графік функції $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, відобразивши попередньо побудований графік симетрично відносно осі Ox (мал. 47).

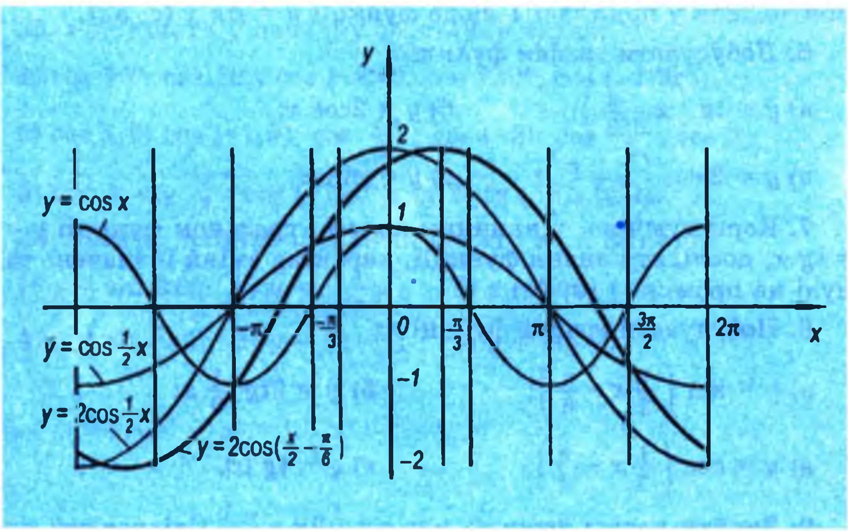


Мал. 47

2) Щоб побудувати графік функції $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ за допомогою геометричних перетворень відомого графіка функції $y = = \cos x$, слід перетворити формулу, що задає функцію, так, щоб перед аргументом x був коефіцієнт 1. Це дасть змогу використати побудову графіка $y = bf(x - a)$, якщо відомий графік $y = f(x)$. Отже, $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Послідовність побудови така (мал. 48). Будуємо графіки: а) $y = = \cos x$; б) $y = \cos\frac{1}{2}x$ (розтягування графіка $y = \cos x$ удвічі від осі Oy); в) $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ (розтягування графіка $y = \cos\frac{1}{2}x$ удвічі від осі Ox); г) $y = 2\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ (паралельне перенесення графіка $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ уздовж осі Ox на відстань $\frac{\pi}{3}$ вправо).

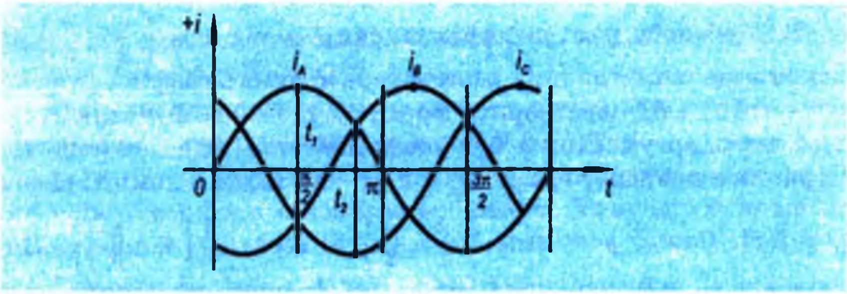
Приклад 6. За графіком синусоїдальних струмів (мал. 49), що проходять в обмотках котушок трифазної системи, визначити параметри, що їх характеризують.

В і д п о в і д ь. В обмотках проходять синусоїдальні струми з однаковими амплітудами і однаковою кутовою частотою $\omega = 2\pi\upsilon$, фази яких зміщено на $\frac{1}{3}$ періоду.



Мал. 48

3 М. Шкіль, 10 кл



Мал. 49

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Назвати властивості функції $y = \sin x$. Довести властивість спадання на певних відрізках.

2. Назвати властивості функції $y = \cos x$. Довести властивість парності цієї функції.

3. Назвати властивості функції $y = \operatorname{tg} x$. Довести, що ця функція непарна на проміжках області визначення.

4. Назвати властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$. Довести, що вона спадна на всіх проміжках області визначення.

5. Користуючись одиничним колом і графіком функції $y = \cos x$ на відрізку $[0; 2\pi]$, відповісти на запитання, які пропонувалися у прикладі 1 щодо функції $y = \sin x$ (с. 53).

6. Побудувати графік функції:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2\cos x$;

в) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = |\sin x|$.

7. Користуючись одиничним колом і графіком функції $y = \operatorname{tg} x$, дослідити знаки функції, характер зміни її значень та нулі на проміжку $(0; 2\pi)$.

8. Побудувати графік функції:

а) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 2\operatorname{tg}\frac{1}{3}x$;

в) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}|x|$.

9. Знайти період функції $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ і відповісти на запитання, які пропонувалися у прикладі 1 щодо $y = \sin x$ (с. 53).

10. Побудувати графік функції:

а) $y = -2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = |\cos|x||$;

в) $y = \frac{\sin x}{\sin x}$; г) $y = 2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12}\right)$.

ВПРАВИ

31. Знайти область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\sin x}$; 2) $y = \frac{1}{\sin x - 1}$; 3) $y = \sin\frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

32. Знайти область значень функції:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 1$;

3) $y = 2\operatorname{ctg}^2 x + 3$; 4) $y = \cos x + 1$.

33. Яке із чисел більше:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ чи $\cos\frac{\pi}{4}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ чи $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$ чи $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ чи $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$?

34. У яких чвертях може закінчуватися кут α, якщо:

1) $|\cos(-\alpha)| = -\cos\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}\alpha| = \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$; 4) $|\operatorname{tg}(-\alpha)| = -\operatorname{tg}\alpha$?

35. Розставити у порядку зростання числа:

1) $\cos 15°$; $\cos 70°$; $\cos(-25°)$; $\cos 230°$; $\cos(-130°)$;

2) $\cos 1,5$; $\cos(-1,3)$; $\cos\frac{3\pi}{2}$; $\cos(-2)$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\cos 2$;

3) $\operatorname{ctg} 3$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}(-120°)$; $\operatorname{tg} 2$; $\operatorname{tg}(-3)$; $\operatorname{tg} 120°$.

36. Знайти проміжки знакосталості і нулі функції:

1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \frac{1}{\sin x}$; 3) $y = \cos\frac{x}{3}$;

4) $y = \sin^2 x$; 5) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

§ 8. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

Під час вивчення тригонометричних функцій гострого кута у 8-му класі за теоремою Піфагора було доведено основну тригонометричну тотожність:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}\ . \qquad (1)$$

Вона виконується для тригонометричних функцій будь-якого кута і тригонометричних функцій довільного числового аргументу. Доведемо це. Якщо косинус числа α — це абсциса точки P_α одиничного кола, а синус числа α — ордината цієї точки, тобто $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, то точка $P_\alpha(x; y)$ віддалена від центра кола на відстань, що дорівнює 1. Відомо, що відстань точки від початку координат визначається за формулою $x^2 + y^2 = r^2$. Оскільки $r = 1$, то $x^2 + y^2 = 1$, тобто $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Означивши тангенс і котангенс через синус і косинус, ми ввели ще два незалежні співвідношення:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\ , \qquad (2)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\ . \qquad (3)$$

З тотожностей (1)—(3) як наслідок випливають ще кілька співвідношень, які часто використовують під час обчислення значень тригонометричних функцій за відомим значенням однієї з них.

Перемноживши почленно рівності (2) і (3), дістанемо $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$. Звідси

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}\ ; \qquad (4)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}}\ . \qquad (5)$$

Поділивши обидві частини рівності (1) на $\cos^2\alpha$, дістанемо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ або}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}\ . \qquad (6)$$

Тотожність (1) виконується для будь-якого значення аргументу, тотожності (2) і (3) — для всіх значень, крім тих, для яких $\cos\alpha = 0$ і $\sin\alpha = 0$, відповідно.

Наведемо приклади застосування основних тригонометричних тотожностей для обчислення значень тригонометричних функцій за відомим значенням однієї з них. Вони ілюструють можливість спрощення обчислень значень тригонометричних виразів і показують способи доведення інших тригонометричних тотожностей.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Приклад 1. Знайти значення всіх тригонометричних функцій аргументу α, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. У III чверті, де на одиничному колі розміщено точки, які відповідають числу α, тангенс і котангенс додатні, а синус і косинус від'ємні.

Із тотожності $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ знаходимо $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16}{25}$, а $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Із тотожності (1) маємо: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$. Із тотожності (4) знаходимо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$. У таблиці 2 подано формули, які пов'язують тригонометричні функції одного й того самого аргументу.

Т а б л и ц я 2

Функція	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	

У наведених формулах перед знаком радикала слід взяти знак «плюс» або «мінус» залежно від того, в якій чверті лежить кут α, саме так, щоб знак тригонометричної функції, який стоїть у лівій частині, збігався зі знаком величини, що стоїть у правій частині рівності.

Приклад 2. Спростити вираз:

1) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 2) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 3) $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;

4) $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)$; 5) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$;

6) $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha+1$; 7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

8) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$
$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha.$

2) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=$
$=2\sin^2\alpha.$

3) $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha=1-\sin\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha=1-\cos^2\alpha=$
$=\sin^2\alpha;$

4) $(1+\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\cos\alpha)=(1-\cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha=\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha;$

5) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=\frac{-(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\operatorname{ctg}^2\alpha;$

6) $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha+1=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha+1=\operatorname{tg}^2\alpha+1=$
$=\frac{1}{\cos^2\alpha};$

7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-(\sin^2\beta+$
$+\cos^2\beta)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-1=-2\cos^2\alpha;$

8) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+$
$+2\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha=1.$

Приклад 3. Дано $\sin\alpha+\cos\alpha=m$. Знайти $\sin\alpha\cos\alpha$.

Р о з в ' я з а н н я. Піднесемо обидві частини даної рівності до квадрата. Маємо $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=m^2$, або $\sin^2\alpha+$ $+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=m^2$. Звідси $1+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2$, отже, $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$.

Приклад 4. Обчислити $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Даний дріб слід спочатку виразити через $\operatorname{tg}\alpha$, а потім обчислити його значення. Для цього поділимо чисельник і знаменник даного дробу на $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}-1} = \frac{10}{21}$.

Приклад 5. Довести, що вираз $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ не залежить від α, тобто є величиною сталою.

Р о з в' я з а н н я. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}-1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 1.$$

П р и к л а д 6. Довести тотожність

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha, \text{ якщо } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Р о з в' я з а н н я. Доведення тригонометричних тотожностей можна здійснювати різними способами:

1) за допомогою тотожних перетворень слід показати, що одну частину рівності (ліву чи праву) можна подати у вигляді другої;

2) ліву і праву частини рівності звести до одного і того самого виразу;

3) скласти різницю лівої і правої частин рівностей та за допомогою тотожних перетворень показати, що ця різниця дорівнює 0.

Дану тотожність доведемо, користуючись першим способом:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}} -$$

$$-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{|1+\cos\alpha|}{|\sin\alpha|}-\frac{|1-\cos\alpha|}{|\sin\alpha|} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} -$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\cos\alpha-1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha,$$

оскільки синус і косинус, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, додатні, $1 - \cos\alpha \geq \geq 0$, тому $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, $|1 + \cos\alpha| = 1 + \cos\alpha$, $|1 - \cos\alpha| = = 1 - \cos\alpha$ (косинус за модулем не перевищує 1).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Довести основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Які ще співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого аргументу існують?

3. Довести, що $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

ВПРАВИ

37. Спростити вираз:

А

1) $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha$;

4) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 5) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)$.

Б

7) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha + 1)$;

8) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$;

9) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; 10) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} - \cos\alpha$;

11) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$; 12) $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha}$.

В

13) $\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$; 14) $\frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha$;

15) $\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$; 16) $\sqrt{\frac{8}{1+\cos\alpha} + \frac{8}{1-\cos\alpha}}$.

38. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$. Знайти:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

39. Обчислити: 1) $\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

2) $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

40. Довести, що вираз $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ не залежить від α.

41. Обчислити значення решти тригонометричних функцій за даним значенням однієї з них:

1) $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{tg} x = 2$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{24}$, $180^\circ < x < 270^\circ$;

4) $\sin x = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

42. Довести тотожність:

А

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

2) $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1+\operatorname{tg}\alpha)^2 = \frac{2}{\cos^2\alpha}$;

3) $(\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha$;

4) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$.

Б

5) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{ctg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 6) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$;

7) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 8) $2\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$.

В

9) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

10) $1 + \frac{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

11) $1-(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

12) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}+1 = 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \sin\alpha$.

§ 9. Обчислення значень тригонометричних функцій і тригонометричних виразів за допомогою мікрокалькуляторів

1. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$. Значення цих функцій обчислюють за програмами[1]:

x $\boxed{F}$ sin; x $\boxed{F}$ cos; x $\boxed{F}$ tg .

Під час обчислення значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ використовують тотожність $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Тому програма обчислення має вигляд x $\boxed{F}$ tg $\boxed{F}$ 1/x .

Мікрокалькулятор дає змогу обчислювати значення тригонометричних функцій у градусній і радіанній мірах, тому перед обчисленням перемикач «Г — Р» треба встановити у відповідне положення.

Зазначимо, що, обчислюючи значення тригонометричних функцій або виразів з ними, аргумент x використовують у межах $0° \le x \le 90°$ (у градусній мірі) або $0 \le x \le 1,57$ (у радіанній мірі); для тангенсів відповідно у межах $0° \le x < 90°$; $0 \le x < 1,57$.

Якщо аргумент x задано цілим числом градусів, то спочатку це число вводять у регістр індикації (на екран), а потім натискують послідовно клавіш $\boxed{F}$ і клавіш відповідної тригонометричної функції.

Приклад 1. Знайти $\sin 75°$.

Програма. 75 $\boxed{F}$ sin.

Відповідь. $\sin 75° \approx 0,9659$.

У розглянутому прикладі восьмирозрядне число на індикаторі округлене до чотирьох правильних десяткових знаків.

Якщо аргумент подано у градусах і мінутах, то мінути попередньо перетворюють на частини градуса, а значення аргументу записують у вигляді десяткового дробу, що містить цілу і дробову частини градуса. Наприклад, нехай $x = 24°12'$. Оскільки $12'$ становлять $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ частину градуса, то $x = 24\frac{1}{5}°$.

---

[1] Тут і далі використано мікрокалькулятор «Электроника МКШ-2».

Перетворення на десятковий дріб числа $24\frac{1}{5}$ виконують за програмою $1\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{+}\ 24\ \boxed{=}$.

Відповідь. $x = 24{,}2^\circ$.

Програма обчислення значення $\sin\ 24^\circ 12'$ має вигляд

$1\ \boxed{\div}\ 5\ \boxed{+}\ 24\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\sin}$.

Відповідь. $\sin\ 24^\circ 12' \approx 0{,}4099$.

Приклад 2. Обчислити $\cos\frac{7\pi}{3}$.

Встановлюємо перемикач на режим роботи у радіанній мірі. Оскільки $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$, то програма має вигляд

$\boxed{F}\ \underline{\pi}\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\cos}$.

Відповідь. $\cos\frac{7\pi}{3} = 0{,}5$.

Приклад 3. Обчислити $\cos\frac{2\pi}{3}$.

Зазначимо, що мікрокалькулятор обчислює лише модулі значень тригонометричних функцій. Тому знак «мінус» треба набирати додатково, натискуючи клавіш $\boxed{\leftrightarrow}$ залежно від координатної чверті для конкретного аргументу. Оскільки $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$, то можна скласти програму

$\boxed{F}\ \underline{\pi}\ \boxed{\div}\ 3\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\cos}\ \boxed{\leftrightarrow}$.

Відповідь. $\cos\frac{2\pi}{3} = -0{,}5$.

2. Обчислення значень виразів, що містять тригонометричні функції. Розглянемо два приклади.

Приклад 4. Обчислити $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha \approx 0{,}52$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Можна скористатися основними тригонометричними тотожностями і знайти наближені значення функцій за формулами:

1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\sin\alpha \approx \sqrt{1-0{,}52^2} \approx 0{,}85$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{0{,}85}{0{,}52} \approx 1{,}6$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha \approx \frac{1}{1{,}6} \approx 0{,}61$.

Усі три значення функцій можна знайти, користуючись неперервною програмою 1 $\boxed{-}$ 0,52 $\boxed{F}$ x^2 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\sqrt{\ }$ $\boxed{\div}$ 0,52 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ 1/x .

Відповідь. $\sin\alpha \approx 0{,}85$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 1{,}6$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}61$.

Приклад 5. Обчислити значення виразів:

1) $\sin 25^\circ + \cos 70^\circ$; 2) $a = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, якщо $b \approx 25$, $\alpha \approx 28^\circ$, $\beta \approx 65^\circ$.

Програми.

1) 25 $\boxed{F}$ sin $\boxed{+}$ 70 $\boxed{F}$ cos $\boxed{=}$;

2) 25 $\boxed{\times}$ 28 $\boxed{F}$ sin $\boxed{\div}$ 65 $\boxed{F}$ sin $\boxed{=}$.

Відповідь. 1) 0,7646; 2) 12,950039 ≈ 13.

Якщо у цих двох прикладах аргумент тригонометричних функцій був би виражений у градусах і мінутах, то довелося б використовувати регістр пам'яті. Адже під час обчислення значень кожної з тригонометричних функцій операційний регістр зайнятий, а його необхідно одночасно використовувати і для виконання дій над тригонометричними функціями (у даних прикладах додавання і ділення).

Приклад 6. Обчислити значення виразів:

1) $\sin 25^\circ 20' + \cos 70^\circ 12'$; 2) $a = \dfrac{25{,}00\sin 28^\circ 15'}{\sin 65^\circ 42'}$.

Програми.

1) 20 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{П}$ 12 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 70 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ cos $\boxed{+}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$;

2) 42 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 65 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{П}$ 15 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 28 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{\times}$ 25 $\boxed{\div}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$.

Відповідь. 1) 0,7666; 2) 12,983322 ≈ 12,98.

Обчислення двох останніх виразів можна виконувати неперервним ланцюгом, не звертаючись до пам'яті, якщо використати клавіші $\boxed{(}$ і $\boxed{)}$. Відповідні програми мають вигляд:

20 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 25 $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ 12 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 70 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ cos $\boxed{=}$;

25 $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 15 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 28 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 42 $\boxed{\div}$ 60 $\boxed{+}$ 65 $\boxed{)}$ $\boxed{F}$ sin $\boxed{=}$.

Перевірте відповіді, знайдені за цими програмами.

Розглянемо приклади обчислень дещо складніших виразів.

Приклад 7. Знайти з точністю до 1 сторону ΔABC, в якого $a \approx 36$, $c \approx 52$, $\angle B \approx 48°$.

За теоремою косинусів,

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$, $b \approx \sqrt{36^2 + 52^2 - 2 \cdot 36 \cdot 52\cos 48°}$.

Здобутий вираз можна обчислити кількома способами. Без використання регістра пам'яті послідовність обчислень буде такою:

1) знайти добуток $2 \cdot 36 \cdot 52\cos 48°$ і змінити знак результату за допомогою клавіша $\boxed{\vdash\!\dashv}$;

2) додати до знайденого числа квадрати чисел 36 і 52 за допомогою клавіша $\underline{x^2}$;

3) із знайденого результату добути квадратний корінь.

Програма.

$2\ \boxed{\times}\ 36\ \boxed{\times}\ 52\ \boxed{\times}\ 48\ \boxed{F}\ \underline{\cos}\ \boxed{+}\ \boxed{\vdash\!\dashv}\ 36\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{+}\ 52\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\sqrt{\ }}$.

Відповідь. $b \approx 38{,}662349 \approx 39$.

Приклад 8. Обчислити заряд кульки q, маса якої $m = 2{,}0$ г, що обертається на нитці завдовжки $l = 1{,}2$ м навколо нерухомого такого самого точкового заряду q. Період обертання кульки $T = 3{,}2$ с, а кут відхилення від вертикалі $\alpha = 25°$.

Після розв'язування задачі дістанемо відповідь у вигляді формули: $q = l\sin\alpha\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m\left(g\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2}l\sin\alpha\right)}$, де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$, $g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Після підстановки числових значень треба обчислити вираз $q = 1{,}2\sin\ 25° \times$

$$\times\sqrt{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}0\left(9{,}8\,\mathrm{tg}\,25° - \frac{4\pi^2}{3{,}2^2} \cdot 1{,}2\sin 25°\right)} =$$

$$= 1{,}2\sin 25° \cdot \sqrt{8\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-15}\left(9{,}8\,\mathrm{tg}\,25° - \frac{4\pi^2}{3{,}2^2} \cdot 1{,}2\sin 25°\right)}.$$

Програма.

$4\ \boxed{\times}\ \boxed{F}\ \underline{\pi}\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{\div}\ 3{,}2\ \boxed{F}\ \underline{x^2}\ \boxed{\times}\ 1{,}2\ \boxed{\times}\ 25\ \boxed{F}\ \underline{\sin}\ \boxed{=}\ \boxed{\Pi}\ 9{,}8\ \boxed{\times}\ 25\ \boxed{F}\ \underline{\mathrm{tg}}\ \boxed{-}\ \boxed{И\Pi}\ \boxed{\times}\ 8{,}85 \cdot 10^{-15}\ \boxed{\times}\ \boxed{F}\ \underline{\pi}\ \boxed{\times}\ 8\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \underline{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ 1{,}2\ \boxed{\times}\ 25\ \boxed{F}\ \underline{\sin}\ \boxed{=}$.

Відповідь. $q \approx 38{,}67 \cdot 10^{-8}$ Кл $\approx 39 \cdot 10^{-8}$ Кл.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як обчислюються значення тригонометричних функцій за допомогою мікрокалькулятора?

2. Скласти програми для обчислення значень усіх тригонометричних функцій за відомим значенням однієї з них.

3. Скласти програму для обчислення сторони трикутника за теоремою синусів.

4. Скласти програму обчислення сторони трикутника за теоремою косинусів.

ВПРАВИ

43. За допомогою мікрокалькулятора обчислити $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha \approx 0{,}48$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

44. За допомогою мікрокалькулятора обчислити з точністю до 10^{-3} значення виразу:

1) $\dfrac{12{,}3\sin 28^\circ 20'}{\sin 49^\circ 40'}$;

2) $a = \sqrt{35{,}2^2 + 47{,}6^2 - 2\cdot 35{,}2\cdot 47{,}6\cos 25^\circ 50'}$;

3) $\dfrac{95{,}2\sin 43^\circ 40'}{\sin 62^\circ 30'}$;

4) $c = \sqrt{41{,}25^2 + 72{,}73^2 - 2\cdot 41{,}25\cdot 72{,}73\cos 37^\circ 28'}$.

45. За допомогою мікрокалькулятора знайти з точністю до 1° кут φ, якщо:

1) $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\beta$, де $\alpha = 28^\circ$, $\beta = 56^\circ$;

2) кут A в ΔABC, якщо $a = 42$, $b = 65$, $c = 28$;

3) кут φ, якщо $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\beta$, де $\alpha = 42^\circ 36'$, $\beta = 65^\circ 12'$;

4) кут A в ΔABC, якщо $c = 53{,}2$, $\angle C = 59^\circ 20'$, $a = 32{,}7$.

46. За допомогою мікрокалькулятора знайти радіус кулі, вписаної у правильну трикутну піраміду, за формулою

$r = \frac{a}{2}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$, якщо $a = 28{,}6$, $\alpha = 68^\circ 40'$.

47. За допомогою мікрокалькулятора обчислити початкову швидкість руху електрона за формулою $v = \sqrt{\dfrac{2leU}{md\sin\alpha}}$, де $l = 25$ см, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 2{,}1\cdot 10^3$ В, $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, $d = 0{,}56$ м; $\alpha = 32^\circ$.

Зауваження. У запропонованих вправах значення лінійних елементів і кутів вважають наближеними, хоча і використано знак точної рівності. Знак «=» можна використовувати для наближених даних, коли всі цифри правильні. Результат обчислення слід округлити за правилами наближених обчислень.

§ 10. Тригонометричні тотожності додавання

1. Формули тригонометричних функцій суми і різниці двох чисел.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (5)$$

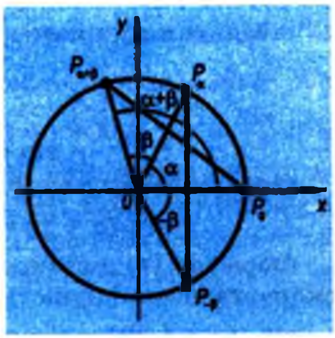
Доведемо формулу (1), з якої неважко дістати решту.

Нехай α і β — будь-які числа. Виберемо на одиничному колі точки P_α, $P_{-\beta}$ і $P_{\alpha+\beta}$, які отримують з точки $P_0(1;0)$ обертанням її відповідно на кути α, $-\beta$, $\alpha+\beta$ (мал. 50). Враховуючи означення синуса і косинуса, можна записати координати вибраних точок: $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $P_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(-\beta))$, $P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta))$.

Хорди $P_0P_{\alpha+\beta}$ і $P_{-\beta}P_\alpha$ рівні, оскільки рівні відповідні їм дуги кола. Знайдемо довжини цих хорд за формулою відстані між двома точками:

$$P_0P_{\alpha+\beta}^2=\left(1-\cos(\alpha+\beta)\right)^2+\left(\sin(\alpha+\beta)\right)^2;$$

$$P_{-\beta}P_\alpha^2=\left(\cos(-\beta)-\cos\alpha\right)^2+$$
$$+\left(\sin(-\beta)-\sin\alpha\right)^2.$$



Мал. 50

Оскільки $P_0P_{\alpha+\beta}=P_{-\beta}P_\alpha$, то $(P_0P_{\alpha+\beta})^2=(P_{-\beta}P_\alpha)^2$.

Тому $(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2$.

Застосовуючи властивість парності косинуса і непарності синуса та формулу квадрата двочлена, дістанемо:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha.$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, маємо

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta.$$

Виразивши з останньої рівності $\cos(\alpha+\beta)$, дістанемо формулу (1) для косинуса суми двох аргументів

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Формулу (2) дістанемо, замінивши у формулі (1) β на $-\beta$ і скориставшись парністю косинуса і непарністю синуса:

$$\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta);$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Формулу додавання для синуса неважко дістати з формули (1) і формули зведення $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Вказану формулу зведення можна дістати і з формули (2), поклавши $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Справді, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\times$ $\times\sin\beta=0\cdot\cos\beta+1\cdot\sin\beta=\sin\beta$. Отже, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$.

Замінивши у цій формулі β на $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, дістанемо

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\text{ або }\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Отже, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Виразимо $\sin(\alpha+\beta)$, скориставшись формулою $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=$ $=\sin\beta$ відносно числа $(\alpha+\beta)$ у зворотному порядку:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Отже, дістали формулу (3):

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу (4) дістанемо, замінивши у формулі (3) β на $-\beta$ і скориставшись парністю косинуса і непарністю синуса:

$$\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta).$$

Звідси

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу додавання для тангенса можна дістати за означенням тангенса і формулами додавання для синуса і косинуса:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Розділивши почленно чисельник і знаменник правої частини на вираз $\cos\alpha\cos\beta$ (поясніть, чому він не дорівнює 0), дістанемо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отже, дістали формулу (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Якщо замінити у формулі (5) β на $-\beta$ і врахувати непарність тангенса, то

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2. Формули зведення. Щоб записати будь-яку формулу зведення, коли $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, корисно знати такі правила (табл. 3):

1) якщо кут α добудовується відносно вертикального діаметра (мал. 51) (це кути, що відповідають числам $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то назва даної функції змінюється на **кофункцію** (синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки); якщо кут α добудовується відносно горизонтального діаметра (мал. 52) (це кути, що відповідають числам $\pi \pm \alpha$), то назва даної функції не змінюється;

2) перед утвореною функцією ставиться той знак, який має функція, що перетворюється за формулою зведення.

Таблиця 3

Функ-ція	$90^\circ+\alpha$ $\frac{\pi}{2}+\alpha$	$180^\circ+\alpha$ $\pi+\alpha$	$270^\circ+\alpha$ $\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$ $\frac{\pi}{2}-\alpha$	$180^\circ-\alpha$ $\pi-\alpha$	$270^\circ-\alpha$ $\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

3. Тригонометричні функції подвійного аргументу. Це формули, які виражають функції аргументу 2α через функції аргументу α. Їх можна знайти з формул додавання.

Поклавши $\beta = \alpha$ у формулі (3), дістанемо формулу синуса подвійного аргументу:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{7}$$

З формули (1), якщо $\beta = \alpha$, дістанемо формулу косинуса подвійного аргументу:

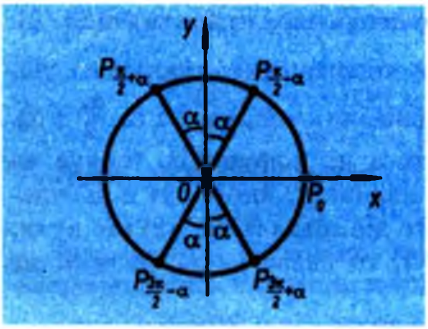
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{8}$$

Якщо змінити за допомогою основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ функцію $\cos\alpha$ на $\sin\alpha$ або $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$, то матимемо ще дві формули для $\cos 2\alpha$:

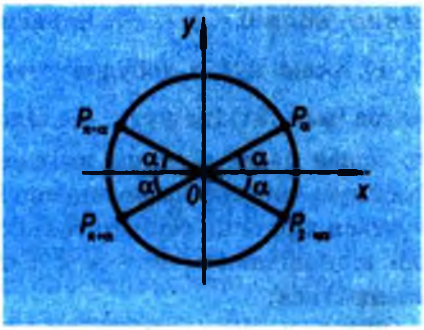
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

З формули (5), якщо $\beta = \alpha$, маємо:

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \tag{9}$$



Мал. 51



Мал. 52

Формули (7) і (8) справджуються для будь-яких значень аргументу, а формула (9) — лише для тих, для яких існують $\text{tg}\,2\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ і $1 - \text{tg}^2\alpha \neq 0$.

4. Тригонометричні функції половинного аргументу. Запишемо дві відомі формули:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Якщо $x = \frac{\alpha}{2}$, ці формули матимуть вигляд:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Додаючи почленно ці дві рівності і віднімаючи від другої рівності першу, дістанемо такі дві формули:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Записавши їх відносно квадратів функцій, матимемо формули половинного аргументу для квадратів синуса і косинуса:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Звідси:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Ці формули дають змогу замінити квадрати тригонометричних функцій на перші степені функцій. Тому їх називають також формулами зниження степеня.

Поділивши почленно дві передостанні рівності, дістанемо формули для квадрата тангенса і котангенса половинного аргументу:

$$\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad \text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Звідси:

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad \text{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} \qquad \text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\text{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

5. Формули суми й різниці однойменних тригонометричних функцій. Ці формули дають змогу виражати суму й різницю однойменних тригонометричних функцій через добуток тригонометричних функцій і навпаки.

Щоб перетворити суму $\sin\alpha + \sin\beta$ на добуток, позначимо $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$. Тоді $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$

$$= \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y =$$
$$= 2\sin x\cos y.$$

Враховуючи введене позначення, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x + y = \alpha, \\ x - y = \beta \end{cases}$$

відносно x і y. Дістанемо $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Отже,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (10)$$

Замінюючи у формулі (10) β на $-\beta$ і враховуючи непарність синуса, дістанемо

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (11)$$

Так само знаходимо $\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x + y) + \cos(x - y) =$

$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y =$$
$$= 2\cos x\cos y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Отже,

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (12)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x + y) - \cos(x - y) =$$
$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y - \cos x\cos y - \sin x\sin y =$$
$$= -2\sin x\sin y = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тобто,

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (13)$$

Користуючись означенням функції тангенс, знайдемо суму й різницю тангенсів:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad (14)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (15)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};\\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};\\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\\ \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \end{aligned}}$$

Застосуємо формули різниці синусів і різниці косинусів для доведення зростання функції $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $y = \cos\ x$ на відрізку $[\pi; 2\pi]$.

Нехай $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $x_2 > x_1$. Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна. Справді, $f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$, оскільки за умовою $x_2 - x_1 > 0$, $-\frac{\pi}{2} \le x_1 < x_2 \le \frac{\pi}{2}$, тому $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2+x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, а значить, $\cos\frac{x_2+x_1}{2} > 0$ і $\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0$. Отже, $\sin x_2 > \sin x_1$.

Доведіть самостійно, що синус спадає на відрізках $\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$, де $n \in \mathbf{Z}$.

Нехай $x_1 \in [\pi; 2\pi]$, $x_2 \in [\pi; 2\pi]$ і $x_2 > x_1$. Доведемо, що різниця $f(x_2) - f(x_1)$ додатна. Справді, $f(x_2) - f(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 =$

$= -2\sin\dfrac{x_2+x_1}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2} > 0$, оскільки за умовою $\pi \le x_1 < x_2 \le 2\pi$, тому $\pi < \dfrac{x_2+x_1}{2} < 2\pi$, $0 < \dfrac{x_2-x_1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, а значить, $\sin\dfrac{x_1+x_2}{2} < 0$, $\sin\dfrac{x_2-x_1}{2} > 0$. Отже, $\cos x_2 > \cos x_1$.

Доведіть самостійно, що косинус спадає на відрізках $[2n\pi; \pi + 2n\pi]$, де $n \in Z$.

6. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму. Вивести формули перетворення добутку двох тригонометричних функцій на суму можна, застосувавши тотожності (1) і (2) та (3) і (4):

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}; \tag{16}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}; \tag{17}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \tag{18}$$

7. Формули перетворення синуса і косинуса кута через тангенс половини цього кута. Маємо:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник утвореного дробу на $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ за умови, що $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \ne 0$. Звідси $\dfrac{\alpha}{2} \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, де $k \in Z$, і

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{19}$$

Таким самим способом виразимо $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{20}$$

Якщо поділити почленно рівності (19) і (20), то дістанемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{21}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Виведені формули широко використовують для спрощення виразів, доведення тотожностей, розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей та ін.

Приклад 1. Обчислити значення виразу, не застосовуючи таблиці тригонометричних функцій і калькулятор:

1) $\cos 75°$; 2) $\sin\frac{7\pi}{12}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos 210°$;

5) $\sin 75° + \sin 15°$; 6) $\frac{\operatorname{tg}13° + \operatorname{tg}47°}{1 - \operatorname{tg}13°\operatorname{tg}47°}$; 7) $\sin 22°30'$;

8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; 9) $\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24}$; 10) $\cos\frac{\alpha}{2}$,

якщо $\cos\alpha = \frac{119}{169}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. 1) Нехай $75° = 45° + 30°$. Тоді $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right);$$

2) $$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right);$$

3) $$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}};$$

4) $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180°\cos 30° - \sin 180°\cdot\sin 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2} =$

$= 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

6) $\frac{\operatorname{tg}13^\circ + \operatorname{tg}47^\circ}{1 - \operatorname{tg}13^\circ\operatorname{tg}47^\circ} = \operatorname{tg}(13^\circ + 47^\circ) = \operatorname{tg}\ 60^\circ = \sqrt{3}$;

7) $\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(знак плюс перед коренем взято тому, що кут $22^\circ 30'$ належить I чверті, а синус у I чверті додатний);

8) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$;

9) $\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{24}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;

10) $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{119}{169}}{2}} = -\sqrt{\frac{169+119}{169\cdot 2}} = -\sqrt{\frac{288}{169\cdot 2}} =$

$= -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Приклад 2. Спростити вираз:

1) $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) - \cos(\alpha-\pi) - \operatorname{tg}(\alpha-\pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\frac{\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}18^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}18^\circ - 1}$;

4) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$;

5) $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$;

6) $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha + \cos 12\alpha}$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$

$= \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) - \cos(\alpha-\pi) - \operatorname{tg}(\alpha-\pi) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right) =$

$= \cos\alpha - \cos(\pi-\alpha) + \operatorname{tg}(\pi-\alpha) + \operatorname{ctg}\left(2\pi + \left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) =$

$= \cos\alpha + \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\cos\alpha$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}18^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}18^\circ - 1} = -\dfrac{\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}18^\circ}{1 - \operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}18^\circ} = -\operatorname{tg}(27^\circ + 18^\circ) =$

$= -\operatorname{tg}45^\circ = -1$;

4) $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha +$
$+ \sin^4\alpha) - 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$
$= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$;

5) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \cos\alpha = 1 - \cos\alpha + \cos\alpha = 1$;

6) $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha + \sin 12\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha + \cos 12\alpha} =$

$= \dfrac{(\sin 8\alpha + \sin 12\alpha) + (\sin 9\alpha + \sin 11\alpha) + \sin 10\alpha}{(\cos 8\alpha + \cos 12\alpha) + (\cos 9\alpha + \cos 11\alpha) + \cos 10\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin 10\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 10\alpha\cos\alpha + \sin 10\alpha}{2\cos 10\alpha\cos 2\alpha + 2\cos 10\alpha\cos\alpha + \cos 10\alpha} =$

$= \dfrac{\sin 10\alpha(2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1)}{\cos 10\alpha(2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1)} = \operatorname{tg}10\alpha$.

Приклад 3. Подати вираз у вигляді добутку або дробу:

1) $1 - \cos\dfrac{5}{2}\alpha$; 2) $1 + \sin 3\alpha$; 3) $1 - \cos\alpha + \sin\alpha$;

4) $1 + \operatorname{tg}\alpha$; 5) $a\sin\alpha + b\cos\alpha$; 6) $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $1 - \cos\dfrac{5}{2}\alpha = 2\sin^2\dfrac{5}{4}\alpha$;

2) $1 + \sin 3\alpha = 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{2}\alpha\right)$;

3) $1-\cos\alpha+\sin\alpha=(1-\cos\alpha)+\sin\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}=$$

$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

4) $1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha};$$

5) $a\sin\alpha+b\cos\alpha=a\left(\sin\alpha+\frac{b}{a}\cos\alpha\right)=$

$$=a(\sin\alpha+\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)=\left(\sin\alpha+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)=$$

$$=a\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi},$$

де $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$, оскільки будь-якому числу, в даному разі $\frac{b}{a}$, $(a\neq 0)$, відповідає тангенс деякого кута φ. Кут φ завжди можна обчислити за відомим значенням тангенса;

6) $3-\operatorname{tg}^2\alpha=(\sqrt{3})^2-\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}^2\alpha=$

$$=\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}}\;\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\alpha}.$$

Приклад 4. Довести тотожність:

1) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$;

2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\;\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha;$$

5) $$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha};$$

6) $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Д о в е д е н н я. 1) Перетворимо ліву частину рівності за формулою (18):

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)}{2}=$$

$$=\frac{\sin2\alpha+\sin2\beta}{2}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\beta\cos\beta}{2}=$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta;$$

2) $$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$$

$$+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$$

$$+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1;$$

3) $$\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}\,\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\,\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

4) $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha;$$

5) $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)+\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{90^\circ-\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-\alpha-\alpha}{2}}{2\cos\frac{90^\circ-\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{90^\circ-\alpha-\alpha}{2}}=\frac{\sin45^\circ\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos45^\circ\sin(45^\circ-\alpha)}=$$

$$=\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}(90^\circ-45^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha);$$

6) $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}{\sin\alpha}=$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha .$$

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Термін «тригонометрія», який походить від грецьких слів «тригон» — *трикутник* і «метрео» — *вимірюю* і означає в перекладі «вимірювання трикутників», був запропонований у 1595 р. німецьким математиком **В. Б. Пітіском** (1561—1613).

Тригонометрія, як астрономія і географія, зародилася й розвивалася у Вавилоні, Єгипті, Китаї, Індії та інших країнах. Значного розвитку тригонометрія як частина астрономії набула у Стародавній Греції. Греки першими почали розв'язувати прямокутні трикутники, у зв'язку з чим склали тригонометричні таблиці. У цих таблицях містилися довжини хорд, що відповідали центральним кутам круга сталого радіуса. Фактично це були таблиці синусів, оскільки лінія синусів дорівнює половині хорди.

Перші тригонометричні таблиці було складено давньогрецьким астрономом і математиком **Гіппархом** (близько 150 р. до н.е.). Він увів також географічні координати — широту і довготу, визначив відстань від Землі до Місяця.

Таблиці синусів складали також індійські астрономи, які розглядали і косинус.

Тригонометричні таблиці високої точності було складено у XV ст. середньоазіатським ученим ал-Каші (XIV—XV ст.) та німецьким астрономом і математиком **Регіомонтаном** (1436—1476).

У Росії перші тригонометричні таблиці, в складанні яких брав участь **Л. Ф. Магницький** (1669—1739), було видано у 1703 р.

Вчення про тригонометричні функції почало розвиватися ще в IV—V ст. у працях індійських учених. Термін «sinus» хоч і був введений латинською мовою у XII ст., але переклали його з індійської «архадживе», що означає *половина хорди*.

Термін «косинус» походить від скорочення двох слів «sinus complementi» — *синус доповнення* ($\sin(90^\circ - x)$), які вживав Регіомонтан.

У IX—X ст. середньоазіатські вчені ввели поняття тангенса, котангенса, секанса (величини, оберненої до косинуса) і косеканса (величини, оберненої до синуса). Термін «тангенс» був введений у 1583 р. німецьким математиком Т. **Ф і н к о м** (1561—1656). Латинське слово «tangens» означає *той, що дотикається.* Термін «котангенс» походить, як і косинус, від словосполучення «tangens complementi».

Сучасного вигляду вчення про тригонометричні функції набуло в працях **Л е о н а р д а Е й л е р а** (1707—1783) — математика, фізика й астронома, швейцарця за походженням, який довгий час працював у Петербурзькій Академії наук. Л. Ейлер розглядав тригонометрію як науку про тригонометричні функції. Ці функції він тлумачив як відношення відповідних тригонометричних ліній до радіуса, що дало можливість розглядати їх не лише як функції кутів і дуг, а й як функції дійсних чисел. Л. Ейлер уперше доступно виклав відомості про знаки тригонометричних функцій у кожному з квадрантів, дослідив їх області визначення, ввів позначення функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, сторін a, b, c і протилежних до них кутів A, B, C у трикутнику. Він автор низки тригонометричних формул.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Довести формулу додавання для косинуса.
2. Довести формулу додавання для синуса.
3. Довести формулу додавання для тангенса.
4. Сформулювати правило користування формулами зведення.
5. Довести формули тригонометричних функцій подвійного аргументу.
6. Записати формули тригонометричних функцій половинного аргументу.
7. Довести формули суми і різниці синусів та косинусів.
8. Довести формули суми і різниці тангенсів.

ВПРАВИ

48. Обчислити значення виразу, не застосовуючи тригонометричні таблиці і мікрокалькулятор:

1) $\cos 15°$;

2) $\cos(\alpha - \beta)$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, якщо $\sin x = 0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;

5) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8$;

6) $\dfrac{1+\operatorname{tg}4^\circ+\operatorname{tg}49^\circ}{\operatorname{tg}49^\circ-\operatorname{tg}4^\circ}$;

7) $\cos^2 22^\circ 30'-\sin^2 22^\circ 30'$;

8) $\operatorname{tg}\frac{11}{12}\pi-\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi$; 9) $\sin 75^\circ \sin 75^\circ$; 10) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$.

49. Спростити вираз:

А

1) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$; 3) $\dfrac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\cos 11^\circ\sin 15^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\cos 18^\circ\sin 12^\circ}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}7\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}7\alpha\operatorname{tg}3\alpha+1}$; 5) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

6) $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$; 7) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$; 8) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$.

Б

9) $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 10) $\dfrac{\sin(45^\circ-\alpha)\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)}$;

11) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\alpha}$; 12) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{13}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{13}{2}\pi\right)}$;

13) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$; 14) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;

15) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$; 16) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$.

В

17) $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}=\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

18) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$;

19) $\sqrt{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$;

20) $\dfrac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1}$;

21) $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

22) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\beta$.

50. Записати вираз у вигляді добутку або дробу:

А

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$; 2) $1 - \cos\frac{3}{2}\alpha$; 3) $1 + \sin 5\alpha$;
4) $1 - \operatorname{tg}\alpha$; 5) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha$.

Б

7) $\dfrac{1+\cos(\alpha-\beta)}{1-\cos(\alpha-\beta)}$; 8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;

9) $\sqrt{3} - 2\cos 20°$; 10) $\sqrt{1 + \dfrac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$;

11) $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 12) $1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha$.

В

13) $\dfrac{\sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4}$;

14) $\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 2\alpha - 8\cos 4\alpha\operatorname{ctg}4\alpha$;

15) $2 - \dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}$; 16) $\dfrac{\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 2\alpha + \sin 4\alpha - \cos 6\alpha}$.

51. Довести тотожність:

А

1) $\cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \sin(\alpha+\beta)$;

2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

4) $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha + \cos\alpha$;

5) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha}{1-\operatorname{ctg}2\alpha} = \dfrac{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$; 6) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Б

7) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=-\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha$;

8) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

9) $\dfrac{\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)}{4\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

10) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$;

11) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$;

12) $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

13) $4\sin^2\alpha-3=4\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

14) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$.

В

15) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

16) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

17) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-2\sin 3\alpha\cos 3\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha$;

18) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$;

19) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

20) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$;

21) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\dfrac{4}{\operatorname{tg}2\alpha\sin 2\alpha}$;

22) $\dfrac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

РОЗДІЛ 2

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Складання рівняння задачі є основним засобом застосування математики до природознавства і техніки. Без рівняння немає математики як засобу пізнання природи.

П. С. Александров

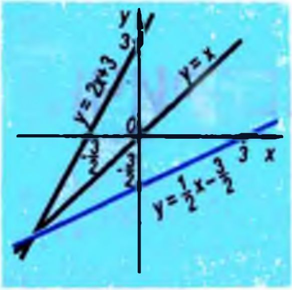
§ 11. Обернені тригонометричні функції

Поняття про обернену функцію. Під час розв'язування різних задач часто доводиться обчислювати значення функції за даним значенням аргументу. Наприклад, обчислювати площу S квадрата за довжиною його сторони за формулою $S = a^2$, яка задає залежність (функцію) площі від довжини a сторони квадрата. Проте часто доводиться розв'язувати обернену задачу: якою має бути сторона квадрата a, щоб площа S мала наперед задане значення $a = \sqrt{S}$, або обчислити час t, який затратило тіло в рівномірному русі, якщо воно пройшло шлях певної довжини. Якщо $s = s_0 + vt$ (де v — стала) — формула шляху, яка задає лінійну функцію, то $s = f(t)$ — функція аргументу t. Якщо визначити t із формули шляху, то дістанемо іншу функцію $t = \frac{s}{v} - \frac{s_0}{v}$, також лінійну, але відносно аргументу s, яку в загальному вигляді позначимо $t = \varphi(s)$. Функцію $a = \sqrt{S}$ називають оберненою до функції $S = a^2$, а $t = \frac{s}{v} - \frac{s_0}{v}$ — оберненою до $s = s_0 + vt$.

Розглянемо приклади знаходження функцій, обернених до лінійної $y = kx + b$ і квадратичної $y = x^2$ функцій.

Приклад 1. Нехай $y = 2x + 3 = f(x)$ — задана лінійна функція. Областю визначення і областю значень її є множина всіх дійсних чисел. Кожне своє значення y лінійна функція набуває лише при одному значенні аргументу x.

Вважатимемо змінну y незалежною (аргументом), а змінну x — залежною і розв'яжемо рівняння $y = 2x + 3$ відносно змінної x. Дістанемо також лінійну функцію $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$, яка задає іншу залежність x від y.



Мал. 53

Функція $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = \varphi(y)$ називається **оберненою** до функції $y = 2x + 3 = f(x)$.

Поміняємо у рівності $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$ позначення, оскільки прийнято незалежну змінну позначати літерою x, а залежну — літерою y. Дістанемо функцію $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \varphi(x)$, обернену до $y = 2x + 3 = f(x)$.

Побудуємо графіки функцій $y = 2x + 3$ і оберненої до неї $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ в одній системі координат (мал. 53).

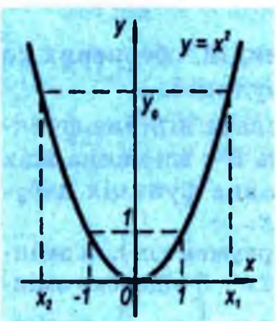
Помічаємо, що графіки даної функції і оберненої до неї розміщені симетрично відносно прямої $y = x$, тобто симетрично відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Не слід думати, що кожна функція має обернену на своїй області визначення.

Приклад 2. Нехай задано функцію $y = x^2$. Областю визначення її є множина всіх дійсних чисел, тобто R, а областю зміни — множина невід'ємних чисел, тобто $y \in [0; +\infty)$.

Графік функції (мал. 54) показує, що кожне своє значення (крім $y = 0$) вона набуває при двох значеннях аргументу x_1 і x_2. Якщо розглянути залежність x від y, то вона не буде функцією, оскільки одному значенню y_0 відповідає два значення x. Це означає, що функція $y = x^2$ на всій області визначення не має оберненої. Проте, якщо розглянути підмножини області визначення, наприклад $(-\infty; 0]$ або $[0; +\infty)$, то на цих підмножинах функція $y = x^2$ кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу.

На першій із цих підмножин функція спадає, а на другій — зростає. На кожній із них існує функція, обернена до $y = x^2$.



Мал. 54

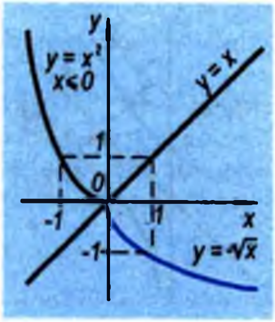
Знайдемо, наприклад, функцію, обернену до $y = x^2$, якщо $x \in (-\infty; 0]$, тобто x — недодатне. Тут областю визначення є множина $(-\infty; 0]$, а областю значень — множина невід'ємних значень y, тобто $y \in [0; +\infty)$.

Вважатимемо тепер y незалежною змінною, а x — залежною і розв'яжемо рівняння $y = x^2$ відносно змінної x. Це — квадратне рівняння. Воно має два корені $x = \pm\sqrt{y}$. Але за умовою x — недодатне, тому $x = -\sqrt{y} = \varphi(y)$.

Функція $x = -\sqrt{y} = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = x^2$ за умови $x \le 0$.

Поміняємо у рівності $x = -\sqrt{y}$ позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = -\sqrt{x} = \varphi(x)$, обернену до $y = x^2$, $x \le 0$.

Областю визначення оберненої функції $y = -\sqrt{x}$ є множина $[0; \infty)$, бо x в арифметичному корені невід'ємне, а областю зміни — множина $(-\infty; 0]$.



Мал. 55

Помічаємо, що області визначення і зміни взаємно обернених функцій помінялися «своїми» множинами.

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$, $x \le 0$ і $y = -\sqrt{x}$, $x \ge 0$ в одній системі координат (мал. 55). Побудовані графіки також симетричні відносно прямої $y = x$.

Функція f, яка має обернену, називається оборотною.

Необхідною і достатньою умовою існування оберненої функції до даної є така: вона має набувати кожного свого значення лише для одного значення аргументу.

Достатньою умовою існування оберненої функції для даної функції є її монотонність, тобто зростання або спадання на всій області визначення.

Наприклад, будь-яка лінійна функція $y = kx + b$, якщо $k \ne 0$, є оборотною, тобто має обернену. Оборотною є також функція $y = x^3$, бо вона зростаюча на всій області визначення.

Оберненою до даної оборотної функції $y = f(x)$ називається така функція $x = \varphi(y)$, яка кожному y із множини значень функції $y = f(x)$ ставить у відповідність єдине число x із її області визначення.

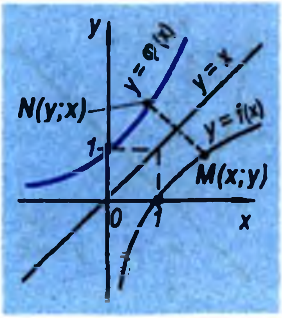
Якщо поміняти позначення незалежної і залежної змінних, то обернену функцію до $y = f(x)$ запишемо у вигляді $y = \varphi(x)$.

Розглянемо алгоритм знаходження формули функції, оберненої до даної.

1) З'ясовуємо, чи є функція $y = f(x)$ оборотною на всій області визначення. Якщо ні, то виділяємо підмножину області визначення, де існує функція, обернена до $y = f(x)$.

2) Розв'язуємо рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x, тобто знаходимо функцію $x = \varphi(y)$, яка є оберненою до $y = f(x)$.

3) Міняємо позначення змінних: незалежну змінну позна-



Мал. 56

чаємо x, а залежну — y. Дістаємо функцію $y = \varphi(x)$, обернену до $y = f(x)$ у прийнятих позначеннях змінних.

Можна довести загальне твердження:

графік функції φ, оберненої до функції f, симетричний графіку f відносно прямої $y = x$.

Д о в е д е н н я. Якщо $y = f(x)$ — дана оборотна функція, то $x = \varphi(y)$ — обернена до неї. Це означає, що коли точка $M(x; y)$ належить графіку $y = f(x)$, то точка $N(y; x)$ належить графіку $x = \varphi(y)$ (або $y = \varphi(x)$). Але ці дві точки розміщені у системі координат симетрично відносно прямої $y = x$ (мал. 56).

Сформулюємо без доведення таку властивість оберненої функції:

якщо функція f зростаюча (спадна) на проміжку I, то вона оборотна. Обернена до f функція φ, визначена в області значень f, також є зростаючою (спадною).

Функція, обернена до $y = \sin x$. Введемо обернену функцію, користуючись загальним алгоритмом знаходження функції, оберненої до даної.

1) Із властивості періодичності і графіка функції $y = \sin x$ (див. мал. 38) випливає, що кожне своє значення y_0 вона набуває для нескінченної множини значень аргументу $x = x_0 + 2\pi n$. Це означає, що функція не є оборотною на всій області визначення. Разом з тим, на всіх проміжках, де вона зростає або спадає, існує обернена до неї функція. Виберемо такий із проміжків монотонності, значення x у якому найближчі до 0. Це проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Справді, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то синус набуває всіх своїх значень $y \in [-1; 1]$ і зростає.

2) Вважатимемо y незалежною змінною (аргументом), а x — залежною (функцією) і розв'яжемо рівняння $y = \sin x$ відносно x. Це означає, що треба знайти таке число x (кут або дугу), синус якого дорівнює y. На обраному проміжку таке число буде єдине. Для його позначення використовують символ $x = \arcsin y$. Отже, під знаком arcsin міститься значення синуса, а $x = \arcsin y = \varphi(y)$ — функція, обернена до $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = \arcsin x = \varphi(x)$, обернену до $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, записану у прийнятих позначеннях змінних.

Помічаємо, що (як і для будь-яких взаємно обернених функцій) області визначення і значень цих функцій помінялися множинами. Для $y = \arcsin x$ x — значення синуса і $x \in [-1; 1]$, а y — число (кут або дуга), синус якого дорівнює x, і $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Графік функції $y = \arcsin x$ дістанемо з графіка функції $y = \sin x$, якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 57).

Розглянемо властивості функції $\boldsymbol{y = \arcsin x}$.

1) Областю визначення функції $y = \arcsin x$ є множина $[-1; 1]$, областю значень — множина $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. При цьому, якщо $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, а якщо $-1 \le x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат (функція непарна), тобто $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Довести цю властивість можна так. Область визначення — множина, симетрична відносно 0. Доведемо, що $f(-x) = -f(x)$. Враховуючи область значень арксинуса, маємо $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(-x) \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Помноживши всі три частини останньої нерівності на -1, матимемо $-\frac{\pi}{2} \le -\arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Запишемо синуси виразів $\arcsin(-x)$ і $-\arcsin x$: $\sin(\arcsin(-x)) = -x$, $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$. Але якщо два числа належать одному і тому самому проміжку і синуси їх рівні, то і числа рівні в силу монотонності синуса на цьому проміжку. Отже, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

3) Функція не є періодичною.

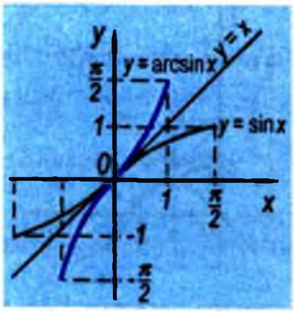
4) Дорівнює нулю при $x = 0$.

5) Зростаюча за теоремою про властивість оберненої функції.

6) Додатна при $x \in (0; 1]$ і від'ємна при $x \in [-1; 0)$.

7) Набуває найбільшого значення, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$, якщо $x = 1$, і найменшого $-\frac{\pi}{2}$, якщо $x = -1$.

Якщо в рівності $x = \arcsin y$ замінити y на $\sin x$, оскільки $y = \sin x$, то $\arcsin(\sin x) = x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.



Мал. 57

Якщо від функції $y = \arcsin x$ перейдемо до оберненої функції $x = \sin y$, а в останній рівності замінимо y на $\arcsin x$, то дістанемо ще одну рівність $\sin(\arcsin x) = x$.

Рівності $\arcsin(\sin x) = x$ і $\sin(\arcsin x) = x$ використовують у різних тригонометричних обчисленнях. Згідно з цими рівностями: $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\arcsin\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

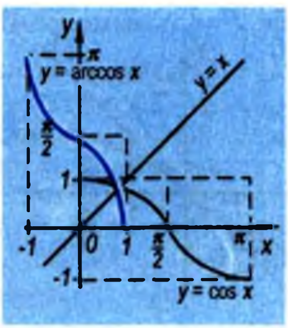
Функція, обернена до $y = \cos x$. Із властивості періодичності і графіка функції $y = \cos x$ (див. мал. 39) випливає, що кожного свого значення y_0 функція набуває для нескінченної множини значень аргументу $x = x_0 + 2n\pi$. Це означає, що функція не є оборотною на всій області визначення. Разом з тим на всіх проміжках, де вона зростає або спадає, вона має обернену функцію. Виберемо один із них, наприклад проміжок $[0; \pi]$. При $x \in [0; \pi]$ косинус набуває всіх своїх значень $[-1; 1]$ з області значень.

Вважатимемо y незалежною змінною (аргументом), а x — залежною (функцією) і розв'яжемо рівняння $y = \cos x$ відносно змінної x. Це означає, що треба знайти таке число x (кут або дугу), косинус якого дорівнює y. На обраному проміжку таке число єдине і позначається $x = \arccos y$. Очевидно, що $x = \varphi(y)$. Отже, під знаком arccos міститься значення косинуса, а функція $x = \arccos y$ обернена до $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$.

Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = \arccos x$, обернену до $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$, записану у прийнятих позначеннях змінних.

Областю визначення функції $y = \arccos x$ є множина $[-1; 1]$, а областю значень — $[0; \pi]$, тобто $0 \le \arccos x \le \pi$.

Графік функції $y = \arccos x$ дістанемо з графіка $y = \cos x$, якщо $x \in [0; \pi]$, перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 58).



Мал. 58

Розглянемо властивості функції $y = \arccos x$, що випливають з її графіка. Їх можна обґрунтувати так само, як і для функції $y = \arcsin x$.

1) Областю визначення функції $y = \arccos x$ є множина $[-1; 1]$, а областю значень — множина $[0; \pi]$. Якщо $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arccos x \le \frac{\pi}{2}$; при $-1 \le x \le 0$ $\frac{\pi}{2} \le \arccos x \le \pi$.

2) Графік функції не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі Oy. Це означає, що функ-

ція не є ні парною, ні непарною. Для неї справджується рівність $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ (доведіть це самостійно).

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 1$.

5) Функція спадна.

6) Додатна на всій області визначення.

7) Функція набуває найбільшого значення π, якщо $x = -1$ і найменшого 0, якщо $x = 1$.

Для функції $y = \arccos x$ також справджуються рівності $\cos(\arccos x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$ для $x \in [0; \pi]$. Обґрунтуйте це.

Функція, обернена до $y = \operatorname{tg} x$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває кожного свого значення для нескінченної множини значень аргументу $x = x_0 + n\pi$, $n \in Z$. Тому вона не є оборотною на всій області визначення. Але на кожному з проміжків $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$ вона зростаюча, а тому має обернену. Виберемо один з таких проміжків, наприклад $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, значення x в якому найближчі до 0. Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то тангенс набуває всіх своїх значень $y \in (-\infty; \infty)$ з області значень.

Вважатимемо y незалежною змінною (аргументом), а x — залежною змінною (функцією) і розв'яжемо рівняння $y = \operatorname{tg} x$ відносно x. Це означає, що треба знайти таке число (кут або дугу), тангенс якого дорівнює y. На обраному проміжку це число буде єдиним і позначається $x = \operatorname{arctg} y$. Очевидно, що $x = \varphi(y)$.

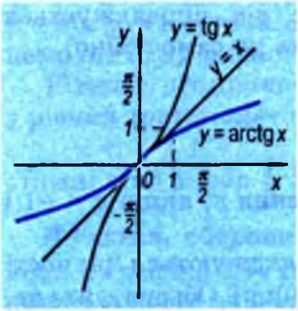
Отже, під знаком arctg міститься значення тангенса, а функція $x = \operatorname{arctg} y$ обернена до $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поміняємо позначення незалежної і залежної змінних. Дістанемо функцію $y = \operatorname{arctg} x = \varphi(x)$, обернену до $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, записану в прийнятих позначеннях змінних.

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ дістанемо з графіка $y = \operatorname{tg} x$, якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (мал. 59).

Розглянемо властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$, що випливають з її графіка.

1) Областю визначення функції $y = \operatorname{arctg} x$ є множина $(-\infty; +\infty)$, областю значень — множина $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо $0 \le x < +\infty$, то



Мал. 59

$0 \le \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, якщо $-\infty < x \le 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x \le 0$.

2) Графік функції симетричний відносно початку координат, це означає, що функція непарна, тобто $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ (доведіть це самостійно).

3) Функція не є періодичною.

4) Дорівнює нулю, якщо $x = 0$.

5) Функція зростаюча.

6) Додатна, якщо $0 < x < +\infty$, і від'ємна, якщо $-\infty < x < 0$.

7) Функція не набуває найбільшого і найменшого значень. Для функції $y = \operatorname{arctg} x$ також справджуються дві рівності $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Обґрунтуйте це.

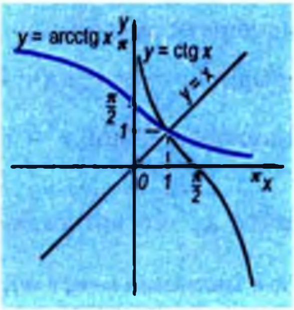
Функція, обернена до $y = \operatorname{ctg} x$. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ не є оборотною на області визначення, але має обернену на проміжках спадання. Виберемо один з них, наприклад $(0; \pi)$. Якщо $x \in (0; \pi)$, котангенс набуває всіх своїх значень $y \in (-\infty; +\infty)$.

Розв'яжемо рівняння $y = \operatorname{ctg} x$ відносно змінної x. Дістанемо функцію $x = \operatorname{arcctg} y = \varphi(y)$, обернену до $y = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$.

Поміняємо позначення змінних. Матимемо функцію $y = \operatorname{arcctg} x = \varphi(x)$, обернену до $y = \operatorname{ctg} x$, якщо $x \in (0; \pi)$, записану в прийнятих позначеннях.

Областю визначення функції $y = \operatorname{arcctg} x$ є множина $(-\infty; +\infty)$, областю значень — множина $(0; \pi)$.

Графік функції на проміжку $(0; \pi)$ дістанемо з графіка $y = \operatorname{ctg} x$, симетрично відобразивши його відносно прямої $y = x$ (мал. 60).



Мал. 60

Назвіть властивості функції $y = \operatorname{arcctg} x$ за її графіком.

Приклади. Обчислити:

1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 4) $\operatorname{arcctg} 1$;

5) $\arcsin 0{,}8192$;

6) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos\frac{1}{2}$;

7) $\operatorname{arcctg} 0 + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

8) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 9) $\cos(\arccos 1)$;

10) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, оскільки $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, оскільки $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; 3) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})=-\mathrm{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$; оскільки $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; 4) $\mathrm{arcctg}\,1=\frac{\pi}{4}$, оскільки $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=1$; 5) $\arcsin 0{,}8192\approx 0{,}9599$, оскільки за таблицями значень тригонометричних функцій кутів, виражених у радіанах або обчислених на мікрокалькуляторі, синус числа 0,9599 дорівнює 0,8192; 6) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\frac{1}{2}=2\left(\pi-\arccos\frac{1}{2}\right)-\arccos\frac{1}{2}=2\pi-2\arccos\frac{1}{2}-\arccos\frac{1}{2}=2\pi-3\arccos\frac{1}{2}=2\pi-3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$; 7) $\mathrm{arctg}\,0+\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}$, оскільки $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$; 8) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$ згідно з рівністю $\arcsin(\sin x)=x$; 9) $\cos(\arccos 1)=1$ згідно з рівністю $\cos(\arccos x)=x$; 10) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$ згідно з рівністю $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$.

Значення обернених тригонометричних функцій на мікрокалькуляторі обчислюють відповідно за такими програмами:

$x\boxed{F}\ \underline{\sin^{-1}}$; $x\boxed{F}\ \underline{\cos^{-1}}$; $x\boxed{F}\ \underline{\mathrm{tg}^{-1}}$.

Залежно від того, в якому вимірюванні (градусному чи радіанному) ми обчислюватимемо значення оберненої тригонометричної функції, встановлюється відповідне положення перемикача «Г—Р».

Аргумент x при цьому не може виходити за межі $0\le x\le 1$ для арксинуса і арккосинуса та $0\le x\le 500$ — для арктангенса.

Приклад 1. Обчислити $\arcsin 0{,}75$ з точністю до 10^{-2} у градусній мірі.

Попередньо встановлюємо перемикач «Г—Р» на режим роботи у градусній мірі й обчислюємо значення $\arcsin 0{,}75$.

П р о г р а м а. 0,75 $\boxed{F}$ $\underline{\sin^{-1}}$.

В і д п о в і д ь: arcsin 0,75 ≈ 48,59°.

Приклад 2. Обчислити з точністю до 10^{-3} у радіанній мірі arccos 0,578.

Встановлюємо перемикач «Г—Р» на режим роботи у радіанній мірі й обчислюємо шукане значення за програмою:

0,578 $\boxed{F}$ $\underline{\cos^{-1}}$.

В і д п о в і д ь: arccos 0,578 ≈ 0,955.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яка функція називається оборотною?

2. Сформулювати означення функції, оберненої до даної оборотної функції.

3. Як розташовані графіки двох взаємно обернених функцій?

4. Сформулювати алгоритм знаходження формули функції, оберненої до даної. Знайти функцію, обернену до функції: а) $y = 2x-1$; б) $y = x^2$, якщо $0 \le x < +\infty$; в) $y = x^3$.

5. Сформулювати теорему про властивість оберненої функції.

6. Ввести функцію, обернену до $y = \sin x$. Назвати її властивості.

7. Ввести функцію, обернену до $y = \cos x$. Назвати її властивості.

8. Ввести функцію, обернену до $y = \operatorname{tg} x$. Назвати її властивості.

9. Як побудувати графіки обернених тригонометричних функцій?

10. Довести, що функції $y = \arcsin x$ і $y = \operatorname{arctg} x$ непарні.

11. Як виразити $\arccos(-x)$ через $\arccos x$?

12. Обчислити значення виразу:

1) $\arcsin 1$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 5) $\arccos 0{,}7986$; 6) $2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin 1$;

7) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{1}{2}$; 8) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$;

9) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$.

ВПРАВИ

52. Обчислити:

1) $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\operatorname{arctg} 1$;

5) $\arcsin\frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{arctg}(-1)$; 7) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

8) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right)$; 9) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$.

53. Визначити знак числа, якщо:

1) $a = \sin(\arccos x)$; 2) $b = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

54. Довести, що:

1) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$.

55. Знайти область визначення функції:

1) $y = \arccos(x^2 + 1)$; 2) $\arcsin\frac{3x-1}{3}$.

56. Побудувати графік функції:

1) $y = \arccos\frac{1}{2}x$; 2) $y = -2\arcsin x$;

3) $y = \arcsin|x|$; 4) $y = |\arccos x|$.

§ 12. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Тригонометричними рівняннями називаються рівняння, в яких невідома (змінна) входить лише під знак тригонометричної функції.

Наприклад, $\sin x - \cos x = 0$; $2\sin x + \cos x = \frac{3}{2}\sin^2 2x$; $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$; $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

Тригонометричні рівняння, в яких невідома входить лише під знак тригонометричної функції, або зовсім не мають розв'язків, або мають здебільшого безліч їх внаслідок властивості періодичності тригонометричних функцій.

Не існує загального способу розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння. Однак деякі способи розв'язування окремих видів тригонометричних рівнянь можна вказати. Як правило, розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ рівносильне рівнянню $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$, тому немає потреби розглядати його окремо.

Розглянемо розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

Рівняння $\sin x = a$. Розв'яжемо це рівняння спочатку графічно, побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = a$.

Якщо $|a| > 1$, тобто при $a > 1$ і $a < -1$, пряма і синусоїда не перетинаються. Тому рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків (мал. 61).

Знайдемо розв'язки, якщо $|a| \leq 1$, тобто коли $-1 \leq a \leq 1$, на відрізку $[-\pi; \pi]$, а потім скористаємося періодичністю функції синус.

Нехай $0 < a < 1$. Як видно з малюнка, пряма $y = a$ за цієї умови перетинає синусоїду у двох точках P_1 і P_2, абсциси яких належать проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки розв'язування рівняння $\sin x = a$ зводиться до знаходження числа (геометрично кута чи дуги), синус якого дорівнює a, то цим числом є $\arcsin a$, якщо воно належить проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, абсцисою точки P_1 є $\arcsin a$. Абсцису точки P_2 запишемо як різницю $\pi - \arcsin a$.

Якщо додати до знайдених розв'язків період $2n\pi$, то при $0 < a < 1$ дістанемо всі розв'язки рівняння $\sin x = a$ у вигляді двох множин:

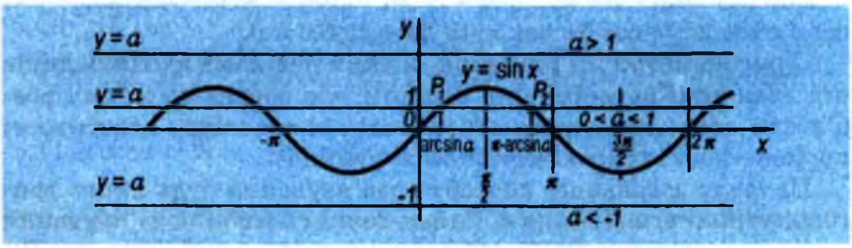
$$x = \arcsin a + 2n\pi, \ n \in Z; \qquad (1)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n + 1)\pi, \ n \in Z. \qquad (2)$$

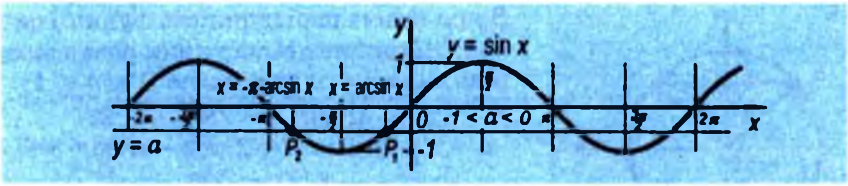
Ці множини можна об'єднати в одну

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \ k \in Z, \qquad (3)$$

діставши загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = a$. Якщо k парне, тобто $k = 2n$, дістанемо множину (1), а якщо непарне, тобто $k = 2n + 1$, дістанемо множину (2).



Мал. 61



Мал. 62

Нехай $-1 < a < 0$. З малюнка 62 видно, що за цієї умови пряма $y = a$ перетинає синусоїду також у двох точках P_1 і P_2, абсциси яких належать проміжку $(-\pi; 0)$. Абсциса першої точки належить проміжку $(-\pi; 0)$, тому є $\arcsin a$. Абсцису точки P_2 можна записати як різницю $-\pi - \arcsin a$. Якщо до знайдених розв'язків додати період функції синуса, то дістанемо всі розв'язки рівняння $\sin x = a$, якщо $-1 < a < 0$, у вигляді двох множин:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = -\pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n-1)\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Об'єднуючи ці дві формули в одну, запишемо:

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Дістали ту саму загальну формулу розв'язків рівняння.

Якщо $a = 0$, то пряма $y = a$ перетинає синусоїду в точках, абсциси яких дорівнюють $n\pi$. Отже, рiняння $\sin x = 0$ має множину розв'язків $x = n\pi$, де $n \in \boldsymbol{Z}$.

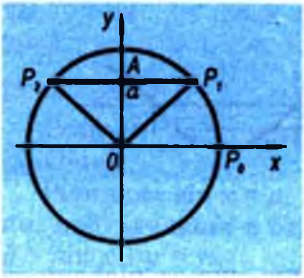
Якщо $a = 1$, то пряма дотикається до синусоїди у точках з абсцисами $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Таким чином, рівняння $\sin x = 1$ має множину розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Якщо $a = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Неважко довести, що коли $a = 0$, $a = 1$ і $a = -1$, ті самі множини розв'язків можна знайти і за загальною формулою (3).

Загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $|a| \le 1$, можна знайти і за допомогою одиничного кола.

Нехай $0 < a < 1$. Оскільки a як значення синуса є ординатою точки одиничного кола, то відкладемо на осі Oy відрізок, що дорівнює a, і через кінець його A проведемо пряму, паралельну осі Ox (мал. 63). Вона перетне коло у двох точках P_1 і P_2. Оскільки треба знайти таке число (кут або дугу), синус якого дорівнює a, то таких чисел, яким відповідають точки P_1 і P_2 одиничного кола, виявилося два. Перше з них, яке належить проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, є $\arcsin a$, а друге дорівнює $\pi - \arcsin a$.



Мал. 63

Враховуючи періодичність функції синус, дістанемо дві множини розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $0 < a < 1$:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$
$$a = \pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n + 1)\pi.$$

Після їх об'єднання дістанемо загальну формулу розв'язків

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Нехай $-1 < a < 0$. Відповідні точки P_1 і P_2, що зображують числа на одиничному колі, належать нижньому півколу (мал. 64). Точка P_1 зображує число, яке належить проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, і є $\arcsin a$. Точка P_2 зображує число, яке дорівнює $-\pi - \arcsin a$.

Враховуючи періодичність синуса, дістанемо дві множини розв'язків рівняння $\sin x = a$, якщо $-1 < a < 0$:

$$x = \arcsin a + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z},$$
$$x = -\pi - \arcsin a + 2n\pi = -\arcsin a + (2n - 1)\pi.$$

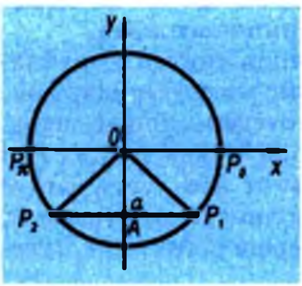
Об'єднуючи їх, дістанемо загальну формулу розв'язків рівняння

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Рівняння $\cos x = a$. Розв'язування його графічним способом показує (мал. 65), що при $|a| > 1$ рівняння не має розв'язків. Знайдемо розв'язки рівняння на проміжку $[-\pi; \pi]$, довжина якого дорівнює періоду 2π.

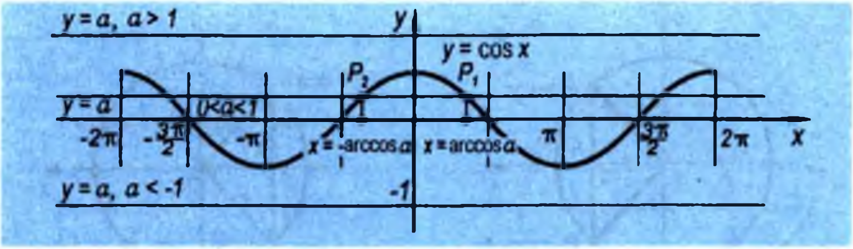
Нехай $0 < a < 1$. Проведемо пряму $y = a$. Вона перетне графік функції $y = \cos x$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ у двох точках P_1 і P_2. Оскільки треба знайти число (кут або дугу), косинус якого дорівнює a, то таких чисел, яким відповідають точки P_1 і P_2, виявилося два. Перше з них належить проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і є $\arccos a$, а друге — протилежне йому і дорівнює $-\arccos a$ внаслідок парності функції косинус. Враховуючи періодичність функції косинус, дістанемо дві множини розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $0 < a < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (4)$$



Мал. 64

Нехай $-1 < a < 0$. З малюнка 66 видно, що пряма $y = a$ перетинає графік косинуса у двох точках P_1 і P_2.



Мал. 65

Абсциса точки P_1 належить проміжку $(0; \pi)$ і тому дорівнює $\arccos a$, абсциса другої точки P_2 дорівнює $-\arccos a$. Додаючи до знайдених розв'язків період $2n\pi$, дістанемо дві множини розв'язків, які можна записати у вигляді однієї формули

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отже, дістали ту саму загальну формулу (4) розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $-1 < a < 0$.

Якщо $a = 0$, пряма $y = a$ перетинає графік косинуса у точках з абсцисами $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Якщо $a = 1$, пряма дотикається до графіка косинуса у точках з абсцисами $2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, якщо $a = -1$, дотикається у точках з абсцисами $(2n + 1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Доцільно запам'ятати «особливу» форму запису розв'язків рівняння $\cos x = a$ для окремих випадків:

$$\text{якщо } \cos x = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \boldsymbol{Z};$$

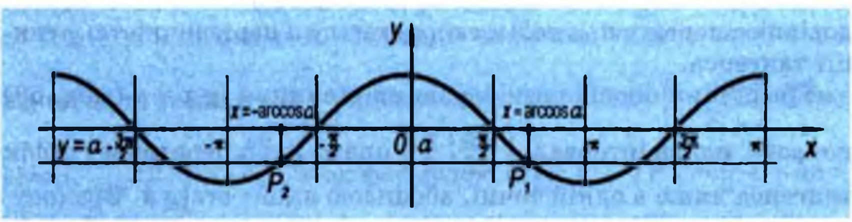
$$\text{якщо } \cos x = 1, \text{ то } x = 2n\pi, n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\text{якщо } \cos x = -1, \text{ то } x = (2n + 1)\pi.$$

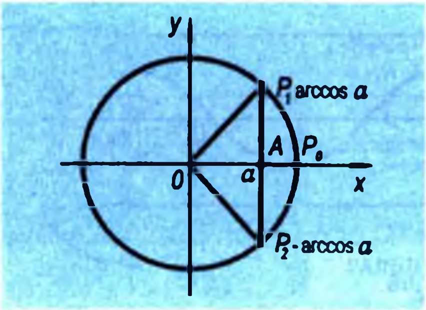
Неважко показати, що ці самі множини розв'язків для окремих значень a можна дістати із загальної формули розв'язків $x = \pm \arccos a + 2n\pi$. Справді, якщо

$$a = 0, \arccos a = \frac{\pi}{2}, \text{ а } x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi = (4n \pm 1)\frac{\pi}{2}, \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

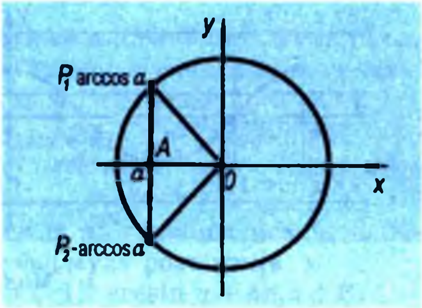
Проте вираз $4n \pm 1$, якщо $n \in \boldsymbol{Z}$, дає множину всіх непарних



Мал. 66



Мал. 67



Мал. 68

чисел, як і вираз $2n + 1$, що входить до формули $x = \frac{\pi}{2} + n\pi = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$.

Загальну формулу розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $|a| \le 1$, за допомогою одиничного кола можна вивести так само, як і для рівняння $\sin x = a$.

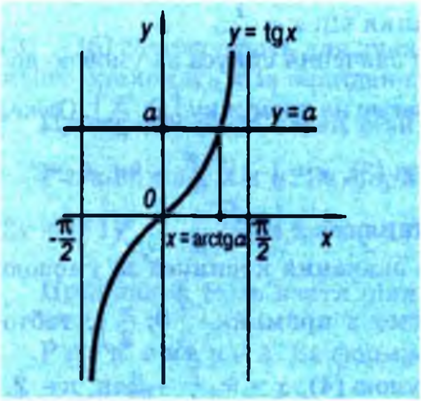
Як видно з малюнка 67, якщо $0 < a < 1$, пряма, проведена у кінці A відрізка осі абсцис завдовжки a паралельно осі Oy, перетинає коло у двох точках P_1 і P_2. Точка P_1 відповідає числу, що належить проміжку $(0; \pi)$, тобто є $\arccos a$, друга точка P_2 відповідає числу $-\arccos a$ внаслідок парності функції косинус. Додаючи період до обох чисел, дістанемо загальну формулу (4) розв'язків рівняння $\cos x = a$, якщо $0 < a < 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

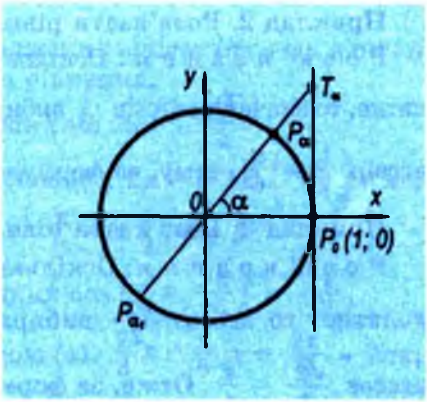
Якщо $-1 < a < 0$, пряма, проведена у кінці відрізка OA паралельно осі Oy, також перетинає коло у двох точках P_1 і P_2 (мал. 68). Точка P_1 відповідає числу, що належить проміжку $(0; \pi)$, і є $\arccos a$, а P_2 відповідає числу $-\arccos a$. Додаючи період до обох чисел, знову дістанемо ту саму загальну формулу розв'язків рівняння $\cos x = a$.

Рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$. Оскільки областю значень функції $y = \mathrm{tg}$ є множина всіх дійсних чисел, то знайдемо розв'язки рівнянн при будь-якому a на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, довжина якого дорівнює періоду π, а потім скористаємося періодичністю функції тангенса.

Графічний спосіб розв'язування рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$ (мал. 69) показує, що на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ пряма $y = a$ перетинає графік тангенса лише в одній точці, абсцисою якої є $\mathrm{arctg}\, a$. Враховуючи періодичність функції $y = \mathrm{tg}\, x$, дістанемо загальну формулу розв'язків рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$, тобто множину



Мал. 69



Мал. 70

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (5)$$

Розв'язування рівняння $\operatorname{tg} x = a$ за допомогою одиничного кола на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ приводить до тієї самої множини. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha$ — це ордината точки T_α перетину прямої OP_α з лінією тангенса (мал. 70), а пряма OT_α перетинає одиничне коло у двох точках P_α і P_{α_1}, то в інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ потрапляє лише одна з них P_α, яка відповідає числу $\operatorname{arctg} a$. Всі інші розв'язки дістанемо, додавши до цього числа період $n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$, тобто $x = \operatorname{arctg} a + n\pi$.

Отже, маємо загальні розв'язки трьох найпростіших тригонометричних рівнянь:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \cos x = a,\ x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \operatorname{tg} x = a,\ x = \operatorname{arctg} a + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{gathered}}$$

Покажемо застосування цих формул.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення синуса за умовою від'ємне, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ вибираємо на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Тому $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, а за формулою (3) $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{3}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$.

Р о з в ' я з а н н я . Оскільки значення синуса за умовою додатне, то значення $\arcsin \frac{1}{2}$ вибираємо на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, тому, за формулою (3), $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення косинуса за умовою додатне, то $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ вибираємо з проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Отже, за формулою (4), $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення косинуса за умовою від'ємне, то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ вибираємо з проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Отже, за формулою (4), $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, тому $x = \pm \frac{2\pi}{3} +$ $+ 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення тангенса за умовою додатне, то $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ вибираємо з проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, тому, за формулою (5), $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = -1$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення тангенса за умовою від'ємне, то $\operatorname{arctg}(-1)$ вибираємо з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Отже, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, тому, за формулою (5), $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\cos x = -0{,}3257$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки значення косинуса за умовою від'ємне, то $\arccos(-0{,}3257)$ вибираємо з проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. За формулою (4), використовуючи таблиці або мікрокалькулятор, маємо:

$$x = \pm 1{,}9044 + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

До розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь безпосередньо зводять розв'язування тригонометричних рівнянь виду $\sin(kx + \varphi) = a$, $\cos(kx + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(kx + \varphi) = a$. Формули

(3) — (5) застосовують для знаходження виразу $(kx + \varphi)$, а після цього знаходять x із знайденого рівняння.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (3), $2x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, $2x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. За формулою (4), $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $\frac{2}{3}x = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2n\pi$; $x = \pm\pi + \frac{\pi}{4} + 3n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яке рівняння називають тригонометричним?
2. Яка особливість розв'язків тригонометричних рівнянь?
3. Вивести формули розв'язків рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

ВПРАВИ

57. Розв'язати рівняння:
1) $\sin x = 0$; 2) $\cos x = -0{,}4827$; 3) $\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\operatorname{tg} x = -0{,}5$;
5) $\cos x = 0$; 6) $\sin 2x = -1$; 7) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
8) $\sin\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) + 1 = 0$; 9) $\cos x = \frac{1}{2}$; 10) $2\cos 3x - 1 = 0$;
11) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 12) $3\operatorname{tg}(x + 1) - \sqrt{3} = 0$; 13) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
14) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1 = 0$; 15) $\operatorname{tg} x = -0{,}6009$;
16) $3\operatorname{tg}^2 2x - 1 = 0$; 17) $\sin x = 0{,}2753$; 18) $2\sin^2 3x - 3 = 0$.

§ 13. Деякі способи розв'язування тригонометричних рівнянь, які відрізняються від найпростіших

Розглянемо окремо способи розв'язування деяких тригонометричних рівнянь на прикладі одного рівняння і спробуємо обґрунтувати доцільність використання кожного з них.

Розв'яжемо рівняння

$$\sin x - \cos x = 0. \qquad (1)$$

1. Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції (алгебраїчний спосіб). Цим способом розв'язують рівняння, до складу яких входять різні тригонометричні функції одного і того самого аргументу. Використовуючи основні тригонометричні тотожності, усі функції рівняння виражають через одну функцію, а потім розв'язують алгебраїчне рівняння відносно цієї функції.

Отже, перенесемо $\cos x$ у праву частину рівняння і виразимо його через $\sin x$ за формулою $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$. Дістанемо рівняння

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}. \qquad (2)$$

Піднесемо обидві частини рівняння (2) до квадрата. Дістанемо $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, або $2\sin^2 x = 1$, звідси $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Добудемо квадратний корінь з обох частин рівняння, використовуючи тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$. Маємо $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Розв'яжемо два найпростіші тригонометричні рівняння:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$$

$$\text{або } x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + n\pi,$$

$$\text{або } x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + n\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Оскільки ми виконували піднесення обох частин рівняння (2) до квадрата, то можливі порушення рівносильності, тобто рівняння $\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$, а отже, і $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ можуть мати сторонні розв'язки.

Щоб відкинути сторонні розв'язки, зробимо перевірку на відрізку завдовжки 2π, зокрема на $[0;\ 2\pi]$, враховуючи, що найменшим додатним періодом синуса і косинуса є число 2π. Для цього зручно використати одиничне коло.

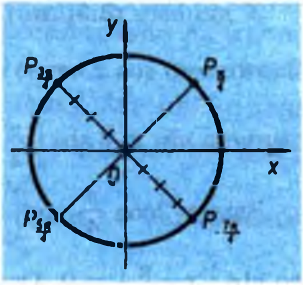
Позначимо на одиничному колі всі точки, які відповідають числам, що містяться у знайдених серіях розв'язків (мал. 71).

$$x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ і}$$

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Перша формула, якщо $k = 0, \pm 1, \pm 2$, дає точки $P_{\frac{\pi}{4}}$, $P_{\frac{3\pi}{4}}$.

Друга формула, якщо $k = 0, \pm 1, \pm 2$, дає точки $P_{\frac{7\pi}{4}}$, $P_{\frac{5\pi}{4}}$.



Мал. 71

Підставимо кожне із знайдених чисел у дане рівняння:

якщо $x = \frac{\pi}{4}$, то $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, $0 = 0$;

якщо $x = \frac{3\pi}{4}$, то $\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \neq 0$;

якщо $x = \frac{7\pi}{4}$, то $\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \neq 0$;

якщо $x = \frac{5\pi}{4}$, то $\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, $0 = 0$.

Отже, дане рівняння задовольняють лише розв'язки з двох множин:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z} \text{ і } x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Їх можна записати однією формулою, якщо перетворити другу формулу таким чином:

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + \pi + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi.$$

У першій серії до $\frac{\pi}{4}$ додають число $2n\pi$, а у другій — $(2n + 1)\pi$. Парні і непарні числа утворюють множину цілих чисел. Тому об'єднана формула розв'язків матиме вигляд:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Способом зведення до однієї функції можна розв'язувати, наприклад, такі рівняння:

$$6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0,\ \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3,$$
$$\cos^2 x + 2\sin^2 x - \cos x = 0 \text{ та ін.}$$

2. Спосіб розкладання на множники. Під час розв'язування тригонометричних рівнянь цим способом усі члени рівняння переносять у ліву частину і подають утворений вираз у вигляді добутку. Далі використовують необхідну і достатню умови рівності нулю добутку тригонометричних виразів: добуток двох або кількох співмножників дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли принаймні один зі співмножників дорівнює нулю, а інші при цьому не втрачають смислу.

У даному рівнянні (1) всі члени містяться у лівій частині. Запишемо $\cos x$ через $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ і застосуємо формулу різниці синусів $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0$; $2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2} = 0$.

Звідси $2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Оскільки $2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, то $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Отже, $x-\frac{\pi}{4} = k\pi$, а $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Дістали ту саму множину розв'язків, що й під час розв'язування першим способом, але коротшим шляхом. Крім того, під час розв'язування не було порушення рівносильності рівнянь, тому в перевірці немає потреби.

3. Спосіб розв'язування однорідних рівнянь. Цей спосіб застосовують під час розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь, тобто таких, у яких ліва частина є многочленом, у кожному члені якого сума показників степенів синуса і косинуса одного і того самого аргументу однакова, а права — нуль. У загальному випадку однорідне тригонометричне рівняння можна записати так:

$$a\sin^n x + b\sin^{n-1} x\cos x + \ldots + m\sin x\cos^{n-1} x + l\cos^n x = 0,\ a \neq 0.$$

Однорідне рівняння n-го степеня відносно синуса і косинуса розв'язують діленням обох частин на $\cos^n x$. Проте попередньо слід довести, що $\cos x \neq 0$. Використаємо для цього метод доведення від супротивного. Припустимо, що $\cos x = 0$. Тоді, підставляючи у дане рівняння замість $\cos x$ число 0, дістанемо $a\sin^n x = 0$, звідки $\sin x = 0$. А це суперечить властивостям синуса і косинуса одного і того самого аргументу, оскільки якщо $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$. Поділивши на $\cos^n x \neq 0$ обидві частини однорідного рівняння, дістанемо алгебраїчне відносно функції тангенса рівняння $a\,\mathrm{tg}^n x + b\,\mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + m\,\mathrm{tg}\, x + l = 0$.

Дане рівняння $\sin x - \cos x = 0$ однорідне. Доведемо, що $\cos x \neq 0$. Це так, бо якщо $\cos x = 0$, то мала б виконуватися рівність $\sin x = 0$, а це неможливо для одного і того самого аргументу.

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos x \neq 0$. Дістанемо $\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$, або $\mathrm{tg}\, x = 1$, звідси $x = \mathrm{arctg}\, 1 + k\pi$, або $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Не слід думати, що під час розв'язування однорідних рівнянь завжди можна ділити на $\cos^n x$. Наприклад, якщо у рівнянні $a\cos^2 x + b\sin x\cos x = 0$ поділити обидві частини на $\cos^2 x$, то можна загубити серію розв'язків $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Причина полягає в тому, що в цьому рівнянні $\cos x$ може дорівнювати нулю, тому його треба розв'язувати способом розкладання на множники $\cos^2 x(a + b \operatorname{tg} x) = 0$ і т. д.

4. Спосіб введення допоміжного аргументу. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x - 1 \cdot \cos x = 0$. Замінимо 1 на $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

Дістанемо $\sin x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cos x = 0$, $\sin x - \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \cos x = 0$. Помножимо обидві частини рівняння на $\cos \frac{\pi}{4} \neq 0$. Дістанемо $\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = 0$, або $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Звідси $x - \frac{\pi}{4} = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Спосіб введення допоміжного аргументу застосовують під час розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь, якими називаються рівняння виду $a\sin x + b\cos x = c$. Рівняння $\sin x - \cos x = 0$ є окремим випадком лінійного.

Розглянемо в загальному випадку розв'язування лінійного тригонометричного рівняння способом введення допоміжного аргументу. Винесемо за дужки з лівої частини рівняння $\sqrt{a^2 + b^2}$. Дістанемо

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x\right) = c.$$

Очевидно, що $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ і $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$. Крім того, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Це означає, що коли $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, матимемо $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

Підставимо у попереднє рівняння ці вирази. Дістанемо:

$\sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x) = c$, або

$\sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \varphi) = c$, $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

За умови, що $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ або $c^2 \le a^2 + b^2$, останнє тригонометричне рівняння має розв'язок:

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + k\pi,$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + k\pi,$$

де $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, оскільки $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Отже, перед розв'язуванням лінійного тригонометричного рівняння треба перевірити, чи виконується умова $c^2 \le a^2 + b^2$. Зафіксуємо знайдену формулу при розв'язуванні даного рівняння:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin(x + \varphi). \qquad (3)$$

Будемо користуватися нею під час розв'язування інших задач, пов'язаних з тригонометричними функціями.

Застосовуючи цей загальний спосіб розв'язування, зокрема формулу (3), до рівняння $\sin x - \cos x = 0$, дістанемо $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = = 0$, бо $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Звідси $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Лінійне тригонометричне рівняння можна розв'язати ще кількома способами. Зокрема, можна звести його до однорідного, ввівши заміну $1 = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$ як множник c і замінивши $\sin x$ та $\cos x$ за формулами подвійного аргументу: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$.

Можна також замінити $\sin x$ і $\cos x$ на тангенс половинного кута за формулами

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

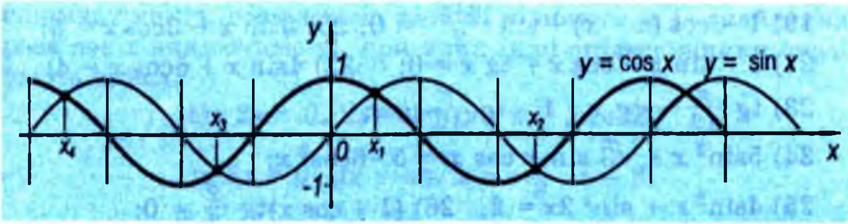
5. Спосіб піднесення до квадрата. Рівняння (1) можна розв'язати способом піднесення обох частин до квадрата. Отже,

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0,\ \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$1 - \sin 2x = 0,\ \sin 2x = 1,\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

У цьому разі піднесення до квадрата не спричиняє появу сторонніх розв'язків.

6. Графічний спосіб. Запишемо дане рівняння у вигляді $\sin x = \cos x$ і введемо функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Побудувавши в одній системі координат графіки цих функцій, знайдемо розв'язки рівняння як абсциси точок перетину графіків (мал. 72).



Мал. 72

Порівнюючи розглянуті способи розв'язування рівняння $\sin x - \cos x = 0$, неважко дійти висновку, що найменш раціональним є перший (алгебраїчний) спосіб, який призводить до появи сторонніх розв'язків і потребує перевірки.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Назвати способи розв'язування окремих видів тригонометричних рівнянь.

2. Які тригонометричні рівняння називають однорідними?

3. Як розв'язуються однорідні тригонометричні рівняння?

4. Які тригонометричні рівняння називають лінійними? Коли існують розв'язки таких рівнянь?

5. Як розв'язують лінійні тригонометричні рівняння?

ВПРАВИ

58. Розв'язати рівняння:

А

1) $\cos x + \sin x = 0$;
2) $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$;
3) $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$;
4) $\cos 2x = 2\sin^2 x$;
5) $\sin 2x = \cos x \cos 2x$;
6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
7) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
8) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$;
9) $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$;
10) $\sin^2 x - \sqrt{3} \cos x \sin x = 0$;
11) $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$;
12) $8\sin x - 7\cos x = 0$;
13) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
14) $2\cos x + 3 = 4\cos \frac{x}{2}$;

Б

15) $3\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$;
16) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;
17) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$;
18) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$;

19) $1 - \cos(\pi - x) + \sin\frac{\pi+x}{2} = 0$; 20) $3\sin x - 3\cos x = 5$;
21) $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$; 22) $4\sin x + 5\cos x = 4$;
23) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg} x$;
24) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 5 - 6\cos^2 x$;
25) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$; 26) $(1 + \cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$;
27) $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$;
28) $9\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 7$;
29) $12\cos x - 5\sin x = -13$;
30) $\sin^3\frac{x}{2} + 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 4\cos^3\frac{x}{2} = 0$;

В

31) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = 0$;
32) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$;
33) $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x - 2\operatorname{tg} 2x = 0$;
34) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2}\sin 2x$;
35) $1 + \cos 10x\cos 6x = 2\cos^2 8x + \sin^2 8x$;
36) $\sin 2x - 3\cos 2x = 3$;
37) $\sin^4 x + \cos^4 x - \sin x\cos x = 0$;
38) $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1$; 39) $\sqrt{\sin^2 x - 1} + \sqrt{1 - \sin^2 x} = 0$;
40) $\frac{1}{\cos x} = \cos x + \sin x$; 41) $2\sin^3 x = \cos x$;
42) $\sin x + \cos x = 1 - \sin 2x$; 43) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$;
44) $\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}\right)$.

§ 14. Приклади розв'язувань деяких інших видів тригонометричних рівнянь, систем рівнянь

Розглянемо приклад рівняння, розв'язування якого вимагає виключення сторонніх розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sin 2x\operatorname{tg} 3x\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Прирівнявши до нуля кожен із співмножників, розв'яжемо здобуті рівняння, а із знайдених розв'язків виключимо ті, при яких інші співмножники втрачають смисл:

$$\sin 2x = 0,\ 2x = k\pi,\ x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\operatorname{tg} 3x = 0,\ 3x = n\pi,\ x = n\frac{\pi}{3},\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right) = 0,\ \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3} = m\pi,$$

$$-x + \frac{5\pi}{6} = m\pi,\ \ x = \frac{5\pi}{6} + p\pi,\ p \in \boldsymbol{Z},\ \ p = -m.$$

Оскільки синус існує для будь-яких аргументів, то із знайдених розв'язків слід виключити ті, при яких не існують $\operatorname{tg} 3x$ і $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Для цього розкладемо формули, за допомогою яких записано розв'язки кожного з трьох рівнянь, на елементарні (елементарними називають формули розв'язків виду $x = \alpha + 2n\pi$, де $0 \le \alpha \le 2\pi$) і зобразимо їх на одиничному колі (мал. 73). Це можна зробити, оскільки період 2π є спільним для всіх трьох співмножників.

Перевірка показала, що із 10 елементарних формул розв'язків, зображених на малюнку, шість виявилися сторонніми для даного рівняння (вони закреслені), оскільки для таких чисел тангенс і котангенс не існують.

Отже, розв'язки рівняння запишемо у вигляді

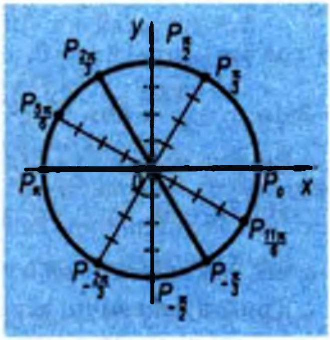
$$x = m\pi,\ x = \frac{2\pi}{3} + m\pi,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Рівняння, що містять тригонометричні функції у знаменнику, як і дробові раціональні рівняння, зводять до виду $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$

Далі використовують необхідну і достатню умови, за яких дріб дорівнює нулю.

Наприклад, у рівнянні $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$ чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}$, але при цих значеннях втрачає смисл знаменник, бо $\operatorname{tg} x$ не існує.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin\frac{x}{2}$.



Мал. 73

Р о з в ' я з а н н я . $\frac{\sin x}{1+\cos x} - \sin\frac{x}{2} = 0,$

$\frac{\sin x - \sin\frac{x}{2}(1+\cos x)}{1+\cos x} = 0, \qquad \sin x - \sin\frac{x}{2}(1+\cos x) = 0,$

$\sin x - 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0, \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0,$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 0, \sin x\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 0.$

Маємо: 1) $\sin x = 0$, $x = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $1 - \cos\frac{x}{2} = 0, \cos\frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = 2n\pi, x = 4n\pi, n \in \boldsymbol{Z}$.

Із множини розв'язків $x = k\pi$ слід виключити ті, при яких знаменник $1 + \cos x$ перетворюється на нуль, тобто коли $\cos x$ дорівнює -1. Відомо, що $\cos x$ дорівнює -1 при всіх непарних k. Отже, треба залишити лише розв'язки $x = 2n\pi$.

Множина розв'язків $x = 4n\pi$ включається в множину $x = 2\pi n$. Розв'язками даного рівняння є $x = 2n\pi$.

Рівняння, до складу яких входять добутки $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, зручно розв'язувати за такими формулами:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$.

Р о з в' я з а н н я.

$\frac{1}{2}(\cos(x-3x) - \cos(x+3x)) + \frac{1}{2}(\cos(4x-8x) - \cos(4x+8x)) = 0,$

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 12x) = 0; \cos 2x - \cos 4x + \cos 4x - \cos 12x = 0, \cos 2x - \cos 12x = 0;$

$-2\sin\frac{2x+12x}{2}\sin\frac{2x-12x}{2} = 0, \sin 7x\sin 5x = 0.$

Звідси маємо два рівняння:

$\sin 7x = 0,\ 7x = k\pi,\ x = k\frac{\pi}{7},\ k \in \boldsymbol{Z};$

$\sin 5x = 0,\ 5x = n\pi,\ x = n\frac{\pi}{5},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Тригонометричні рівняння, до складу яких входять алгебраїчні суми виду $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$, $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \ldots + \operatorname{tg} nx$ або інші аналогічні комбінації аргументів, часто розв'язують, групуючи члени і застосовуючи формули додавання тригонометричних функцій. Але робити це слід так, щоб після перетворення на добуток кожної пари доданків з'являвся спільний множник. Потім рівняння розв'язують, розкладаючи його на множники.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Згрупуємо члени так: $(\sin x + \sin 5x) + (\sin 8x - \sin 2x) = 0$. Застосуємо формули суми і різниці синусів і використаємо властивість парності косинуса:

$$2\sin 3x \cos 2x + 2\cos 5x \sin 3x = 0,\ 2\sin 3x \cdot (\cos 2x + \cos 5x) = 0.$$

Ще раз перетворимо на добуток суму косинусів:

$$2\sin 3x \cdot 2\cos \frac{7}{2}x \cdot \cos \frac{3}{2}x = 0.$$

Звідси дістанемо три рівняння:

$$\sin 3x = 0,\ 3x = k\pi,\ x = k \cdot \frac{\pi}{3},\ \ k \in Z;$$

$$\cos \frac{7}{2}x = 0,\ \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ x = \frac{\pi}{7} + 2n\frac{\pi}{7} = (2n+1)\frac{\pi}{7},\ n \in Z;$$

$$\cos \frac{3}{2}x = 0,\ \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + m\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + 2m\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(2m+1),$$

$$m \in Z.$$

Остання множина розв'язків входить до множини $x = \frac{k}{3}\pi$. Отже, розв'язками даного рівняння є числа $x = k\frac{\pi}{3}$, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{7}(2n+1)$, $n \in Z$.

Тригонометричні рівняння, до складу яких входять парні степені функцій $\sin x$ і $\cos x$, доцільно розв'язувати, знижуючи степінь функції за формулами

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

Р о з в' я з а н н я. Зробимо заміни $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ і дістанемо рівняння $6 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + 2(1-\cos^2 2x) = 5$, або $3 - 3\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x - 5 = 0$. Звідси $2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0$. Маємо квадратне рівняння відносно $\cos 2x$. Розв'язуючи його способом розкладання на множники, дістанемо $\cos 2x\,(2\cos 2x + 3) = 0$. Звідси $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$; $2\cos 2x + 3 = 0$, $2\cos 2x = -3$,

$\cos 2x = -\frac{3}{2}$ не має розв'язків, оскільки $|\cos 2x| \leq 1$.

Отже, розв'язками даного рівняння є числа $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$. Це рівняння можна розв'язати інакше, замінивши $\sin^2 2x$ на $4\sin^2 x \cos^2 x$, а $\cos^2 x$ — на $1 - \sin^2 x$. Після цього дістанемо квадратне рівняння відносно $\sin x$. Та цей спосіб громіздкіший.

Під час розв'язування тригонометричних рівнянь треба пам'ятати про можливі випадки порушення рівносильності рівняння, тобто про втрату і появу сторонніх розв'язків. Зокрема, при піднесенні до квадрата обох частин рівняння можуть з'явитися сторонні розв'язки. Під час розв'язування однорідних рівнянь необґрунтоване ділення на $\cos^n x$ може призвести до втрати розв'язків. Виникають сторонні розв'язки під час розв'язування рівняння, що містять добутки і дроби у лівій частині і нуль — у правій.

Наведемо ще два приклади втрати розв'язків.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sin x - \sqrt{7}\cos x = \sqrt{7}$.

Р о з в' я з а н н я. Це лінійне рівняння. Використаємо підстановки $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. Дістанемо $\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \sqrt{7}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \sqrt{7}$. Оскільки $1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \neq 0$, то $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{7}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \sqrt{7}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$. Звідси $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{7}$, $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{7} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Неважко перевірити, що дане рівняння задовольняють і числа $x = (2n + 1)\pi$. Втрата розв'язків сталася внаслідок застосування підстановки і переходу до алгебраїчного рівняння відносно тангенса. Його не задовольняють числа, при яких $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не існує, тобто числа $\frac{x}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, або $x = (2n + 1)\pi$. Але ці числа задовольняють задане рівняння. Тому, використовуючи підстановку, яка виражає синус і косинус через тангенс половинного кута, необхідно перевіряти числа $x = (2n + 1)\pi$. Якщо вони задовольняють дане рівняння, то їх слід приєднати до знайдених розв'язків. Остаточно запишемо розв'язок у вигляді $x = 2\operatorname{arctg}\sqrt{7} + 2k\pi$, $k \in Z$, $x = (2n + 1)\pi$, $n \in Z$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg} x$.

Р о з в' я з а н н я. Застосуємо формули

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Дістанемо:

$$\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}+\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{2}{\operatorname{tg}x},$$

$$\frac{\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x+1)^2+(\operatorname{tg}x-1)(1-\operatorname{tg}x)-2(1-\operatorname{tg}^2x)}{(1-\operatorname{tg}^2x)\operatorname{tg}x}=0.$$

Після спрощення маємо:

$$\frac{3\operatorname{tg}^2x-1}{(1-\operatorname{tg}^2x)\operatorname{tg}x}=0,\ 3\operatorname{tg}^2x-1=0,\ \operatorname{tg}^2x=\frac{1}{3},\ \ \operatorname{tg}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

При цих значеннях x не втрачає смислу і не перетворюється на нуль знаменник дробу. Проте неважко перевірити, що дане рівняння задовольняють також числа виду $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Втрата цих розв'язків сталася внаслідок застосування теореми додавання для функції тангенс. Формули тангенса суми і різниці двох чисел α і β виконуються лише за умови, що мають смисл вирази $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Якщо $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{tg}x$ не має смислу, тому ці розв'язки було втрачено. Якщо дане рівняння розв'язати за формулою суми тангенсів двох чисел, то вказані розв'язки не будуть втрачені.

У результаті розв'язування одного і того самого тригонометричного рівняння різними способами можна дістати різні загальні формули розв'язків рівняння. Їх еквівалентність можна довести, перетворивши формули та об'єднавши кілька формул в одну. Можна також довести рівність знайдених множин розв'язків, записавши в розгорнутому вигляді прогресії, n-м членом яких є формула розв'язку тригонометричного рівняння. Проте обидва ці способи громіздкі. Доцільно записати дане тригонометричне рівняння у вигляді $f(x)=0$, знайти найменший додатний період l функції $y=f(x)$ і показати, що на проміжку $[0;\ l]$ кожна з одержаних формул дає одну і ту саму множину розв'язків. Зручним виявляється також геометричний спосіб доведення рівності множин розв'язків за допомогою одиничного кола. Якщо різні формули на одиничному колі дають однакові множини точок, що зображують окремі розв'язки рівняння, то ці множини рівні. Проте така геометрична інтерпретація можлива лише тоді, коли періодом функції, що входить до лівої частини рівняння $f(x)=0$ (не обов'язково найменшим додатним), є число 2π.

Щодо системи тригонометричних рівнянь, то обмежимося розглядом прикладів розв'язування системи двох тригонометричних рівнянь з двома невідомими. Розв'язати таку систему, як і систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими, означає знайти всі пари значень невідомих, які перетворюють обидва рівняння системи на правильні числові рівності.

Під час розв'язування системи двох тригонометричних рівнянь з двома невідомими намагаються або відразу виключити одне з невідомих, виразивши його через друге з якого-небудь рівняння системи, або вдалим введенням нових невідомих чи перетворенням рівнянь системи звести дану тригонометричну систему до системи алгебраїчних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 2\sin x \sin y, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо y з другого рівняння, підставимо його в перше рівняння і перетворимо знайдене рівняння:

$$y = \frac{\pi}{2} - x;\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) =$$

$$= 2\sin x \cos x;\ -\cos 2x = \sin 2x;\ \operatorname{tg} 2x = -1;\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Знайдемо y: $y = \frac{5\pi}{8} - \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, $y = \frac{5\pi}{8} - \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо друге рівняння:

$$1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\cos^2 y = 1,\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}.$$

Задану систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для спрощення введемо нові невідомі: $u = \sin x$, $\upsilon = \cos y$

Маємо систему:

$$\begin{cases} u + \upsilon = 1, \\ u^2 + \upsilon^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи. Він єдиний: $u = \frac{1}{2}$; $\upsilon = \frac{1}{2}$.

Отже, дана система рівносильна такій: $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Рівняння останньої системи мають відповідно розв'язки:

$x = (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + m\pi,\ m \in \boldsymbol{Z},\ \ y = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$

Відповідь: $x = (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + m\pi, m \in \boldsymbol{Z},\ y = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Приклад 3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$, то дана система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$$

Перемноживши почленно рівняння цієї системи, дістанемо рівняння з одним невідомим: $1 = 8\cos^3 y \sin^3 y$. Звідси:

$\sin^3 2y = = 1$, $\sin 2y = 1$, $2y = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y = \dfrac{\pi}{4} + n\pi, n \in \boldsymbol{Z}.$

Знайдене значення y підставимо в останню систему, врахувавши при цьому, що $\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos\alpha$, $\sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin\alpha$ (доведіть ці формули самостійно). Дістанемо:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = (-1)^n, \\ \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = (-1)^n. \end{cases}$$

При $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, дістанемо $y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, а остання система рівносильна одному рівнянню $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 1$, звідси $x = l\pi$, $l \in \boldsymbol{Z}$. При $n = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$, остання система рівносильна одному рівнянню $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = -1$. Звідси $x = -\dfrac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $x_1 = l\pi$, $y_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + l\pi$, $y_2 = \dfrac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$, $l, k \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як розв'язуються тригонометричні рівняння виду

$$f(x)\cdot\varphi(x)\cdot\ldots\cdot\psi(x)=0,\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}=0\,?$$

2. Коли під час розв'язування тригонометричних рівнянь може порушитися рівносильність?

3. Як розв'язуються рівняння, до складу яких входять добутки $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$ і $\cos\alpha\cos\beta$?

4. Як розв'язуються рівняння, до складу яких входять алгебраїчні суми виду $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$, $\cos x+$ $+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$, $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x+\ldots+\operatorname{tg}nx$ або інші аналогічні комбінації доданків?

5. Як понижуються степені функцій, що входять до складу тригонометричних рівнянь?

6. Як розв'язуються системи двох тригонометричних рівнянь з двома невідомими?

ВПРАВИ

59. Розв'язати рівняння:

А

1) $\cos 2x=\cos 6x$; 2) $\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}=0$; 3) $\sin\dfrac{x}{2}+\cos x=1$;

4) $1+\sin x\sin 2x=\cos x\cos 2x$; 5) $\operatorname{tg}x+5\operatorname{ctg}x=6$;

6) $\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=1$; 7) $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$;

8) $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$; 9) $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$;

Б

10) $1-\cos x=\sin x\sin\dfrac{x}{2}$;

11) $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$;

12) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sin^2 x=0$;

13) $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x=1$;

14) $\sin 2x\operatorname{tg}3x\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$; 15) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}3x$;

16) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=0$; 17) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{5}{8}$;

18) $\cos^3 x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x$;

В

19) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$;

20) $\dfrac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=0$;

21) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$;

22) $\dfrac{\sin 2x}{\sin\frac{2x+\pi}{3}}=0$;

23) $\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$;

24) $\mathrm{ctg}^4 z=\mathrm{ctg}^3 2z+1$;

25) $\sin x\sin 5x\sin 9x=1$;

26) $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

60. Розв'язати систему рівнянь:

А

1) $\begin{cases} x+y=\dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x=1+\cos y, \\ \sqrt{2}\sin x=\sin y; \end{cases}$

Б

3) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{1}{2}, \\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

В

5) $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x+\mathrm{ctg}\, y=3, \\ |x-y|=\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$

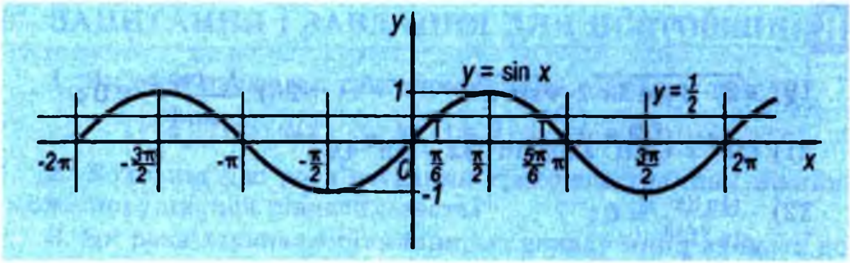
§ 15. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

Розв'язування будь-яких тригонометричних нерівностей, як правило, зводиться до розв'язування найпростіших нерівностей:

$\sin x\ge a$ або $\sin x\le a$; $\cos x\ge a$ або $\cos x\le a$;

$\mathrm{tg}\, x\ge a$ або $\mathrm{tg}\, x\le a$; $\mathrm{ctg}\, x\ge a$ або $\mathrm{ctg}\, x\le a$.

Як і найпростіші тригонометричні рівняння, нерівності природно розв'язувати графічним способом. Розглянемо приклади.



Мал. 74

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

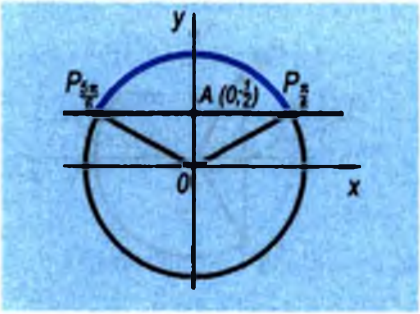
Р о з в' я з а н н я. Позначимо функції, які стоять у лівій і правій частинах, через $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$ та побудуємо схематично їх графіки (мал. 74). Розв'язками нерівності будуть абсциси всіх точок графіка синусоїди, які розміщені вище від прямої $y = \frac{1}{2}$. Враховуючи періодичність функції синус, досить знайти розв'язки на будь-якому відрізку області визначення завдовжки 2π і додати до знайдених чисел період $2n\pi$, $n \in Z$. Виберемо, наприклад, проміжок $[0; 2\pi]$. З малюнка випливає, що множиною значень x з відрізка $[0; 2\pi]$, для яких відповідні точки графіка синусоїди розміщені вище від точок прямої $y = \frac{1}{2}$, буде $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Додавши до цих чисел період $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків даної нерівності $\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

Графічний спосіб є досить наочним, але незручність полягає в тому, що кожного разу (хоч і схематично) треба будувати графіки тригонометричних функцій.

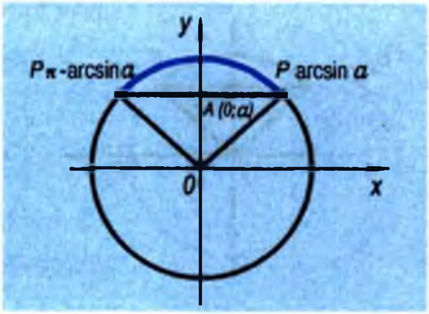
Дещо зручнішим є спосіб розв'язування простіших тригонометричних нерівностей за допомогою одиничного кола. Для даної нерівності розв'язування цим способом проводять аналогічно розв'язуванню найпростішого тригонометричного рівняння.

Побудуємо одиничне коло (мал. 75). Відкладемо на осі Oy ординату $\frac{1}{2}$ і через кінець відрізка проведемо пряму, паралельну осі Ox.

Розв'язування даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок, у яких ординати більші за $\frac{1}{2}$. Ці точки відповідають шуканим числам α, що є розв'язками даної тригонометричної нерівності. З малюнка видно, що таки-



Мал. 75



Мал. 76

ми точками є точки дуги кола, які розміщені над прямою $y = \frac{1}{2}$ і відповідають числам множини $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$, довжина якого дорівнює періоду 2π.

Додаючи до цих чисел період функції $2n\pi$, дістанемо множину всіх розв'язків нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розглядаючи розв'язування нерівності виду $\sin x > a$ у загальному випадку, необхідно накласти обмеження на число a. Якщо $a \geq 1$, то нерівність $\sin x > a$ розв'язків не має, бо при будь-якому x завжди $|\sin x| \leq 1$. Якщо ж $a < -1$, то нерівність $\sin x > a$ справджується при будь-якому x, тобто множиною розв'язків такої нерівності є множина R.

У загальному випадку нерівність $\sin x > a$, де $-1 \leq a \leq 1$, розв'язують аналогічно (мал. 76). Точки $P_{\arcsin a}$ і $P_{\pi - \arcsin a}$ зображують числа $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$. Розв'язками нерівності на відрізку $[-\pi; \pi]$ є множина $(\arcsin a; \pi - \arcsin a)$, а множиною всіх розв'язків будуть проміжки

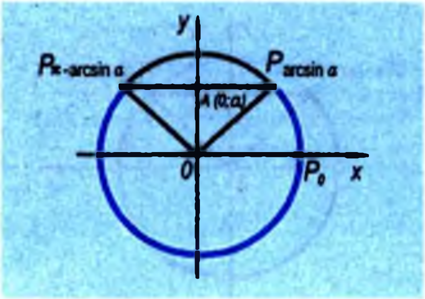
$$\arcsin a + 2n\pi < x < \pi - \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z.$$

Аналогічно розв'язують нерівність $\sin x < a$. На малюнку 77 показано дугу, що відповідає розв'язкам цієї нерівності.

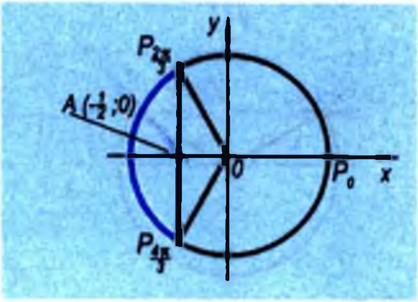
Приклад 2. Розв'язати нерівність $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо спочатку розв'язки на відрізку $[-\pi, \pi]$. Розв'язування даної нерівності зводиться до знаходження на одиничному колі всіх точок P_α, що мають абсциси, які менші або дорівнюють $-\frac{1}{2}$ (мал. 78). Усі ці точки відповідають на одиничному колі числам α, які є розв'язками даної нерівності.

Відкладемо на осі Ox відрізок OA, що відповідає абсцисі



Мал. 77



Мал. 78

$-\frac{1}{2}$, і проведемо через його кінець A пряму, паралельну осі Oy.

Шукані точки одиничного кола лежать лівіше від прямої $x = -\frac{1}{2}$ або на самій прямій і належать дузі $P_{\frac{2\pi}{3}}\ P_{\frac{4\pi}{3}}$. Отже, множиною розв'язків нерівності, що належить відрізку $[-\pi; \pi]$, є $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$. Додаючи до цих чисел період косинуса, дістанемо всі розв'язки нерівності: $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Р о з в' я з а н н я. Враховуючи періодичність тангенса, знайдемо розв'язки даної нерівності спочатку на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо α — розв'язок даної нерівності, то ордината точки T_α лінії тангенса (мал. 79), що дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$, має бути менша за $\sqrt{3}$. Усі такі точки лежать на дотичній P_0T_α нижче від точки $T_{\frac{\pi}{3}}$. Відповідні точки P_α одиничного кола належать дузі, позначеній на малюнку 79. Ці точки відповідають числам α, що належать проміжку $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

Додаючи до знайдених чисел період тангенса, дістанемо всі розв'язки даної нерівності $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$.

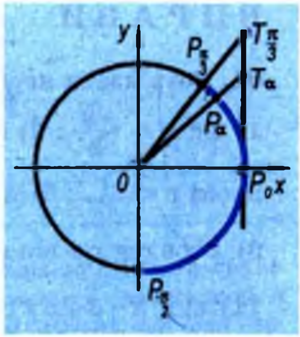
Складніші тригонометричні нерівності розв'язують способами, що аналогічні способам розв'язування тригонометричних рівнянь такого самого виду.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $2\cos^2 x - \sin x > 1$.

Р о з в' я з а н н я. Введемо нову невідому $t = \sin x$, де $|t| \le 1$. Тоді $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$, і нерівність набуває вигляду: $2(1 - t^2) - t > 1$, або $2t^2 + t - 1 < 0$. Звідси: $-1 < t < \frac{1}{2}$, що не суперечить умові $|t| \le 1$. Потім розв'язуємо систему нерівностей $-1 < \sin x < \frac{1}{2}$. Дістанемо:

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ і}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ де } k \in Z.$$



Мал. 79

Приклад 5. Розв'язати нерівність $4\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 3\cos^2 x > 2$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо $4\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 3\cos^2 x > 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Звідси $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x > 0$.

Обидві частини останньої нерівності не можна ділити на $\cos^2 x$, оскільки при значеннях x, які є її розв'язками, $\cos x$ може дорівнювати нулю. Її слід розв'язувати так.

Очевидно, що $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, є розв'язками розглядуваної нерівності. Щоб знайти решту розв'язків при $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, $\cos x \ne 0$ і $\cos^2 x > 0$, поділимо на $\cos^2 x$ обидві частини останньої нерівності. Дістанемо нерівність $2\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}\, x + 1 > 0$. Звідси: $\mathrm{tg}\, x < \frac{1}{2}$ і $\mathrm{tg}\, x > 1$. Отже, $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + k\pi$ і $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

Крім знайдених розв'язків, нерівність має ще знайдений вище розв'язок $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як розв'язати нерівності виду $\sin x \ge a$, $\sin x \le a$ за допомогою одиничного кола?

2. Як розв'язати нерівності виду $\cos x \ge a$, $\cos x \le a$ за допомогою одиничного кола?

3. Як розв'язати нерівності виду $\mathrm{tg}\, x \ge a$, $\mathrm{tg}\, x \le a$ за допомогою одиничного кола?

4. Як розв'язуються окремі види нерівностей, відмінних від найпростіших?

ВПРАВИ

61. Розв'язати нерівність:

1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x > -1$; 3) $\sin x > 2$; 4) $\operatorname{tg} x \le 2$;

5) $\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 6) $|\sin x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\cos^2 x < \frac{1}{4}$;

9) $2\cos x \operatorname{tg} x > \sin x - 1$; 10) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$;

11) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x < 0$;

12) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x > 0$.

РОЗДІЛ 3

СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Основоположне поняття математичного аналізу — це поняття функціональної залежності, в якому, як у зародку, вже закладена вся ідея оволодіння явищами природи і процесами техніки за допомогою математичного апарату.

О. Я. Хінчин

§ 16. Корінь *n*-го степеня та його властивості

1. Поняття кореня *n*-го степеня. В курсі алгебри 8-го класу було введено поняття квадратного кореня.

Квадратним коренем з числа *a* називають число, квадрат якого дорівнює *a*.

Наприклад, числа 3 і −3 — квадратні корені з 9, бо $3^2 = 9$ і $(-3)^2 = 9$; $\frac{2}{5}$ і $-\frac{2}{5}$ —квадратні корені з $\frac{4}{25}$, бо $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ і $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Квадратний корінь з 0 дорівнює 0, бо $0^2 = 0$. Цей корінь з 0 єдиний. Квадратний корінь з −25 не існує, бо немає такого числа, квадрат якого дорівнював би −25.

Отже, квадратних коренів з додатного числа існує два: один додатний, а другий від'ємний.

Додатний квадратний корінь з додатного числа *a* називають арифметичним квадратним коренем ~~і позначають~~ $\sqrt{a}$

Знак $\sqrt{\ }$ називають **знаком арифметичного кореня**; вираз, що стоїть під знаком кореня, називається **підкореневим виразом**.

Додатні числа разом з числом нуль називають невід'ємними числами. Надалі поняття арифметичного квадратного кореня будемо вживати для невід'ємних чисел.

Арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа a є невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

З цього означення випливає, що коли $a < 0$, вираз $\sqrt{a}$ не має смислу (наприклад, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-49}$, $\sqrt{-1{,}44}$).

Використовуючи введене позначення, запишемо корені рівняння $x^2 = 81$, $x_1 = \sqrt{81}$, $x_2 = -\sqrt{81}$.

Якщо треба добути квадратний корінь з алгебраїчної суми, то не можна добувати його з кожного доданка окремо.

Наприклад, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, але $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Отже, дія добування кореня відносно додавання (і віднімання) не має розподільної властивості. Те саме можна сказати і про дію піднесення до степеня.

Ми нагадали найважливіші відомості про квадратний корінь, або корінь другого степеня.

Розглянемо корінь будь-якого степеня. Рівність $5^3 = 125$ можна прочитати так: число 5 є кубічним коренем (коренем третього степеня) зі 125.

Аналогічно з рівності $(-4)^3 = -64$ випливає, що число -4 є кубічним коренем з -64, а з рівності $(-3)^4 = 81$ — число -3 є коренем четвертого степеня з 81.

Добування кореня — це операція, обернена до операції піднесення до степеня.

Коренем n-го степеня з числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a (n — натуральне число).

Нехай n — непарне число. Корінь непарного степеня із числа завжди існує і до того ж тільки один: якщо $a > 0$, цей корінь — додатне число, якщо $a = 0$, він дорівнює нулю, а коли $a < 0$, корінь — від'ємне число. Для його позначення прийнято знак $\sqrt[n]{a}$ (читається «корінь n-го степеня з a»).

Знак операції добування кореня $\sqrt[n]{\ }$, а також результат цієї операції (наприклад, $\sqrt[5]{a}$) називають ще радикалом (лат. *radix* — корінь).

Число n називають **показником кореня**, число a — **підкореневим виразом**.

Нехай n — парне число. Якщо $a > 0$, то існують два протилежні числа, які є коренями n-го степеня з a.

Додатний корінь n-го степеня з a позначають у цьому разі знаком $\sqrt[n]{a}$, а протилежне йому число — через $-\sqrt[n]{a}$. Якщо $a = 0$, то існує єдиний корінь n-го степеня з a: $\sqrt[n]{0} = 0$, бо $0^n = 0$. Якщо $a < 0$, то корінь n-го степеня з a не існує. Інакше кажучи, вираз $\sqrt[n]{a}$, де n — парне і $a < 0$ не має смислу.

Отже, якщо n — непарне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має смисл при будь-якому a; якщо n — парне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має смисл лише коли $a \geq 0$.

Очевидно, що при всіх значеннях a, для яких вираз $\sqrt[n]{a}$ має смисл, справджується рівність $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Якщо $a \geq 0$, то вираз $\sqrt[n]{a}$ завжди (як при парному, так і при непарному n) має смисл.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичний корінь того самого степеня з протилежного (додатного) числа. Так, $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125}$.

Взагалі, якщо $a < 0$ і k — натуральне число, то
$\sqrt[2k-1]{-a} = -\sqrt[2k-1]{a}$.

Справді, $\left(\sqrt[2k-1]{a}\right)^{2k-1} = a$; $\left(-\sqrt[2k-1]{-a}\right)^{2k-1} = -(-a) = a$.

Відомо, що для квадратного кореня справджується тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$. Аналогічно для кореня n-го степеня з парними показниками має місце тотожність $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Надалі користуватимемося арифметичними коренями.

Найменший з натуральних показників кореня, які розглядають, дорівнює 2, його не пишуть.

2. Властивості коренів. За означенням кореня n-го степеня можна довести такі твердження.

1) Для будь-яких невід'ємних чисел a і b та будь-якого натурального числа n правильна рівність:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}\ . \qquad (1)$$

Добуток коренів n-го степеня з чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня з їх добутку.

Це твердження можна узагальнити для будь-яких натуральних чисел n і r і невід'ємних чисел a_1, ... a_r:

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_r} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_r}}\ .$$

Наприклад: $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = 2$, бо $2^4 = 16$; $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{243} = 3$, бо $3^5 = 243$.

Для коренів непарного степеня числа a і b можуть бути і від'ємними:

$$\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{-1000} = -10, \text{ бо } (-10)^3 = -1000;$$
$$\sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[7]{4} \cdot \sqrt[7]{16} = \sqrt[7]{128} = 2, \text{ бо } 2^7 = 128.$$

2) Для кожного невід'ємного числа a, кожного додатного числа b і натурального числа n правильна рівність:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \quad . \tag{2}$$

Частка коренів n-го степеня з чисел a і b дорівнює кореню n-го степеня з їх частки.

Наприклад:

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3, \text{ бо } 3^3 = 27;$$

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{128}} = \sqrt[4]{\frac{8}{128}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}, \text{ бо } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16};$$

$$\frac{\sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{243}} = \sqrt[3]{-\frac{9}{243}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}, \text{ бо } \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27};$$

$$\frac{\sqrt[5]{-9}}{\sqrt[5]{-288}} = \sqrt[5]{\frac{-9}{-288}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}, \text{ бо } \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

3) Для кожного цілого числа k, кожного додатного числа a і натурального числа n справджується рівність:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}} \quad . \tag{3}$$

Якщо k — натуральне число, то рівність правильна і для $a = 0$, тобто для будь-якого невід'ємного числа a.

Якщо $k = n$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Приклади.

а) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^4 = \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{81}$; б) $\left(-\sqrt[5]{11}\right)^5 = -\sqrt[5]{11^5} = -11$;

в) $\left(3\sqrt[5]{-3}\right)^5 = 3^5\sqrt[5]{(-3)^5} = 3^5 \cdot (-3) = -3^6 = -729$;

г) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^3 = -\sqrt[4]{7^3} = -\sqrt[4]{343}$.

4) Для будь-яких натуральних чисел m і n та кожного невід'ємного числа a правильна рівність:

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}}\,. \qquad (4)$$

Наприклад: $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot3]{5} = \sqrt[6]{5}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[3\cdot5]{6} = \sqrt[15]{6}$;

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2\cdot2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{\sqrt{1024}} = \sqrt[5\cdot2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2$.

5) Для будь-яких натуральних чисел m, n і p та кожного невід'ємного числа a правильна рівність:

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}}\,. \qquad (5)$$

Наприклад: $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$; $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(5^2)^6} = \sqrt[4]{5^{12}} = 5^3 = 125$,

або $\sqrt[4]{25^6} = \sqrt[4]{(25^3)^2} = \sqrt{25^3} = \sqrt{25^2 \cdot 25} = 125$.

Доведемо для прикладу рівність (1). Позначимо $\sqrt[n]{a} = x$ і $\sqrt[n]{b} = y$, де $x \geq 0$, $y \geq 0$. За означенням кореня n-го степеня, $a = x^n$, $b = y^n$, звідси $ab = x^n y^n = (xy)^n$.

Числа a, b невід'ємні. Отже, і ab — невід'ємне число, а тому існує єдине невід'ємне число, яке є коренем n-го степеня з ab.

Беручи до уваги, що $xy \geq 0$, дістанемо $\sqrt[n]{ab} = xy$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, що й треба було довести.

Пропонуємо самостійно довести цим самим способом рівності (2)—(5).

Зазначимо, що для виконання обчислень важливо вміти читати деякі з наведених вище рівностей справа наліво.

Щоб добути корінь n-го степеня з добутку невід'ємних чисел, слід добути корінь того самого степеня з кожного множника і отримані результати перемножити:

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}\,.$$

Наприклад: $\sqrt[3]{343 \cdot 8} = \sqrt[3]{343} \cdot \sqrt[3]{8} = 7 \cdot 2 = 14$;
$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$; $\sqrt[5]{32 \cdot 243} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{243} = 2 \cdot 3 = 6$; $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00001} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{0{,}00001} = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$.

Щоб добути корінь n-го степеня з частки від ділення невід'ємного числа a на додатне число b, слід добути

корінь того самого степеня з діленого і дільника і перший результат поділити на другий:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)}\ .$$

Наприклад: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$;

$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

На окрему увагу заслуговує рівність (5), яка виражає основну властивість арифметичного кореня:

при діленні показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на одне й те саме число значення кореня з невід'ємного числа не змінюється.

Доведемо це твердження.

Дано $a \geq 0$, m, n, p — натуральні числа.

Довести: $\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}}$. Позначимо $\sqrt[np]{a^{mp}} = x\ (x \geq 0)$, $\sqrt[n]{a^m} = y$ $(y \geq 0)$. Тоді, за означенням кореня, $x^{np} = a^{mp}$, $y^n = a^m$, отже, $y^{np} = a^{mp}$. Звідси $x^{np} = y^{np}$. Оскільки $x \geq 0$, $y \geq 0$, то $x = y$, що й треба було довести.

Показник кореня і показник степеня підкореневого виразу можна ділити на одне й те саме число. В такому разі кажуть, що показники кореня і підкореневого виразу скорочено на одне й те саме число.

З цього твердження дістанемо наслідок:

щоб добути корінь із степеня, слід показник степеня підкореневого виразу поділити на показник кореня, якщо можливе ділення без остачі.

Справді, нехай $a \geq 0$, m, n, p — натуральні числа і $m = np$. Тоді, за основною властивістю кореня, маємо:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np}} = a^p}\ .$$

Наприклад: $\sqrt[18]{36^3} = \sqrt[6\cdot3]{36^3} = \sqrt[6]{36}$;

$\sqrt[12]{25^3} = \sqrt[4\cdot3]{25^3} = \sqrt[4]{25}$; $\sqrt[18]{7^{12}} = \sqrt[6\cdot3]{7^{6\cdot2}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$;

$\sqrt[8]{16^5} = \sqrt[8]{(2^4)^5} = \sqrt[8]{(2^5)^4} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} = \sqrt{16\cdot2} = 4\sqrt{2}$.

Читаючи рівність $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ справа наліво, тобто $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, виявимо справедливість такого твердження:

під час множення показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на одне й те саме число значення кореня з невід'ємного числа не змінюється.

За цим твердженням можна зводити радикали з різними показниками до спільного показника. Наприклад:

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^4}; \quad \sqrt{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^3} = \sqrt[6]{8}.$$

Звести до спільного показника радикали: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$. Найменше спільне кратне показників усіх радикалів 12; додаткові множники показників: 6 — для першого радикала, 4 — для другого, 3 — для третього. Маємо:

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}; \ \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}; \ \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}.$$

Перетворення радикалів доводиться виконувати над виразами, які містять від'ємні числа. При цьому треба уважно стежити за знаками.

Наприклад: $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$. Але $-3 \neq 3$, отже, $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[6]{(-27)^2}$.

3. Найпростіші перетворення радикалів. Винесення множника за знак радикала. У випадках, коли підкореневий вираз розкладається на множники так, що з одного або з кількох із них можна добути точний корінь, ці множники після добування з них кореня можна записати перед знаком кореня. Таке перетворення називається **винесенням множника за знак радикала**.

Наприклад: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

$$\sqrt{98a^3b} = \sqrt{49 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot ab} = 7a\sqrt{2ab};$$

$$\sqrt[3]{375x^7y^2} = \sqrt[3]{125 \cdot 3x^6xy^2} = \sqrt[3]{125x^6} \cdot \sqrt[3]{3xy^2} = 5x^2\sqrt[3]{3xy^2}.$$

Виносячи буквені множники з-під знака радикала, під всіма літерами слід розуміти лише невід'ємні числа. Зокрема, в розглянутих вище прикладах $a \geq 0$, $b \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то вираз $\sqrt{98a^3b}$ має смисл, але не дорівнює $7a\sqrt{2ab}$.

Щоб дізнатися, з яким показником степеня можна винести за знак кореня множник, а які множники і з якими показниками степенів залишаться під коренем, досить показник степеня множника, що стоїть під коренем, поділити на показник степеня радикала: частка покаже, в якому степені цей множник стоятиме перед коренем, а остача покаже, в якому степені цей множник залишиться під знаком радикала.

Винесенням множника з-під знака радикала можна звести дробовий підкореневий вираз до цілого вигляду. Для цього досить помножити чисельник і знаменник підкореневого виразу на один і той самий множник так, щоб зі знаменника добувався точний корінь. Наприклад:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}}=\sqrt{\frac{3x\cdot5}{5\cdot5}}=\sqrt{\frac{15x}{5^2}}=\frac{1}{5}\sqrt{15x};$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a^2x}{5b^2}}=\sqrt[3]{\frac{3a^2x\cdot25b}{5b^2\cdot25b}}=\frac{1}{5b}\sqrt[3]{75a^2bx}.$$

Внесення додатних множників під знак радикала. Перетворення, обернене до винесення множників з-під знака радикала, називається **внесенням множників під знак радикала.**

Щоб внести додатний множник під знак радикала, слід піднести його до степеня, показник якого дорівнює показнику кореня, і записати результат під знаком кореня.

Так, запис $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ можна розглядати як перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня.

Наприклад: $2\sqrt{3x}=\sqrt{2^2\cdot3x}=\sqrt{12x}$;

$$5a\sqrt[3]{2x}=\sqrt[3]{(5a)^3\cdot2x}=\sqrt[3]{125a^3\cdot2x}=\sqrt[3]{250a^3x};$$

$$\frac{3a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{2b^3}{9a^3}}=\sqrt[4]{\frac{81a^8\cdot2b^3}{b^4\cdot9a^3}}=\sqrt[4]{\frac{18a^5}{b}};\ 2a^2\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{2^na^{2n}x}.$$

Зауважимо, що внесення множника під знак радикала використовують під час порівняння виразів. Наприклад, що більше: $2\sqrt{5}$ чи $5\sqrt{2}$? Внісши множник під знак кореня, дістанемо:

$2\sqrt{5}=\sqrt{2^2\cdot5}=\sqrt{20}$; $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot2}=\sqrt{50}$. Отже, $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$.

Таке перетворення буває також корисним під час виконання наближених обчислень. Нехай треба обчислити $5\sqrt{2}$ з точністю до 0,01. З таблиць знайдемо $\sqrt{2}\approx1{,}41$ (з точністю до 0,01). Наближене значення $5\sqrt{2}=5\cdot1{,}41=7{,}05$. Але похибка знайденого добутку в п'ять разів більша за похибку наближеного значення $\sqrt{2}$. Щоб точніше обчислити вираз $5\sqrt{2}$, доцільно внести множник 5 під знак кореня.

Дістанемо $5\sqrt{2}=\sqrt{50}\approx7{,}07$. Отже, внаслідок внесення множника 5 під знак кореня ми дістали точніше значення виразу $5\sqrt{2}$.

Під радикал можна вносити як числові, так і буквені множники, тільки треба мати на увазі, що буквений множник не може бути від'ємним.

Зведення радикалів до найпростішого (нормального) вигляду. Вважатимемо, що радикал зведений до найпростішого вигляду, коли: підкореневий вираз не містить дробів; раціональні множники винесені за знак радикала; показник кореня і показник степеня підкореневого виразу скорочені на їх найбільший спільний дільник. Якщо підкореневий вираз є добутком кількох множників, показники степенів яких мають спільний дільник, то показник кореня і показники степенів співмножників поділені на цей дільник.

Наведемо приклади зведення радикалів до найпростішого вигляду:

$$3x^2y\sqrt{\frac{12}{xy}}=3x^2y\sqrt{\frac{4\cdot 3xy}{x^2y^2}}=\frac{6x^2y}{xy}\sqrt{3xy}=6x\sqrt{3xy};$$

$$2\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4}}=2\sqrt[3]{\frac{3a^2\cdot 2}{4\cdot 2}}=\sqrt[3]{6a^2};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)ab}{ab\cdot ab}}=\frac{1}{ab}\sqrt{ab(a^2+b^2)}.$$

4. Зведення подібних радикалів. Спрощуючи вирази, які містять суму радикалів, користуються перетворенням, що має назву **зведення подібних радикалів**. Воно аналогічне зведенню подібних членів. Проте означення подібних радикалів відрізняється від означення подібних членів.

Радикали називають **подібними**, якщо після зведення їх до найпростішого (нормального) вигляду вони мають рівні підкореневі вирази і однакові показники. Наприклад, подібними є радикали:

$$3\sqrt{2},\ -0{,}7\sqrt{2},\ ab\sqrt{2},\ (x-y)\sqrt{2};\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{ab},\ -3\sqrt[3]{ab},\ \frac{x+2}{3}\sqrt[3]{ab};$$

$$x^2y\sqrt{x+y},\ \frac{1}{5}xy\sqrt{x+y}.$$

Раціональний множник, що стоїть перед знаком радикала, називають **коефіцієнтом**.

Якщо радикали не зведені до найпростішого вигляду, то не можна казати про їх подібність. Щоб це з'ясувати, слід їх спростити, тобто: звільнитися під радикалом від дробів; винести за знак радикала ті множники, з яких добувається точний корінь; показники кореня і степеня підкореневого виразу скоротити на найбільший спільний дільник.

Розглянемо приклади на доведення подібності радикалів.

1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}}$ і $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$; 2) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ і $\sqrt{a^2-b^2}$;

3) $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[6]{4a^6}$ і $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$.

Розв'язання.

1) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y}} = \frac{1}{xy}\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt[3]{xy^2}$.

Отже, радикали подібні.

2) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} = \frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.

Отже, радикали $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ і $\sqrt{a^2-b^2}$ подібні.

3) $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{4a^6} = a\sqrt[6]{4} = a\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt[3]{6\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

Отже, радикали подібні.

5. Дії над радикалами. Додавання і віднімання. Додавання і віднімання радикалів виконують так само, як додавання і віднімання раціональних одночленів: радикали сполучають знаками «+» або «−» і зводять подібні члени, якщо вони є.

У багатьох випадках при додаванні й відніманні радикалів доводиться спочатку виявляти подібні члени, а потім їх зводити. Для виявлення подібних членів слід звести радикали до найпростішого вигляду. Наприклад:

$$4\sqrt{6} + 7\sqrt{54} = 4\sqrt{6} + 7\sqrt{9\cdot 6} = 4\sqrt{6} + 21\sqrt{6} = 25\sqrt{6} ;$$

$$2a\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}} + 3b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = 2a\sqrt[3]{\frac{ab}{a^3}} + 3b\sqrt[3]{\frac{ab}{b^3}} = 2\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{ab} = 5\sqrt[3]{ab} .$$

Множення і ділення радикалів. Щоб перемножити кілька радикалів з однаковими показниками, треба перемножити підкореневі вирази і написати добуток під знаком кореня з тим самим показником.

Наприклад: $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{70}$;

$2\sqrt{3ax}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3a} = \frac{1}{2}\sqrt{9a^2x} = \frac{3}{2}a\sqrt{x}$.

Щоб поділити радикали з однаковими показниками, треба поділити їх підкореневі вирази і записати частку під знаком кореня з тим самим показником. Якщо перед радикалами є коефіцієнти, то їх також слід поділити. Наприклад:

$$27\sqrt[6]{115} : 9\sqrt[6]{5} = 3\sqrt[6]{23} ; \quad -9a\sqrt{\frac{2a-2b}{x}} : \frac{3a}{b}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}} =$$

$$= -\frac{9ab}{3a}\sqrt{\frac{2(a-b)\cdot 2bx^2}{x(a-b)}} = -3b\sqrt{4bx} = -6b\sqrt{bx} .$$

Якщо треба помножити або поділити радикали з різними показниками, їх спочатку зводять до одного показника. Наприклад:

$$\sqrt[3]{4a^2} : \sqrt{2a} = \sqrt[6]{16a^4} : \sqrt[6]{8a^3} = \sqrt[6]{2a};$$

$$a\sqrt{2x} \cdot \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \cdot b\sqrt[4]{3x^3} = a\sqrt[12]{2^6x^6} \cdot \frac{b}{a}\sqrt[12]{\frac{1}{x^8}} \cdot b\sqrt[12]{3^3x^9} =$$

$$= b^2\sqrt[12]{\frac{2^6 \cdot 3^3 x^6 x^9}{x^8}} = b^2\sqrt[12]{1728x^7}.$$

Якщо треба помножити або поділити радикал на раціональний вираз, то достатньо на нього помножити або поділити коефіцієнт радикала.

Наприклад:

$$5x\sqrt[3]{3ax^2} \cdot (-2{,}5a) = -12{,}5ax\sqrt[3]{3ax^2};$$

$$8a^2b^2\sqrt{xy} : \frac{2}{3}ab = \frac{8a^2b^2 \cdot 3}{2ab}\sqrt{xy} = 12ab\sqrt{xy}.$$

Піднесення радикала до степеня. Піднесення радикала до степеня і добування кореня з кореня ми вже розглядали під час вивчення властивостей коренів. Розглянемо ще деякі приклади.

Щоб піднести радикал до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, залишивши той самий показник радикала.

Наприклад: $\left(\sqrt[3]{3x^2y}\right)^2 = \sqrt[3]{(3x^2y)^2} = \sqrt[3]{9x^4y^2}$;

$$\left(\sqrt[m]{2a^3}\right)^n = \sqrt[m]{2^n a^{3n}}.$$

Добування кореня з радикалів.

Щоб добути корінь з кореня, достатньо з підкореневого виразу добути корінь з показником, що дорівнює добутку двох даних показників коренів.

Наприклад: $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{14}}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^7} = a^2\sqrt[3]{a}$ (перший спосіб); $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt[6]{a^2} = a^2\sqrt[3]{a}$ (другий спосіб); $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{(a^2\sqrt[3]{a})^2} = a^2\sqrt[3]{a}$ (третій спосіб).

Зазначимо, що множення і ділення сум, що містять радикали, виконуються за звичайними правилами множення і ділення многочленів. При цьому широко застосовуються формули скороченого множення і ділення. Наприклад:

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2=$$
$$=x+1-x+1=2, \text{ якщо } x>1;$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3a}-5\sqrt{0{,}2b}\right)^2=\frac{3}{4}a-5\sqrt{0{,}6ab}+5b.$$

Розкладаючи на множники вирази, що містять радикали, застосовують не тільки розкладання на множники підкоренених виразів, а й подання раціональних виразів у вигляді добутку радикалів. Наприклад:

$a+\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)$, тут a подаємо, як $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$;

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Зведення до раціонального вигляду членів дробових ірраціональних виразів. Під час обчислення дробових ірраціональних виразів іноді доцільно звільнятися від ірраціональності (тобто від радикалів) у знаменнику або чисельнику. Це перетворення ґрунтується на основній властивості дробу:

значення дробу не змінюється від множення його чисельника й знаменника на один й той самий вираз, який не дорівнює нулю.

Наведемо приклади, коли знаменник — одночленний ірраціональний вираз:

$$\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3};$$

$$\frac{5}{2\sqrt[5]{3^2}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{2\sqrt[5]{3^5}}=\frac{5\sqrt[5]{3^3}}{6}=\frac{5\sqrt[5]{27}}{6}.$$

Якщо у знаменнику двочлен, то можна звільнитись від ірраціональності у знаменнику, використовуючи тотожність $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

Наприклад:

$$\frac{5}{4+\sqrt{11}}=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{\left(4+\sqrt{11}\right)\left(4-\sqrt{11}\right)}=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{16-11}=\frac{5\left(4-\sqrt{11}\right)}{5}=4-\sqrt{11};$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3}=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{3};$$

$$\frac{14}{5\sqrt{2}+2\sqrt{7}}=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{7}\right)\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}=$$

$$=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{50-28}=\frac{14\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{22}=\frac{7\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)}{11}.$$

В окремих випадках виникає потреба звільнитися від ірраціональності в чисельнику. Перетворення виконують аналогічно, тобто чисельник і знаменник домножують на такий вираз, щоб добуток у чисельнику став раціональним.

Наприклад: $\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{6}{5\sqrt{2}}$;

$$\frac{2\sqrt[4]{a^3}}{3a}=\frac{2\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a}}{3a\sqrt[4]{a}}=\frac{2a}{3a\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3\sqrt[4]{a}};$$

$$\frac{5+\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5-\sqrt{3}\right)}{4\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{4\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{25-3}{4\left(5-\sqrt{3}\right)}=\frac{11}{2\left(5-\sqrt{3}\right)}.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як називається дія, за допомогою якої, знаючи показник степеня і степінь, можна знайти основу степеня?

2. Для якої дії добування кореня є оберненою дією?

3. Що називається коренем n-го степеня з числа a?

4. Що називається коренем п'ятого степеня з числа a?

5. Який знак має корінь непарного степеня: з додатного числа? з від'ємного числа?

6. Яким правилом треба скористатися під час визначення знака кореня непарного степеня?

7. Чи правильні рівності: $\sqrt[3]{64}=4$; $\sqrt[3]{-125}=-5$; $\sqrt[4]{81}=3$; $\sqrt{36}=6$; $\sqrt{25}=-5$; $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}$?

8. Що називається арифметичним значенням кореня (або арифметичним коренем)?

9. Чи можна стверджувати, що a — арифметичний корінь з a^2?

10. Чи правильно, що кубічний корінь зі 125 має два знаки?

11. Вказати, яке з двох означень арифметичного кореня правильне:

1) арифметичним коренем називають корінь невід'ємного числа;

2) арифметичним коренем називають невід'ємне значення кореня з невід'ємного числа.

12. Чому дорівнює $(\sqrt[9]{17})^9$?

13. Що більше: $\sqrt[8]{90}$ чи $\sqrt[9]{85}$?

14. Що більше: $\sqrt[6]{11^2}$ чи $\sqrt[3]{11}$?

15. Що менше: $\sqrt[9]{6}$ чи $\sqrt[18]{36}$?

16. Спростити вираз $\sqrt[8]{a^4+2a^2b^2+b^4}$, використовуючи основну властивість кореня.

17. Як добути корінь: з добутку? з дробу?

18. Як перемножити корені одного й того самого степеня?

19. Записати правило множення коренів з однаковими показниками аналітично (у вигляді формули).

20. Записати аналітично правило добування кореня з дробу.

21. Як виконати ділення коренів однакового степеня? Записати це правило аналітично.

22. Як добути корінь зі степеня? Записати це правило аналітично і проілюструвати його прикладами.

23. Як добути корінь із кореня? Записати це правило аналітично і проілюструвати його прикладами.

24. Назвати властивості коренів. Записати їх аналітично.

25. Як винести множник за знак радикала (кореня)?

26. З яким показником степеня можна винести за знак кореня множник?

27. Які вирази називаються ірраціональними відносно якої-небудь літери?

28. Які властивості коренів використовують при винесенні множника за знак кореня, якщо підкореневий вираз дробовий?

29. Як називається перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня?

30. На якій властивості кореня ґрунтується перетворення, що приводить до пониження степеня кореня?

31. Яке з двох тверджень правильне:

1) степінь будь-якого кореня може бути понижений;

2) степінь не будь-якого кореня може бути понижений?

32. На якій властивості коренів ґрунтується зведення їх до спільного показника?

33. Чи треба понижувати степені коренів (якщо це можливо) перед зведенням їх до спільного показника.

34. Сформулювати правило зведення коренів до найменшого спільного показника.

35. Що означає вираз «звести радикал до простішого вигляду»?

36. Дано корені $\sqrt[12]{a^{10}b^6}$, $\sqrt[5]{a^6}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[10]{32a^5}$. Які з них зведені до простішого вигляду, а які — ні?

37. Які радикали називаються подібними?

38. Як додати (відняти) радикали? Проілюструвати на прикладах.

39. Як перемножити кілька коренів з однаковими показниками? Проілюструвати на прикладах.

40. Як поділити корені з однаковими показниками? Проілюструвати на прикладах.

41. Як перемножити (поділити) радикали з різними показниками?

42. Яка різниця між ірраціональним виразом та ірраціональним числом?

43. Як звільнити знаменник дробу від ірріціональності, якщо цей знаменник — одночлен?

44. Як звільнити знаменник дробу від ірраціональності, якщо цей знаменник — двочлен з квадратними коренями? з кубічними коренями?

45. Як звільнитися від квадратної ірраціональності в тричленному знаменнику дробу?

46. Як звільнити від ірраціональності чисельник дробу? Пояснити на прикладі.

47. Порівняти числа (не виконуючи наближених обчислень):

а) $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[4]{2}$ і $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ і $\sqrt[3]{\sqrt{19}}$.

48. При яких значеннях літер правильна рівність:

а) $\sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7x^2} = -x\sqrt{7}$;

в) $\sqrt{2b^2 - 24b + 72} = (b-6)\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2b^2 - 24b + 72}} = \frac{1}{(6-b)\sqrt{2}}$?

ВПРАВИ

А

62. Довести, що:

1) число 10 — арифметичний квадратний корінь зі 100;

2) число -2 не є арифметичним квадратним коренем із 4;

3) число 0,3 не є арифметичним квадратним коренем з 0,9;

4) $\sqrt{2,89}=1,7$ — правильна рівність.

63. Знайти значення кореня:

1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{0,16}$; 3) $\sqrt{0,0016}$; 4) $\sqrt{0,000016}$; 5) $\sqrt{\frac{25}{36}}$;

6) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; 9) $\sqrt{\frac{25}{16}}$; 10) $\sqrt{0,0121}$;

11) $\sqrt{2,25}$; 12) $\sqrt{1,96}$.

Б

64. Знайти значення виразу:

1) $0,2\sqrt{144}+0,3\sqrt{169}$; 2) $-9\sqrt{0,0001}+\frac{1}{15}\sqrt{900}$;

3) $\sqrt{36}+\sqrt{\frac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{2\frac{14}{25}}-\sqrt{\frac{16}{25}}$.

65. Записати за допомогою знака $\sqrt{\ }$ корені рівняння і обчислити їх значення:

1) $x^2=0,25$; 2) $y^2=2,25$; 3) $z^2=0,49$; 4) $x^2=1\frac{7}{9}$.

В

66. Чи має смисл вираз:

1) $\sqrt{196}$; 2) $\sqrt{-196}$; 3) $-\sqrt{196}$; 4) $\sqrt{(-49)\cdot(-4)}$;

5) $\sqrt{-49\cdot4}$?

67. При яких значеннях a і x має смисл вираз:

1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{-a}$; 3) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{-36x}$; 5) $\sqrt{x-5}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{3x-12}}$?

А

68. Знайти значення кореня:

1) $\sqrt{1000}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[5]{32}$; 4) $\sqrt[6]{1}$; 5) $\sqrt[7]{-1}$; 6) $\sqrt[8]{0}$;

7) $\sqrt[3]{0,001}$; 8) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

69. Які з поданих нижче коренів можна назвати арифметичними:

1) $\sqrt[3]{216}=6$; 2) $\sqrt[3]{-64}=-4$; 3) $\sqrt[4]{625}=5$; 4) $\sqrt[9]{-512}=-2$;

5) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$; 6) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$?

Б

70. Знайти значення виразу:

1) $7\sqrt[3]{64}$; 2) $0{,}2\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-0{,}008}$; 3) $17-5\sqrt[3]{0{,}000216}$;

4) $10\sqrt[3]{(-2)^3}$.

71. Подати корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь:

1) $\sqrt[3]{-7}$; 2) $\sqrt[3]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{-2a}$, де $a>0$.

В

72. 1) Пояснити рівність:

а) $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$; б) $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$.

2) Знайти арифметичне значення кореня $\sqrt{a^2-12a+36}$.

3) Яких значень набуває вираз $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{a}$, якщо $a>0$, $a<0$?

А

73. Знайти значення виразу:

1) $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{100}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\sqrt[5]{x^8}\cdot\sqrt[5]{x^7}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$;

5) $\dfrac{\sqrt[5]{-2}}{\sqrt[5]{-64}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{32}}$.

74. Обчислити:

1) $\sqrt[3]{8\cdot125}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{1000}}$; 3) $\sqrt[4]{3\dfrac{3}{8}\cdot1\dfrac{1}{2}}$; 4) $\sqrt[5]{12:\dfrac{4}{81}}$.

75. Перетворити вираз:

1) $(\sqrt[10]{a^3})^3$; 2) $(\sqrt[11]{5})^2$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

76. Спростити вираз (знизити степінь радикалів):

1) $\sqrt[4]{7^2}$; 2) $\sqrt[18]{36^2}$; 3) $\sqrt[9]{5^6}$; 4) $\sqrt[40]{a^{16}b^{24}c^{32}}$.

77. Звести радикали до спільного показника:

1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt[3]{4a^2}$ і $\sqrt{2a}$.

Б

78. Знайти значення виразу:

1) $\sqrt[3]{0{,}196}\cdot\sqrt[3]{1{,}4}\cdot\sqrt[3]{10000}$; 2) $\dfrac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{500000}}$; 3) $\sqrt[5]{\dfrac{52\cdot4\cdot2\cdot243}{81\cdot39}}$;

4) $(\sqrt[6]{4})^3$; 5) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

79. Спростити вираз $\sqrt{x^8+2x^4y^4+y^8}$.

80. Обчислити:

1) $(5\sqrt[3]{40}-10\sqrt[3]{5})\cdot 0{,}5\sqrt[3]{25}$;

2) $\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{6})+\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{6})-\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

81. Розмістити в порядку зростання числа: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$.

В

82. Спростити вираз:

1) $\sqrt[m+n]{a^{m^2-n^2}}$; 2) $\sqrt[a-b]{a^{a^2-2ab+b^2}}$;

3) $a+2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}-4\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a^2}-3\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{a^3}$.

83. Виконати дії:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$;

3) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

4) $\sqrt{(5-a)^2}$, якщо $a\ge 5$;

5) $\sqrt{1-2x+x^2}$, якщо $x=4$ і $x=\frac{1}{2}$.

84. Довести, що

$$2a-\sqrt{(a-3)^2}=\begin{cases}3a-3, & \text{якщо } a<3;\\ a+3, & \text{якщо } a>3.\end{cases}$$

85. Визначити знак виразу:

1) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[5]{5}-\sqrt[6]{6}$.

86. Спростити вираз:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(-\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}})$.

А

87. Винести множник за знак радикала:

1) $\sqrt[3]{m^8n^2}$; 2) $\sqrt[4]{16a^3b^{11}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32a^2b^6}{243c^7}}$.

Б

4) $\sqrt[3]{24(m^2-n^2)\cdot(m+n)^2}$; 5) $\sqrt[n]{a^{2n+3}}$; 6) $\sqrt[n+1]{a^{2n^2-2}}$;

7) $\sqrt[n]{a^{nx+2}b^{3n}z^3}$.

В

88. Перетворити вираз, якщо $x > 0$ і $c > 0$:

$$\frac{2x^3}{c^3}\sqrt[4]{\frac{0{,}25c^3}{2x}}.$$

Який результат дістанемо, якщо $x < 0$ і $c < 0$? Чи можуть x і c мати різні знаки?

89. Спростити вираз $\sqrt[n]{a^{n+1}b^n - a^n b^{n+1}}$.

90. При яких значеннях x справедлива тотожність $\sqrt{x^2 - x^4} = -x\sqrt{1 - x^2}$?

А

91. Внести множник під знак радикала:

1) $2\sqrt[3]{3}$; 2) $3\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$; 3) $2\sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; 4) $a\sqrt[3]{2}$, де $a > 0$;

5) $b\sqrt[4]{5}$, де $b > 0$; 6) $(a + b)\sqrt{a + b}$.

92. Спростити вираз:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$, якщо $a \ge 0$; 2) $\sqrt[3]{2\sqrt{5}}$; 3) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$, де $x \ge 0$;

4) $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$, де $a \ge 0$.

93. Позбутися дробу під коренем:

1) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c^6}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{m}{a^2 + b^2}}$.

Б

94. Внести множник під знак радикала:

1) $2a^3\sqrt[4]{0{,}25b}$; 2) $(a + b)\sqrt[3]{\frac{3a^2}{a^2 - b^2}}$.

95. Спростити вираз:

1) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b}}$, де $b \ge 0$; 2) $(2 - a)\sqrt{\frac{2a}{a - 2}}$, де $a > 2$.

96. Порівняти числа:

1) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$.

В

97. Внести множник під знак радикала:

1) $\frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2 - x^2}{2}}$, де $0 < x < y$; 2) $2(x - y)\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

98. Знайти значення виразу:

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

99. Довести, що коли $a>0$, то правильна рівність:

$$\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{a}\,.$$

100. Довести, що коли $a>0$, то правильна рівність:

$$\sqrt[2n+2]{a^3\sqrt[n]{a^3}}=\sqrt[2n]{a^3}\,.$$

А

101. Чи можна стверджувати, що вирази $\sqrt[10]{a^5}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$, $\sqrt[4]{a^6b^5}$ є радикалами найпростішого вигляду?

102. Звести до найпростішого вигляду корінь:

1) $x\sqrt{\frac{x}{y}}$; 2) $y\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{40a^4}{bc^2}}$.

Б

103. Спростити корінь:

1) $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2+b^2+2ab}}$; 2) $\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{ab}}$.

В

104. Звести до найпростішого вигляду вираз:

1) $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{y^{3n+2}}{x^{n-2}}}$; 2) $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2+(\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3})^2$ $(a>0,\ x>0)$.

105. Спростити $\frac{x^2}{2-x}\sqrt{\frac{4(1-x)}{x^3}}+\frac{1}{x}$, якщо $x<2$. Перевірити, що коли $0<x<2$, даний вираз перетворюється на $\sqrt{x}$. Довести, що коли $x\le 0$ і $x=2$, він втрачає смисл.

А

106. Чи подібні радикали:

1) $5\sqrt[3]{4}$ і $0{,}7\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[6]{7}$ і $\sqrt[6]{15}$;

4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$ і $\sqrt[3]{72}$?

107. Довести подібність радикалів:

1) $\sqrt[3]{250}$ і $\sqrt[6]{4\,000\,000}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$ і $\sqrt[5]{a^3b^3}$.

Б

108. Довести подібність радикалів:

$$2\sqrt[3]{\frac{a+b}{a^2}} \text{ і } \sqrt[3]{a^2+ab}.$$

109. Чи подібні радикали:

$$\sqrt[4]{\frac{a+b}{b^2}} \text{ і } 5\sqrt[4]{ab^2+1}\ ?$$

110. Обчислити $x+\sqrt{(x-1)^2}$ при $x=5$ і $x=\frac{1}{2}$.

111. Довести подібність радикалів:

$\sqrt{\frac{1}{m}-n}$; $\sqrt{\frac{n^2-mn^7}{mn^2}}$; $\sqrt{m^3-m^4n}$, де $m>0$, $n>0$, $mn<1$.

112. Чи подібні радікали:

1) $\sqrt[4]{4^{2n+1}}$ і $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt[n]{x^{3+n}y^{3+n}}$ і $\sqrt[n]{\frac{y^2}{x^{2n-3}}}$?

Виконати дії:

А

113. 1) $3\sqrt[5]{2a^2}\cdot 5\sqrt[5]{10a}\cdot 7\sqrt[5]{24a}$; 2) $8\sqrt[7]{14a^6}:10\sqrt[7]{ab^3}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3$.

Б

114. 1) $15\sqrt[13]{a^9}:5\sqrt[13]{a^4}+12\sqrt[13]{a^2}\cdot 0{,}25\sqrt[13]{a^3}$;

2) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b}:\sqrt[8]{a^7b^3}$; 3) $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}\right)^2$.

В

115. 1) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[5]{5a^2}}$; 2) $\sqrt{\frac{5\sqrt[3]{0{,}001m^2}}{4\sqrt[4]{m}}+\frac{7}{8}\sqrt[12]{m^5}}$;

3) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2-b}$.

Звільнити від радикала знаменник дробу:

А

116. 1) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a^2}{b\sqrt{a}}$; 3) $\frac{3a^2}{\sqrt[3]{a}}$; 4) $\frac{m\sqrt{n}}{2n\sqrt{m}}$; 5) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}$; 6) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Б

117. 1) $\frac{13}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{5a}{a\sqrt{7}-2\sqrt{a}}$; 3) $\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}}$;

4) $\frac{7\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{7\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$; 5) $\frac{7}{\sqrt[3]{2}-1}$; 6) $\frac{a^3-x^3}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$.

В

118. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}$.

119. Звільнити від радикала чисельник дробу:

А

1) $\frac{3\sqrt[7]{a^4}}{2a^2b}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+1}{5}$; 3) $\frac{3\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}+2}$.

Б

4) $\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{11}$; 5) $\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}$.

В

6) $\frac{4\sqrt{6}+\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}$; 7) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

§ 17. Ірраціональні рівняння і нерівності

Ірраціональні рівняння.

Рівняння, в яких невідоме міститься під знаком кореня, називають ірраціональними.

Інакше кажучи, рівняння називають ірраціональним, якщо в ньому, крім дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з натуральним показником, є також добування кореня з алгебраїчних виразів, які містять невідоме. Корені, які входять у рівняння, вважатимемо арифметичними.

Прикладами ірраціональних рівнянь є: $\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{8-x} + x = 2$; $\sqrt[3]{2x+7} = 3$; $3 - \sqrt[4]{5x+1} = 1$; $\sqrt{x+\sqrt{x^2-5}} = 2$ та ін.

Будь-яке ірраціональне рівняння можна перетворити на ціле алгебраїчне рівняння, яке є наслідком вихідного.

Доведення цього твердження в загальному вигляді складне, і ми обмежимося розглядом окремих випадків.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь, які містять вирази з невідомими під знаком квадратного кореня, намагаються позбутися коренів, підносячи до квадрата обидві частини рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt{8-x} + x = 2$.

Р о з в' я з а н н я. Відокремимо радикал (залишимо його в лівій частині), а решту членів рівняння перенесемо в праву частину: $\sqrt{8-x} = 2-x$.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$(\sqrt{8-x})^2 = (2-x)^2$, звідси $8 - x = 4 - 4x + x^2$.

Зведемо одержане рівняння до стандартного вигляду і розв'яжемо його: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

П е р е в і р к а. $x_1 = -1$. У лівій частині маємо:

$\sqrt{8-(-1)} + (-1) = \sqrt{8+1} - 1 = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2$. Права частина дорівнює 2.

Отже, $x = -1$ є коренем даного ірраціонального рівняння.

Нехай $x_2 = 4$. У лівій частині маємо: $\sqrt{8-4} + 4 = \sqrt{4} + 4 = 6$. Права частина дорівнює 2; $6 \neq 2$.

Отже, корінь $x = 4$ є стороннім для даного ірраціонального рівняння, ми його відкидаємо.

Як виник сторонній корінь? Щоб з'ясувати це, розглянемо питання в загальному вигляді.

Нехай дано рівняння $A = B$, де A і B — деякі вирази, що містять невідоме. Після піднесення до квадрата обох частин рівняння дістанемо: $A^2 = B^2$, або $(A + B)(A - B) = 0$.

Маємо два рівняння: $A - B = 0$, тобто $A = B$ і $A + B = 0$, тобто $A = -B$.

Перше з цих рівнянь таке саме, як вихідне, а корені другого (якщо вони існують) можуть відрізнятися від коренів даного. Тоді вони сторонні відносно рівняння $A = B$.

Тому, якщо під час розв'язування рівняння обидві його частини підносять до квадрата (чи іншого степеня), то після розв'язування утвореного рівняння слід вибрати з його коренів лише ті, які задовольняють початкове рівняння; решта коренів будуть сторонніми.

Повернемося до рівняння $\sqrt{8-x} + x = 2$. Із проведеного дослідження випливає, що сторонній корінь $x = 4$ має задовольняти рівняння $\sqrt{8-x} = -(2 - x)$. Це справді так, бо $\sqrt{8-4} = -(2 - 4)$; $2 = 2$.

Якщо піднести до квадрата обидві частини рівняння, то сторонніх коренів не буде за умови, якщо рівняння $A = -B$ не має коренів.

В окремих випадках, не розв'язуючи ірраціонального рівняння, можна з'ясувати, що воно не має коренів.

Наприклад: $\sqrt{x-5} = -2$ — рівняння не має коренів, бо арифметичний корінь не може бути від'ємним.

$2 - \sqrt{x+10} = 6$ — рівняння не має коренів: цей висновок стає очевидним, якщо рівняння записати у вигляді $\sqrt{x+10} = -4$.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = 0$ — рівняння не має коренів, бо $\sqrt{x+2}$ і $\sqrt{x-2}$ не можуть бути рівними ні при яких значеннях x.

$\sqrt{x-5} - \sqrt{4-x} = 3$ — перший радикал має смисл, коли $x - 5 \geq 0$, тобто $x \geq 5$, а другий, коли $4 - x \geq 0$, тобто $x \leq 4$.

Ці нерівності несумісні, отже, дане ірраціональне рівняння не має коренів.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Приклад 1. $\sqrt{4x+8} + \sqrt{3x-2} = 2$.

Р о з в' я з а н н я. Маємо два радикали, позбутися яких одночасно піднесенням до квадрата неможливо. Тому відокремимо один з радикалів, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Матимемо:

$$\sqrt{4x+8} = 2 - \sqrt{3x-2},\ (\sqrt{4x+8})^2 = (2 - \sqrt{3x-2})^2,$$

$$4x + 8 = 4 - 4\sqrt{3x-2} + 3x - 2,\ 4\sqrt{3x-2} = -x - 6,$$

$$(4\sqrt{3x-2})^2 = (-(x + 6))^2;\ 16(3x-2) = x^2 + 12x + 36,$$

$$x^2 - 36x + 68 = 0, \text{ звідси } x_1 = 2;\ x_2 = 34.$$

Обидва ці корені для даного ірраціонального рівняння є сторонніми (перевірте це).

Зауважимо, що під час розв'язування рівнянь немає потреби заздалегідь з'ясовувати, чи з'являються сторонні корені при піднесенні до квадрата. Підносимо до степеня стільки разів, скільки потрібно для знищення радикалів, і перевіряємо, чи задовольняють корені утвореного рівняння початкове.

Приклад 2. $\sqrt{2x+15} - \sqrt{x-1} = 3,$

Р о з в' я з а н н я. $(\sqrt{2x+15})^2 = (3 + \sqrt{x-1})^2,$

$2x + 15 = 9 + 6\sqrt{x-1} + x - 1,\ x + 7 = 6\sqrt{x-1},$

$(x + 7)^2 = (6\sqrt{x-1})^2,\ x^2 - 22x + 85 = 0;\ x_1 = 5,\ x_2 = 17.$

Перевіримо, чи є числа 5 і 17 коренями вихідного рівняння.

При $x_1 = 5$ у лівій частині дістанемо $\sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3.$ Права частина дорівнює 3, маємо $3 = 3.$

При $x_2 = 17$, у лівій частині дістанемо: $\sqrt{49} - \sqrt{16} = 3;\ 3 = 3.$

Отже, дане ірраціональне рівняння має два корені: $x_1 = 5$ і $x_2 = 17.$

Розглянемо приклад рівняння з трьома радикалами.

Приклад 3. $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{5x-10}.$

Р о з в' я з а н н я. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{5x-10})^2,$$

$$4(x - 1) - 4\sqrt{(x-1)(x+2)} + x + 2 = 5x-10.$$

Відокремимо радикал і зведемо подібні:

$4\sqrt{(x-1)(x+2)} = 8,\ \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2,$

$(\sqrt{(x-1)(x+2)})^2 = 2^2;\ (x - 1)(x + 2) = 4,$

$x^2 + x - 6 = 0,\ x_1 = -3,\ x_2 = 2.$

Перевіримо знайдені корені за вихідним рівнянням:

1) $x_1 = -3$, у лівій частині вираз $2\sqrt{-3-1} - \sqrt{-3+2}$ не має смислу, отже, $x_1 = -3$ — сторонній корінь;

2) $x_2 = 2$, ліва частина $2\sqrt{2-1} - \sqrt{2+2} = 0$, права частина $\sqrt{5\cdot 2-10} = \sqrt{10-10} = 0.$

Отже, $x_2 = 2$ — корінь даного ірраціонального рівняння.

Приклад 4. $2\sqrt[3]{2x+x^3+15} - x = x + 2.$

Р о з в' я з а н н я. Відокремимо радикал:

$2\sqrt[3]{2x+x^3+15} = 2x + 2$, $\sqrt[3]{2x+x^3+15} = x + 1$.

Звільнимося від радикала:

$(\sqrt[3]{2x+x^3+15})^3 = (x+1)^3$; $2x + x^3 + 15 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

$3x^2 + x - 14 = 0$; $x_1 = -2\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Перевірка. $x_1 = -2\frac{1}{3}$, ліва частина

$$2\sqrt[3]{2\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{3}\right)^3+15} + 2\frac{1}{3} = 2\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}} + 2\frac{1}{3} =$$

$$= 2\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} + 2\frac{1}{3} = -2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Права частина $-2\frac{1}{3} + 2 = -\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, тобто $x_1 = -2\frac{1}{3}$ є коренем даного ірраціонального рівняння; $x_2 = 2$, ліва частина $2\sqrt[3]{4+8+15} - 2 = 2\sqrt[3]{27} - 2 = 2\cdot 3 - 2 = 4$.

Права частина $2 + 2 = 4$; $4 = 4$, тобто $x_2 = 2$ також задовольняє дане рівняння.

Отже, $x_1 = -2\frac{1}{3}$; $x_2 = 2$.

Приклад 5. $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Подамо рівняння у вигляді $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$ і піднесемо обидві його частини до куба. При цьому формулу куба різниці візьмемо в такому вигляді:

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

Маємо: $64x - x^2 - 12\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\,(4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}) = 27$. Врахуємо, що $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3}$ і $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^3} = 3$ (це випливає з умови).

Отже, перетворене рівняння має вигляд $64x - x^2 - 12x\cdot 3 = 27$, $x^2 - 28x + 27 = 0$. $x_1 = 1$, $x_2 = 27$ — корені цього рівняння. Підставляючи в початкове рівняння ці корені, переконуємося, що обидва вони його задовольняють.

Як бачимо, розглянутий спосіб розв'язування дуже громіздкий.

2-й спосіб. Беручи до уваги, що $(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$, можна ввести нову змінну, поклавши $\sqrt[3]{x} = y$. Тоді $\sqrt[3]{x^2} = y^2$ і відносно нової змінної рівняння перетворюється на таке: $y^2 - 4y + 3 = 0$. Звідси $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Але $x = y^3$, отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 27$.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування ірраціональних рівнянь способом введення допоміжного невідомого.

Приклад 6. $x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21.$

Р о з в' я з а н н я. Віднімемо від обох частин рівняння по 9: $x^2 - 9 + \sqrt{x^2 - 9} = 12.$

Введемо допоміжне невідоме $\sqrt{x^2 - 9} = y$, $y \geq 0$.
Маємо: $y^2 + y - 12 = 0$; $y_1 = -4$, $y_2 = 3$.
Корінь $y_1 = -4$ відкидаємо як сторонній.

Підставляючи друге значення y в рівність $\sqrt{x^2 - 9} = y$, знайдемо $\sqrt{x^2 - 9} = 3$; $x^2 - 9 = 9$; $x = \pm 3\sqrt{2}$.

Приклад 7. $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} - \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 5.$

Р о з в' я з а н н я. Введемо допоміжне невідоме $y = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$, тоді $x^2 - 3x + 11 = y^2$ і $x^2 - 3x + 3 = y^2 - 8.$

Таким чином, відносно нового невідомого дане рівняння має вигляд $2y - \sqrt{y^2 - 8} = 5$. Звільнившись від радикала, дістанемо $3y^2 - 20y + 33 = 0$, звідси $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{11}{3}$. Обидва корені задовольняють рівняння (перевірте це).

Далі, беручи до уваги, що $x^2 - 3x + 11 = y^2$, дістанемо два рівняння відносно x: $x^2 - 3x + 11 = 3^2$ і $x^2 - 3x + 11 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$, або після спрощень $x^2 - 3x + 2 = 0$ і $x^2 - 3x - \frac{22}{9} = 0.$

Перше рівняння має корені $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а друге $x_{3,\,4} = \frac{9 \pm 13}{6}$.

Усі чотири корені задовольняють початкове рівняння. У цьому можна переконатися, підставивши їхні значення.

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_{3,\,4} = \frac{9 \pm 13}{6}.$$

Приклад 8. $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} = 2.$

Р о з в' я з а н н я. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і виконаємо перетворення: $1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25} = 4$, $x\sqrt{x^2 - 5{,}25} = -2{,}5$, $x^2(x^2 - 5{,}25) = 6{,}25$, $x^4 - 5{,}25x^2 - 6{,}25 = 0.$

Введемо позначення $x^2 = y$. Маємо: $y^2 - 5{,}25y - 6{,}25 = 0$; $y_1 = -1$; $y_2 = 6{,}25$.

Але $x^2 \geq 0$, тому $y_1 = -1$ відкидаємо. Залишається $x^2 = 6{,}25$, звідси $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 2{,}5$. Якщо $x = -2{,}5$, то $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} =$

$= \sqrt{1{,}5 + 2{,}5\sqrt{6{,}25 - 5{,}25}} = \sqrt{4} = 2$. Якщо $x = 2{,}5$, то $\sqrt{1{,}5 - x\sqrt{x^2 - 5{,}25}} = \sqrt{1{,}5 - 2{,}5\sqrt{6{,}25 - 5{,}25}} = \sqrt{-1}$, але такого числа серед дійсних чисел не існує. Отже, дане ірраціональне рівняння має єдиний корінь $x = -2{,}5$.

Приклад 9. $x^2 - x - \sqrt{x^2 - x + 13} = 7$.

Р о з в' я з а н н я. Додаючи до обох частин рівняння по 13, маємо: $(x^2 - x + 13) - \sqrt{x^2 - x + 13} = 20$.

Введемо позначення $\sqrt{x^2 - x + 13} = y$, дістанемо квадратне рівняння відносно y: $y^2 - y - 20 = 0$, корені якого $y_1 = -4$ і $y_2 = 5$. Але $\sqrt{x^2 - x + 13} \geq 0$. Отже, $y_1 = -4$ відкидаємо і беремо $\sqrt{x^2 - x + 13} = 5$. Маємо: $x^2 - x + 13 = 25$, $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Якщо $x = -3$, то $9 + 3 - \sqrt{9 + 3 + 13} = 12 - 5 = 7$.

Якщо $x = 4$, то $16 - 4 - \sqrt{16 - 4 + 13} = 12 - 5 = 7$.

Отже, дане рівняння має два корені: $x_1 = -3$ і $x_2 = 4$.

Приклад 10. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7} = 5$.

Р о з в' я з а н н я. Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}$. Дістанемо:

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}) = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}),$$

$x + 6 - x + 7 = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7})$, звідси $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = \frac{13}{5}$.

Додаючи почленно це рівняння до даного, дістанемо $2\sqrt{x+6} = \frac{38}{5}$. Звідси $x = \left(\frac{19}{5}\right)^2 - 6 = 8\frac{11}{25}$.

Підставимо це значення x у дане рівняння і переконаємося, що воно його не задовольняє (зробіть це самостійно).

Отже, дане рівняння не має розв'язків. Як бачимо, крім загальних підходів під час розв'язування ірраціональних рівнянь можна застосовувати штучні способи.

Системи ірраціональних рівнянь. Якщо серед рівнянь системи є ірраціональні, то для їх розв'язування, як правило, звільняються від ірраціональності. При цьому застосовують методи, які використовували під час розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведемо приклади розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

Приклад 1. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. Введемо нову змінну $z = \sqrt{x+y}$. Тоді $x + y = z^2$, і перше рівняння системи матиме вигляд: $z^2 + z - 20 = 0$, звідси $z_1 = -5$, $z_2 = 4$.

Вираз $\sqrt{x+y} = -5$ не має смислу. З рівності $\sqrt{x+y} = 4$ знаходимо $x + y = 16$.

Визначимо з цього рівняння x і підставимо в друге рівняння системи $x = 16 - y$, $(16 - y)^2 + y^2 = 136$, $256 - 32y + y^2 + y^2 = 136$, $2y^2 - 32y + 120 = 0$, $y^2 - 16y + 60 = 0$.

Корені цього рівняння: $y_1 = 6$, $y_2 = 10$.

Визначимо x: $x_1 = 16 - y_1$; $x_1 = 10$; $x_2 = 16 - y_2$; $x_2 = 6$.

В і д п о в і д ь. (10; 6), (6; 10).

Приклад 2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-3} = 5, \\ x + y = 37. \end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. Введемо позначення $\sqrt[3]{x+1} = p$, $\sqrt[3]{y-3} = q$, тоді $x + 1 = p^3$, $y - 3 = q^3$.

Додаючи почленно ці рівняння, дістанемо: $x + y - 2 = p^3 + q^3$, або $x + y = p^3 + q^3 + 2$. З другого рівняння системи маємо: $37 = p^3 + q^3 + 2$, або $p^3 + q^3 = 35$. Перше рівняння системи запишемо так: $p + q = 5$.

Візьмемо до уваги тотожність $(p + q)^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q)$ і підставимо замість $p^3 + q^3$ і $p + q$ їх значення, а саме: $p^3 + q^3 = 35$, $p + q = 5$. Отже, $5^3 = 35 + 3pq \cdot 5$; $15pq = 90$; $pq = 6$. Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} p + q = 5, \\ pq = 6. \end{cases}$

Звідси $p_1 = 2$, $q_1 = 3$, $p_2 = 3$, $q_2 = 2$.

Повернемося до невідомих x і y, дістаємо:

$$\sqrt[3]{x+1} = 2,\ x + 1 = 8;\ \sqrt[3]{y-3} = 3,\ y - 3 = 27;$$

$$\sqrt[3]{x+1} = 3,\ x + 1 = 27;\ \sqrt[3]{y-3} = 2,\ y - 3 = 8.$$

Маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + 1 = 8, \\ y - 3 = 27; \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + 1 = 27, \\ y - 3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язками першої системи є $x = 7$, $y = 30$, а другої $x = 26$, $y = 11$.

В і д п о в і д ь. (7; 30), (26; 11).

Приклад 3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy},\\ x+y=13.\end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо суму $x + y$ у вигляді $x + y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}$.

За першим і другим рівняннями системи маємо:

$$13 = \left(\frac{5}{6}\sqrt{xy}\right)^2-2\sqrt{xy}\text{ , } 13 = \frac{25}{36}xy-2\sqrt{xy}\text{ ,}$$

$$\frac{25}{36}xy-2\sqrt{xy}-13=0.$$

Позначивши $\sqrt{xy}=z$, дістанемо $25z^2 - 72z - 13\cdot 36 = 0$,

$$z_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{36^2+36\cdot 13\cdot 25}}{25}\text{; } z_{1,2}=\frac{36\pm 6\sqrt{36+325}}{25}=\frac{36\pm 6\cdot 19}{25}\text{;}$$

$$z_1=\frac{36-6\cdot 19}{36}\text{ не задовольняє; } z_2=\frac{36+6\cdot 19}{25}=\frac{36+114}{25}\text{,}$$

$$z_2=\frac{150}{25}=6.$$

Отже, $\sqrt{xy}=6$. Підставимо значення $\sqrt{xy}$ у перше рівняння системи. Маємо $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\cdot 6$; $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=6,\end{cases}$$

дістанемо: $\sqrt{x}=2$, $\sqrt{y}=3$ і $\sqrt{x}=3$, $\sqrt{y}=2$. Звідси $x_1=4$, $y_1=9$; $x_2=9$, $y_2=4$.

В і д п о в і д ь. (4; 9), (9; 4).

Приклад 4. $\begin{cases}\sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3,\\ 5x-y=11.\end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. Введемо позначення: $\sqrt[4]{1+5x}=u$, $\sqrt[4]{5-y}=v$, тоді $\begin{cases}u+v=3,\\ u^4+v^4=17.\end{cases}$

Запишемо друге рівняння таким чином:

$(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=17$; $((u+v)^2-2uv)^2-2u^2v^2=17$, або

$(9-2uv)^2-2u^2v^2=17$; $2u^2v^2-36uv+64=0$;

$(uv)^2-18uv+32=0$; $uv=2$; $uv=16$;

1) $\begin{cases} uv = 2, \\ u + v = 3. \end{cases}$ $u^2 - 3u + 2 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$.

Звідси $\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2; \end{cases}$ або $\begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Отже, $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} = 1; x = 0; \\ \sqrt[4]{5-y} = 2; y = -11; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} = 2; \\ \sqrt[4]{5-y} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} uv = 16, \\ u + v = 3. \end{cases}$ $u^2 - 3u + 16 = 0$ — немає розв'язків.

Відповідь. (0; −11), (3; 4).

Приклад 5. $\begin{cases} (x + y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65, \\ (x - y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185. \end{cases}$

Розв'язання. Ліві частини рівнянь системи запишемо у вигляді:

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) \cdot y^2\sqrt{x^2 + y^2} = 65,$$

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) \cdot y^2\sqrt{x^2 + y^2} = 185,$$

Поділимо почленно рівняння системи:

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y\sqrt{x}}{y^2} + 1\right) = 65 : 185.$$

Спростимо це рівняння:

$$37\left(\frac{x}{y^2} + \frac{\sqrt{x}}{y} + 1\right) = 13\left(\frac{x}{y^2} - \frac{\sqrt{x}}{y} + 1\right).$$

Звідси $24\frac{x}{y^2} + 50\frac{\sqrt{x}}{y} + 24 = 0$, або $12\frac{x}{y^2} + 25\frac{\sqrt{x}}{y} + 12 = 0$.

Введемо нове невідоме $\frac{\sqrt{x}}{y} = z$. Дістанемо:

$$12z^2 + 25z + 12 = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{24} = \frac{-25 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{-25 \pm 7}{24},$$

$$z_1 = \frac{-32}{24} = -\frac{4}{3},\ z_2 = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4},\ z_1 = -\frac{4}{3},\ z_2 = -\frac{3}{4}.$$

Візьмемо $z_1 = -\frac{4}{3}$ і знайдемо $\frac{x}{y^2}$. Маємо $\frac{x}{y^2} = \frac{16}{9}$, звідси

$y^2 = \frac{9x}{16}$. Підставимо значення $\frac{x}{y^2}$, $\frac{\sqrt{x}}{y}$ і y^2 у перше рівняння системи:

$$\left(\frac{16}{9}-\frac{4}{3}+1\right)\frac{9}{16}\sqrt{x+\frac{9x}{16}}=65,\ \frac{13}{9}\cdot\frac{9x}{16}\sqrt{\frac{25x}{16}}=65.$$

Звідси $\frac{13x}{16}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{x}=65$, $\frac{x}{64}\sqrt{x}=1$, $\frac{x^2}{64^2}x=1$, $x^3 = 64^2$,

$$x^3 = (4^3)^2 = (4^2)^3,\ x = 4^2,\ x = 16.$$

Знайдемо y. Маємо: $\frac{\sqrt{16}}{y} = -\frac{4}{3}$, звідки $y = -3$.

Аналогічно, підставляючи значення $z_2 = -\frac{3}{4}$, знайдемо

$$x = 9,\ y = -4.$$

Відповідь. (16; −3), (9; −4).

Ірраціональні нерівності.

Нерівності, в яких змінна (невідоме) міститься під знаком кореня, називаються ірраціональними.

Як і в ірраціональних рівняннях, усі корені, що входять до нерівностей, — арифметичні.

До найпростіших ірраціональних нерівностей належать нерівності вигляду $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ і $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, або $\sqrt[n]{f(x)} \le g(x)$ і $\sqrt[n]{f(x)} \ge g(x)$.

Розв'язування нерівностей першого виду зводиться до розв'язування системи раціональних нерівностей

$$\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x)<g^n(x), \end{cases}$$

бо, за означенням арифметичного кореня, і підкореневий вираз, і значення кореня невід'ємні. Оскільки за умовою значення кореня менше від виразу $g(x)$, то останній має бути додатним. Третю нерівність системи дістаємо після піднесення обох частин даної нерівності до степеня, який дорівнює степеню кореня.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-5x$.

Розв'язання. Задана нерівність зводиться до системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0, \\ 8-5x > 0, \\ x^2-3x-10 < (8-5x)^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему. Маємо:

$$\begin{cases}(x+2)(x-5) \geq 0, \\ x < \dfrac{8}{5}, \\ 24x^2 - 77x + 74 > 0,\end{cases} \quad \begin{cases}-\infty < x \leq -2 \text{ або } 5 \leq x < +\infty, \\ x < \dfrac{8}{5}, \\ -\infty < x < +\infty.\end{cases}$$

Множиною розв'язків останньої системи є проміжок $-\infty < x \leq -2$.

В і д п о в і д ь. $(-\infty; -2\,]$.

Під час розв'язування нерівностей другого виду треба розглянути два випадки.

1) $g(x) < 0$. Нерівність $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ задовольняється при будь-яких значеннях змінної x, при яких існує арифметичний корінь, тобто при яких $f(x) \geq 0$. Отже, розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування системи нерівностей:

$$\begin{cases}f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0.\end{cases} \tag{1}$$

2) $g(x) \geq 0$. Нерівність $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ зводиться до системи раціональних нерівностей:

$$\begin{cases}f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^n(x).\end{cases} \tag{2}$$

Множиною розв'язків даної нерівності буде об'єднання множин розв'язків систем (1) і (2).

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$.

Р о з в' я з а н н я.

1) Якщо $x - 2 < 0$, то дана нерівність зводиться до системи:

$$\begin{cases}x - 2 < 0, \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x < 2, \\ (x+2)(x-5) \geq 0.\end{cases}$$

Множиною розв'язків останньої системи є числовий проміжок $(-\infty; -2)$.

2) Якщо $x - 2 \geq 0$, то дана нерівність зводиться до системи:

$$\begin{cases}x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 3x - 10 > (x-2)^2,\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x \geq 2, \\ x > 14.\end{cases}$$

Множиною розв'язків цієї системи є числовий проміжок $(14; +\infty)$.

Отже, множиною розв'язків даної нерівності буде об'єднання числових проміжків $(-\infty; -2)$ і $(14; +\infty)$.

В і д п о в і д ь. $(-\infty; -2) \cup (14; +\infty)$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яке рівняння називають ірраціональним? Навести приклад.

2. Який смисл мають корені, що входять в ірраціональне рівняння?

3. Чому ірраціональне рівняння $\sqrt{x-3} = -2$ не має розв'язків?

4. Як ірраціональне рівняння замінити раціональним?

5. Які перетворення ірраціональних рівнянь можуть привести до появи сторонніх коренів?

6. У чому полягає спосіб введення нової змінної під час розв'язування ірраціональних рівнянь?

7. Які нерівності називаються ірраціональними?

8. Який смисл мають радикали, що входять в ірраціональну нерівність?

9. Чи завжди нерівність $f(x) < \varphi(x)$ рівносильна нерівності $(f(x))^n < (\varphi(x))^n$?

ВПРАВИ

Розв'язати рівняння:

А

120. 1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x-3} = 5$; 3) $\sqrt{x} - 4 = 0$;

4) $\sqrt{2x-7} = 5$; 5) $\sqrt{2-x} = \sqrt{3-2x}$; 6) $\sqrt{x-a} = b$.

121. 1) $x + \sqrt{x+5} = 7$; 2) $3\sqrt{x+2} = 2x - 5$.

122. 1) $\sqrt{x-7} + \sqrt{17-x} = 4$; 2) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{4x+3} = 1$.

123. 1) $\sqrt{8x-5} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{6x+1}$;

2) $3\sqrt{x^2-4} + 1 = 3x + 7$.

Б

124. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{6x-11}$.

125. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x-6}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{2-x} = \dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}$.

126. 1) $\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2$;

2) $\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5}$;

3) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b+x} = \sqrt{a+b}$;

4) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 6} = x + 6$.

В

127. 1) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{8-2x} = \sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt{\dfrac{5x+2}{2x-4}} = \sqrt{\dfrac{7x-2}{3x-8}}$.

128. 1) $\sqrt{8-x} + \sqrt{5+x} = \sqrt{9+5x} + \sqrt{4-5x}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{2}$.

129. 1) $\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{9+24x}} = \sqrt{3}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3x+10}} + \dfrac{6}{\sqrt{(x+2)(3x+10)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

130. 1) $x - \sqrt[3]{x^3 - 4x - 7} = 1$; 2) $\sqrt{4 - x\sqrt{x^2+8}} = 2 - x$;

3) $x^2 - 9x + 12 = 4\sqrt{x^2 - 9x + 9}$;

4) $\sqrt{5a+x} + \sqrt{5a-x} = \dfrac{12a}{\sqrt{5a+x}}$.

Пояснити, чому дані ірраціональні рівняння не можуть мати дійсних коренів:

А

131. 1) $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = -4$; 2) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} + 1 = 0$.

Б

132. 1) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} = 1$; 2) $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x-1} = 2$.

В

133. 1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x-3} + 1$;

2) $\sqrt{3x-7} - \sqrt{5x-11} = 2$.

Розв'язати рівняння:

А

134. 1) $2x + 1 = 3\sqrt{x}$; 2) $1 - \sqrt{x} = 2 + x$ (для цих рівнянь побудувати графіки лівої і правої частин).

135. 1) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$;

2) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$;

3) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$;

4) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

Б

136. 1) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$;

2) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$, $x\neq 0$;

3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

4) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$;

В

137. 1) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$;

2) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$;

3) $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

Розв'язати систему рівнянь:

А

138. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{xy}=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ xy=4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=10;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x^2+6y^2}=2+x,\\ 3x+4y=23.\end{cases}$

Б

139. 1) $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3},\\ xy=9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=25;\end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3, \\ x - y = 63. \end{cases}$

В

140. 1) $\begin{cases} x + y = 130, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1{,}5\sqrt[6]{xy}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \dfrac{a}{b}, \\ xy = (a^2 - b^2)^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt[3]{x - y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x + y)^3 (x - y)^2} = 8, \ (x > y). \end{cases}$

141. 1) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2 y + y^2 x = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 8a^2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0{,}5\sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

142. 1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} = 3, \\ \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x} = 5, \\ \sqrt{z + x} + \sqrt{x + y} = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ x + y = 17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

143. 1) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ y\sqrt{x^2 + y^2} = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x - 4} + \sqrt{y} + \sqrt{z + 4} = 6, \\ 2\sqrt{x - 4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z + 4} = -12, \\ x + y + z = 14. \end{cases}$

144. Розв'язати нерівність:

1) $\sqrt{x - 1} < 7 - x$; 2) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$;

3) $\sqrt{x + 2} > x$; 4) $3\sqrt{6 + x - x^2} > 4x - 2$;

5) $\sqrt{5x - x^2 - 6} < 3 + 2x$; 6) $\sqrt{(x + 2)(x - 5)} < 8 - x$.

§ 18. Узагальнення поняття степеня. Степенева функція

Степінь з натуральним і цілим показником. Для узагальнення поняття степеня нагадаємо основні поняття і формули.

$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ разів}}$, якщо n — натуральне число, $n > 1$, $a^n = a$, якщо $n = 1$; $a^n = 1$, якщо $n = 0$, $a \neq 0$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, якщо n — ціле число, $n < 0$, $a \neq 0$.

Нагадаємо властивості степеня з цілим показником.

Перемножаючи степені з однаковою основою a ($a \neq 0$), їх показники додають: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Ділячи степені з однаковою основою a ($a \neq 0$), від показника діленого віднімають показник дільника: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Щоб піднести до степеня добуток, треба до цього степеня піднести кожний множник і результати перемножити: $(abc)^n = a^nb^nc^n$.

Іноді цю рівність необхідно прочитати справа наліво: щоб помножити степені з однаковими показниками, достатньо перемножити основи і результат піднести до степеня з тим самим показником: $a^nb^nc^n = (abc)^n$.

Щоб піднести до степеня дріб, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат поділити на другий:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Щоб піднести до степеня степінь, треба показники степенів перемножити, а основу степеня залишити без зміни: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Зазначимо, що у формулюванні цих правил ніде не вказувалося, яким має бути показник степеня: натуральним числом чи цілим. Це тому, що множина цілих чисел включає множину натуральних чисел як свою частину. Отже, наведені правила стосуються степенів з натуральним, нульовим і цілим від'ємним показниками. Зрозуміло, що для випадку степеня з нульовим і цілим показниками ставиться додаткова умова, щоб основа степеня не дорівнювала нулю.

Степінь з раціональним показником. Введення степеня з нульовим і від'ємним показниками було першим розширенням поняття про степінь. При цьому нові означення степеня з нульовим і від'ємним показниками було введено так, що властивості степеня з натуральним показником залишилися правильними і для степенів з цілим показником.

Введемо поняття про степінь, показником якого може бути будь-яке дробове (раціональне) число. Наприклад, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{2}{3}}$, $5^{0,9}$, взагалі $a^{\frac{m}{n}}$, де $a > 0$, m — ціле, а n — натуральне число.

Введення степеня з дробовим показником буде дальшим розширенням поняття про степінь. Означення степеня з дробовим показником $a^{\frac{m}{n}}$ має бути таким, щоб властивості степеня з натуральним показником залишилися справедливими і для степенів з будь-яким дробовим показником.

Означення дробового показника виникло в зв'язку з потребою узагальнити правило добування кореня на випадок, коли показник підкореневого числа не ділиться на показник кореня.

Правило $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ було виведене з припущення, що m і n — натуральні, а m ділиться на n.

Тепер це правило будемо застосовувати і тоді, коли n — будь-яке натуральне число, а m — будь-яке ціле число.

Означення 1. **Якщо a — додатне, n — натуральне число, m — будь-яке ціле число, то степінь числа a з дробовим показником $\frac{m}{n}$ є радикалом $\sqrt[n]{a^m}$, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.**

Показником кореня є знаменник, а показником степеня підкореневого числа — чисельник дробового показника.

Якщо $a = 0$, а $\frac{m}{n}$ — дробове додатне число, то $a^{\frac{m}{n}} = 0$.

Згідно з цим означенням маємо: $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2}$; $0,3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{0,3^5}$;

$$3^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{3^{-1}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{1,7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{17}};\ 0^{\frac{1}{4}} = 0.$$

Вирази $0^{-\frac{2}{5}}$, $(-4)^{\frac{3}{8}}$, $(-8)^{\frac{1}{2}}$ не мають смислу.

Обмеження, що накладається на основу a ($a > 0$), необхідне при означенні степеня $a^{\frac{m}{n}}$. Справді, якщо $a < 0$, то коли n — парне і m — непарне, вираз $a^{\frac{m}{n}}$ не має смислу. Наприклад, $(-5)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-5)^3} = \sqrt{-125}$ не існує.

Отже, введення степеня з дробовим показником дає змогу зберегти правило добування кореня із степеня $\sqrt[n]{a^m}$ для випадку, коли m не ділиться на n.

Можна дати означення степеня з дробовим показником, не користуючись поняттям кореня.

Означення 2. **Степенем $a^{\frac{m}{n}}$ невід'ємного числа a називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a^m.**

За означенням степеня з дробовим показником, справедлива така тотожність: $\boxed{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m}$.

Означення 2 зручно використовувати для доведення основних властивостей степенів виду $a^{\frac{m}{n}}$. Подаємо ці властивості без доведення. Для будь-яких додатних a і раціональних значень p і q

$$a^p a^q = a^{p+q}; \tag{1}$$
$$a^p : a^q = a^{p-q}; \tag{2}$$
$$(a^p)^q = a^{pq}. \tag{3}$$

Крім того, якщо $a > 0$, $b > 0$ і p — раціональне, то мають місце тотожності

$$(ab)^p = a^p b^p; \tag{4}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \tag{5}$$

З властивості (1) випливає, що для будь-якого додатного a і будь-якого раціонального p $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

З властивості (3) випливає, що для будь-якого раціонального p $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ ($a > 0$, n — натуральне число, $n \neq 1$).

Приклади.

1. Записати у вигляді степеня з раціональним показником такі вирази:

а) $a^{0,3}a^{-1}a^{2,7} = a^{0,3+(-1)+2,7} = a^2$;

б) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{8}}$; в) $b^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}} = b^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}} = b^{-\frac{1}{2}}$;

г) $\left(a^{-\frac{5}{8}}\right)^{0,4} \cdot a^{0,25} = \left(a^{-\frac{5}{8}}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^0 = 1$.

2. Обчислити:

а) $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-0,25} \cdot 5^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{-0,75} = 5^{\frac{1}{5}+(-0,25)+\frac{4}{5}+(-0,75)} = 5^0 = 1$;

б) $4^3 \cdot 2^2 = (2^2)^3 \cdot 2^2 = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8 = 256$.

3. Спростити:

а) $\left(\dfrac{a^{-\frac{2}{5}}}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{-3,5} = \dfrac{a^{\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot(-3,5)}}{\left(b^{\frac{1}{7}}\right)^{-3,5}} = \dfrac{a^{-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}}{b^{\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}} = \dfrac{a^{\frac{7}{5}}}{b^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{1,4}}{b^{-0,5}}$;

б) $\left(a^{\frac{5}{12}}\right)^{1,2} : \left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1,5} = a^{\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{5}} : a^{-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} = 1$;

в) $\left(c^{-\frac{3}{7}}y^{-0,4}\right)^{3} \cdot c^{\frac{2}{7}}y^{0,2} = c^{-\frac{9}{7}}y^{-\frac{6}{5}}c^{\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{5}} = c^{-\frac{9}{7}+\frac{2}{7}}y^{-\frac{6}{5}+\frac{1}{5}} = c^{-1}y^{-1}$.

4. Знайти значення виразу:

а) $(81\cdot16)^{-\frac{1}{4}} = (3^4\cdot2^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}\cdot2^{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = 3^{-1}\cdot2^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

б) $100000^{0,2}\cdot0,001^{\frac{1}{3}} = (10^5)^{\frac{1}{5}}\cdot(10^{-3})^{\frac{1}{3}} = 10\cdot10^{-1} = 1$.

5. Записати вираз у вигляді квадрата:

а) $a^{30} = (a^{15})^2$; б) $a^3 = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2$; в) $a^{-18} = (a^{-9})^2$; г) $a^{-3} = \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2$.

6. Записати вираз у вигляді степеня з дробовим показником:

а) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[15]{x} = x^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{15}} = x^{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}} = x^{\frac{4}{15}}$;

б) $\sqrt[7]{y^2}\cdot\sqrt[3]{y^{-2}} = y^{\frac{2}{7}}\cdot y^{-\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{7}-\frac{2}{3}} = y^{-\frac{8}{21}}$;

в) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$;

г) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{(x^2)^4\cdot x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^8\cdot x^{-3}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^5}} = \sqrt[20]{x^5} =$
$= x^{\frac{5}{20}} = x^{0,25}$.

7. Виконати дії:

а) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-a^{\frac{1}{2}}\right) = 1^2 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1-a$;

б) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = x + 2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$;

в) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a+b$.

8. Розв'язати нерівність:

а) $\frac{1}{2}a \ge a^3$; б) $x^{-3} > x^{-1}$; в) $a^{-\frac{3}{2}} > a^{\frac{1}{2}}$.

Р о з в' я з а н н я. а) $a^3 - \frac{1}{2}a \le 0$, $a\left(a^2-\frac{1}{2}\right) \le 0$,

$a\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\le 0$. Звідси $a \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $0 \le a \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $x^{-3} > x^{-1}$, $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}>0$, $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\cdot\frac{1}{x}>0$; $\frac{1-x^2}{x^2x}>0$, $\frac{x^2-1}{x^2x}<0$. Але $x^2>0$, тоді маємо рівносильну нерівність $(x+1)(x-1)x<0$, розв'язуючи яку, знайдемо $x<-1$, $0<x<1$.

в) $a^{-\frac{3}{2}} > a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}-a^{\frac{1}{2}}>0$, $\frac{1-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}>0$, $\frac{1-a^2}{aa^{\frac{1}{2}}}>0$; $\frac{a^2-1}{aa^{\frac{1}{2}}}<0$; за означенням, $a^{\frac{1}{2}}>0$. Маємо: $(a+1)(a-1)<0$. Звідси $0<a<1$.

3. Поняття про степінь з ірраціональним показником. Розглянемо степінь a^{α}, де a — будь-яке додатне число, яке не дорівнює 1, а α — будь-яке ірраціональне число. Тут можуть бути такі три випадки:

а) $a>1$ і α — додатне ірраціональне число, наприклад $5^{\sqrt{2}}$.

Позначимо: α_1 — будь-яке раціональне наближене значення α, взяте з недостачею і α_2 — будь-яке наближене раціональне значення числа α, взяте з надлишком. Тоді степінь a^{α} означає таке число, яке більше від усякого степеня a^{α_1}, але менше від усякого степеня a^{α_2}. Наприклад, $5^{\sqrt{2}}$ означає таке число, яке більше від кожного з чисел ряду: $5^{1,4}$, $5^{1,41}$, $5^{1,414}$, $5^{1,4142}$, ..., в якому показники — десяткові наближення $\sqrt{2}$, взяті з недостачею, але менші від кожного з чисел ряду: $5^{1,5}$, $5^{1,42}$, $5^{1,415}$, $5^{1,4143}$, ..., в якому показники — десяткові наближення $\sqrt{2}$, взяті з надлишком.

б) $0<a<1$ і α — додатне ірраціональне число, наприклад $0{,}5^{\sqrt{2}}$.

Тоді під степенем a^{α} розуміють число, яке менше від будь-якого степеня a^{α_1}, але більше від будь-якого степеня a^{α_2}. Так, $0{,}5^{\sqrt{2}}$ є число, менше від будь-якого з чисел ряду $0{,}5^{1,4}$, $0{,}5^{1,41}$, $0{,}5^{1,414}$, $0{,}5^{1,4142}$, ..., але більше від будь-якого з чисел ряду $0{,}5^{1,5}$, $0{,}5^{1,42}$, $0{,}5^{1,415}$, $0{,}5^{1,4143}$, ...

Таким чином, якщо додатне ірраціональне число α міститься між двома раціональними числами α_1 і α_2, то степінь a^{α} міститься між степенями a^{α_1} і a^{α_2} і тоді, коли $a>1$, і тоді, коли $0<a<1$.

в) $a\ge 1$ і α — від'ємне ірраціональне число, наприклад $5^{-\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$.

Тоді виразу a^{α} надають того самого змісту, який мають степені з від'ємними раціональними показниками. Так, $5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{5^{\sqrt{2}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}}$. Можна довести, що дії над степенями з ірраціональними показниками виконуються за тими самими правилами, які встановлено для степенів з раціональними показниками: $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$; $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$; $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$; $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$, де a, b — додатні числа, α, β —ірраціональні числа.

4. Степенева функція. Як ми вже переконалися, для будь-якого дійсного числа p і додатного x визначено число x^p.

Якщо показник степеня p — стале число, а основа x — змінна, то $y = x^p$ є функцією аргументу x, тобто $f(x) = x^p$.

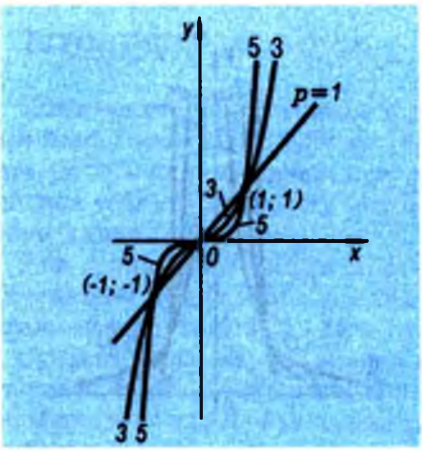
Функцію $y = x^p$, де p — стале дійсне число, а x — (основа) змінна, називають степеневою функцією.

Область визначення і зміни степеневої функції $y = x^p$, а також її властивості залежать від того, яким числом є показник p.

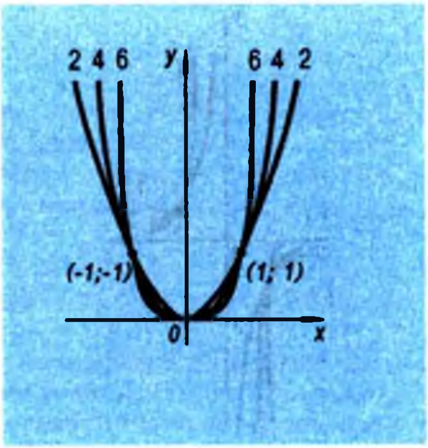
1. Нехай p — натуральне число.

Функція визначена на всій числовій прямій; якщо $x = 0$, то $y = 0$ і якщо $x = 1$, то $y = 1$; при p непарному ($p = 1, 3, 5, \ldots$) для всіх значень $x < 0$ і $x > 0$ знак функції збігається зі знаком аргументу; функція непарна і зростає на всій області визначення.

Графіком є пряма, якщо $p = 1$ і криві, якщо $p = 3, 5, 7, \ldots$, симетричні відносно початку координат, розміщені в I і III координатних чвертях (мал. 80).



Мал. 80



Мал. 81

Якщо p парне (2, 4, 6, ...), $y > 0$ для всіх значень $x < 0$ і $x > 0$, функція парна. Якщо $x < 0$, функція спадає, якщо $x > 0$ — зростає. Графіки $y = x^p$ (p = 2, 4, 6, ...) — криві, симетричні відносно осі y, розміщені в I і II чвертях (мал. 81).

2. Нехай p — ціле від'ємне число: −1, −2, −3, ... Тоді функція визначена на всій числовій прямій, крім точки $x = 0$ (немає числа, оберненого до нуля). Графік складається з двох віток.

Якщо $x = 1$, то $y = 1$.

Якщо p — непарне (−1, −3, −5, ...), то для всіх значень $x < 0$ і $x > 0$ знак функції збігається зі знаком аргументу. Функція непарна, спадна на всій області визначення. Графіком $y = x^p$ (p = −1, −3, −5, ...) є криві, симетричні відносно початку координат, розміщені в I і III чвертях (мал. 82).

Якщо p — парне (−2, −4, −6, ...), значенням $x < 0$ і $x > 0$ відповідають значення $y > 0$. Функція парна. Якщо $x < 0$, функція зростає, якщо $x > 0$ — спадає. Графіком $y = x^p$ (p = −2, −4, −6, ...) є криві, симетричні відносно осі y, розміщені в I і II чвертях (мал. 83).

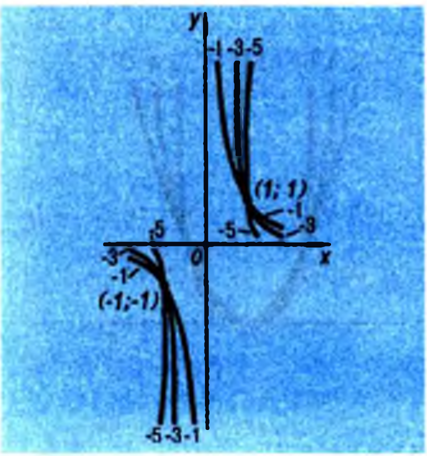
3. Нехай $p = \frac{1}{k}$, де k = 2, 3, 4, ...

Функція визначена для всіх значень $x \geq 0$, при цьому $y \geq 0$, $y = 1$, якщо $x = 1$.

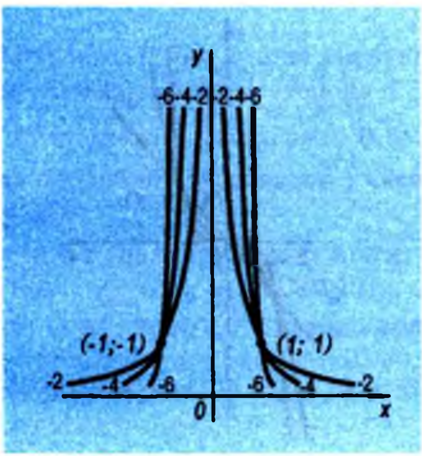
Функція зростає на всій області визначення. Графіки $y = x^{\frac{1}{k}}$ (k = 2, 3, 4, ...) розміщені в I чверті (мал. 84).

Степенева функція $y = x^p$, якщо $p > 0$ визначена і коли $x = 0$, бо $0^p = 0$. Вираз 0^0 не має смислу.

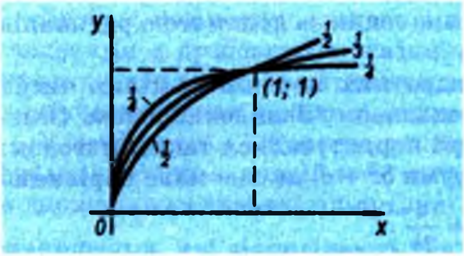
Якщо p — цілі, то степенева функція визначена і для $x < 0$. Якщо p — парне, то функція парна, а коли p непарне — непарна.



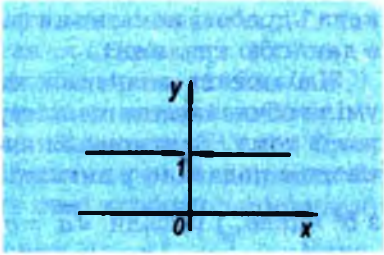
Мал. 82



Мал. 83



Мал. 84



Мал. 85

Якщо $p' = 0$, за означенням степеня з нульовим показником, то $y = 1$ при будь-якому $x \neq 0$.

Графіком такої функції є пряма, паралельна осі x і віддалена від неї на відстань, що дорівнює 1. З цієї прямої необхідно виключити точку, яка відповідає абсцисі, що дорівнює 0 (мал. 85).

На практиці часто доводиться розглядати функцію виду $y = Cx^p$, де C — стала. Це функції $y = kx$, $y = kx^2$, $y = kx^3$. Наприклад: функція $s = 4{,}9t^2$ виражає залежність між пройденим шляхом s і часом t під час вільного падіння. Функція $S = \pi R^2$ виражає залежність між площею круга S і його радіусом R.

У фізиці потужність у колі постійного струму на ділянці з опором R визначається за формулою: $P = RI^2$, де I — сила струму.

Енергію магнітного поля визначають за формулою: $W_м = \frac{Li^2}{2}$, де L — індуктивність котушки; i — сила змінного струму.

Історична довідка

Поняття степеня виникло в давнину у зв'язку з обчисленням площі квадрата і об'єму куба (звідси пішли назви «квадрат», «куб» для позначення другого і третього степенів). Збереглися таблиці квадратів і кубів, складені у 1700 р. до н. е. у стародавньому Вавилоні.

Для позначення вищих степенів пізніше вживалися вирази «біквадрат» або «квадрато—квадрат» для четвертого степеня, «кубо—квадрат» для п'ятого і т. д.

Сучасні назви запропонував голландський учений **Сімон Стевін** (1548—1620), який позначав степені у вигляді чисел, зображених у крузі. Він почав систематично використовувати дробові показники степеня для позначення коренів. У наш час для добування кореня вживають два позначення: знак радикала і дробові показники (позначення за допомогою радикалів є даниною традиції).

Наближене значення квадратних коренів із цілих чисел уміли обчислювати ще в стародавньому Вавилоні близько 4 тис. років тому. Вавилонські вчені користувалися таким методом: число a подавали у вигляді суми $b^2 + c$, де c — мале порівняно з b^2 число, і писали $\sqrt{a} = b + \frac{c}{2b}$.

Наприклад: $\sqrt{40^2 + 200} = 40 + \frac{200}{2 \cdot 40} = 42\frac{1}{2}$. Такий спосіб наближеного добування квадратного кореня називають *вавилонським методом*.

Іранський математик і астроном **ал-Каші** (помер близьк 1430 р.), який працював у Самарканді в обсерваторії відомого узбецького астронома і математика Улугбека (1394—1449), сформулював правила $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ і $a^m : a^n = a^{m-n}$. Ал-Каші умів зводити до спільного показника добутки радикалів і словесно сформулював правила $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m} \cdot \sqrt[mn]{b^n} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$. Він також описав загальний спосіб добування коренів з цілих чисел.

Назва «радикал» походить від латинських слів *radix* — корінь та *radicalis* — корінний.

Починаючи з XIII ст., європейські математики позначали корінь цим словом, або скорочено *r*. У 1525 р. у книжці чеського математика **Христофа Рудольфа** (1500—1545) «Швидка і красива лічба за допомогою вправних правил алгебри» з'явилося позначення √ для знака квадратного кореня; корінь кубічний позначався там як ▼▼▼.

Рене ДЕКАРТ
(1596—1650)

У 1626 р. голландський математик **Альбер Жірар** (1595—1633) увів позначення $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ ... . При цьому над підкореневим виразом ставили горизонтальну риску. Замість сучасного $\sqrt{a+b}$ тоді писали $\sqrt{\overline{a+b}}$. Сучасне позначення кореня вперше з'явилося в книжці французького філософа, математика і фізика **Рене Декарта** (1596—1650) «Геометрія», виданій у 1637 р.

Степені з від'ємними показниками ввів шотландський математик **Уїльямс Уоллес** (1768—1843).

Дробові показники степеня і найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками описані ще в XIV ст. у працях французького математика **Нікола Орема** (1323—1382), який застосовував також ірраціональні показники степеня.

У своїй праці «Алгоритм пропорцій» (рукопис XIV ст.) Орем вводить поряд з подвійним, потрійним, взагалі n-кратними відношеннями чвертні, полуторні та інші дробово-раціональні відношення, які відповідають сучасним $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{1\frac{1}{2}}$ ... . Виходячи, наприклад, з того, що $8 = \sqrt{64}$, $4 = \sqrt[3]{64}$, Орем зробив висновок, що 8 перебуває в полуторному відношенні до 4, тобто, сучасною мовою, $8 = 4^{\frac{3}{2}}$, що записується так: $\boxed{\dfrac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}$ (p—перша буква слова *proportio*).

Дробові відношення Орем називав ірраціональними. Він словесно сформулював численні правила операцій з дробовими відношеннями типу

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}};\ a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}};\ a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n b^m)^{\frac{1}{mn}};\ a^{\frac{1}{n}} : \frac{1}{b}^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{mn}};$$

$$(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}} = a^{\left(\frac{mp}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{\frac{q}{p}}\right)}.$$

Створення формального алгоритму дробових відношень і по суті узагальнення дії піднесення до степеня з додатними дробовими показниками було важливим досягненням середньовічної алгебри. Хоча згаданий твір Орема був надрукований лише в XIX ст., він набув поширення і в середні віки.

П'єр ФЕРМА
(1601—1665)

Подальшу розробку алгоритму Орема здійснив французький математик **Нікола Шюке** (1445—1500). Його рукописна праця «Наука про числа у трьох частинах» містить правила обчислень з раціональними числами, ірраціональними коренями, а також вчення про рівняння.

Розглядаючи рівняння, Шюке виходив із загального випадку, зводячи всі рівняння, які він розглядав, до чотирьох «канонів»:

$$ax^m = bx^{m+n};\ ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n};$$

$$ax^m = bx^{m+n} + cx^{m+2n};\ ax^m + cx^{m+2n} = bx^{m+n}.$$

Праця Шюке залишилася в рукописі і не набула поширення.

П'єр Ферма (1601—1665) у середині XVII ст. запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Сформулювати означення степеня з натуральним показником.

2. Як означається степінь з нульовим і цілим від'ємним показниками?

3. Записати аналітичне (у вигляді формули) означення степеня з дробовим показником.

4. Що більше: $3^{\frac{1}{2}}$ чи $9^{\frac{1}{4}}$?

5. Чи можна під час виконання дій над степенями з дробовими показниками користуватися правилами дій над степенями з цілими показниками?

6. Яке обмеження накладають на основу a у виразі $a^{\frac{m}{n}}$, де n — парне число, і чим зумовлене таке обмеження?

7. Сформулювати властивості степеня з дробовим показником.

8. Сформулювати означення степеня з від'ємним раціональним показником і записати його аналітично.

9. Чи можна степінь з дробовим показником замінити на радикал?

10. Записати за допомогою степенів з дробовим показником і обчислити за допомогою мікрокалькулятора (з трьома знаками після коми): $\sqrt[3]{110}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{15}}$; $\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[8]{6}}$; $\frac{8}{\sqrt[5]{120}}$.

11. Записати основні властивості степеня з раціональним показником (множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня).

12. Як означається степінь з ірраціональним показником?

13. Дати означення степеневої функції з натуральним показником.

14. Які обмеження накладають на аргумент x функції $y = x^n$, якщо $n \le 0$?

15. Які види степеневої функції вам відомі? Записати їх аналітично.

16. Які функції називаються непарними? Побудувати ескізи графіків кількох непарних степеневих функцій з натуральним показником.

17. Як розміщений на координатній площині графік функції $y = x^n$, якщо n — непарне; n — парне?

18. Назвати загальні властивості степеневої функції.

19. Які властивості має степенева функція $y = x^{-1}$? Відповісти за ескізом її графіка.

20. Назвати властивості степеневої функції $y = x^{-2}$ за ескізом її графіка.

21. Накреслити ескізи графіків функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$ і $y = x^{\frac{1}{3}}$. Користуючись графіками, сформулювати властивості цих функцій.

22. Систематизувати властивості степеневої функції за показником n: а) n — натуральне число (1, 2, 3, ...); б) n — ціле від'ємне число (−1, −2, −3, ...); в) $n = \frac{1}{k}$, де $k = 2, 3, 4, \ldots$.

23. Чим різняться графіки функцій $y = x^2$ і $y = 3x^3$?

24. Порівняти властивості функцій: а) $y = x^3$ і $y = x^5$; б) $y = x^4$ і $y = x^6$; в) $y = x^{-2}$ і $y = x^3$.

25. Дано функції $f(x) = x^5$ і $\varphi(x) = x^6$. Не виконуючи обчислень, порівняти з нулем: а) $f(25) - f(10)$; б) $f(-20) - f(-15)$; в) $f(0) \cdot f(50)$; г) $\varphi(11) - \varphi(7)$; д) $\varphi(-5) \cdot \varphi(-9)$; е) $\varphi(15) \cdot \varphi(0)$.

26. Чи знайдеться таке натуральне значення p, при якому графік функції $y = x^p$ проходить через точку: а) $A(1; 4)$; б) $B(\sqrt{3}; 81)$; в) $C(-5; 6{,}25)$; г) $D(-7; 343)$?

27. При яких значеннях x існує функція $y = x^{\frac{m}{n}}$, де m і n — цілі числа і n — парне число.

28. Побудувати графік функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ і описати її властивості.

29. Побудувати графік функції $y = x^{-\frac{1}{3}} - 1$.

30. Чи належить функція $y = \sqrt[5]{x^3}$ до непарних? Обґрунтувати свою відповідь.

ВПРАВИ

Виконати дії:

А

145. 1) $a^2a^6a^8$; 2) $x^nx^{2n}x^{4n}$; 3) $b^{13} : b^{10}$; 4) $c^{6n} : c^{5n}$; 5) $a^n : a^{n-2}$; 6) $b^{n+1} : b^{n-1}$.

146. 1) $(2x^3y^2z)^4$; 2) $(-3a^2b^4c^5)^3$; 3) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$.

147. 1) $(a^4)^2$; 2) $\left(-\frac{4xy^2}{5z^3}\right)^3$; 3) $(a^{n-1})^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2n-1}$

148. 1) $(3a^3b^4)^0$; 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$; 3) $\frac{3^{-1}ab^{-2}}{2^{-2}x}$; 4) $2^{10} : 2^{15}$.

149. 1) $a^{-m} : a^0$; 2) $(10^4)^{-3}$; 3) $(2a^2b^{-3})^4$; 4) $2x^{-4} : x^{-7}$.

Б

150. 1) $(a^{12}a^3 : a^4a^7)^3$; 2) $(-ab^2c^3)^4$; 3) $(p2^{n-1})^m$; 4) $\frac{(64m^2n^4)^5}{(16mn^3)^5}$; 5) $(7^{-3} \cdot 343 + 0{,}723^0)^3$; 6) $3a^7a^{-5} + 2{,}51^0a^{-7}a^5$.

151. Спростити вираз: 1) $\left(\frac{2}{3}a^{-2}(b^3)^{-3}\right)^4$; 2) $3x^{n-1} \cdot 5x^{n+1}$; 3) $\frac{6a^5x^{-7}y^{-8}}{4^{-1}a^{-3}b^{-4}}$; 4) $(5a^{-1} + b^{-2}) \cdot (5a^{-1} - b^{-2})$.

152. Піднести до квадрата $\left(2a^{3x} + \frac{x}{4a^{2x-1}}\right)^2$.

В

153. Виконати дії: 1) $\left(\left(-\frac{a^2b}{cd^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{ac^4}{b^2d^3}\right)^2\right) : \left(\left(\frac{a^2b^2}{cd^3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{c^2}{b^3d}\right)^3\right)$;

2) $\left(\frac{a+b}{c-x}\right)^m \cdot \left(\frac{c+x}{a+b}\right)^m \cdot \left(\frac{c-x}{a-b}\right)^m$.

154. За допомогою мікрокалькулятора обчислити значення виразу $25x^2(y^2 - z^2)$, якщо $x \approx 2{,}24$; $y \approx 27{,}3$; $z \approx 12{,}8$.

155. Записати дріб $\frac{2b^2+a}{a^2b^4}$ за допомогою степеня з від'ємним показником.

А

156. Подати вираз у вигляді степеня з раціональним показником: 1) $x^3x^{0,2}x^{0,8}$; 2) $a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}$; 3) $b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{3}{4}}$; 4) $(a^{-\frac{2}{5}})^{10}$; 5) $\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{1\frac{1}{5}}$; 6) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$.

157. Спростити вираз: 1) $(x^{\frac{2}{3}})^{0,5} \cdot x^{-\frac{2}{5}}$; 2) $p^{-1}q^{\frac{5}{4}}p^{-\frac{2}{7}}q^{\frac{1}{14}}$; 3) $(b^{-6})^{-\frac{1}{3}}$.

158. Обчислити: 1) $3^3 \cdot 3^{-\frac{3}{8}}$; 2) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Б

159. Виконати дії: 1) $a^{-\frac{7}{15}} : a^{\frac{11}{20}}$; 2) $\frac{2a^{-\frac{7}{8}}}{a^{1,25}b^{-\frac{2}{3}}}$.

160. Спростити вираз: 1) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

2) $(a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{2}{3}})a^{0,7} \cdot x^{0,8}$.

161. Обчислити: 1) $9^{-\frac{4}{3}} \cdot 27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$; 2) $64^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}}$;

3) $(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1})^{-\frac{1}{3}}$; 4) $((\sqrt[3]{a})^{\sqrt{3}})^{-2\sqrt{3}}$.

162. Подати у вигляді куба: y^9; y^{-33}; y^5; y; $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{-1,5}$; $y^{-\frac{1}{4}}$; $y^{0,1}$; $y^{-\frac{5}{6}}$.

163. Скоротити дріб: 1) $\frac{2-2^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-3}{x-9}$; 3) $\frac{a}{a-a^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\frac{(ab)^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}$.

164. Подати вираз у вигляді суми: 1) $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})$;

2) $(2-y^{1,5})(2+y^{1,5})$.

165. Спростити вираз: 1) $(b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}):(b^{\frac{1}{4}}+c^{\frac{1}{4}})$;

2) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)$.

166. Користуючись тотожністю $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, розкласти на множники вираз: 1) $a^2 - 3$; 2) $b^{\frac{2}{3}} - 25$; 3) $(x^{\frac{1}{3}})^2 - 4$; 4) $a - b^{\frac{1}{2}}$, де $a \geq 0$.

В

167. Спростити вираз: 1) $\left(\frac{4}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{a^{\frac{3}{4}}}{8}\right)^{\frac{1}{9}}$;

2) $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})\cdot(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})\cdot(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$.

168. Довести, що при будь-якому $a>0$ правильна рівність:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}=1$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a^5\sqrt{a}}}=1$.

169. Подати у вигляді суми:

1) $((x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}))^2$; 2) $((x^{-\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{-\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}))^2$.

170. Розкласти на множники:

1) $a+a^{\frac{1}{2}}$; 2) $125-b$, де $b\geq 0$; 3) $18^{\frac{2}{3}}-6^{\frac{4}{3}}$; 4) $(2a)^{\frac{1}{2}}-(5a)^{\frac{1}{2}}$.

171. Знайти значення виразу:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-9a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{6}}}$, якщо $a=64$; 2) $\dfrac{8}{y^{\frac{1}{4}}-2}+\dfrac{y-8y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}}-4}$, якщо $y=25$.

172. Обчислити:

$$0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0{,}75}-3^{-1}+5{,}5^0.$$

173. Спростити вираз, виконавши дії:

1) $\dfrac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$;

2) $\dfrac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}$;

3) $\left(\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$;

4) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$; 5) $\dfrac{(\sqrt[3]{a^{\frac{4}{3}}})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[3]{a^4})^3}\cdot\dfrac{(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}})^4}{(a\sqrt[4]{b})^6}$;

6) $\dfrac{1+2a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}{1-a+4a^{\frac{3}{4}}-4a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-2}{(a^{\frac{1}{4}}-1)^2}$.

РОЗДІЛ 4

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

Деякі види ... функцій, що найчастіше використовуються, насамперед показникові, відкривають доступ до багатьох досліджень.

Леонард Ейлер

§ 19. Поняття показникової функції

Приклади залежностей, які приводять до поняття показникової функції.

Приклад 1. Під час радіоактивного розпаду маса m речовини змінюється з часом t за законом $m = m_0 a^{kt}$, де m — маса речовини через t років після початку розпаду; m_0 — початкова маса речовини, k і a – сталі величини для даної речовини.

Приклад 2. Кількість y мешканців міста з мільйонним населенням через x років обчислюється за формулою $y = 1\,000\,000 \cdot 1{,}02^x$ (за умови, що кожного року спостерігається приріст населення на 2 %).

Приклад 3. Температура T 100 г піску, нагрітого до 100 °С, змінюється при 0 °С залежно від часу t за формулою $T = 100 \cdot 0{,}8^t$.

Приклад 4. Під час витікання рідини з циліндричної посудини через тонку трубку, розміщену в основі циліндра, висота h рівня рідини з часом t змінюється за формулою $h = h_0 a^t$, де h_0 — початковий рівень рідини, a — стала, що залежить від діаметра трубки.

У кожному з наведених прикладів формула задає функцію, для обчислення значення якої сталий множник доводиться множити на степінь сталої зі змінним показником, яка має цілком певне додатне значення. Найпростішим випадком таких залежностей є функція вигляду $y = a^x$, яку називають **показниковою**.

Означення і графік показникової функції. Ви вже знаєте, що коли a — додатне, то для будь-якого числа x степінь a^x має цілком певне додатне значення. Тому a^x є функцією змінної x, яка визначена на всій числовій осі, тобто на множині $\boldsymbol{R}$.

Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається показниковою (з основою a).

Так, функції $y = 3^x$, $y = 0{,}72^x$, $y = \left(\frac{3}{13}\right)^x$ — показникові. З'ясуємо суть обмежень $a > 0$ і $a \neq 1$.

1) Вимога $a > 0$. Якщо $a = 0$ і $x \leq 0$, то вираз a^x не має смислу. Наприклад, вирази 0^{-1}, $0^{-\frac{1}{8}}$, 0^0 позбавлені смислу.

Якщо $a < 0$ і x — нескоротний дріб, знаменник якого парний, то вираз a^x не має смислу. Наприклад, степінь $(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}$ не може бути виражений дійсним числом.

2) Вимога $a \neq 1$. Якщо $a = 1$, то кожне значення 1^x дорівнює 1, тобто функція зводиться до сталої.

Цей випадок нічого нового не додає до означення показникової функції, а тому його виключають.

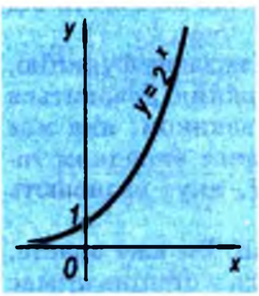
Почнемо вивчення показникових функцій з функції $y = 2^x$. Складемо таблицю деяких значень аргументу і відповідних їм значень цієї функції (табл. 4).

Побудуємо на координатній площині точки за координатами, взятими з цієї таблиці, і з'єднаємо ці точки плавною лінією (мал. 86). Дістанемо графік функції.

Розглянемо тепер функцію 3^x. Складемо аналогічну таблицю (табл. 5).

Побудуємо в тій самій системі координат точки за координатами, взятими з таблиці 5, і з'єднаємо їх плавними лініями (мал. 87). З малюнка видно, що обидві функції зростають, але функція $y = 3^x$ зростає швидше (її графік зростає «крутіше»).

Розглянемо функцію $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Складемо таблицю (табл. 6) і побудуємо графік (мал. 88).



Мал. 86

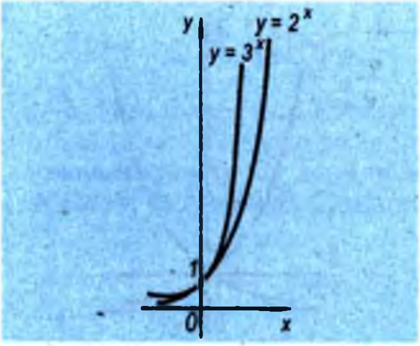
Що є спільного у графіків функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

1) Областю визначення обох функцій є множина дійсних чисел.

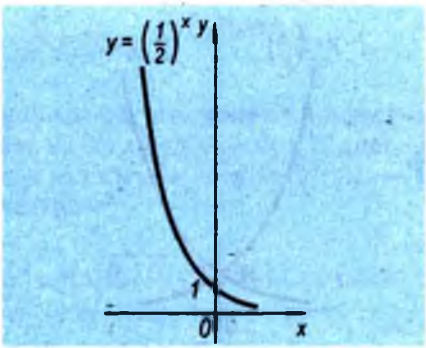
2) Обидві функції додатні при будь-якому значенні аргументу (графіки розміщені у верхній півплощині).

3) Якщо $x = 0$, обидві функції набувають значення, що дорівнює 1.

Ці три властивості спільні для будь-яких показникових функцій $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).



Мал. 87



Мал. 88

Побудуємо тепер графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ в одній і тій самій системі координат (мал. 89) і порівняємо їх властивості. З малюнка видно, що ці графіки розміщені симетрично відносно осі ординат. Функція $y = 2^x$ — зростаюча, а функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — спадна.

Проведемо через точку перетину графіків функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ пряму, паралельну осі абсцис (мал. 90) і порівняємо частини кривих, що лежать під цією прямою і над нею. Які частини кривих відповідають значенням функцій, меншим за 1?

Таблиця 4

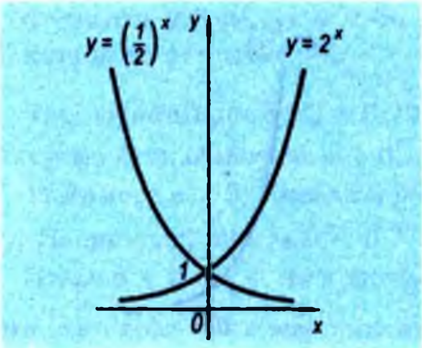
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Таблиця 5

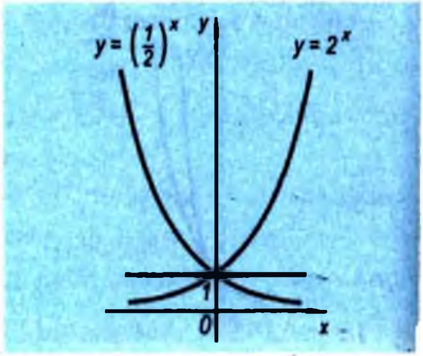
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Таблиця 6

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$



Мал. 89



Мал. 90

більшим за 1? Якщо $x < 0$ (ліва півплощина), функція $y = 2^x$ набуває значень, менших за 1, а якщо $x > 0$ (права півплощина) — значень, більших за 1.

Функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, якщо $x < 0$, набуває значень, більших за 1, а якщо $x > 0$ — менших за 1.

Для більшої наочності подамо властивості функції $y = a^x$ якщо $a > 1$ і $0 < a < 1$, у вигляді таблиці (табл. 7).

Таблиця 7

$y = a^x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
1. Зростає 2. Якщо $x < 0$, набуває значень, менших за 1 3. Якщо $x > 0$, набуває значень, більших за 1	1. Спадає 2. Якщо $x < 0$, набуває значень, більших за 1 3. Якщо $x > 0$, набуває значень, менших за 1

Для подальшого вивчення властивостей показникової функції важливо знати такі властивості степеня (їх подаємо без доведення):

а) При піднесенні неправильного дробу до степеня з додатним показником дістаємо результат, більший за 1, а при піднесенні неправильного дробу до степеня з від'ємним показником — результат, менший за 1, наприклад:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} = 4\frac{17}{27}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}50} \approx 1{,}15;$$

$$\left(\frac{9}{7}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{9}{7}\right)^2} = \frac{1}{\frac{81}{49}} = \frac{49}{81};$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{10}{7}\right)^{\frac{1}{3}}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{1,43}} \approx \frac{1}{1,13} \approx 0,885.$$

б) При піднесенні правильного дробу до степеня з додатним показником дістаємо результат, менший за 1, а при піднесенні правильного дробу до степеня з від'ємним показником — результат, більший за 1, наприклад:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{8}{125}; \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,70} \approx 0,84;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{9}{25}} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9};$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,6^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,36}} \approx \frac{1}{0,71} \approx 1,4$$

Властивості функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ і $0 < a < 1$, істотно різняться між собою. Тому ми спочатку розглянемо загальні властивості показникової функції, а потім окремо — її властивості, якщо $a > 1$ і якщо $0 < a < 1$.

Загальні властивості показникової функції.

1. Областю визначення показникової функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел. Справді, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, вираз a^x визначений для будь-якого x, $-\infty < x < +\infty$.

2. Показникова функція $y = a^x$ додатна при будь-якому значенні аргументу, тобто $a^x > 0$.

Неважко переконатися в тому, що показникова функція не може ні дорівнювати нулю, ні бути від'ємною, тобто областю її значень є множина всіх додатних чисел $(0; +\infty)$. Справді, a^x може дорівнювати нулю лише тоді, коли $a = 0$, але ми домовилися, що $a \neq 0$. Функція a^x може бути від'ємною лише коли $a < 0$ (і то не для всіх значень x), але ми умовилися розглядати показникову функцію лише коли $a > 0$. А при піднесенні додатного числа a до степеня x з будь-яким дійсним показником завжди матимемо додатне число.

Щоб переконатися в цьому, розглянемо всі можливі випадки:

а) Нехай $x = n$, де n — натуральне число. Тоді $a^x = a^n = aa \ldots a > 0$ як добуток додатних чисел.

б) Якщо x є дробове додатне число, тобто $x = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Але $a^m > 0$ (умова існування кореня n-го степеня).

в) Нехай x — додатне ірраціональне число. Позначимо α_1 і α_2 —наближені раціональні (додатні) значення з недостачею і з надлишком. Тоді значення a^x міститься між двома додатними числами a^{α_1} і a^{α_2} і є додатним числом.

г) Нарешті, якщо x — деяке від'ємне число, наприклад $x = -p$, то $a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Але раніше було показано, що для будь-яких додатних p $a^p > 0$ і, отже, $\frac{1}{a^p} > 0$. Звідси випливає, що сформульована властивість справедлива для будь-якого x.

Отже, графік показникової функції завжди лежить над віссю абсцис (ординати всіх точок графіка додатні) і не перетинає її ($y \neq 0$).

3. Якщо $x = 0$, показникова функція $a^x = 1$.

Це випливає з того, що будь-яке число, крім нуля, в нульовому степені дорівнює одиниці, а ми умовилися розглядати показникову функцію, якщо $a \neq 0$.

З цієї властивості робимо висновок, що графік функції $y = a^x$ завжди проходить через точку з координатами $x = 0$; $y = 1$, тобто перетинає вісь ординат на відстані 1 від початку координат.

Розглянемо властивості показникової функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ і $0 < a < 1$.

Крім розглянутих трьох загальних властивостей показникової функції доведемо її властивості для випадків, коли основа більша і відповідно менша від одиниці.

Нехай $a > 1$.

Якщо $a > 1$, функція a^x при зростанні x монотонно зростає. Самостійно доведіть, що коли $a > 1$, то для будь-якого $x_2 > x_1$ справджується нерівність $a^{x_2} > a^{x_1}$, тобто $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$.

Якщо $a > 1$, то при необмеженому зростанні показника x функція $y = a^x$ необмежено зростає, а при необмеженому спаданні показника x функція набуває значень як завгодно близьких до нуля.

Якщо $a > 1$, то показникова функція $y = a^x$ більша від 1 для всіх додатних значень x і менша від 1 для всіх від'ємних значень x, тобто $a^x > 1$ для $x > 0$ і $a^x < 1$ для $x < 0$.

Розглянемо можливі випадки для значень x.

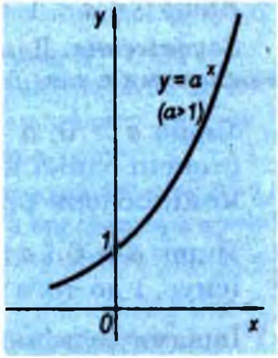
а) Нехай $x = n$ — натуральне число. Тоді $a^n > 1$, бо добуток чисел, більших від 1, є число, також більше від 1.

б) Якщо $x = \frac{m}{n}$, де m і n — взаємно прості натуральні числа, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 1$, бо корінь будь-якого степеня з числа, більшого за 1 ($a^m > 1$), є число, також більше за 1.

в) Якщо x — додатне ірраціональне число і α_1 —наближене раціональне значення x з недостачею, то $a^{\alpha_1} > 1$; тому і $a^x > 1$.

г) Якщо x — будь-яке від'ємне число, наприклад $x = -p$, то $a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, але за попереднім $a^p > 1$. Отже, $\frac{1}{a^p} < 1$, тобто $a^x < 1$.

Таким чином, ми довели, що коли $a > 1$, функція $a^x < 1$, якщо $x < 0$ і $a^x > 1$, якщо $x > 0$ (мал. 91). Ця властивість дає змогу встановити, в яких частинах координатної площини буде розміщений графік функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ (на мал. 92 ці частини заштриховано).



Мал. 91

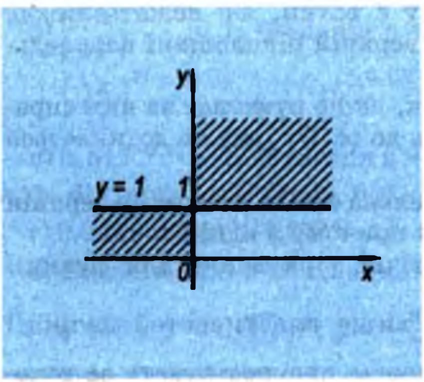
Нехай $0 < a < 1$.

1. Якщо $0 < a < 1$, функція a^x при зростанні x монотонно спадає (мал. 93).

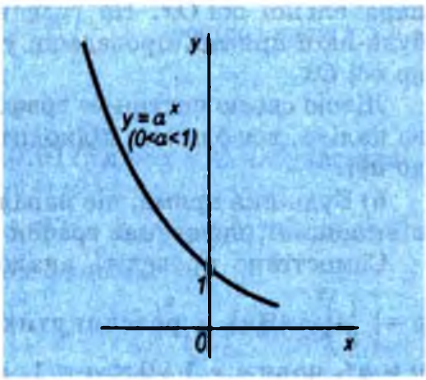
2. Якщо $0 < a < 1$, функція $y = a^x$ при необмеженому зростанні показника x набуває значень як завгодно близьких до нуля, а при необмеженому спаданні показника x функція необмежено зростає.

3. Якщо $0 < a < 1$, то показникова функція a^x більша за 1 для всіх від'ємних значень x і менша за 1 для всіх додатних значень x, тобто $a^x > 1$ для $x < 0$ і $a^x < 1$ для $x > 0$. Справедливість цих тверджень випливає з того, що значення показникової функції з основою, меншою від 1, обернені до відповідних значень показникової функції з основою, більшою від 1:

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}.$$



Мал. 92



Мал. 93

Якщо $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$.

Зауваження. Для застосування показникової функції дуже важливими є такі її властивості (подамо їх без доведення).

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$, тобто якщо степені однієї й тієї самої додатної, відмінної від одиниці, основи рівні, то рівні й показники степенів.

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то яке б не було додатне число N, існує, і до того ж єдине, таке значення x, що $a^x = N$.

Іншими словами, за цих умов має розв'язок і до того ж тільки один рівняння $a^x = N$.

Властивості графіка показникової функції. Графік показникової функції називається **експонентою.**

Ми розглянули властивості графіка показникової функції $y = a^x$, якщо $a > 1$ на прикладі функції $y = 2^x$.

Складемо таблицю значень показникової функції для деяких значень x ($x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$) і побудуємо відповідний графік (див. мал. 86).

Він має такі властивості.

1) Графік розміщений у верхній півплощині, тобто там, де ординати додатні.

2) Будь-яка пряма, паралельна осі Oy, перетинає графік і до того ж тільки в одній точці.

3) Крива проходить через точку $(0; 1)$, тобто коли $x = 0$, функція чисельно дорівнює 1.

4) З двох точок графіка вище розміщена та, яка лежить правіше, тобто в міру просування зліва направо графік піднімається вгору.

5) На графіку є точки, які лежать вище будь-якої прямої, паралельної осі Ox. На графіку є точки, що лежать нижче будь-якої прямої, проведеної у верхній півплощині паралельно осі Ox.

Лівою своєю частиною графік, якщо рухатися за ним справа наліво, все ближче підходить до осі Ox, але не дотикається до неї.

6) Будь-яка пряма, що паралельна осі Ox і лежить у верхній півплощині, перетинає графік і причому в одній точці.

Самостійно проведіть аналогічні міркування для функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Які з розглянутих вище властивостей функції $y = a^x$, коли $a > 1$ і $0 < a < 1$, можна проілюструвати за допомогою цих графіків?

Приклади застосування властивостей показникової функції

1. Що можна сказати про числа m і n, якщо $5^m < 5^n$?

Міркуємо так: оскільки основа степеня більша за 1, то показникова функція $y = 5^x$ із зростанням аргументу зростає. Отже, дана нерівність справджується при $m < n$.

2. Що можна сказати про числа p і q, якщо $(0,3)^p < (0,3)^q$?

Тут основа степеня менша за 1, а тому із зростанням аргументу показникова функція $0,3^x$ спадає. Нерівність $(0,3)^p <$ $< (0,3)^q$ справджується, коли $p > q$.

3. Що можна сказати про додатну основу a, якщо $a^7 > a^{10}$?

З даної нерівності випливає, що значення степеневої функції a^x із зростанням аргументу спадають. Це можливо, якщо $a < 1$.

4. Який висновок можна зробити про додатну основу a, якщо $a^{-7} > a^{-3}$?

Тут функція $y = a^x$ із зростанням аргументу спадає, отже, $a < 1$.

5. Який висновок можна зробити про додатну основу a, якщо $a^{-3} < a^{-1,5}$?

Оскільки зі збільшенням показника степінь збільшується, то основа степеня $a > 1$.

6. Що можна сказати про число m, якщо $5^m < 4$?

Тут основа $a > 1$. Отже, функція $y = 5^x$ є монотонно зростаючою, причому $5^m < 4 < 5$, $m < 1$.

7. На основі властивостей показникової функції замінити знак $\vee$ в кожному з наступних випадків на знак $>$, $<$, $=$.

а) $2,17^{-0,875} \vee 1$. Функція $y = 2,17^{-0,875}$ при від'ємних значеннях аргументу ($x = -0,875$) набуває значень, менших за 1. Отже, $2,17^{-0,875} < 1$.

б) $\left(\frac{16}{15}\right)^{0,123} \vee 1$. Функція $y = \left(\frac{16}{15}\right)^{0,123}$ зростає і якщо $x > 0$, то $\left(\frac{16}{15}\right)^{x} > 1$, тому $\left(\frac{16}{15}\right)^{0,123} > 1$.

в) $0,017^{-0,23} \vee 1$. Функція $y = 0,017^x$ для $x < 0$ набуває значень, більших за 1. Отже, $0,017^{-0,23} > 1$.

г) $0,91^{0,43} \vee 3,6^{5,34}$; $0,91^{0,43} < 1$, а $3,6^{5,34} > 1$, тому $0,91^{0,43} < 3,6^{5,34}$.

8. Вказати, які з показникових функцій

$$y = 3^x;\ y = (\sqrt[3]{10})^x;\ y = \left(\frac{5}{7}\right)^x;\ y = \left(\frac{7}{5}\right)^x;\ y = 0,018^x$$

зростають. Тут слід взяти до уваги, що функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$.

9. Які з функцій $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \left(\frac{9}{5}\right)^x$; $y = \left(\frac{3}{19}\right)^x$; $y = 0{,}24^x$ спадають?

Беручи до уваги властивості функції $y = a^x$ для $a < 1$, доходимо висновку, що це функції $y = \left(\frac{3}{19}\right)^x$ і $y = 0{,}24^x$.

10. Дано кілька зростаючих функцій: $y = 2^x$; $y = 1{,}4^x$; $y = 4{,}1^x$; $y = 7^{\frac{1}{2}x}$; $y = 5^x$; $y = 1{,}11^x$. Записати їх у порядку зменшення швидкості зростання для $x > 0$.

Маємо: $y = 5^x$; $y = 4{,}1^x$; $y = 7^{\frac{1}{2}x}$; $y = 2^x$; $y = 1{,}4^x$; $y = 1{,}11^x$.

Використання показникової функції під час вивчення явищ навколишнього середовища. Багато процесів у природі і техніці математично виражаються за допомогою показникової функції.

Задача про радіоактивний розпад. Нехай T — інтервал часу, протягом якого кількість даної радіоактивної речовини зменшиться вдвоє внаслідок розпаду. T називається періодом напіврозпаду речовини (для різних речовин T має різні значення). Наприклад, $T = 4{,}56$ млрд років для урану-238; $T = 1590$ років для радію-226; $T = 3{,}81$ дня для радону-222.

Позначимо відношення будь-якого інтервалу часу t до періоду напіврозпаду даної речовини через x: $x = \frac{t}{T}$ (t і T вимірюють в одних і тих самих одиницях). Тоді x є мірою кількості періодів, які минули за умови, що за одиницю часу береться період напіврозпаду. Відношення маси m даної речовини після проходження цього часу до початкової маси M позначимо через y: $y = \frac{m}{M}$.

Можна стверджувати, що y є частиною речовини, яка залишається внаслідок розпаду після x періодів напіврозпаду.

Встановлено, що y є показниковою функцією від x такого вигляду: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Коли в цій формулі x змінюється в арифметичній прогресії ($x = 2, 3, 4, 5, \ldots$), то y зменшується в геометричній прогресії $\left(y = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$.

Більш загальною формулою, яка характеризує радіоактивний розпад, є $m = m_0 a^t$, де m — маса речовини, що розпалася; m_0 — маса речовини в початковий момент; t — час; a — стала для даної речовини.

Задача про зміну атмосферного тиску. Атмосферний тиск змінюється залежно від висоти h над рівнем моря за законом $p = p_0 a^h$, де p_0 — атмосферний тиск на рівні моря; a — деяка стала.

Задача про розмноження бактерій. Розмноження бактерій у певному середовищі відбувається так, що їх кількість N змінюється в часі за законом $N = N_0 a^{kt}$, де N_0 — початкова кількість бактерій при $t = 0$; a і k — деякі сталі.

Задача про вакуумування. Під час вакуумування кінцевий тиск пов'язаний з початковим тиском співвідношенням

$$p_2 = \left(\frac{R}{R+Q} \right)^{\frac{nt}{3}} p_1,$$

де p_2 — кінцевий тиск, мм рт. ст.; p_1 — початковий тиск, мм рт. ст.; R — об'єм, що підлягає відкачуванню, см^3; Q — об'єм газу, що відкачується насосом за один оберт, см^3; n — кількість обертів насоса, об/хв; t — час вакуумування, хв.

Задача про приріст деревини. Дерево росте так, що кількість деревини збільшується з часом за законом $M = M_0 a^{kt}$, де M — кількість деревини у даний момент, м^3; M_0 — початкова кількість деревини; t — час (у роках), який відраховують з моменту, коли об'єм деревини був M_0; k — деяка стала.

Обчислимо, наприклад, за скільки років об'єм деревини збільшиться в a разів.

Розв'язання. Якщо в деякий момент часу t $\frac{M}{M_0} = a$, то поділивши обидві частини рівності $M = M_0 a^{kt}$ на M_0, дістанемо $\frac{M}{M_0} = a^{kt}$, тобто $a^{kt} = a = a^1$. Тоді $kt = 1$ і $t = \frac{1}{k}$.

Отже, об'єм деревини збільшиться в a разів за $\frac{1}{k}$ років.

У практичному застосуванні показникова функція найчастіше має вигляд $y = Ca^{kx}$. Покажемо, що функції виду $y = a^{kx+b}$ можна надати виду $y = Ca^{kx}$.

Справді $a^{kx+b} = a^{kx} \cdot a^b$. Позначаючи $a^b = C$, дістанемо: $a^{kx}a^b = Ca^{kx}$.

Приклади.

1. Функцію $y = 3^{5x+3}$ можна подати у вигляді $y = 3^{5x} \cdot 3^3$, або $y = 27 \cdot 3^{5x}$.

2. Функцію $y = 25^{4x+\frac{1}{2}}$ можна подати у вигляді $y = 25^{4x} \cdot 25^{\frac{1}{2}}$, або $y = 5 \cdot 25^{4x}$.

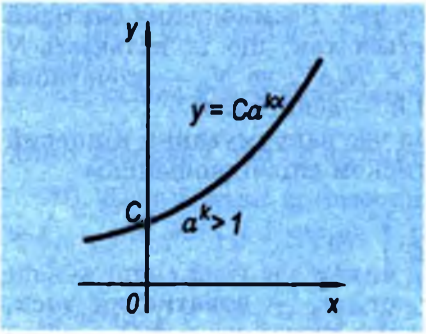
Розглянемо деякі вправи з використанням функції $y = Ca^{kx}$.

1) У якій точці перетинає вісь ординат графік функції $y = Ca^{kx}$?

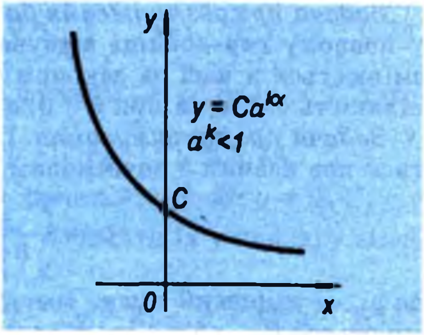
Відповідь. $(0; C)$.

2) Яке значення коефіцієнта C функції $y = Ca^{kx}$, якщо її графік перетинає вісь ординат у точці $(0; -3)$?

Відповідь. $C = -3$.



Мал. 94



Мал. 95

3) Яких значень (від'ємних чи додатних) набуває функція: а) $y = -5a^{kx}$; б) $y = 0{,}7a^{kx}$?

Відповідь: а) від'ємних; б) додатних.

4) При яких значеннях C графік функції $y = Ca^{kx}$ розміститься над віссю абсцис?

Відповідь. Якщо $C > 0$.

5) При яких значеннях C графік функції $y = Ca^{kx}$ розміститься під віссю абсцис?

Відповідь. Якщо $C < 0$.

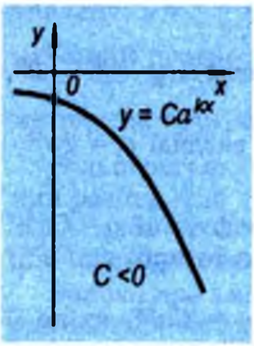
6) Чи пройдуть через одну точку графіки функцій $y_1 = Ca^{k_1x}$, $y_2 = Ca^{k_2x}$, $y_3 = Ca^{k_3x}$?

Відповідь. Так, усі вони пройдуть через точку $(0; C)$.

Розглянемо ще деякі властивості функції $y = Ca^{kx}$.

Нехай $y = Ca^{kx}$, де $C > 0$. Якщо $a^k > 1$, то графік має вигляд, зображений на малюнку 94. Це можливо у двох випадках: 1) $a > 1$, $k > 0$; 2) $0 < a < 1$, $k < 0$.

Розглянемо функцію $y = Ca^{kx}$ $(C > 0)$, графік якої зображено на малюнку 95. Це можливо, коли $a^k < 1$, тобто у двох випадках: або $0 < a < 1$, $k > 0$, або $a > 1$, $k < 0$.



Мал. 96

Якщо $C < 0$, графік функції $y = Ca^{kx}$ має вигляд, зображений на малюнку 96.

Основні показникові тотожності. Для будь-яких дійсних значень x і y правильні рівності:

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Ці формули називають основними властивостями степенів. Вони означають, що для функції a^x, яка визначена на всій числовій прямій, залишаються правильними властивості функції a^x, яка спочатку була визначена лише для раціональних x.

Нагадаємо, що раціональні числа разом з ірраціональними утворюють множину дійсних чисел (числову пряму).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Дати означення показникової функції $y = a^x$. Чому в її означенні сказано, що $a > 0$ і $a \neq 1$?

2. Назвати область визначення показникової функції a^x.

3. Які з функцій $y = x^{1,3}$; $y = 2,75^x$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = x^{-3}$; $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ є показниковими?

4. Які властивості має функція $y = a^x$, якщо $a > 1$? Для відповіді побудувати ескіз графіка цієї функції.

5. Які властивості має функція $y = a^x$, якщо $0 < a < 1$? Пояснити, користуючись ескізом відповідного графіка.

6. Яка особливість розміщення графіків функцій $y = 10^x$ і $y = 0,1^x$?

7. За яких умов $3^{x_1} > 3^{x_2}$ і $0,7^{x_1} > 0,7^{x_2}$?

8. Відомо, що $a^\alpha > a^\beta$. Що більше: α чи β, якщо $0 < a < 1$?

9. Відомо, що $a^\alpha < a^\beta$. Що більше: α чи β, якщо $a > 1$?

10. Чи правильною є нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ для $x_1 > x_2$?

11. Які з показникових функцій $y = \left(\frac{7}{11}\right)^x$; $y = 3^x$; $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$; $y = 0,027^x$ зростають?

12. Які з функцій $y = 0,26^x$; $y = (\sqrt{3})^x$; $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$; $y = \left(\frac{4}{19}\right)^x$ спадають?

13. Порівняти показники k і m, якщо правильна нерівність

а) $\pi^k > \pi^m$; б) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^k < \left(\frac{\pi}{3}\right)^m$;

в) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^k > (\sqrt{3} - \sqrt{2})^m$; г) $(\sqrt{7} - 1)^k < (\sqrt{7} - 1)^m$.

14. Чи можна, знаючи графік функції $y = a^x$, побудувати графік функції $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$? Як це зробити?

15. Порівняти число a з одиницею в кожній з таких нерівностей:

а) $a^{1,27} > a^{0,419}$; б) $a^{\frac{5}{13}} > a^{\frac{2}{7}}$; в) $a^{-0,83} > a^{0,14}$;

г) $a^{-4,2} > a^{-2,5}$; д) $a^{0,173} < a^{-\frac{11}{4}}$; е) $a^{-3} < a^{-3,01}$.

16. Що можна сказати про знак числа k, якщо:
а) $5^k = 10$; б) $7^k = 1{,}003$; в) $0{,}3^k = 100$; г) $0{,}4^k = 18$?

17. Побудувати на одному малюнку графіки функцій $y = 2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^{x+1}$. Чому графіки цих функцій не перетинаються? Які вони мають спільні властивості?

18. Якщо графіки функцій $y = a^x$ і $y = b^x$ симетричні відносно осі ординат, то яке співвідношення існує між a і b?

19. Чи мають спільну точку графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{5}{27}\right)^x$?

20. Як розміщені графіки функцій $y = a^x$ і $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) один відносно іншого?

21. В якій точці перетинається графік функції $y = 7{,}3^{-0{,}3x}$ з віссю ординат?

22. На прикладах функцій $y = x^2$ і $y = 2^x$ пояснити, чим відрізняється показникова функція від степеневої?

23. Які процеси в галузі техніки та у природі виражаються за допомогою показникової функції?

24. Довести: якщо показникова функція $y = a^x$ така, що x змінюється в арифметичній прогресії, то відповідні значення y утворюють геометричну прогресію. Знайти її знаменник.

25. У якій точці перетинають вісь ординат графіки функцій:
а) $y = 12^x$; б) $y = 0{,}07^x$; в) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?

26. У якій точці графік функції $y = 3 \cdot 2^{7x}$ перетинається з віссю абсцис?

27. Побудувати ескізи графіків функцій: а) $y = -5 \cdot 3^{-0{,}2x}$, якщо $0 < a < 1$; б) $y = -3a^{4x}$, якщо $a > 1$.

28. Чи правильне твердження: «Якщо одне зі значень функції $y = Ca^{kx}$ додатне, то функція набуває лише додатних значень, а якщо від'ємне, — то лише від'ємних»?

§ 20. Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей

Показникові рівняння.

Показниковими називають рівняння, в яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах.

Найпростішим показниковим рівнянням є

$$a^x = b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1. \tag{1}$$

Якщо замість x у показнику степеня стоїть деяка функція $f(x)$, то

$$a^{f(x)} = b, \quad a > 0, b > 0, a \neq 1. \qquad (2)$$

Загального методу розв'язування показникових рівнянь немає. Можна виділити кілька видів показникових рівнянь і навести способи їх розв'язування.

Деякі показникові рівняння можна звести до виду (1) або (2) за допомогою основних показникових тотожностей.

Найпоширенішим є спосіб зведення обох частин показникового рівняння до спільної основи. Розглянемо приклади розв'язування рівнянь.

Приклади.

1. $5^x = 5^3$. Тут $x = 3$, бо з рівності степенів при рівних основах випливає рівність їх показників.

2. $4^x = \frac{1}{16}$. Подамо праву частину рівняння як степінь 4; $4^x = 4^{-2}$. Звідси $x = -2$.

3. $17^x = 1$, $17^x = 17^0$. Звідси $x = 0$.

4. $5^x = 5\sqrt[3]{25}$; $5^x = 5 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; $5^x = 5^{1\frac{2}{3}}$. Звідси $x = 1\frac{2}{3}$.

5. $3^x = \frac{9}{\sqrt[3]{9}}$; $3^x = \frac{9}{9^{\frac{1}{3}}}$; $3^x = 9^{1-\frac{1}{3}}$; $3^x = 9^{\frac{2}{3}}$; $3^x = 3^{2\cdot\frac{2}{3}}$; $3^x = 3^{\frac{4}{3}}$; $x = \frac{4}{3}$.

6. $(0,1)^x = 1000$; $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 10^3$; $(10^{-1})^x = 10^3$; $-x = 3$; $x = -3$.

Спосіб зведення до спільної основи застосовується і під час розв'язування рівнянь виду $a^{f(x)} = b$.

7. $3^{x^2-x-2} = 81$. Подамо праву частину рівняння як степінь 3: $3^{x^2-x-2} = 3^4$. Порівняємо показники степенів у лівій і правій частинах: $x^2 - x - 2 = 4$, $x^2 - x - 6 = 0$. Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

П е р е в і р к а. $x_1 = -2$, то ліва частина $3^{4+2-2} = 3^4$, а права частина $81 = 3^4$. Якщо $x_2 = 3$, то $3^{9-3-2} = 3^4$.

Отже, $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

8. $3^{x^2-5x+6} = 1$.

$3^{x^2-5x+6} = 3^0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

9. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Звідси $2x^2 + x - 0,5 = \frac{1}{2}$; $2x^2 + x - 1 = 0$; $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} =$

$= \frac{-1\pm3}{4}$; $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Обидва значення x є коренями даного рівняння.

Для розв'язування окремих видів рівнянь застосовують спеціальні способи. Таким є, наприклад, спосіб, який називають зведенням до спільного показника.

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$. Зведемо добуток у лівій частині рівняння до спільного показника x.

Маємо: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Звідси $x = 3$.

11. $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$. Перепишемо це рівняння у вигляді $3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; $\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}} = \frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$; $3^{2x+4-3x} = 2^{x+8-2x-4}$; $3^{4-x} = 2^{4-x}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^0$; $4 - x = 0$; $x = 4$.

В окремих випадках дане показникове рівняння перетворюють відомими способами: заміни, зведення до квадратного рівняння, а потім використовують відомий спосіб.

12. $3^{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3}} = 1$; $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3} = 0$.

Зробимо заміну $\frac{x+1}{x-1} = y$, тоді $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{y}$. Маємо: $y + \frac{1}{y} - \frac{10}{3} = 0$; $3y^2 + 3 - 10y = 0$; $3y^2 - 10y + 3 = 0$; $y_1 = \frac{1}{3}$; $y_2 = 3$; $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3}$; $x_1 = -2$; $\frac{x+1}{x-1} = 3$; $x_2 = 2$.

13. $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

Маємо суму двох показникових функцій. Знайдемо їх добуток. Маємо:

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \left(\sqrt{3^2 - (\sqrt{8})^2}\right)^x = 1.$$

Зробимо заміну $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = t$; тоді $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Маємо: $t + \frac{1}{t} = 6$, звідси $t^2 - 6t + 1 = 0$, $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Отже, $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}$, звідси $x = 2$; $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}$, звідси $x = -2$.

Розв'язування нерівностей, які містять показникову функцію. Найпростішими є показникові нерівності виду $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$. Під час їх розв'язування використовують властивість монотонності показникової функції.

Функція $y = a^x$, якщо $a > 1$ — зростає, а якщо $0 < a < 1$ — спадає.

Для $a > 1$ більшому значенню функції відповідає більший показник. Отже, для $a > 1$ розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування нерівності $f(x) > \varphi(x)$. Якщо $0 < a < 1$, показникова функція спадає, тобто більшому значенню функції відповідає менший показник, і для $0 < a < 1$ розв'язування нерівності $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ зводиться до розв'язування нерівності $f(x) < \varphi(x)$.

Розглянемо приклади розв'язування нерівностей.

Приклади.

1. $3^{2-x} > 27$. Перепишемо дану нерівність у вигляді $3^{2-x} > 3^3$. Оскільки тут $a = 3$ і $3 > 1$, то $2 - x > 3$. Звідси $-x > 1$; $x < -1$.

2. $0{,}5^{5-2x} < 8$. Враховуючи, що $8 = 0{,}5^{-3}$, перепишемо дану нерівність у вигляді $0{,}5^{5-2x} < 0{,}5^{-3}$. Показникова функція спадає, бо $0{,}5 < 1$. Тому дана нерівність рівносильна нерівності $5 - 2x > -3$. Звідси $x < 4$.

3. $2^{5x+6} > 2^{x^2}$. Оскільки тут $a = 2$ $(2 > 1)$, то $5x + 6 > x^2$. Залишається розв'язати квадратну нерівність $x^2 - 5x - 6 < 0$. Маємо $(x + 1)(x - 6) < 0$. Звідси $-1 < x < 6$.

4. $\dfrac{5^{4x}}{10^{3x}} < 20^x \cdot \dfrac{1}{16^{x-1}}$. Зведемо дану нерівність до спільної основи:

$$\frac{5^{4x}}{2^{3x} \cdot 5^{3x}} < 5^x \cdot 4^x \cdot \frac{1}{2^{4(x-1)}};\ \frac{5^x}{2^{3x}} < \frac{5^x \cdot 2^{2x}}{2^{4(x-1)}};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}.$$

Оскільки $a < 1$ $\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, то $3x > 2x - 4$, $x > -4$.

5. $5^{x^2+2x} > 5^3$. $a > 1$ $(5 > 1)$, тому показникова функція зростає, і дана нерівність рівносильна нерівності $x^2 + 2x > 3$, $x^2 + 2x - 3 > 0$. Розв'язком цієї нерівності, а значить і початкової, є об'єднання інтервалів $(-\infty; -3)$ і $(1; +\infty)$.

6. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x - \dfrac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$. Введемо нову невідому $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, тоді $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = y^2$ і нерівність матиме вигляд $y^2 - \dfrac{28}{3}y + 3 < 0$; $3y^2 - 28y + 9 < 0$. Розв'язком цієї квадратної нерівності є інтервал $\left(\dfrac{1}{3}; 9\right)$, тобто $\dfrac{1}{3} < y < 9$.

Повертаючись до початкової невідомої x, маємо:

$\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$, $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Функція $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ спадає. Отже, розв'язком останньої нерівності будуть числа, які задовольняють нерівність $-2 < x < 1$.

7. $5 \cdot 3^{3x^2} > 3 \cdot 5^{3x^2}$. Поділимо почленно цю нерівність послідовно на добуток $5 \cdot 3$ і на 5^{3x^2-1}. Дістанемо $3^{3x^2-1} > 5^{3x^2-1}$; $\frac{3^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}} > \frac{5^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}}$; $\frac{3^{3x^2-1}}{5^{3x^2-1}} > 1$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x^2-1} > \left(\frac{3}{5}\right)^0$. Основа $\frac{3}{5} < 1$. Отже, дана функція спадає і $3x^2 - 1 < 0$, $x^2 < \frac{1}{3}$; $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x < 5 \cdot 6^x$. Зведемо нерівність до виду $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x < 0$. Поділимо обидві частини останньої нерівності на $3^{2x} > 0$. Дістанемо

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x < 0.$$

Зробимо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, тоді $3y^2 - 5y + 2 < 0$; $3y^2 - 5y + 2 = 0$;

$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}$; $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = 1$; $\frac{2}{3} < y < 1$; $\frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$; $0 < x < 1$.

9. $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0,5} < 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$.
Зведемо цю нерівність до виду $5 \cdot 3^{2x-1} - 3^{2x-1} < 3^{2x} + 4 \cdot 3^{2x-2}$. Винесемо спільні множники за дужки:

$3^{2x-1}(5-1) < 3^{2x-2}(9+4)$; $4 \cdot 3^{2x-1} < 13 \cdot 3^{2x-2}$; $\frac{3^{2x-1}}{3^{2x-2}} < \frac{13}{4}$;

$3 < \frac{13}{4}$. Отже, розв'язком є вся числова пряма.

10. $2^{\sqrt{1-x}} \geq x$. Враховуємо, що вираз $2^{\sqrt{1-x}}$ має смисл, якщо $x \leq 1$. Тоді $2^{\sqrt{1-x}} > 2^0 = 1$. Звідси можна дійти висновку, що $2^{\sqrt{1-x}} \geq x$, бо $x \leq 1$.

11. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 - x$. Розв'яжемо дану нерівність графічно, побудувавши графіки функцій $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = 2 - x$ в одній системі координат. Графіки перетнуться в двох точках з абсцисами $x_1 = -2$ і $x_2 \approx 1,7$. Множиною розв'язків даної нерівності є два проміжки $(-\infty; -2)$ і $(1,7; +\infty)$.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

До початку XVII ст. у математиці уникали вживання дробових та від'ємних показників степенів. Лише наприкінці XVII ст. у зв'язку з ускладненням математичних задач виникла необхідність поширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня a^n, де n — будь-яке дійсне число, дало змогу розглядати показникову функцію $y = a^x$ на множині дійсних чисел і степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел (для цілих n степенева функція визначена і для $x < 0$).

Питання, пов'язане з показниковою функцією, розробляв Леонард Ейлер. У двох розділах своєї праці «Вступ до аналізу» він описав «показникові й логарифмічні кількості». До перших належить a^x, до других — y^z. Навіть і сам показник може бути показниковою «кількістю», наприклад у виразах $a^{\alpha z}$, a^{yz}, y^{az}, x^{yz}. Ейлеру належить відкриття зв'язку між показниковою і тригонометричною функціями. Він довів, що $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$. Звідси при $x = \pi$ маємо $e^{\pi\sqrt{-1}} = \cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi$, або $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, а також співвідношення $e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$.

Показникову функцію виду $y = e^x$ почали вивчати з 40-х років XVII ст.

Іранський математик **ал-Караджі** (помер у 1016 р.) почав систематично розглядати тричленні рівняння, квадратні відносно деякого степеня невідомого, а також рівняння, що зводяться до них діленням на степінь невідомого, тобто рівняння виду $ax^{2n} + bx^n = c$, $ax^{2n} + c = bx^n$, $bx^n + c = ax^{2n}$, $ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^n$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Яке рівняння називається показниковим? Навести приклади.

2. Чи має розв'язок показникове рівняння $a^x = y$, якщо $y < 0$?

3. У чому полягає спосіб зведення до спільної основи під час розв'язування показникових рівнянь?

4. У чому полягає спосіб винесення за дужки спільного множника під час розв'язування показникових рівнянь?

5. Як розв'язують показникові рівняння виду $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$?

6. Як розв'язати графічно рівняння: а) $2^x = x + 3$; б) $2^x = x^3$; в) $2^x = \frac{8}{x}$?

7. Записати в аналітичній формі показникову нерівність найпростішого виду.

8. Якою властивістю показникової функції $y = a^x$ користуються під час розв'язування показникових нерівностей? Розглянути випадки $a > 1$ і $0 < a < 1$.

ВПРАВИ

174. Розв'язати показникове рівняння:

А

Застосувати спосіб зведення до спільної основи:

1) $2^x = 64$; 2) $2^{2x} = 512$; 3) $2^{-x} = 16$; 4) $2^{x+1} = 32$;

5) $3^{2x-1} = 81$; 6) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{25}$; 7) $3^{2x-1} = 1$;

8) $a^{x^2-7x+12} = 1$; 9) $a^{(x-1)(x+2)} = 1$.

Застосувати спосіб зведення до спільного показника:

10) $2^x \cdot 5^x = 0{,}01$; 11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$.

Розв'язати способом в инесення спільного множника за дужки:

12) $2^{x+2} - 2^x = 96$; 13) $7^x - 7^{x-1} = 6$; 14) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28$.

Розв'язати рівняння, зводячи його до виду $a^{2x} + a^x + b = 0$:

15) $4^x + 2^x = 72$; 16) $4^x + 2^{x+1} = 8$.

Б

17) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$; 18) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$;

19) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; 20) $(0{,}25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$;

21) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$;

22) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;

23) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; 24) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$;

25) $4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 60$;

26) $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$;

27) $5 \cdot 3^{2x-1} - 9^{x-0{,}5} = 9^x + 4 \cdot 3^{2x-2}$;

28) $2^{3x-3} - 2 + 2^{3-3x} = 0$;

B

29) $3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}$;

30) $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$;

31) $2^{3(x-1)}-128\cdot 2^{3(2-x)}=48$; 32) $2^{2x-3}-3\cdot 2^{x-2}+1=0$;

33) $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$;

34) $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=62$;

35) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$;

36) $\sqrt[x+1]{a^3}\cdot\sqrt[x+1]{a^2}=\frac{1}{a^5}\sqrt[4]{(a^x)^{10}}$; 37) $2^{x-2}=3^{x-2}$;

38) $(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=\frac{(a-b)^{2x-2}}{(a+b)^2}$; 39) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}}=\frac{3^{15}}{6^{12-12x}}$;

40) $7^{2\sin x+\sqrt{3}}=1$; 41) $(\sqrt{3})^{\sqrt{10x-5}+\sqrt{10x-29}}=\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}$;

42) $2^{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{2^{\sqrt{6}}}=4^{\sqrt{x+1}}$; 43) $4^{2x}-3^{2x-\frac{1}{2}}=3^{2x+\frac{1}{2}}-2^{4x-1}$;

44) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot 35+7^x\cdot 35=0$;

45) $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$;

46) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$; 47) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$;

48) $5^{x^2-6x-35\frac{1}{3}}=625\sqrt[3]{25}$; 49) $4^{4(x+1)}=\sqrt[5]{16^{x+100}}$;

50) $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

175. Розв'язати показникову нерівність:

A

1) $2^x>\frac{1}{2}$; 2) $10^{3x+2}>100$; 3) $(0{,}3)^x>0{,}09$;

4) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-x}<\left(\frac{5}{6}\right)^6$; 5) $0{,}5^{2x}<1$; 6) $4^{5-2x}\le 0{,}25$;

7) $\frac{1}{7^{3x}}<49$; 8) $2^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$.

Б

9) $\left(\sqrt{3}\right)^x \le \frac{1}{9}$;   10) $0{,}7^{5-2x} < 0{,}49$; 11) $0{,}7^{8-x^2} > 0{,}7^{2x}$;

12) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$; 13) $16^{\frac{x+10}{x-10}} < 0{,}125$;

14) $3 \cdot 9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$; 15) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \sqrt[4]{1{,}5}$;

16) $(\sqrt{13})^{x^2-2} > (\sqrt{14})^{x^2-2}$; 17) $2^{x^2-6x-2{,}5} < 16\sqrt{2}$;

18) $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 < 0$.

В

19) $8 \cdot 7^{2x^3-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} > 0$; 20) $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$;

21) $12^x \cdot 11^{\sqrt{x}} - 11^{\sqrt{x}} \cdot 12^{\sqrt{x}} < 0$; 22) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3{,}75}$;

23) $9^x + 6^x > 2^{2x+1}$; 24) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-3} < \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^x}$;

25) $4^x - 3^{x-0{,}5} > 3^{x+0{,}5} - 2^{2x-1}$; 26) $9^x - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} > 0$;

27) $2^{x+6} + 2^{x+7} > 24$; 28) $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \ge 1$;

29) $25^{-x} + 5^{-x+1} \ge 50$; 30) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \le 7 \cdot 10^x$;

31) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$; 32) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

33) $5^{2x+1} > 5^x + 4$; 34) $4^x \le 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$;

35) $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

РОЗДІЛ

5 ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

Винахід логарифмів, скоротивши роботу астронома, продовжив йому життя.

П'єр Лаплас

§ 21. Логарифм числа

Поняття логарифма. Розглянемо рівність $4^3 = 64$. У цій рівності число 3 є показником степеня, до якого слід піднести число 4, щоб дістати 64. Аналогічно в рівності $5^{-2} = \frac{1}{25}$ число (-2) є показником степеня, до якого треба піднести число 5, щоб дістати $\frac{1}{25}$. У загальному випадку в рівності $a^x = N$ число x є показником степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число N.

Розглянемо рівняння $a^x = N$, де a і N — деякі числа, причому $a > 0$ і $a \neq 1$. Якщо $N \leq 0$, то це рівняння не має коренів, бо значення показникової функції $y = a^x$ додатні при будь-якому x.

Для $N > 0$ рівняння має корінь, і до того ж єдиний. Справді, областю значень показникової функції $y = a^x$ при $a \neq 1$ є множина додатних чисел (отже, корінь рівняння існує). Крім того, кожне своє значення показникова функція набуває лише при одному значенні аргументу (отже, цей корінь єдиний).

Корінь рівняння $a^x = N$, де $a > 0$, $a \neq 1$, *називають* логарифмом числа N за основою a.

Логарифмом числа N за основою a ($a > 0$ і $a \neq 1$) називається показник степеня x, до якого треба піднести a, щоб дістати число N.

Слово «логарифм» замінюють символом log, праворуч від якого (трохи нижче) записують те число, яке називають основою.

Так, замість того щоб писати «логарифм числа 81 за основою 3» скорочено пишуть $\log_3 81$.

Те, що число x є логарифмом числа N за основою a, записують так: $\log_a N = x$.

Цю рівність читають так: логарифм числа N за основою a дорівнює x. Наприклад, з рівностей $5^3 = 125$; $6^{-2} = \frac{1}{36}$; $7^0 = 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$ випливає, що $\log_5 125 = 3$; $\log_6 \frac{1}{36} = -2$; $\log_7 1 = 0$; $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$.

Зазначимо, що вирази $\log_4(-64)$, $\log_3 0$ не мають смислу, бо рівняння $4^x = -64$, $3^x = 0$ не мають коренів.

Вираз $\log_a N$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, має смисл лише при $N > 0$.

Логарифмічна рівність $\log_a N = b$ і показникова рівність $a^b = N$ виражають одне й те саме співвідношення між числами a, b і N.

За цими рівностями можна знайти одне з трьох чисел, що входять до них, якщо задано два інші.

Відповідно до цього можна розв'язати три задачі.

1) Знайти число N за даним його логарифмом b і за основою a.

2) Знайти основу a за даним числом N і його логарифмом b.

3) Знайти логарифм b даного числа N за даною основою a.

Широко використовують так звані десяткові логарифми, тобто логарифми за основою 10. Для них застосовують замість символу $\log_{10}$ символ lg (без зазначення основи), наприклад $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 1000 = 3$, $\lg 0{,}1 = -1$.

Основна логарифмічна тотожність. Розглянемо показникову рівність

$$a^x = N. \tag{1}$$

За означенням логарифма,

$$x = \log_a N. \tag{2}$$

Замінюючи в рівності (1) x на його значення з рівності (2), дістанемо:

$$\boxed{a^{\log_a N} = N}. \tag{3}$$

Рівність (3) називається **основною логарифмічною тотожністю.** Вона є коротким записом означення логарифма: $\log_a N$ є показником степеня, до якого треба піднести основу степеня a, щоб дістати N. Наприклад: $5^{\log_5 125} = 125$; $10^{\lg 1000} = 1000$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 9} = 9$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

1. Записати у вигляді логарифмічних рівностей:

а) $2^7 = 128$; б) $5^{-3} = \frac{1}{125}$; в) $216^{\frac{1}{3}} = 6$.

Розв'язання. Застосовуючи означення логарифма даного числа за даною основою, маємо:

а) $\log_2 128 = 7$; б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; в) $\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$.

2. За означенням логарифма, перевірити справедливість таких рівностей: *а*) $\log_5 625 = 4$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$.

Це так, оскільки: а) $5^4 = 625$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

3. За означенням логарифма, визначити, яке число має логарифм 3 за основою 7.

Розв'язання. За умовою $\log_7 x = 3$, звідси $x = 7^3$; $x = 343$.

4. За якою основою логарифм числа 10 000 дорівнює 4?

Розв'язання. Маємо: $\log_x 10\,000 = 4$, $x^4 = 10\,000$, $x = \sqrt[4]{10\,000}$; $x = 10$.

5. Знайти: а) логарифм числа $\frac{1}{343}$ за основою 7;

б) логарифм числа 16 за основою $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Маємо: *а*) $\log_7 \frac{1}{343} = x$; $7^x = \frac{1}{343}$; $7^x = 7^{-3}$; $x = -3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = x$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$, $x = -4$.

6. Знайти основу x, якщо $\log_x \frac{1}{49} = -2$.

Розв'язання. Маємо: $x^{-2} = \frac{1}{49}$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{49}$; $x^2 = 49$; $x = 7$.

7. Знайти число x, якщо: *а*) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; б) $\log_{0,1} x = -1$.

Розв'язання. Переходячи від логарифмічних рівностей до показникових, маємо: а) $x = (\sqrt{2})^4 = 4$; б) $x = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10$.

8. За якої основи: а) логарифм числа 3 дорівнює 3; б) логарифм числа $\frac{1}{3}$ дорівнює $\frac{1}{3}$?

Розв'язання. Маємо: а) $\log_x 3 = 3$, або $x^3 = 3$, звідси $x = \sqrt[3]{3}$; б) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, або $x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$. Піднісши обидві частини цієї рівності до куба, дістанемо: $x = \frac{1}{27}$.

9. Обчислити вираз: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$; б) $\log_3 \log_3 27$.

Розв'язання. Маємо: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$; б) позначимо $\log_3 \log_3 27 = x$. За означенням логарифма, $3^x = \log_3 27$, або $3^x = 3$, звідси $x = 1$.

10. За допомогою основної логарифмічної тотожності перетворити рівність $2^5 = 32$.

Розв'язання. Маємо: $2^{\log_2 32} = 32$.

11. Обчислити: а) $1{,}9^{\log_{1,9} 8}$; б) $a^{2\log_a N}$.

Розв'язання. Маємо: а) $1{,}9^{\log_{1,9} 8} = 8$; б) $a^{2\log_a N} = (a^{\log_a N})^2 = N^2$.

12. Обчислити: а) $4^{-\log_4 20}$; б) $5^{\log_5 9 - \log_5 10}$; в) $49^{\log_7 8}$.

Розв'язання. а) За означенням степеня з від'ємним показником, $4^{-\log_4 20} = \frac{1}{4^{\log_4 20}} = \frac{1}{20}$;

б) У показнику маємо різницю, а показники степенів віднімаються при діленні. Отже, $5^{\log_5 9 - \log_5 10} = \frac{5^{\log_5 9}}{5^{\log_5 10}} = \frac{9}{10}$;

в) Враховуючи, що $49 = 7^2$, дістанемо:
$49^{\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = 8^2 = 64$. Отже, $49^{\log_7 8} = 64$.

13. Обчислити: а) $1 + 5^{\log_5 8}$; б) $2^{1 + 3\log_2 5}$; в) $\frac{a^{3\log_a N} + a^{2\log_a N}}{N^2}$; г) $81^{0,5\log_3 7}$; ґ) $10^{\lg 2}$; д) $10^{2 + \lg 0,05}$.

Розв'язання. Маємо: а) $1 + 5^{\log_5 8} = 1 + 8 = 9$;

б) $2^{1 + 3\log_2 5} = 2 \cdot 2^{3\log_2 5} = 2 \cdot (2^{\log_2 5})^3 = 2 \cdot 5^3 = 250$;

в) $\frac{a^{3\log_a N} + a^{2\log_a N}}{N^2} = \frac{(a^{\log_a N})^3 + (a^{\log_a N})^2}{N^2} = \frac{N^3 + N^2}{N^2} = N + 1$;

г) $81^{0,5\log_3 7} = (3^{0,5\log_3 7})^4 = 3^{2\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2 = 7^2 = 49$;

ґ) $10^{\lg 2} = 2$; д) $10^{2 + \lg 0,05} = 10^2 \cdot 10^{\lg 0,05} = 100 \cdot 0{,}05 = 5$.

Основні властивості логарифмів виражаються в ряді теорем, на яких ґрунтується практичне застосування логарифмів.

Теорема 1.

Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів, тобто

$$\boxed{\log_a(N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2, \text{ де } N_1 > 0,\ N_2 > 0}\ .$$

Доведення. Позначимо $\log_a N_1 = x_1$ і $\log_a N_2 = x_2$. За означенням логарифма, $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. Перемножуючи почленно ці рівності, дістанемо: $N_1N_2 = a^{x_1 + x_2}$. Тут $x_1 + x_2$ є показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює добутку. Отже, можна записати: $\log_a(N_1 N_2) = x_1 + x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 на їх вирази через логарифми, остаточно дістанемо: $\log_a(N_1N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$. Теорему доведено для окремого випадку — для двох множників. Але її можна довести і для будь-якого скінченного числа множників, бо при знаходженні добутку скінченного числа степенів однієї й тієї самої основи показники степенів додаються. Отже, взагалі, $\log_a(N_1N_2N_3 \ldots N_n) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + + \log_a N_n$, де $N_1 > 0$, $N_2 > 0, \ldots, N_n > 0$ (пропонуємо самостійно довести теорему для випадку трьох множників).

Зазначимо, що для доведення цієї теореми можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю, а саме: нехай, як і раніше, $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. За основною логарифмічною тотожністю, $N_1 = a^{\log_a N_1}$, $N_2 = a^{\log_a N_2}$. Перемножуючи почленно ці рівності, дістанемо: $N_1N_2 = a^{\log_a N_1} a^{\log_a N_2} = a^{\log_a N_1 + \log_a N_2}$. За означенням логарифма,

$$\log_a(N_1N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

Теорема 2.

Логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника), тобто

$$\boxed{\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2, \text{ де } N_1 > 0,\ N_2 > 0}\ .$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\log_a N_1 = x_1$ і $\log_a N_2 = x_2$. Тоді $N_1 = a^{x_1}$, $N_2 = a^{x_2}$. Поділимо почленно першу рівність на другу: $\frac{N_1}{N_2} = a^{x_1 - x_2}$. Тут $x_1 - x_2$ є показником степеня, до якого слід піднести основу a, щоб дістати число, що дорівнює частці $\frac{N_1}{N_2}$. Отже, маємо: $\log_a \frac{N_1}{N_2} = x_1 - x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 на їх вирази через логарифми, остаточно дістанемо:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

Наслідок.

Логарифм дробу, чисельник якого дорівнює одиниці, дорівнює логарифму знаменника, взятому з протилежним знаком.

(Обґрунтуйте це твердження самостійно. Можна також довести теорему 2, користуючись основною логарифмічною тотожністю.)

Теорема 3.

Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня, тобто

$$\boxed{\log_a(N^m) = m\log_a N, \text{ де } m \text{ — будь-яке число, } N > 0}\ .$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\log_a N = x$, тоді $N = a^x$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня m: $N^m = a^{mx}$. Тут mx — показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює N^m. Отже, переходячи до логарифмів, дістанемо: $\log_a(N^m) = mx$. Замінимо x на його вираз через логарифм і остаточно матимемо: $\log_a(N^m) = m\log_a N$.

Теорема 4.

Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня, тобто

$$\boxed{\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{\log_a N}{k}}\ .$$

Д о в е д е н н я. Нехай треба знайти $\log_a \sqrt[k]{N}$. Замінюючи радикал на степінь з дробовим показником і застосовуючи теорему 3, дістанемо:

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \log_a N^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\log_a N = \frac{\log_a N}{k}.$$

Теорема 5.

Якщо логарифми двох додатних чисел за тією самою основою рівні, то й самі числа рівні. І навпаки, якщо два додатні числа рівні, то і їх логарифми за тією самою основою рівні.

Д о в е д е н н я. Нехай $\log_a b = \log_a c$, $a > 0, a \neq 1$, $b > 0, c > 0$. Позначимо $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Тоді $a^x = b$, $a^y = c$. За властивістю показникової функції, якщо $x = y$, то $b = c$.

Обернене твердження пропонуємо довести самостійно.

До основних властивостей логарифмів належать ще такі.

1) Логарифм одиниці дорівнює нулю. Це випливає з означення степеня з нульовим показником. Якщо $a \neq 0$, $a^0 = 1$, але тоді $\log_a 1 = 0$.

2) Логарифм основи дорівнює одиниці, тобто $\log_a a = 1$. Це випливає з того, що $a^1 = a$.

Основні властивості логарифмів широко використовуються під час перетворення виразів, що містять логарифми. Окремим видом таких перетворень є логарифмування виразів.

Прологарифмувати одночлен означає виразити його логарифм через логарифми додатних чисел (позначених цифрами і літерами), що входять до його складу.

Користуючись теоремами про логарифм добутку, частки, степеня і кореня, можна прологарифмувати будь-який одночленний вираз.

Подані вище рівності справедливі для будь-якої основи a, що задовольняє умови $a > 0, a \neq 1$. Умовимося під час логарифмування основою вважати число 10.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Прологарифмувати вирази:

1. $x = 5ac$ $(a > 0,\ c > 0)$.

Р о з в' я з а н н я. Даний вираз є добутком, а тому, за теоремою 1: $\lg x = \lg 5 + \lg a + \lg c$.

2. $x = \frac{m}{n}$ $(m > 0,\ n > 0)$.

Р о з в' я з а н н я. За теоремою 2: $\lg x = \lg m - \lg n$.

3. $x = 11a^2b^3$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Р о з в' я з а н н я. За теоремами 1 і 3:

$$\lg x = \lg 11 + 2\lg a + 3\lg b.$$

4. $x = \frac{a^4 b}{7c^5}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

Р о з в' я з а н н я. $\lg x = \lg (a^4b) - \lg (7c^5) = 4\lg a + \lg b - \lg 7 - 5\lg c$.

5. $x = \sqrt[4]{3a^3b}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Р о з в' я з а н н я. За теоремою 4:

$\lg x = \frac{1}{4}\lg(3a^3b) = \frac{1}{4}\lg 3 + \frac{3}{4}\lg a + \frac{1}{4}\lg b.$

6. $x = \frac{(a+b)^4\sqrt[5]{c}}{\sqrt[3]{(a-b)^2d^2}}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Розв'язання. $\lg x = 4\lg(a+b) + \frac{1}{5}\lg c - \frac{1}{3}(2\lg(a-b) + 2\lg d)$.

7. Знайти x, якщо: $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$.

Розв'язання. $\log_7 x = \log_7 \frac{12}{4}$; $\log_7 x = \log_7 3$.

Але якщо логарифми чисел x і 3 при одній і тій самій основі 7 рівні, то і числа будуть рівні. Отже, $x = 3$.

8. Обчислити, не користуючись допоміжними засобами:
а) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5$;
Розв'язання. $\log_3 2 + \log_3 4{,}5 = \log_3(2\cdot 4{,}5) = \log_3 9 = 2$.
б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$.
Розв'язання. $\log_2 7 - \log_2\frac{7}{16} = \log_2 \frac{7}{\frac{7}{16}} = \log_2 16 = 4$.

9. Нехай $\log_a b = 0{,}45$; $\log_a c = 0{,}4$; $\log_a d = 0{,}85$; $\log_a k = -0{,}25$. Знайти $\log_a x$, якщо $x = \frac{b^2\sqrt[8]{c}}{dk^3}$.

Розв'язання. $\log_a x = 2\log_a b + \frac{1}{8}\log_a c - \log_a d - 3\log_a k = 0{,}9 + 0{,}05 - 0{,}85 + 0{,}75 = 0{,}85$.

Деякі важливі тотожності, що містять логарифми.

1) Доведемо тотожність $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, або $\log_b a \log_a b = 1$.

Нехай $\log_b a = x$. Тоді, за означенням логарифма, $b^x = a$. Логарифмуючи цю рівність за основою a, дістанемо: $x\log_a b = 1$, звідси $x = \frac{1}{\log_a b}$, тобто $\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$.

2) Доведемо тотожність $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, що має такий зміст: якщо число, що стоїть під знаком логарифма, і основу логарифма піднести до будь-якого степеня, то значення логарифма не зміниться.

Нехай $\log_a N = x$. Тоді $a^x = N$ і $a^{kx} = N^k$, або $(a^k)^x = N^k$. Тут x — показник степеня, до якого треба піднести вираз a^k, щоб дістати N^k. Отже, $x = \log_{a^k} N^k$.

Підставляючи замість x його значення, остаточно дістанемо: $\boxed{\log_a N = \log_{a^k} N^k}$.

За цією тотожністю маємо, наприклад: $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_8 125$; $\log_{\sqrt[3]{a}} x = \log_a x^3 = 3\log_a x$.

3) Доведемо тотожність $\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N$.

Нехай $\log_{a^n} N = x$, тоді $a^{nx} = N$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня $\frac{1}{n}$, дістанемо: $a^x = N^{\frac{1}{n}}$. Тепер прологарифмуємо останню рівність за основою a. Маємо: $x = \frac{1}{n}\log_a N$, тобто $\boxed{\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

1. Що більше: $\log_4 3$ чи $\log_{10} 9$? $\log_4 3 = \log_{4^2} 3^2$, отже, $\log_4 3 = \log_{16} 9$. Таким чином, $\log_4 3 < \log_{10} 9$.

2. Обчислити $\log_{\sqrt[3]{3}} 8$, знаючи, що $\log_{12} 3 = a$; $\log_{\sqrt[3]{3}} 8 = \log_3 64 = \log_3 4^3 = 3\log_3 4 = 3\log_3 \frac{12}{3} = 3(\log_3 12 - \log_3 3)$.

Використовуючи тотожність $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, дістаємо $\log_3 12 = \frac{1}{\log_{12} 3}$. Отже, $\log_{\sqrt[3]{3}} 8 = 3(\log_3 12 - \log_3 3) = 3\left(\frac{1}{\log_{12} 3} - 1\right) = 3\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{3(1-a)}{a}$.

Потенціювання. Перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа (виразу) визначають саме число (вираз), називають **потенціюванням.** Це перетворення є оберненим до логарифмування.

Застосовуючи теореми логарифмування, іноді можна вирази, що містять логарифми чисел або виразів, перетворити на логарифм одного числа або виразу.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

1. Знайти x за даним його логарифмом:

$$\lg x = 5\lg a - 3\lg c.$$

За теоремою про логарифм степеня, $\lg x = \lg a^5 - \lg c^3$; за теоремою про логарифм частки, $\lg x = \lg \frac{a^5}{c^3}$.

Якщо логарифми виразів x і $\frac{a^5}{c^3}$ за однією і тією самою основою рівні, то і вирази будуть рівні, тобто $x = \frac{a^5}{c^3}$.

2. Знайти z за даним його логарифмом:

$$\lg z = \frac{11}{12}\lg a - \lg 7 - \lg b.$$

Маємо: $\lg z = \lg \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{7b}$; $z = \frac{\sqrt[12]{a^{11}}}{7b}$.

У даному разі потенціювання виконали без проміжних записів.

3. Звільнитися від логарифмів: $\lg B - \lg A = \frac{b}{c}\lg m - 2\lg n$.

Маємо: $\lg \frac{B}{A} = \lg \frac{\sqrt[c]{m^b}}{n^2}$; $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt[c]{m^b}}{n^2}$.

4. Спростити вирази:

а) $\lg \frac{(m+n)^2}{a} + \lg \frac{ab}{m^2-n^2} + \lg \frac{m-n}{b}$.

Маємо: $\lg\left(\frac{(m+n)^2}{a}\,\frac{ab}{m^2-n^2}\,\frac{m-n}{b}\right) = \lg(m+n)$.

б) $\lg N = \frac{3}{4}\lg a - 2\lg b - \lg c + \lg(a+b)$.

Маємо: $\lg N = \lg \frac{\sqrt[4]{a^3}\,(a+b)}{b^2c}$, звідси $N = \frac{\sqrt[4]{a^3}\,(a+b)}{b^2c}$.

Перехід від однієї основи логарифмів до іншої. Часто необхідно здійснити перехід від логарифмів за однією основою до логарифмів за іншою основою. Нехай відомо $\log_a N$ і треба знайти $\log_b N = x$ (x —невідоме число), де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. За означенням логарифма, $b^x = N$. Прологарифмуємо останню рівність за основою a. Маємо: $x\log_a b = \log_a N$. Звідси $x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$, тобто

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}. \qquad (1)$$

Таким чином, логарифм будь-якого додатного числа N за основою b дорівнює логарифму того самого числа за іншою основою a, поділеному на логарифм числа b за основою a. Цю залежність застосовують у такому вигляді:

$$\boxed{\log_a N = \log_b N \log_a b}. \qquad (2)$$

Ще раз підкреслимо, що формули (1) і (2) справедливі, якщо обидві їх частини мають смисл, тобто $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ і $b \neq 1$.

Отже, будь-який логарифм можна подати у вигляді відношення двох логарифмів, узятих за тією самою основою. Наприклад, $\log_5 10$ можна подати за основами 2 і 3 ($a > 0$, $a \neq 1$).

Так: $\log_5 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 5}$; $\log_5 10 = \dfrac{\log_3 10}{\log_3 5}$; $\log_5 10 = \dfrac{\log_a 10}{\log_a 5}$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

1. $\log_{27} 3x$ подати за основою 3.

Маємо: $\log_{27} 3x = \dfrac{\log_3 3x}{\log_3 27} = \dfrac{\log_3 3 + \log_3 x}{3} = \dfrac{1 + \log_3 x}{3}$.

2. Знаючи, що $\log_{12} 2 = a$, знайти $\log_6 16$.

Маємо: $\log_6 16 = \dfrac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \dfrac{\log_{12} 2^4}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)} = \dfrac{4\log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \dfrac{4a}{1-a}$.

3. Обчислити $\log_9 5 \log_{25} 27$.

Скористаємося залежністю $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ і зведемо логарифми до основи 10:

$$\log_9 5 \log_{25} 27 = \frac{\lg 5}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 25} = \frac{\lg 5}{2\lg 3} \cdot \frac{3\lg 3}{2\lg 5} = \frac{3}{4}.$$

Зазначимо, що в різноманітних розрахунках найчастіше використовують логарифм за основою 10, тобто десяткові логарифми.

Натуральні логарифми. В математичних дослідженнях використовують логарифми за основою, вираженою ірраціональним числом, наближене значення якого дорівнює 2,718281828459045... або ≈ 2,718. Леонард Ейлер запропонував позначити це число літерою e. Його називають **неперовим числом** на честь шотландського математика Джона Непера (1550—1617).

Логарифми з основою e називають **натуральними**, або неперовими, і позначають $\ln x$. Тут основу e не пишуть, а лише мають на увазі.

Від назви «логарифм» залишили лише одну літеру (l), друга літера (n) є початковою в слові натуральний (латинське — *naturalis*). Отже,

$$\ln x = \log_e x.$$

Наприклад, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln 2 = 0{,}693$, $\ln 3 = 1{,}098$, $\ln 10 = 2{,}303$.

За основною логарифмічною тотожністю, для будь-якого додатного числа $e^{\ln a} = a$.

Якщо відомі десяткові логарифми чисел, то можна, використовуючи формулу (2) (с. 220), обчислити відповідні натуральні логарифми. Цією самою формулою можна користуватися і для знаходження десяткових логарифмів за натуральними.

Маємо: $\ln x = \lg x \ln 10$, але $\ln 10 \approx 2{,}303$, тому $\ln x = 2{,}303 \lg x$. Ця формула дає змогу обчислити натуральні логарифми, якщо відомі десяткові. Нею можна користуватися також і для визначення десяткових логарифмів за відомими натуральними. Для цього зручно переписати її у вигляді: $\lg x = \frac{1}{2{,}303} \ln x = 0{,}434 \ln x$. Відповідно $\ln x = \frac{1}{0{,}434} \lg x$.

Число $M = \lg e \approx 0{,}434$ називають **модулем переходу** від натуральних логарифмів до десяткових. Отже, $\lg x = M \ln x$, $\ln x = \frac{\lg x}{M}$. Наприклад, $\ln 2 = \lg 2 \cdot \frac{1}{\lg e} \approx 0{,}3010 \cdot \frac{1}{\lg 2{,}718} \approx 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx 0{,}6932$.

Натуральний логарифм приблизно в 2,3 раза більший за десятковий логарифм того самого числа.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається логарифмом числа за даною основою?

2. За означенням логарифма, вказати, яке з трьох тверджень справедливе: 1) логарифм — степінь; 2) логарифм — показник степеня; 3) логарифм — основа степеня?

3. Дано рівність $27^{\frac{2}{3}} = 9$. Що тут є логарифмом, якого числа і за якою основою?

4. Довести, що $\log_a a = 1$.

5. Подати в показниковій формі логарифмічні рівності:
1) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$.

6. Знайти $\log_a \frac{P}{Q}$, якщо $\log_a P = p$ і $\log_a Q = q$.

7. Знайти $\log_a (N)^5$, якщо $\log_a N = n$.

8. Знайти $\log_a (N^{\frac{1}{4}})$, якщо $\log_a N = 4{,}28$.

9. Знаючи $\log_a C$, знайти $\log_a \sqrt[6]{C}$.

10. Чи правильно, що $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$?

11. Довести, що $\log_a 2 + \log_a 0{,}5 = 0$.

12. Чи правильно, що $\log_a ab = 1 + \log_a b$?

13. Яку дію треба виконати, щоб з рівності $\log x = \frac{2}{3}\log a$ дістати рівність $x = \sqrt[3]{a^2}$?

14. Назвати дію, обернену до потенціювання.

15. Що таке функція, обернена до даної функції f?

16. Як дістати функцію, обернену до даної?

17. Вказати особливості розміщення графіків двох взаємно обернених функцій.

18. Якщо графіки двох функцій симетричні один одному відносно бісектриси I і III координатних кутів, то чи означає це, що функції взаємно обернені?

ВПРАВИ

А

176. Перевірити правильність рівності:

1) $\log_4 16 = 2$; 2) $\log_5 125 = 3$; 3) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$;

4) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$; 5) $\lg 1 = 0$; 6) $\lg 100 = 2$.

177. Використовуючи знак логарифма, записати показник степеня з рівностей:

1) $3^4 = 81$; 2) $4^{-2} = \frac{1}{16}$; 3) $8^{\frac{1}{3}} = 2$; 4) $\sqrt[3]{27} = 3$.

178. Знайти логарифм числа за основою 2: 1) 8; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 0,5; 5) 512; 6) $\frac{1}{128}$.

179. Знайти: 1) $\log_3 \frac{1}{9}$; 2) $\log_4 64$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$; 4) $\log_{\sqrt{2}} 8$.

180. Знайдіть число x, якщо: 1) $\log_5 x = 2$; 2) $\log_6 x = 3$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$; 4) $\log_{13} x = 0$; 5) $\log_4 x = 1{,}5$; 6) $\lg x = -3$.

181. Чи має смисл вираз: 1) $\log_4(-64)$; 2) $\log_5 0$; 3) $\log_2(-4)^3$?

Б

182. Записати у логарифмічному вигляді рівність: 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = 2{,}25$; 2) $0{,}1^2 = 0{,}01$; 3) $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$; 4) $\sqrt[3]{343} = 7$.

183. Знайти логарифм числа за основою 3: 1) 3; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 81; 4) 1; 5) $\frac{1}{243}$; 6) $\sqrt{3}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) $\frac{1}{9}\sqrt{3}$.

184. Знайти x, якщо: 1) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}$; 2) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; 3) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 1$.

185. Чи має смисл вираз: 1) $\log_6 (-6)^2$; 2) $-\log_8 16$?

186. Обчислити: 1) $5\log_5 25 - 4\log_4 16$; 2) $\log_2 \log_2 16$.

187. Знайти $\log_a b$, якщо $a^2 = b$.

В

188. Знайти логарифм числа: 1) $\log_{0,2} 25$; 2) $\log_5 0,04$; 3) $\log_2 4\sqrt{2}$; 4) $\log_{2,5} 0,16$; 5) $\log_a a$; 6) $\log_a 1$; 7) $\log_a \sqrt{a}$; 8) $\log_a \sqrt[5]{a^3}$.

189. Знайти основу логарифма: 1) $\log_x 3 = 0,25$;

2) $\log_x 125 = -\frac{3}{2}$; 3) $\log_x 0,64 = -2$; 4) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$;

5) $\log_x(a^2 + 2a + 1) = 2$; 6) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$.

190. Знайти x з рівності: 1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_4 x = 2,5$; 3) $\log_5 x = 0$; 4) $\log_{49} x = -1,5$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} x = 3$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

191. Обчислити: 1) $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $\lg\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$.

192. Розв'язати рівняння: 1) $\log_2 x = 3$; 2) $\log_{0,7} x = -1$; 3) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; 4) $\log_5 (3-x) = 0$; 5) $\log_{0,4} (6 - 7x) = 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} (5x-7) = -3$.

Знайти значення виразу:

А

193. 1) $2^{\log_2 10}$; 2) $5^{\log_5 7}$; 3) $1,3^{\log_{1,3} 5}$; 4) $1 + 7^{\log_7 2}$; 5) $4^{-\log_4 7}$; 6) $4^{3\log_4 2}$.

Б

194. 1) $1,7^{\log_{1,7} 5}$; 2) $\pi^{\log_\pi 7,4}$; 3) $5^{\log_5 10 - 1}$; 4) $2^{3\log_2 4}$; 5) $2,4^{\log_{2,4} 10 + 1}$; 6) $10^{-\lg 0,8}$.

В

195. 1) $10^{\lg 0,3}$; 2) $10^{2\lg 3}$; 3) $10^{\lg 3 - \lg 2}$; 4) $81^{0,5\log_9 7}$.

196. Порівняти вирази: 1) $3^{\log_3 4}$ і $5^{\log_4 4}$;

2) $4^{\log_5 7}$ і $7^{\log_5 4}$; 3) $3^{\log_2 5}$ і $5^{\log_2 3}$.

197. Обчислити: 1) $2^{\log_2 5 + \log_2 4}$; 2) $4 \cdot 5^{1 - \log_5 25}$.

198. Довести тотожність $m^{\log_m N} = n^{\log_n N}$.

Прологарифмувати вираз:

А

199. 1) $y = \dfrac{ab^3}{c^2}$; 2) $z = \dfrac{\sqrt[5]{a}}{bc^2}$; 3) $y = a^2\sqrt[3]{b}$; 4) $x = \dfrac{a^3\sqrt{bc}}{(a+b)^2}$.

Б

200. 1) $x = \dfrac{a^2\sqrt{bc}}{3\sqrt[5]{(a+b)^3}}$; 2) $y = \dfrac{2\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{b}}$; 3) $x = 0{,}6^{\sqrt[3]{1{,}2}}$;

4) $z = \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{b^2}$.

В

201. 1) $x = 3a\sqrt[5]{a^3(a+b)^2}$; 2) $x = \sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{ab}}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$; 3) $x = (\sqrt[4]{a^3b})^2$;

4) $x = \left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[6]{a^5}}\right)^{-0,2}$; 5) $x = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$.

Знайти значення виразу:

А

202. 1) $\log_{12} 5 + \log_{12} 4$; 2) $\log_5 15 - \log_5 3$.

Б

203. $\dfrac{\lg 64 - \lg 4}{\lg 48 - \lg 12}$.

В

204. 1) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; 2) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.

205. Що більше: 1) $\log_2 9 + \log_2 7$ чи $\log_2(9 + 7)$;
2) $\log_{0,6} 1{,}3 + \log_{0,6} 1{,}2$ чи $\log_{0,6}(1{,}3 + 1{,}2)$?

Пропотенціювати вираз:

А

206. 1) $\lg x = \lg 7 + 3\lg a - \lg 5$; 2) $\log_3 y = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$;

3) $\lg y = \frac{1}{2}\lg(a + b) - 2\lg a - 3\lg b$;

4) $\lg z = \lg 2 - \lg 3 + \lg(a + b) - \lg a$.

Б

207. 1) $\lg x = \frac{1}{2}\lg(a - b) - \frac{2}{3}\lg(a + b) - \frac{2}{3}\lg a$;

2) $\lg y = \lg 2 + \lg a + 3\lg b - \lg 3 - \frac{1}{4}\lg(b - a)$.

В

208. 1) $\lg x = \frac{1}{2}\lg(a^2 + b^2) + \frac{1}{3}\lg(a + b) - \lg(a - b)$;

2) $\lg x = -\frac{1}{2}\lg a + \frac{1}{4}(\lg b - \frac{2}{3}\lg a + \frac{2}{3}\lg(a - b) - \frac{1}{2}\lg(a - b))$.

209. Знайти x, якщо: 1) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$;

2) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_\pi 6$.

210. Обчислити, не користуючись допоміжними засобами:

1) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6{,}25$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7\frac{58}{81}$.

211. Обчислити значення: 1) e^2; 2) $\frac{1}{e}$; 3) $\sqrt{e}$; 4) e^3; 5) $\ln e^3$;

6) $\ln 20$; 7) $\ln 3$; 8) $\ln 7{,}5$; 9) $\ln 1{,}21$.

§ 22. Логарифмічна функція, її графік і властивості

Поняття логарифмічної функції. Спробуємо знайти формулу функції, оберненої до показникової функції $y = a^x$, за відомим уже алгоритмом знаходження формули функції, оберненої до даної (див. с. 98).

1. Функція $y = a^x$ зростаюча при $a > 1$ і спадна при $0 < a < 1$. За достатньою умовою існування оберненої функції до даної функція $y = a^x$ має обернену на області визначення $D(f) = R$ (відповідно область значень цієї функції $E(f) = (0; +\infty)$).

2. Розв'яжемо рівняння $y = a^x$ з двома невідомими відносно невідомої x. Оскільки x є показником степеня a^x, то, застосо-

вуючи означення логарифма, матимемо $x = \log_a y = \varphi(y)$. Дістали формулу функції, оберненої до функції $y = a^x = f(x)$.

3. Поміняємо позначення аргументу і функції у формулі оберненої функції. Дістанемо $y = \log_a x = \varphi(x)$ — формулу функції, оберненої до функції $y = a^x$ у прийнятих позначеннях аргументу і функції. Одержана обернена функція дістала назву **логарифмічної функції.**

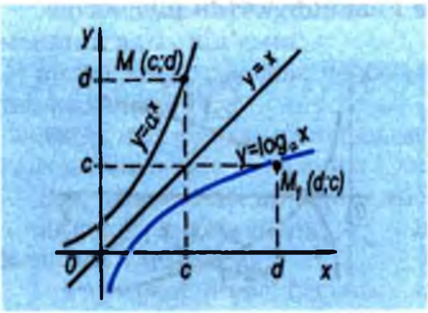
Логарифмічною називається функція $y = \log_a x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, обернена до показникової $y = a^x$

Відомо, що область визначення і область значень взаємно обернених функцій міняються множинами. Тому $D(\varphi) = (0; +\infty)$, $E(\varphi) = \mathbf{R}$.

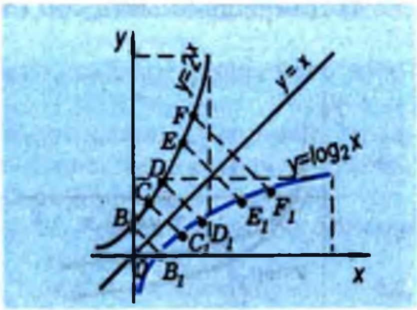
Вище було показано, що графік функції φ, оберненої до функції f, симетричний графіку f відносно прямої $y = x$. Скористаємося цим для побудови графіка функції $y = \log_a x$.

Графік функції $y = \log_a x$ можна дістати з графіка функції $y = a^x$, симетрично відобразивши останній відносно прямої $y = x$. Для цього достатньо для кожної точки $M(c; d)$ графіка $y = a^x$ (мал. 97) побудувати точку $M_1(d; c)$, симетричну їй відносно прямої $y = x$.

Якщо на аркуші паперу накреслити чорнилом графік функції $y = a^x$, а потім, не давши йому висохнути, швидко зігнути аркуш уздовж бісектриси першого і третього координатних кутів, то відбиток буде графіком логарифмічної функції $y = \log_a x$. Побудуємо, наприклад, графік функції $y = \log_2 x$. Для цього знайдемо ряд точок, симетричних точкам графіка функції $y = 2^x$ відносно прямої $y = a$ (мал. 98). Такий вигляд матиме графік логарифмічної функції за будь-якої основи $a > 1$. Причому крива тим щільніше прилягає до осі Ox, чим більше a (мал. 99). Якщо основа $0 < a < 1$, то графік матиме інший вигляд. На малюнку 100 зображено графік логарифмі-

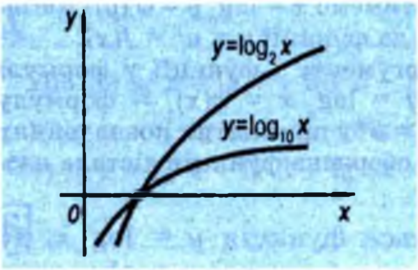


Мал. 97

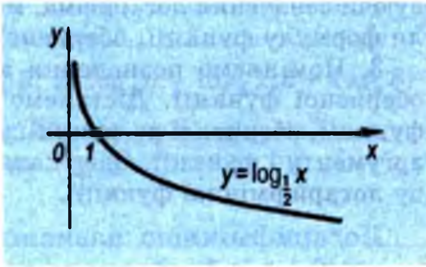


Мал. 98

8*



Мал. 99



Мал. 100

чної функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Таку загальну форму матиме графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ за будь-якої основи $0 < a < 1$, причому крива тим щільніше прилягає до осі Ox, чим менше a (мал. 101).

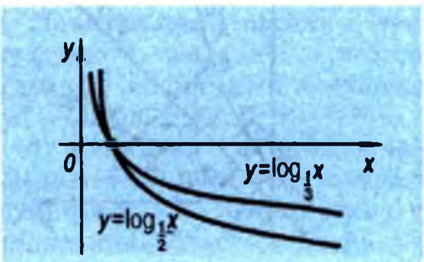
Властивості логарифмічної функції. Знаючи властивості взаємно обернених функцій, можна легко дістати властивості логарифмічної функції з показникової. Характер графіка показникової функції за основою a залежить від того, буде $a > 1$ чи $0 < a < 1$. Тому і характер графіка логарифмічної функції за основою a залежить від тих самих умов. Отже, для функції $y = \log_a x$ слід розрізняти 2 випадки: $a > 1$ і $0 < a < 1$ (мал. 102). У кожному з них властивості логарифмічної функції випливають із властивостей показникової, якщо врахувати ще зв'язок між графіками показникової й логарифмічної функцій (див. табл. 8). Отже, маємо такі **властивості логарифмічної функції**.

1) Область визначення логарифмічної функції — множина всіх додатних чисел.

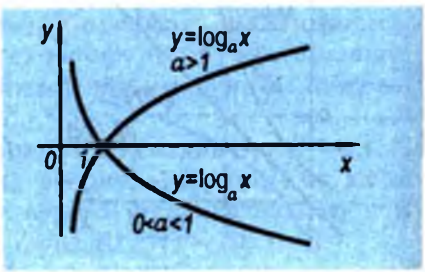
2) Область значень логарифмічної функції — множина всіх дійсних чисел.

3) Логарифмічна функція на всій області визначення R_+ зростає, якщо $a > 1$ і спадає, якщо $0 < a < 1$.

4) Для будь-якого $a > 0$ ($a \neq 1$) виконуються рівності:



Мал. 101



Мал. 102

а) $\log_a 1 = 0$; б) $\log_a a = 1$;
в) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, якщо $x > 0$, $y > 0$;

г) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, якщо $x > 0$, $y > 0$;

ґ) для будь-якого числа $x > 0$ і будь-якого $p \in R$

$$\log_a x^p = p\log_a x.$$

Для порівняння наведемо властивості показникової і логарифмічної функцій у вигляді таблиці (табл. 8).

Таблиця 8

Властивість		Функція	
		$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область визначення		R	$(0;\infty)$
Область значень		$(0;\infty)$	R
Монотонність	$a > 1$	Зростає	Зростає
	$0 < a < 1$	Спадає	Спадає

Систематизуємо властивості логарифмів, які слід запам'ятати, щоб упевнено використовувати їх під час розв'язування різноманітних вправ, виконання практичних розрахунків.

Спільні властивості для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$:

будь-яке додатне число має логарифм і до того ж тільки один;
від'ємні числа і число 0 не мають логарифмів;
логарифм одиниці дорівнює нулю;
логарифм основи дорівнює одиниці.

Властивості логарифмів чисел за основою $a > 1$:

якщо $N_1 > N_2$, то і $\log_a N_1 > \log_a N_2$, тобто більше число має більший логарифм, і навпаки;

логарифми чисел, більших за 1, додатні; логарифми чисел, менших за 1, від'ємні;

якщо число зростає необмежено, то і логарифм його зростає необмежено;

якщо число, залишаючись додатним, прямує до нуля, то логарифм його стає від'ємним і як завгодно великим за модулем.

Властивості логарифмів чисел за основою $0 < a < 1$:

якщо $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$, тобто більше число має менший логарифм;

логарифми чисел, більших за 1, від'ємні; логарифми чисел, менших за 1, додатні;

якщо число зростає необмежено, то його логарифм спадає необмежено (умовний запис: $\log_a \infty = -\infty$); якщо число, залишаючись додатним, прямує до нуля, то логарифм його необмежено зростає (умовний запис: $\log_a 0 = +\infty$).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

1. Які значення аргументу x є допустимими для функції $y = \log_a (3 - x)$?

Розв'язання. Оскільки логарифмічна функція має дійсні значення тільки при додатних значеннях аргументу, накладемо умову $3 - x > 0$, звідси $x < 3$. Отже, допустимі значення аргументу визначаються нерівністю $x < 3$.

Розглядаючи наступні вправи, перевіряйте всі твердження за графіками логарифмічної функції.

2. Який висновок можна зробити щодо додатних чисел m і n, якщо $\log_5 m < \log_5 n$?

Розв'язання. $m < n$, бо за основи, більшої від 1 ($a = 5$), меншому логарифму відповідає менше число.

3. Який висновок можна зробити щодо додатного числа m, якщо $\log_4 m = -3{,}7$?

Розв'язання. $0 < m < 1$, бо за основи, більшої від 1 ($a = 4$), від'ємними є логарифми чисел, менших за 1.

4. Який висновок можна зробити щодо додатних чисел m і n, якщо $\log_{\frac{2}{5}} m > \log_{\frac{2}{5}} n$?

Розв'язання. $m < n$, бо за основи, меншої від 1 $\left(a = \frac{2}{5}\right)$, меншому логарифму відповідає більше число.

5. Який висновок можна зробити щодо додатного числа c, якщо $\log_{\frac{1}{4}} c = -2$?

Розв'язання. $c > 1$, бо за основи, меншої від 1 $\left(a = \frac{1}{4}\right)$, логарифми чисел, більших від 1, від'ємні.

6. Який висновок можна зробити відносно основи логарифма a, якщо $\log_a 8 = 0{,}3$?

Розв'язання. Якщо число, більше від 1, має додатний логарифм, то основа логарифма більша від 1. Отже, $a > 1$.

7. Який висновок можна зробити щодо основи логарифма a, якщо $\log_a 7 < \log_a 6$?

Розв'язання. Якщо більшому числу відповідає менший логарифм, то основа логарифма менша від 1. Отже, $0 < a < 1$.

8. Застосовуючи властивості логарифмічної функції, визначити, що більше:

а) $\log_2 3$ чи $\log_2 5$? б) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ чи $\log_{\frac{1}{2}} 3$? в) $\log_5 8$ чи $\log_6 8$?

г) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ чи $\log_{\frac{1}{2}} 5$? ґ) $\log_4 5$ чи $\log_5 4$? д) $\log_2 1$ чи $\log_5 1$?

е) $\log_3 3$ чи $\log_7 7$?

Розв'язання.

а) $\log_2 5 > \log_2 3$, бо $a > 1$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, бо $a < 1$;

в) $\log_6 8 < \log_5 8$, бо коли $x > 1$, графік функції $y = \log_6 x$ лежить нижче, ніж графік функції $\log_5 x$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{2}} 5$, бо графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} 5$ менш віддалений від осі Ox, ніж відповідний графік $y = \log_{\frac{1}{2}} 5$;

ґ) $\log_4 5 > \log_5 4$, бо коли $x > 1$, всі точки графіка $y = \log_4 x$ віддалені від осі Ox більше, ніж точки графіка $y = \log_5 x$;

д) $\log_2 1 = \log_5 1 = 0$, бо логарифм 1 за будь-якою основою дорівнює нулю;

е) $\log_3 3 = \log_7 7 = 1$, бо логарифм основи дорівнює одиниці.

9. Знайти область визначення функції:

а) $y = \log_2 (5 - x)$; б) $y = \log_3 (x^2 + 1)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{2}} (5x - x^2 - 6)$; г) $y = \log_5 \frac{3+x}{x-5}$.

Розв'язання. Оскільки вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, то для встановлення областей визначення даних функцій досить знайти значення x, при яких вираз, що стоїть під знаком логарифма, додатний:

а) $5-x > 0$; $x < 5$, тобто областю визначення функції $y = \log_2(5-x)$ є проміжок $(-\infty ; 5)$.

б) $x^2 + 1 > 0$. Нерівність справджується для будь-яких дійсних значень x, тому областю визначення даної функції є $(-\infty ; +\infty)$.

в) $5x - x^2 - 6 > 0$, або $(x - 2)(x - 3) < 0$, звідси $2 < x < 3$, тобто областю визначення є проміжок $(2; 3)$.

г) $\frac{3+x}{x-5} > 0$, або $(3 + x)(x - 5) > 0$, звідси $-\infty < x < -3$; $5 < x < \infty$. Отже, областю визначення даної функції є проміжки $(-\infty ; -3)$ і $(5; +\infty)$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Як називається функція, обернена до показникової?

2. Яка показникова функція є оберненою до логарифмічної функції $y = \log_a x$?

3. Дано експоненту — графік показникової функції $y = a^x$. Як побудувати графік оберненої до неї логарифмічної функції $y = \log_a x$?

4. Чому функція $y = \log_a x$ $(a > 1)$ існує лише в області додатних чисел?

5. Чому дорівнює $\log_3 (-27)$?

6. Чи може логарифм додатного числа за основою $a > 1$ бути від'ємним?

7. Вказати будь-яке число, логарифм якого за основою $a = 9$ більший від $\log_a 15$.

ВПРАВИ

А

212. Який висновок можна зробити щодо додатних чисел m і n, якщо: 1) $\log_5 m < \log_5 n$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} m > \log_{\frac{1}{2}} n$; 3) $\log_{0,1} m < \log_{0,1} n$?

213. Який висновок можна зробити щодо числа $m > 0$, якщо: 1) $\log_2 m = -0,32$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} m = \frac{5}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} m = -3\frac{2}{5}$?

214. Який висновок можна зробити щодо основи логарифма a, якщо: 1) $\log_a 7 = 0,4$; 2) $\log_a 5 = -\frac{1}{4}$; 3) $\log_a 4 < \log_a 2$; 4) $\log_a \frac{2}{5} > \log_a \frac{2}{3}$?

Б

215. Застосовуючи властивості логарифмічної функції, визначити, що більше:

1) $\log_2 5$ чи $\log_2 8$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 6$ чи $\log_{\frac{1}{3}} 8$;

3) $\log_7 8$ чи $\log_5 8$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} 11$ чи $\log_{\frac{1}{3}} 11$.

216. Для яких значень x правильна рівність:

1) $\lg (x^2 + 5x - 14) = \lg (x + 7) + \lg (x - 2)$;

2) $\lg (x^2 - 10x + 25) = 2\lg (5 - x)$?

217. Визначити знак добутку

$\log_3 0,97 \log_2 0,98 \log_4 6,99$.

В

218. Довести, що $\log_3 0,71 \log_2 \frac{4}{11} \log_{\sqrt{5}} 0,95 < 0$.

219. Яким співвідношенням пов'язані числа M і N, коли відомо, що $\lg M = 1,4153$, а $\lg N = 3,4153$?

Знайти область визначення функції:

А

220. 1) $y = \log_2(2 + x)$; 2) $y = \log_3(x^2 + 3)$; 3) $\log_5(4 - x^2)$; 4) $y = \log_4(x^2 + x + 1)$; 5) $y = \log_2 \frac{5x - 2}{3 - x}$.

Б

221. 1) $\log_{0,1}(x^2 - 4)$; 2) $\log_{\sqrt{10}}(6 + x - x^2)$; 3) $\log_8 \frac{2 - x}{x + 1}$; 4) $\log_{0,9} \frac{2 + 3x}{5 - 2x}$.

В

222. 1) $y = \log_3(3x^2 - 7x - 40)$; 2) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x - 3)$; 3) $y = \log_7 \frac{2x + 5}{x - 1}$; 4) $y = \log_{3,1} \frac{7 - 2x}{2 - 3x}$; 5) $y = \log_2|x|$; 6) $y = \log_{0,5}|x|$.

223. Для функцій, розглядуваних у зазначених проміжках, дати відповідь на запитання: 1) при яких значеннях x значення $y < 0$, $y = 0$, $y > 0$? 2) Від якого найменшого (найбільшого) і до якого найбільшого (найменшого) значення змінюється y?

1) $y = \log_3(x-1)$, якщо $\frac{10}{9} \leq x \leq 10$;
2) $y = \log_{0,5}(x + 1)$, якщо $-0,75 \leq x \leq 7$;
3) $y = \log_4(x-2)$, якщо $0,25 \leq x \leq 64$;
4) $y = 3 - \log_5 x$, якщо $0 < x \leq 625$.

Зобразити схематично графік функції:

А

224. 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Б

225. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 3) $y = \log_{0,3} x$; 4) $y = \log_{\sqrt{0,7}} x$.

В

226. 1) $y = \ln x$; 2) $y = \ln \frac{1}{x}$; 3) $y = \ln(-x)$; 4) $y = \ln|x|$.

227. Побудувати графік функції:

А

1) $y = \lg(-x)$; 2) $y = |\log_2 x|$; 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$;

Б

4) $y = \lg(2-x)$; 5) $y = |\log_2 x - 1|$; 6) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x| - 2$;

В

7) $y = \lg|x-1|$; 8) $y = \log_{\frac{1}{2}}(1-2x)$; 9) $y = \log_2 \log_2 x$.

§ 23. Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей

Логарифмічні рівняння. Приклади розв'язування логарифмічних рівнянь.

Логарифмічними називають рівняння, які містять невідому під знаком логарифма.

Наприклад: $\log_5 x = 2$, $\lg x + \lg 5 = 2$, $\lg(3x^2+7) - \lg(3x - 2) = 1$. Рівняння $x + \log_2 7 = \sqrt{\log_4 5}$ не є логарифмічним, бо воно не містить невідомого під знаком логарифма. Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $\log_a x = b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, b — будь-яке число. Воно має єдиний розв'язок $x = a^b$, який можна дістати за допомогою потенціювання.

Розглянемо логарифмічне рівняння виду:

$$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \quad (a > 0, \; a \neq 1). \qquad (1)$$

Розв'язування цього рівняння ґрунтується на тому, що рівняння $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) = \varphi(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Інакше кажучи, рівняння $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ рівносильне кожній зі змішаних систем:

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Для розв'язування рівняння (1) досить розв'язати рівняння

$$f(x) = \varphi(x) \tag{4}$$

і його розв'язки підставити в систему нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

яка задає область визначення рівняння. Коренями рівняння (1) є тільки ті розв'язки рівняння (4), які задовольняють систему (5), тобто належать області визначення рівняння, заданого формулою (1).

Під час розв'язування логарифмічних рівнянь може відбутися розширення області визначення (з'являються сторонні корені) або її звуження (зникнуть корені). Тому треба обов'язково підставити корені рівняння (4) у систему (5).

Наприклад, рівняння $\lg x^2 = 2$ має два корені, бо, за означенням логарифма, $x^2 = 10^2$, $x^2 = 100$, звідси $x_1 = 10$; $x_2 = -10$. Якщо спочатку винести показник 2 за знак логарифма, то $2\lg x = 2$, $\lg x = 1$, $x = 10$. Втрата другого розв'язку $x = -10$ сталася внаслідок звуження множини допустимих значень x після винесення показника за знак логарифма. Справді, в рівнянні $\lg x^2 = 2$ корінь x може бути додатним і від'ємним числом, а в рівнянні $2 \lg x = 2$ — лише додатним.

Навпаки, якби заданим рівнянням було рівняння $2\lg x = 2$, а від нього ми перейшли б до рівняння $\lg x^2 = 2$, а потім — до рівняння $x^2 = 100$, звідси $x_1 = 10$, $x_2 = -10$, то дістали б сторонній розв'язок ($x_2 = -10$) для даного рівняння.

Взагалі не існує якогось загального методу розв'язування логарифмічних рівнянь. Здебільшого воно зводиться до розв'язування алгебраїчних рівнянь і найпростіших логарифмічних рівнянь виду $\log_a x = b$.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Розв'язати рівняння:

1. $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

Р о з в' я з а н н я. Застосовуючи означення логарифма, маємо: $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $x = 8$.

2. $5 \log_2 x - 3 \log_7 49 = 2 \log_2 x$.

Р о з в' я з а н н я. $5 \log_2 x - 2 \log_2 x = 3 \cdot 2$; $3 \log_2 x = 6$; $\log_2 x = 2$, $x = 4$.

П е р е в і р к а. $5 \log_2 4 - 3 \log_7 49 = 10 - 6 = 4$; $2 \log_2 4 = 4$. Отже, $x = 4$.

3. $\log_5 x + \log_5 (x + 7) = \log_5 2 + 2 \log_5 3$.

Р о з в' я з а н н я. Пропотенціюємо обидві частини рівняння:

$$x(x + 7) = 2 \cdot 3^2.$$

Звідси $x^2 + 7x - 18 = 0$, $x_1 = -9$, $x_2 = 2$.

П е р е в і р к а. Підставимо в дане рівняння замість невідомого число -9. У лівій частині дістанемо вирази $\log_5(-9)$ і $\log_5(-2)$, які не мають смислу (логарифми від'ємних чисел не існують). Отже, значення $x = -9$ є стороннім коренем. Тепер перевіримо, чи є коренем даного рівняння число 2. Ліва частина рівняння має вигляд:

$$\log_5 2 + \log_5 9 = \log_5 2 + \log_5 3^2 = \log_5 2 + 2\log_5 3.$$

Ліва частина дорівнює правій. Отже, $x = 2$ — корінь даного рівняння.

Зауважимо, що прийом потенціювання широко застосовується під час розв'язування логарифмічних рівнянь.

4. $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3.$

Р о з в' я з а н н я. $x^2 + 4x + 3 = 2^3$, або $x^2 + 4x - 5 = 0$. Коренями цього рівняння є: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$. Перевірка показує, що обидва розв'язки задовольняють дане рівняння. (Перевірку зробіть самостійно.)

5. $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) - 1 + \log_7(2x - 7) = 0.$

Р о з в' я з а н н я. Перенесемо два останні доданки у праву частину рівняння: $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$. Враховуючи, що $1 = \log_7 7$, маємо: $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = \log_7 7 - \log_7(2x - 7)$. Тепер пропотенціюємо обидві частини рівняння: $\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}$. Після перетворень дістанемо квадратне рівняння $x^2 - 9x = 0$, яке має корені $x_1 = 0$, $x_2 = 9$.

П е р е в і р к а. $x = 0$ — сторонній корінь, бо вирази $\log_7(0 - 2)$ і $\log_7(0 - 7)$ не мають смислу. Підставимо у рівняння значення $x = 9$. Ліва частина має вигляд: $\log_7 7 - \log_7 11 - 1 + \log_7 11 = 1 - \log_7 11 - 1 + \log_7 11 = 0$. Права частина дорівнює нулю, отже, $x = 9$ — корінь даного рівняння.

6. $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1.$

Р о з в' я з а н н я. $x^2 - 2x + 2 = x$, або $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Перевірка показує, що $x = 1$ не може бути коренем даного рівняння, а число 2 є його коренем.

7. $\log_{1-2x}(x^2 - 3x + 5) = 2.$

Р о з в' я з а н н я. Застосовуючи означення логарифма, дістанемо квадратне рівняння: $(1 - 2x)^2 = x^2 - 3x + 5$. Його корені $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Дане рівняння задовольняє лише значення $x = -1$ (перевірте це).

8. $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0.$

Розв'язання. Нехай $\log_4 x = y$, тоді дістанемо квадратне рівняння $y^2 - y - 2 = 0$, корені якого $y_1 = -1$, $y = 2$. Маємо два рівняння: $\log_4 x = -1$, $\log_4 x = 2$.

З першого рівняння, за означенням логарифма, знаходимо $x_1 = 4^{-1}$, $x_1 = \frac{1}{4}$. З другого рівняння маємо: $x_2 = 4^2$, $x_2 = 16$. Перевірка показує, що обидва знайдені значення x є коренями даного рівняння. (Перевірку зробіть самостійно.)

9. $\lg x = 2 - \lg 5$.

Розв'язання. Замінимо 2 через $\lg 100$. Дістанемо $\lg x = \lg 100 - \lg 5$, або $\lg x = \lg 20$. Звідси $x = 20$. Тут використано таку властивість логарифмів: якщо логарифми двох чисел за однією й тією самою основою рівні, то й самі числа рівні.

Перевірка. $2 - \lg 5 = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20$; $\lg 20 = \lg 20$.

10. $\lg x + \lg (x + 21) = 2$.

Розв'язання. $\lg x + \lg (x + 2) = \lg 100$; $x(x + 21) = 100$; $x^2 + 21x - 100 = 0$; $x_1 = -25$, $x_2 = 4$.

Перевірка. Якщо $x = -25$, то в лівій частині даного рівняння матимемо вирази $\lg(-25)$ і $\lg(-4)$, що не мають смислу. Отже, $x_1 = -25$ не є розв'язком даного рівняння. Якщо $x_1 = 4$, маємо: $\lg 4 + \lg 25 = \lg (4 \cdot 25) = \lg 100 = 2$. Отже, $x = 4$ є коренем даного рівняння.

11. $\lg^3 (x + 1) + \lg^2 (x + 1) - 2 \lg (x + 1) = 0$.

Розв'язання. Нехай $\lg (x + 1) = y$, тоді $y^3 + y^2 - 2y = 0$, або $y(y^2 + y - 2) = 0$. Звідси маємо два рівняння: $y = 0$; $y^2 + y - 2 = 0$.

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$. Тоді: 1) $\lg (x + 1) = 0$; 2) $\lg (x + 1) = 1$; 3) $\lg (x + 1) = -2$ і відповідно: 1) $x + 1 = 1$; 2) $x + 1 = 10$; 3) $x + 1 = 0{,}01$. Звідси маємо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = -0{,}99$. Перевірка показує, що всі три знайдені значення x є коренями даного рівняння.

12. $\lg (2x^2 + 21x + 9) - \lg (2x + 1) = 1$.

Розв'язання. $\lg \frac{2x^2 + 21x + 9}{2x + 1} = \lg 10$. З рівності логарифмів випливає рівність чисел $\frac{2x^2 + 21x + 9}{2x + 1} = 10$. Звідси $2x^2 + x - 1 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Значення $x_1 = -1$ не задовольняє рівняння, бо під знаком логарифма дістаємо від'ємне число.

Проілюструємо ще застосування способу логарифмування обох частин рівняння.

13. $x^{\lg x - 1} = 100$.

Р о з в' я з а н н я. $(\lg x - 1)\lg x = 2$. Поклавши $\lg x = y$, маємо: $y^2 - y - 2 = 0$. Звідси $y_1 = -1$; $y_2 = 2$. Тоді $\lg x_1 = -1$ і $x_1 = \frac{1}{10}$; $\lg x_2 = 2$ і $x_2 = 100$. Обидва значення невідомого задовольняють рівняння.

14. $x^{1 - \lg x} = 0{,}01$.

Р о з в' я з а н н я. Прологарифмуємо обидві частини рівняння: $(1 - \lg x)\lg x = -2$. Нехай $\lg x = y$, тоді $(1 - y)y = -2$, або $y^2 - y - 2 = 0$. Знайдемо корені цього рівняння: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Маємо два рівняння: $\lg x = -1$, $\lg x = 2$. Звідси: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$. Обидва значення невідомого є коренями даного рівняння.

Зазначимо, що у прикладах 13, 14 невідоме входило до показника степеня під знаком логарифма. Такі рівняння іноді називають **показниково-логарифмічними**.

Найчастіше показниково-логарифмічні рівняння розв'язують способом логарифмування обох частин рівняння. До окремих видів рівнянь зручно застосовувати спосіб зведення до спільної основи.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Розв'язати рівняння способом зведення до спільної основи.

1. $x^{\lg x} = 10$.

Р о з в' я з а н н я. Прологарифмуємо обидві частини рівняння. Дістанемо: $\lg x \lg x = \lg 10$, $\lg^2 x = 1$. Звідси $\lg x_1 = 1$, $\lg x_2 = -1$, або $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

П е р е в і р к а. Якщо $x_1 = 10$, маємо $10^{\lg 10} = 10$, $10 = 10$. Якщо $x_2 = 0{,}1$, маємо $0{,}1^{\lg 0{,}1} = 0{,}1^{-1} = 10$. Отже, $10 = 10$, $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

2. $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$.

Р о з в' я з а н н я. Зведемо обидві частини рівняння до спільної основи 2. Дістанемо $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = 2^{-6}$. Прирівнюючи показники степенів, маємо $\frac{3}{\log_3 x} = -6$, або $\log_3 x = -\frac{1}{2}$. Звідси $x = 3^{-\frac{1}{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, або $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

П е р е в і р к а. $2^{\frac{3}{\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}}} = 2^{\frac{3}{-\frac{1}{2}}} = 2^{-6}$, $2^{-6} = 2^{-6}$. Отже, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $x^{2 - \frac{\lg x}{2}} = 100$.

Р о з в' я з а н н я. Прологарифмувавши обидві частини рівняння за основою 10, дістанемо $(2 - \frac{\lg x}{2})\lg x = \lg 100$, або $\lg^2 x - 4\lg x + 4 = 0$, $(\lg x - 2)^2 = 0$. Звідси $\lg x = 2$, $x = 100$.

П е р е в і р к а. $100^{2-\frac{\lg 100}{2}} = 100^{2-1} = 100$. Отже, $x = 100$.

4. $0{,}4^{\lg^2 x + 1} = 6{,}25^{2 - \lg x^3}$.

Р о з в' я з а н н я. Зведемо обидві частини рівняння до спільної основи $\frac{5}{2}$. Дістанемо $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1} = 2{,}5^{2(2-3\lg x)}$, $\left(\frac{5}{2}\right)^{-(\lg^2 x+1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2(2-3\lg x)}$. Прирівнюючи показники степенів, дістанемо: $-(\lg^2 x + 1) = 2(2 - 3\lg x)$, або $\lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0$.

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно $\lg x$. Маємо: $\lg x_1 = 1$, або $x_1 = 10$; $\lg x_2 = 5$, або $x_2 = 100\,000$. Перевірка показує, що обидва значення x є коренями даного рівняння.

5. $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Запишемо дане рівняння так:

$$\log_2(\log_3 \log_4 x) = 0.$$

Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 2^0, тобто 1. Отже, $\log_3 \log_4 x = 1$. Це рівняння перепишемо так: $\log_3(\log_4 x) = 1$. Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 3. Маємо: $\log_4 x = 3$. Звідси $x = 4^3$, або $x = 64$.

П е р е в і р к а. $\log_2 \log_3 \log_4 64 = \log_2 \log_3 3 = \log_2 1 = 0; 0 = 0$.

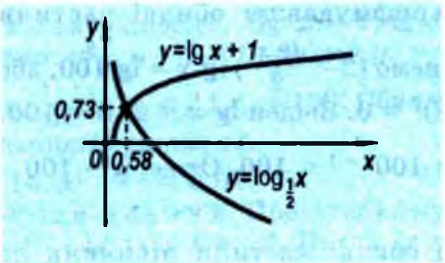
6. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося формулою $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ і перейдемо в усіх доданках до логарифма при основі 2.

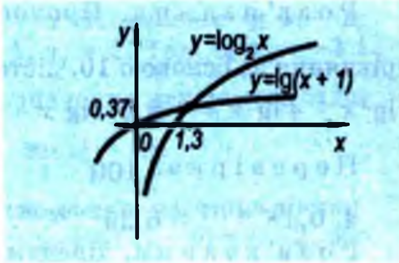
$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}$, $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$. Вихідне рівняння матиме вигляд: $\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7$. Звідси $\log_2 x = 4$. Остаточно маємо $x = 16$.

Деякі логарифмічні рівняння вдається розв'язати лише наближено. Одним зі способів наближеного знаходження коренів є графічний. На малюнках 103, 104 відповідно подано графічні розв'язання рівнянь $\lg x - \log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$ і $\lg(x + 1) - \log_2 x = 0$.

Розв'язування систем логарифмічних рівнянь. Під час розв'язування систем логарифмічних рівнянь переважно використовують ті самі способи, що й для розв'язування алгебраїчних систем.



Мал. 103



Мал. 104

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Розв'язати систему рівнянь:

1. $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 3. \end{cases}$

Розв'язання. $2\lg x = 8$, $\lg x = 4$, $x = 10\,000$; $\lg y = 1$, $y = 10$.

2. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

Розв'язання. Перше рівняння системи рівносильне рівнянню $x^2 + y^2 = 100$, а друге — рівнянню $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, причому $x > 0$ і $y > 0$.

Маємо систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48. \end{cases}$ Розв'язуючи її з урахуванням умови $x > 0$, $y > 0$, дістанемо розв'язок $x = 8$, $y = 6$, або (8; 6).

3. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x \log_2 (1+y)^2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Розв'язання. Застосовуючи властивості логарифма, перетворимо рівняння даної системи:

$\begin{cases} 2\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 (y+1) - 1 = 2, \\ \frac{1}{3}\log_2 x \cdot 2\log_2 (1+y) = \frac{4}{3}, \end{cases}$ $\begin{cases} 4\log_2 x + \log_2 (y+1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (1+y) = 2. \end{cases}$

Зробимо заміну $\log_2 x = u$, $\log_2 (y + 1) = v$. Дістанемо систему:

$\begin{cases} 4u + v = 6, \\ uv = 2; \end{cases}$ $u = 1$, $v = 2$; або $u = \frac{1}{2}$, $v = 4$. Звідси $\log_2 x = \frac{1}{2}$,

$\log_2(y + 1) = 4$, або $\log_2 x = 1$, $\log_2(y + 1) = 2$. Отже, дістали два розв'язки: $x = 2$, $y = 3$ і $x = \sqrt{2}$, $y = 15$.

4. $\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y} = 0{,}5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x + 2y) = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Множина допустимих значень змінних x і y визначається системою нерівностей $x - 2y > 0$, $3x + 2y > 0$.

Запишемо перше рівняння системи у вигляді $(\sqrt{2})^{x - y + 6} = (\sqrt{2})^{6 - 2y}$. Дістанемо рівняння $x - y + 6 = 6 - 2y$. З другого рівняння системи, записаного у вигляді $\log_3((x - 2y)(3x + 2y)) = 3$, матимемо рівняння $(x - 2y)(3x + 2y) = 27$.

Отже, розв'язування вихідної системи звелося до розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x-y + 6 = 6-2y, \\ (x-2y)(3x + 2y) = 27, \end{cases}$ яка розглядається на множині допустимих значень змінних, заданих вихідною системою.

З першого рівняння системи знаходимо $y = -x$. Підставляючи це значення у друге рівняння системи, дістанемо $3x^2 = 27$. Звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. З першого рівняння системи знаходимо $y_1 = -3$, $y_2 = 3$. Даній системі задовольняє лише пара $(3; -3)$.

5. $\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Прологарифмуємо перше рівняння системи за умови $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Маємо:

$$\lg y \lg x = 2. \tag{1}$$

З другого рівняння системи маємо

$$x = y^2. \tag{2}$$

З рівнянь (1) і (2) знаходимо, що $\lg y \cdot \lg y^2 = 2$. Оскільки $y > 0$, то $2\lg^2 y = 2$, $\lg^2 y = 1$, $\lg y = \pm 1$, $y_1 = 0{,}1$, $y_2 = 10$, $x_1 = 0{,}01$, $x_2 = 100$.

Отже, розв'язками системи є $(0{,}01; 0{,}1)$, $(100; 10)$.

6. $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}, \\ \log_x y - \log_y x = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо друге рівняння системи за умови, що $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, так: $\log_x y - \dfrac{1}{\log_x y} = \dfrac{3}{2}$, $\log_x y \neq 0; y \neq 1$. $2 \log_x^2 y - 3 \log_x y - 2 = 0$. Звідси $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$ і $\log_x y = 2$.

а) У рівнянні $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$ змінні x і y можуть бути або

$y > 1$, $0 < x < 1$, або $0 < y < 1$, $x > 1$. Жодна з областей визначення змінних не задовольняє рівняння $x + y = \frac{3}{4}$.

б) $\lg_x y = 2$, $y = x^2$. Розв'яжемо рівняння $x + y = \frac{3}{4}$, враховуючи, що $y = x^2$. Маємо: $x + x^2 = \frac{3}{4}$, $4x^2 + 4x - 3 = 0$; $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

$x_1 = -\frac{3}{2}$ не задовольняє другого рівняння вихідної системи; $x_2 = \frac{1}{2}$, тоді $y_2 = \frac{1}{4}$.

Отже, розв'язком системи є $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{4}$.

Логарифмічні нерівності. Під час розв'язування логарифмічних нерівностей виду

$$\log_a f(x) \gtrless \log_a \varphi(x) \qquad (1)$$

насамперед враховують, що областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, тобто вирази, які стоять під знаком логарифма, вважаються додатними.

Якщо $a > 1$, то логарифмічна функція зростає, тому більшому логарифму відповідає і більше значення виразу, що стоїть під знаком логарифма.

Якщо $a < 1$, то більшому логарифму відповідає менше значення виразу, що стоїть під знаком логарифма.

Якщо $a > 1$, нерівність (1) рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \gtrless \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

якщо $0 < a < 1$, — то системі нерівностей

$$\begin{cases} f(x) \lessgtr \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Розв'язати логарифмічну нерівність.

1. $\log_2 x < 3$. Маємо: $0 < x < 2^3$, $0 < x < 8$.

2. $\log_3 x > 4$. Маємо: $x > 3^4$, $x > 81$.

3. $\log_{\frac{1}{4}} x < 2$. Маємо: $x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $x > \frac{1}{16}$.

4. $\log_{0,2} x > 5$. Маємо: $0 < x < 0{,}2^5$, $0 < x < 0{,}00032$.

5. $\log_{0,5}(2x + 3) > 0$. Маємо: $0 < 2x + 3 < 1$. Звідси $-1,5 < x < -1$.

6. $2 - \log_2(x^2 + 3x) > 0$. Маємо: $\log_2(x^2 + 3x) < 2$. Звідси $x^2 + 3x > 0$ і $x^2 + 3x < 4$. Отже, $-4 < x < -3$, $0 < x < 1$.

7. $\lg(2x^2 + 4x - 5) < \lg(4 + x)$.

Р о з в' я з а н н я. Враховуючи, що $a = 10 > 1$, маємо:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x - 5 < 4 + x, \\ 2x^2 + 4x - 5 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 3x - 9 < 0, \\ 2x^2 + 4x - 5 > 0; \end{cases}$$

$2x + 3x - 9 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1,5$, $-3 < x < 1,5$;

$2x^2 + 4x - 5 = 0$, $x_1 = -1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}$, $x_2 = -1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}$,

$-\infty < x < -1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ і $-1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2} < x < +\infty$.

Отже, треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} -3 < x < 1,5, \\ -\infty < x < -1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}, \\ -1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2} < x < +\infty. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи, а значить і даної нерівності, є: $-3 < x < -1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ і $-1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2} < x < 1,5$.

8. $\log_5 x + \log_5(x + 1) < \log_5(2x + 6)$.

Р о з в' я з а н н я. Вирази, що стоять під знаком логарифма у даній нерівності, мають бути додатними. Отже, справджуються нерівності: $x > 0$; $x + 1 > 0$; $2x + 6 > 0$.

Запишемо дану нерівність у вигляді $\log_5 x(x + 1) < \log_5(2x + 6)$. Тут основа $a = 5 > 1$, тому $x(x + 1) < 2x + 6$. Розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування системи чотирьох нерівностей:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ 2x + 6 > 0, \\ x(x + 1) < 2x + 6; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x > -3, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ x > -3, \\ -2 < x < 3. \end{cases}$$

Знаходимо значення x, для яких справджуються чотири нерівності.

Отже, $0 < x < 3$.

9. $\log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 8x + 12) > -1$.

Р о з в' я з а н н я. Вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним. Тому $x^2 - 8x + 12 > 0$. Запишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{12}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{12}} 12$. Оскільки $a = \frac{1}{12} < 1$, то $x^2 - 8x + 12 < 12$.

Залишається розв'язати систему двох нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 12 > 0, \\ x^2 - 8x + 12 < 12; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -\infty < x < 2,\ 6 < x < \infty, \\ 0 < x < 8. \end{cases}$$

Отже, $0 < x < 2$ і $6 < x < 8$.

10. $\log_3^2 x + 3\log_3 x + 2 < 0$.

Розв'язання. Областю визначення змінної є $x > 0$. Позначивши $y = \log_3 x$, дістанемо: $y^2 + 3y + 2 < 0$. Звідси $-2 < y < -1$, або $-2 < \log_3 x < -1$. Отже, $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Винайденню логарифмів значною мірою сприяли потреби удосконалення обчислень. Винайшли логарифми і майже одночасно почали їх застосовувати шотландський математик **Джон Непер** (1550—1617) і швейцарський математик, астроном і механік **Йост Бюргі** (1552—1632). Проте перший крок до спрощення обчислень зробив німецький математик **Михаель Штіфель** (1487—1567), у якого поняття логарифма з'явилося в результаті зіставлення геометричної й арифметичної прогресій. Ця ідея бере свій початок у працях **Архімеда** (бл. 287—212 до н. е.).

Розглянемо цю ідею на такому прикладі. Складаємо таблицю.

Таблиця 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	8 192	16 384	32 768

У верхньому рядку маємо арифметичну прогресію з різницею, що дорівнює 1, а в нижньому рядку — відповідно геометричну прогресію зі знаменником 2. Зіставивши числа у відповідних колонках, помічаємо, що в першому рядку ми маємо логарифми чисел другого рядка за основою 2. Так, наприклад, $\log_2 512 = 9$ (бо $2^9 = 512$), $\log_2 8192 = 13$ (бо $2^{13} = 8192$) і т. д.

Користуючись даними таблиці і теоремою про те, що логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів співмножників, можна значно спростити знаходження добутків чисел, записаних у нижньому рядку таблиці.

Нехай треба, наприклад, помножити 64 на 512. Знайдемо логарифм цього добутку за основою 2. Маємо $\log_2(64 \cdot 512) = \log_2 64 + \log_2 512$. За таблицею знаходимо $\log_2 64 = 6$, $\log_2 512 = 9$. Отже, $\log_2(64 \cdot 512) = = 6 + 9 = 15$. Але числу 15 з першого рядка відповідає число 32 768 з другого рядка. Отже, $64 \cdot 512 = 32\ 768$.

Джон НЕПЕР
(1550—1617)

Застосовуючи теорему про логарифм частки (дробу), можна скористатися таблицею і під час ділення чисел.

Наприклад, треба поділити 8192 на 128. Знайдемо логарифм цієї частки за основою 2. Маємо:

$$\log_2 \frac{8192}{128} = \log_2 8192 - \log_2 128 = 13 - 7 = 6 \cdot$$

Але числу 6 першого рядка відповідає число 64 другого рядка. Отже: 8192 : 128 = 64.

Можна скористатися таблицею і для піднесення чисел до степеня. Наприклад, обчислимо 4^5. Маємо: $\log_2 4^5 = 5\log_2 4 = = 5 \cdot 2 = 10$. Числу 10 першого рядка таблиці відповідає число 1024 другого рядка. Отже, $4^5 = 1024$.

Як бачимо, дії другого ступеня (множення, ділення) звелися до дій першого ступеня (додавання, віднімання) над відповідними логарифмами. При цьому довелося виконувати дії із значно меншими числами.

Для практичного здійснення ідеї Штіфеля треба було скласти геометричну прогресію, яка зростала б дуже повільно, бо лише при цьому вона може охоплювати значну кількість чисел. Бюргі взяв знаменником прогресії число 1,0001 замість 2, як було у Штіфеля.

Пізніше основою таблиць почали називати той член, якому в арифметичній прогресії відповідає число 1. У Бюргі основою був 10 001-й член геометричної прогресії, тобто $1{,}0001^{10000}$, або $(1+10^{-4})^{10^4} \approx 2{,}71814593$ (в арифметичній прогресії йому відповідало число $0{,}0001 \cdot 10^4 = 1$).

Бюргі прийшов до логарифмів раніше, ніж Непер, але опублікував свої таблиці лише у 1620 р. Таким чином, першою в 1614 р. з'явилася праця Непера «Описання дивовижної таблиці логарифмів». Основою таблиці логарифмів Непера є ірраціональне число, до якого необмежено наближаються числа виду $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при необмеженому зростанні n. Це число називають неперовим числом і з часів Леонарда Ейлера позначають буквою e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Непер склав таблиці, взявши дуже зручне наближення числа e, а саме $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$. Неперу належить і сам термін «логарифм».

Таблиці Непера вдосконалив англійський математик **Генрі Брігс** (1561—1631). Зі згоди Непера, він спростив його систему логарифмів і склав у десятковій системі числення таблицю логарифмів усіх цілих чисел від 1 до 20 000 і від 90 000 до 100 000 з 14-ма десятковими знаками. Таблиці Брігса, опубліковані в 1624 р. і доповнені **А. Влакком** у 1629 р., пізніше почали називати таблицями звичайних логарифмів.

У зв'язку з упровадженням сучасних ЕОМ обчислення за допомогою таблиць логарифмів втратили своє значення.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Які рівняння називають логарифмічними?

2. Якщо внаслідок певних перетворень рівняння область визначення невідомого звузилася, то що сталося з коренями рівняння?

3. Яка причина появи сторонніх коренів під час розв'язування логарифмічних рівнянь?

4. Які способи розв'язування логарифмічних рівнянь вам відомі?

5. У чому полягає прийом потенціювання під час розв'язування логарифмічних рівнянь?

6. Які рівняння називають показниково-логарифмічними?

7. Які способи розв'язування систем логарифмічних рівнянь ви знаєте?

8. Які властивості логарифмічної функції використовують під час розв'язування нерівностей виду $\log_a f(x) \le \log_a \varphi(x)$?

9. Якій системі нерівностей рівносильна нерівність $\log_a f(x) \le \log_a \varphi(x)$ при: 1) $a > 1$, 2) $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

Розв'язати рівняння:

А

228. 1) $\log_2(5-x)=0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(5x-7)=-3$;

3) $\log_{0,3}(5+2x)=1$; 4) $\lg(x-1)=\lg(5x-3)$;

5) $\log_3(x^2-x+1)=0$; 6) $\log_{x-1}(x^2-5x+10)=2$;

7) $\log_a x=\log_a 3+\log_a 5$; 8) $\log_5^2 x=3\log_5 x$;

9) $\lg^2 x-5\lg x+6=0$; 10) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$;

11) $x^{\lg x}=10\,000$; 12) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{1+\lg x}$;

13) $\lg\lg\lg x=0$; 14) $x^{\lg x+2}=1\,000$.

Б

229. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4)=-2$; 2) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$;

3) $\log_2(x+3)=3-x$; 4) $\log_x 3-\log_x 2=\dfrac{1}{2}$;

5) $\log_a x=\log_a 12-2\log_a 2$;

6) $\lg(x+6)-\dfrac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$;

7) $\lg^4 x-10\lg^2 x+9=0$; 8) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

9) $\log_\pi(x^2+2x+3)=\log_\pi 6$;

10) $2\log_6(2+x)+\log_6(9-6x+x^2)=2$;

11) $\dfrac{1}{2}\lg(x-9)+\lg\sqrt{2x-1}=1$;

12) $\log_3 4+\log_3 x=\log_3(x-6)-\log_3(3-x)$;

13) $x^{\lg x-3}=0{,}01$; 14) $3^{2-\log_3 x}=81x$;

15) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$; 16) $100^{\lg(x+20)}=10\,000$.

В

230. 1) $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$;

2) $\lg(x^2+75)=2+\lg(x-4)$;

3) $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{5}{\lg x+2}=1$;

4) $\frac{1}{2}\lg(5x-4)+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$; 5) $\frac{\lg(10x-19)}{2\lg(2x-3)}=1$;

6) $\frac{\lg(x+5)}{2}+\lg\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\lg(2x+1)$;

7) $\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{x}{2}}-2\log_2\sqrt{x}+\log_2 2x=3$; 8) $\log_2^2 x-9\log_8 x=4$;

9) $\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$; 10) $\log_2^2(x+1)-\log_{\frac{1}{4}}(x+1)=5$;

11) $81^{2-\log_{\sqrt{3}} x}-1=0$; 12) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

13) $x^{\log_a x}=a^2 x\ (a>0,\ a\neq 1)$; 14) $x^{2(\lg x)^3-\frac{3}{2}\lg x}=\sqrt{10}$;

15) $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$; 16) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$;

17) $\lg^3 x-\lg^2 x-6\lg x=0$; 18) $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$;

19) $\log_{1-x} 3-\log_{1-x} 2-0{,}5=0$;

20) $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$;

21) $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$;

22) $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3$.

Розв'язати систему рівнянь:

А

231. 1) $\begin{cases} x-y=90, \\ \lg x+\lg y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x+\lg y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x+3^y=12, \\ \log_3 27=x+y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_9 729=x+y, \\ 3^{x-y-1}=1. \end{cases}$

Б

232. 1) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_{48} x+\log_{48} y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} y=2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x-\log_{\frac{1}{2}} y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0, \\ x^2-2y^2=8. \end{cases}$

В

233. 1) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2, \\ \log_5(x-y)=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2{,}5, \\ xy=27; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \log_2 x=\log_4 y+\log_4(4-x), \\ \log_3(x+y)=\log_3 x-\log_3 y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y=4, \\ \log_4 x+\log_2 y=5; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 13, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 8, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \log_x y=2, \\ \log_{x+1}(y+23)=3. \end{cases}$

Розв'язати нерівність:

А

234. 1) $\log_3 x<4$; 2) $\log_5 x>2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x<3$;
4) $\log_{0,3} x>3$; 5) $\lg x<\lg 3$; 6) $\lg x>\frac{1}{3}$;
7) $\lg x>\lg 5$; 8) $\lg x>-3$; 9) $\log_2(x^2-x-4)<3$;
10) $\log_3(12-2x-x^2)>2$; 11) $\lg x+\lg(x-3)<1$;
12) $\lg(2x+3)<\lg(x-1)$.

Б

235. 1) $\log_x 0{,}2>\log_x 3$; 2) $2\lg x>\lg(4x+21)$;
3) $\log_2 8^{2n-1}>3n+6$; 4) $\log_{0,5} 16^{2x-3}>x-24$;
5) $\log_8(5x-8)<\log_8(2x+7)$; 6) $\log_{0,3}(x^2+1)<\log_{0,3} 2x$;
7) $\log_{3x+2} x<1$; 8) $\log_{x-1}(5x+3)>1$;
9) $\log_2^2 x-\log_2 x\le 6$; 10) $\lg^2 x+2\lg x>3$;
11) $2\log_2(x+1)-\log_2(2x-4)>0$;
12) $\log_4\log_2\log_3 x\le 0{,}5$.

B

236. 1) $\log_3 x < 3 - \log_3(12 - x)$; 2) $\log_2 0{,}25^{3-x} > 2 - x^2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(4 - x) - 1$; 4) $\log_2(x^2 - 9x + 8) < 3$;

5) $\log_2 x > \log_4(x - 1)$; 6) $\log_{x^2+4}(2x^2 - 5) < 1$;

7) $\lg(x^2 - x + 8) \geq 1$; 8) $\log_\pi(x + 1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;

9) $\log_{0,5}\dfrac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$; 10) $\log_3 \log_{0,5} \log_{\frac{1}{3}} x > 1$;

11) $\log_x(x + 2) > 2$; 12) $\log_{x+1}(x + 3) > 1$;

13) $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$; 14) $\log_x(x^2 - 2x - 3) > 0$;

15) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 3}{2\lg x - 1} > 1$; 16) $\dfrac{\log_2(x + 1)(x - 3)}{\log_2(x - 3)} < 0$.

ПІДСУМКОВЕ ПОВТОРЕННЯ

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Що називається функцією? Що таке числова функція?

2. Що таке область визначення і область значень (область зміни) функції?

3. Що таке графік функції? Наведіть ескізи графіків відомих вам функцій.

4. Які геометричні перетворення виконуються при побудові графіка функції $y = Af(kx + \varphi) + l$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$?

5. Яка функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною) і як дослідити функцію на монотонність, користуючись означенням зростаючої (спадної) функції? Навести приклад.

6. Яка функція $y = f(x)$ називається парною (непарною) і як дослідити функцію на цю властивість? Навести приклад.

7. Що стало причиною введення радіанної системи вимірювання кутів і дуг? У чому особливості і переваги цієї системи?

8. Сформулюйте означення тригонометричних функцій довільного кута.

9. Як означаються тригонометричні функції числа ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$)?

10. Які функції називаються періодичними?

11. Як будуються графіки тригонометричних функцій числового аргументу $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$?

12. Назвіть властивості кожної з тригонометричних функцій числового аргументу. Доведіть, що найменшим додатним періодом $y = \sin x$ є число 2π.

13. Як побудувати графік функції $y = A\sin(wt + \varphi)$?

14. Сформулюйте означення функції, оберненої до функції $y = f(x)$. Які властивості взаємно обернених функцій?

15. Як за формулою даної функції знайти формулу оберненої функції? Знайти функцію, обернену до функції $y = \sin x$.

16. Яка область визначення і область значень функції $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$?

17. Назвіть властивості і побудуйте графік функцій $y = \arccos x$ і $y = \operatorname{arctg} x$.

18. Яке рівняння називається тригонометричним? Наведіть приклади.

19. Розв'яжіть тригонометричні рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$.

20. Які тригонометричні рівняння називаються однорідними? Назвіть спосіб їх розв'язування.

21. Які тригонометричні рівняння називаються лінійними? Назвіть можливі способи розв'язування таких рівнянь.

22. Назвіть способи розв'язування окремих відомих видів тригонометричних рівнянь.

23. Які причини порушення рівносильності при розв'язуванні тригонометричних рівнянь?

24. Як розв'язати найпростіші тригонометричні нерівності?

25. Сформулюйте означення степеневої функції.

26. До яких видів тверджень належать твердження $a^0 = 1$, $a \neq 0$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$?

27. Сформулюйте означення кореня n-го степеня із числа a і означення арифметичного кореня n-го степеня. Назвіть властивості таких коренів.

28. Назвіть властивості степенів з раціональним показником; дійсним показником.

29. Як розуміти степінь a^α з ірраціональним показником α, де $a > 0$?

30. Які рівняння називаються ірраціональними? Назвіть способи розв'язування окремих видів ірраціональних рівнянь.

31. Які нерівності називаються ірраціональними? Назвіть способи розв'язування окремих видів ірраціональних нерівностей.

32. Яка функція називається показниковою? Які залежності між величинами привели до поняття показникової функції?

33. Назвіть властивості показникової функції. Доведіть властивість монотонності цієї функції.

34. Що таке логарифм числа b за основою a?

35. Яка функція називається логарифмічною? Назвіть її властивості.

36. Назвіть приклади застосування показникових і логарифмічних функцій.

37. Які рівняння називаються показниковими? Назвіть способи розв'язування окремих видів показникових рівнянь.

38. Які рівняння називаються логарифмічними? Назвіть способи розв'язування окремих видів логарифмічних рівнянь.

39. Які нерівності називаються показниковими? Назвіть способи розв'язування окремих видів показникових нерівностей.

40. Які нерівності називаються логарифмічними? Назвіть способи розв'язування окремих видів логарифмічних нерівностей.

ВПРАВИ

237. Знайти область визначення функції:

А

1) $y = \frac{x^2}{1-x}$; 2) $y = \sqrt{3x - x^2}$; 3) $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

Б

4) $y = \log_2(x^2 - 4)$; 5) $y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$; 6) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;

В

7) $y = \arccos(2\sin x)$; 8) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$;
9) $y = \log_2\log_3\log_4 x$.

238. Дослідити функцію на парність і непарність:

А

1) $f(x) = x^2\cos 5x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$;

Б

3) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; 4) $f(x) = \lg\frac{2+x}{2-x}$;

В

5) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$; 6) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

239. Побудувати графік функції:

А

1) $y = \frac{1-x}{1+x}$; 2) $y = |x^2 - 4x - 12|$;

Б

3) $y = \frac{3x-2}{2x+1}$; 4) $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

В

5) $y = \arccos(-2x)$; 6) $y = \sqrt{2-x}$.

240. Довести тотожність:

А

1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$; 2) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$;

Б

3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}{\cos\alpha}$;

4) $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$;

В

5) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 6) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

241. Розв'язати рівняння:

А

1) $7\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$; 2) $5\sin^2 2x - 3\cos^2 2x = 0$;

3) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 2$; 4) $\sin x\cos x\cos 2x = \frac{1}{8}$;

5) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$; 6) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$;

Б

7) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x} = 1 + \sin x$; 8) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

9) $5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x + 5$; 10) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$;

11) $\sin 8x = \sin 2x$; 12) $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$;

В

13) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$; 14) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 5x$;

15) $1 - \cos 7x = 2\cos^2 9x$; 16) $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x\sin x$;

17) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^3 x + \cos^3 x$; 18) $\sin 3x + \cos 2x + 2 = 0$.

242. Розв'язати нерівність:

А

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos 2t \geq -\frac{1}{2}$;

Б

3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\ge 1$; 4) $\cos^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)>\frac{3}{4}$;

В

5) $2\sin x\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $2\sin^2 x-5\cos x+1>0$.

243. Розв'язати рівняння:

А

1) $\sqrt{x+5}=x-1$; 2) $\sqrt{x-1}-x=-7$; 3) $2\sqrt{x+5}=x+2$;

Б

4) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$; 5) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-10}=1$;

6) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;

В

7) $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}=2$; 8) $\sqrt{x^2-2}-\sqrt{6x-11}+\sqrt{x+3}=0$;

9) $\sqrt[4]{(x-1)^2}-\sqrt[4]{(x+1)^2}=\frac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}$.

244. Розв'язати нерівність:

А

1) $\sqrt{3x^2+2x-1}>2$; 2) $\sqrt{4x-x^2}<4-x$;

3) $\sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}$;

Б

4) $\frac{\sqrt{x+4}}{1-x}<1$; 5) $\sqrt{2x+1}<\frac{2(x+1)}{2-x}$; 6) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{x+4}$;

В

7) $\sqrt{2x-1}>2x+15-\frac{10}{\sqrt{2x-1}}$; 8) $\sqrt[4]{15+x}-\sqrt[4]{2-x}>1$;

9) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

245. Розв'язати рівняння:

А

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-1} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x}$; 2) $25^x - 10^x = 2^{2x+1}$;

3) $2x + 2^{x+3} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$;

Б

4) $\dfrac{(0{,}5)^{x-3}}{(0{,}125)^{2-x}} = 128^x \cdot \sqrt[3]{(0{,}25)^{x-1}}$;

5) $4^{x+1} - 5^{x-1{,}5} = 5^{x+0{,}5} - 2^{2x-4}$;

6) $\dfrac{15}{2^x + 1} + \dfrac{4}{2^{x-1} - 3} = \dfrac{12}{2^{x+1}}$;

В

7) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x - 3^{2x+1} = 0$;

8) $\left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}}\right)^x = 6$;

9) $(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$.

246. Розв'язати нерівність:

А

1) $(\sqrt[3]{5})^{3x^2-15x+13} > 125\sqrt[3]{625}$; 2) $\sqrt[x^2]{\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}} \geq 1$;

3) $2 \cdot 15^x + 15^{x-1} - 65 \cdot 15^{x-2} < 400$;

Б

4) $(x-2)^{x^2-6x+1} > 1$; 5) $25^x < 65^x - 5$;

6) $2^{x+2} + 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x-2}$;

В

7) $2^{3x} - \dfrac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right) > 1$; 8) $12^x + 5^x > 13^x$;

9) $3^{\sqrt{1-x}} + 3^{\sqrt{2-x}} + 3^{\sqrt{6-2x}} > 13$.

247. Розв'язати рівняння:

А

1) $2^{\log_4(x-8{,}5)}=\log_3 81$; 2) $\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=1-\lg 5$;

3) $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$;

Б

4) $\lg(2x+6)-\lg\sqrt{x+2}=1-\lg 2$;

5) $\log_8\log_2\log_2\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=0$;

6) $\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=1$;

В

7) $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}\cdot\lg_{\sqrt{5}} x=-\sqrt{6}$;

8) $\log_{\sqrt{2}}\log_2\log_4(x-15)=0$; 9) $x^{3-\lg\frac{200}{x}}=400$.

248. Розв'язати нерівність:

А

1) $\lg 5-\lg(x-3)<1-\frac{1}{2}\lg(3x+1)$;

2) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}>3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

3) $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\le 0$;

Б

4) $\log_{\frac{1}{2}}x+\sqrt{1-4\log_{\frac{1}{2}}^2 x}<1$;

5) $\log_3\frac{x+4}{x-2}-\log_3\frac{4x+11}{5x+1}<1$;

6) $2\log_3\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}\log_3(9\sqrt[3]{x})\ge 1$;

В

7) $\log_x 2\log_{2x}\log_2 4x>1$;

8) $\log_3(3^x-1)\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)>-3$;

9) $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)>1$.

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

1. 1) $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$; 2) $[2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2)$, $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$ 4) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $[5; +\infty)$; 5) $(-\infty; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -2]$ $[1; +\infty)$; 7) $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$; 8) $(-\infty; 0)$, $(0; 5)$, $(5; +\infty)$; 9) $[0; 3]$; 10) R; 11) $[-4; 4]$; 12) $[-4; 4]$; 13) $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; +\infty)$; 14) $(-5; 5)$; 15) $(3; +\infty)$; 16) $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$; 17) $(-\infty; -4)$, $(-4; 4)$, $(4; +\infty)$; 18) $[2; 3)$, $(3; 4]$; 19) $(-9; 5)$, $(5; 9)$; 20) $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. **2.** 1) Непарна; 2) парна; 3) непарна; 4) непарна; 5) парна; 6) парна; 7) парна; 8) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 9) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 10) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 11) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 12) парна; 13) парна; 14) непарна; 15) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 16) непарна; 17) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 18) парна. **4.** 1) $\beta = 180° + 360° \cdot (-1)$; 2) $\beta = 300° + 360° \cdot (-3)$; 3) $\beta = 140° + 360° \cdot 4$; 4) $\beta = 42° + 360° \cdot 20$; 5) $\beta = 110° + 360° \cdot (-5)$. **7.** $16\frac{4}{11}$ хв. **8.** 0,262; 0,389; 0,893; 2,75; 2,83. **9.** 72°; 360°; 86°; 143°. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0,85; 3) а) 31,25 см; б) 62, 83 см; 4) а) 1; б) 2. **22.** 1) $-3\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}671$; 3) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}870$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}891$. **23.** 1) 2; -2; 2) 5; -5; 3) 5; 1; 4) -1; -5; 5) 6; -4; 6) 5; 2; 7) 3; 2; 8) 1; $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **25.** 1) $\sin 65°$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; 3) $\cos 50°$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $\sin\frac{\pi}{3}$; 6) $\cos(-45°)$; 7) $\operatorname{ctg}(-0{,}3\pi)$; 8) $\operatorname{tg} 60°$. **29.** 1) $\frac{1}{4}\sin^2 6\alpha$; 2) 1. **31.** 1) $x \ne n\pi$; $n \in Z$; 2) $x \ne \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$; 3) $x \ne 0$; 4) $x \ne n\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$. **32.** 1) $[-1; 1]$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $[0; 2]$. **34.** 1) у II або III чверті; 2) у I або III чверті; 3) у III або IV чверті; 4) у II або IV чверті. **36.** 1) $y > 0$ при $n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$; $y < 0$, якщо $\frac{\pi}{2} +$

$+ n\pi < x < \pi + n\pi$; $y = 0$, якщо $x = n\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$; 2) $y > 0$, якщо $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$; $y < 0$, якщо $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$; нулів немає; 3) $y > 0$, якщо $-\frac{3\pi}{2} + 6n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 6n\pi$; $y < 0$, якщо $\frac{3\pi}{2} + 6n\pi < x < \frac{9\pi}{2} + 6n\pi$; $y = 0$, якщо $x = \frac{3\pi}{2} + 3n\pi$, $n \in Z$; 4) $y > 0$, якщо $x \neq n\pi$; $y = 0$, якщо $x = n\pi$, $n \in Z$; 5) $y > 0$, якщо $2n\pi < x < \pi + 2n\pi$; $y < 0$, якщо $\pi + 2n\pi < x < 2\pi + 2n\pi$; $y = 0$, якщо $x = 2n\pi$; 6) $y > 0$, якщо $n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$; $y < 0$, якщо $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}$; $y = 0$, якщо $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$.

37. 1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $1 + \sin^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha$; 8) 1; 9) $1 - \cos\alpha$; 10) 0; 11) -1; 12) 1; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; 15) 1; 16) $\frac{4}{|\sin\alpha|}$. **38.** 1) $m^2 - 2$; 2) $m(m^2 - 3)$. **39.** 1) $\frac{4}{25}$; 2) $2\frac{1}{12}$. **41.** 1) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{3}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{24}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{24}{25}$, $\cos x = -\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$; 4) $\cos x = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} x = -2\frac{2}{5}$; $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$. **43.** $\sin\alpha \approx 0{,}88$; $\operatorname{tg}\alpha \approx 1{,}835$; $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0{,}55$. **44.** 1) 7,658; 2) 22,105; 3) 74,115; 4) 47,210. **45.** 1) 60°, 2) 27°, 3) 38°, 4) 32°. **46.** 6,21. **47.** $v \approx 2{,}5 \cdot 10^7$ м/с. **48.** 1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $2 - \sqrt{3}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3; 5) $-0{,}4 - 0{,}3\sqrt{3}$ або $-0{,}4 + 0{,}3\sqrt{3}$; 6) 1; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) -4; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$. **49.** 1) $\cos\beta$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$; 3) $2\sin 26°$; 4) $\operatorname{tg} 4\alpha$; 5) $\cos 2\alpha$; 6) $\sqrt{2}\,|\cos 4\alpha|$; 7) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 8) $4\cos x \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) 1; 11) $|\sin 2\alpha|$; 12) $\cos 2\alpha$; 13) 2; 14) $\cos^2\alpha$; 15) $\operatorname{ctg} 4\alpha$; 16) 1; 17) $2\sqrt{2} \times \sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$; 18) $2\cos\alpha$; 19) $2|\operatorname{ctg}\alpha|$; 20) $2\sin 2\alpha$; 21) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 22) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **50.** 1) $2\sin\alpha\cos\beta$; 2) $2\sin^2\frac{3\alpha}{4}$; 3) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\alpha}$; 5) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$;

7) $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha-\beta}{2}$; 8) $4 \cos 0{,}5x \cos x \cos 2{,}5x$; 9) $-4 \sin 25° \sin 5°$; 10) $\sqrt{2}\left|\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right|$; 11) $2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$;

12) $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$; 13) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 14) $\frac{8\cos 4\alpha \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin^2 4\alpha}$;

15) $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$; 16) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$. **52.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{\pi}{6}$; 8) $\frac{3\pi}{5}$; 9) $\frac{3\pi}{7}$. **53.** 1) $a \geq 0$; 2) $b < 0$. **55.** 1) R; 2) $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$. **57.** 1) $x = n\pi$; 2) $\pm(\pi - \arccos 0{,}4827) + 2n\pi, n \in Z$; 3) $x = n\pi, n \in Z$; 4) $x = -\operatorname{arctg} 0{,}5 + n\pi, n \in Z$; 5) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$; 6) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in Z$; 7) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$; 8) $x = -\frac{2\pi}{3} + 4n\pi, n \in Z$; 9) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$; 10) $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}n\pi, n \in Z$; 11) $x = \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in Z$; 12) $x = \frac{\pi}{6} - 1 + n\pi, n \in Z$; 13) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in Z$; 14) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$; 15) $x = -\operatorname{arctg} 0{,}6009 + n\pi, n \in Z$; 16) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$; 17) $x = (-1)^k \arcsin 0{,}2753 + \pi k, k \in Z$; 18) розв'язків немає. **58.** 1) $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, n \in Z$; 3) $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in Z$; 4) $x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$; 5) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2} + k\pi$, $n, k \in Z$; 6) $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in Z$; 7) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$; 8) $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in Z$; 9) $x = 2n\pi, n \in Z$; 10) $x = n\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$, $k \in Z$; 11) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k, n \in Z$; 12) $x = \operatorname{arctg}\frac{7}{8} + n\pi, n \in Z$; 13) $x_1 = 180°k - 45°$, $x_2 = 180°n + 56°19'$, $k, n \in Z$; 14) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $k, n \in Z$; 15) $x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$; 16) $x = \frac{\pi}{8} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z$; 17) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$; 18) $x = 2n\pi, n \in Z$; 19) $x_1 = \pi + 2n\pi$, $x_2 = \pm\frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, $n, k \in Z$; 20) розв'язків немає; 21) $x_1 = \pi + 2n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k, n \in Z$; 22) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

$x_2 = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{9} + 2k\pi$, $k, n \in Z$; 23) $x = -\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; 24) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $n, k \in Z$; 25) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; 26) $x = 2n\pi$, $n \in Z$; 27) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi$, $k, n, m \in Z$; 28) $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{9} + k\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{7}{9} + n\pi$, $k, n, \in Z$; 29) $x = -2\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi$; 30) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x_2 = -2\operatorname{arctg} 2 + 2k\pi$, $n, k \in Z$; 31) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$, $x_2 = \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + 2m\pi$, $x_3 = \pm\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + 2k\pi$, $k, n, m \in Z$; 32) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = k\pi$, $n, k \in Z$; 33) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{16}(2n+1)$, $n, k \in Z$; 34) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x_2 = \pi + 2k\pi$, $n, k \in Z$; 35) $x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; 36) $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $n, k \in Z$; 37) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 38) розв'язків немає; 39) $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$; 40) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $k, n \in Z$; 41) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 42) $x = ((-1)^n - 1)\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 43) $x = (1 + (-1)^k)\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$; 44) $x = \frac{\pi}{8}(4k+1)$. **59.** 1) $\frac{n\pi}{4}$, $n \in Z$; 2) розв'язків немає; 3) $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $n, k \in Z$; 4) $x = \frac{2}{3}n\pi$, $n \in Z$; 5) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg} 5 + k\pi$, $n, k \in Z$; 6) $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 2) + n\pi$, $n \in Z$; 7) $x_1 = \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k \in Z$; 8) $x = \frac{\pi}{9}(3k \pm 1)$, $k \in Z$; 9) $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(2n+1)$, $k, n \in Z$; 10) $x = 2n\pi$, $n \in Z$; 11) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $n, k \in Z$; 12) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$; 13) $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$; 15) $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in Z$; 16) $x = 2m\pi$, $m \in Z$; 17) $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$; 18) $x = \frac{k\pi}{10}$, $k \in Z$; 19) $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$; 20) розв'язків немає; 21) $x_1 = \frac{n\pi}{2}$, $x_2 = \frac{k\pi}{5}$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $n, k, m \in Z$; 22) $x = \frac{m\pi}{2}$, де $m = 3l$, $m = 3l + 1$, $l \in Z$; 23) $x_1 = \pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\pi$, $x_2 = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{5}}$; 24) $z_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $k, n \in Z$; 25) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; 26) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = (2m+1)\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $k, m, n \in Z$; **60.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} - k\pi$; $k \in Z$; 2) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $y_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k, l \in Z$; 3) $x = \frac{7\pi}{6} + n\pi$, $y = -\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; 4) $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $y_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$,

$y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $k, n \in Z$; 5) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$; 6) $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $y_1 = 2\pi + 4n\pi$, $k, n \in Z$, $x_2 = 2\pi + 4p\pi$, $y_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 4q\pi$, $p, q \in Z$.

61. 1) $-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$; 3) розв'язків немає; 4) $-\frac{\pi}{2} + n\pi < x < \operatorname{arctg} 2 + n\pi$, $n \in Z$; 5) $\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $n, k \in Z$; 7) $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in Z$; 8) $\frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{5\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$; 9) $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; 10) $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$; 11) $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in Z$; 12) $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$;

63. 1) 4; 2) 0,4; 3) 0,04; 4) 0,004; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{4}$; 8) 1,8; 9) 1,25; 10) 0,11; 11) 1,5; 12) 1,4. **64.** 1) 6,3; 2) 1,91; 3) $6\frac{3}{5}$; 4) $\frac{4}{5}$. **65.** 1) ±0,5; 2) ±1,5; 3) ±0,7; 4) $\pm1\frac{1}{3}$. **66.** 1) так; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) ні. **67.** 1) $a \geq 0$; 2) $a \leq 0$; 3) будь-які дійсні числа; 4) $x \leq 0$; $x \geq 5$; 6) $x > 4$. **68.** 1) 10; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) –1; 6) 0; 7) 0,1; 8) –1,5. **70.** 1) 28; 2) 0,2; 3) 16,7; 4) –20. **71.** 1) $-\sqrt[3]{7}$; 2) $-\sqrt[3]{8}$; 3) $-\sqrt[5]{2a}$. **72.** 2) $|a-6|$; 3) 1, якщо $a > 0$; –1, якщо $a < 0$ і n парне; 1, якщо $a < 0$ і n непарне. **73.** 1) 10; 2) 2; 3) x^3; 4) 3; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 1,5. **74.** 1) 10; 2) 0,3;3) 1,5; 4) 3. **75.** 1) $\sqrt[10]{a^9}$; 2) $\sqrt[11]{25}$; 3) $\sqrt[20]{2}$; **76.** 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[9]{36}$; 3) $\sqrt[3]{25}$; 4) $\sqrt[5]{a^2b^3c^4}$. **77.** 1) $\sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt[12]{3^4}$; $\sqrt[12]{3^3}$; 2) $\sqrt[6]{16a^4}$; $\sqrt[6]{8a^3}$. **78.** 1)14; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 2; 4) 2; 5) 3. **79.** $x^4 + y^4$. **80.** 1) 0; 2) $2\sqrt{15}$. **81.** 1) $\sqrt[6]{6}$, $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[6]{9}$. **82.** 1) a^{m-n}; 2) c^{a-b}; 3) $a - 4\sqrt[3]{a}$. **83.** 1) $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$; 2) 1; 3) $2b$; 4) $|5-a| = a-5$; 5) $1-x$, якщо $x = \frac{1}{2}$, $x-1$, якщо $x = 4$. **85.** 1) плюс; 2) плюс. **86.** $\sqrt[6]{(2+\sqrt{3})^5}$. **87.** 1) $m^2\sqrt[3]{m^2n^2}$; 2) $2b^2\sqrt{a^3b^3}$; 3) $\frac{2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{a^2b}{c^2}}$;

4) $2(m+n)\sqrt[3]{3(m-n)}$; 5) $a^2\sqrt[n]{a^3}$; 6) $a^{2(n-1)}$; 7) $a^x b^3\sqrt[n]{a^2z^3}$.
88. $x^2\sqrt[4]{2cx^3}$, якщо $x<0$ і $c<0$, то $x^3<0$ і $x^2>0$; тоді підкореневий вираз залишається додатним, а весь вираз – від'ємний $-x^2\sqrt[4]{2cx^3}$; x і c не можуть мати різних знаків, бо в цьому разі під коренем четвертого степеня було б від'ємне число. **89.** $ab\sqrt[n]{a-b}$.
90. $x<0$. **91.** 1) $\sqrt[3]{24}$; 2) $\sqrt[4]{9}$; 3) $\sqrt[5]{4}$; 4) $\sqrt[3]{2a^3}$; 5) $\sqrt[4]{5b^4}$; 6) $\sqrt{(a+b)^3}$. **92.** 1) $\sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[6]{20}$; 3) $\sqrt[12]{x^4}=\sqrt[3]{x}$; 4) $\sqrt[20]{a^5}=$ $=\sqrt[4]{a}$. **93.** 1) $\frac{1}{c^2}\sqrt{abc^2}$; 2) $\frac{1}{a^2+b^2}\sqrt[3]{m(a^2+b^2)^2}$. **94.** 1) $\sqrt[4]{4a^{12}b}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{3a^2(a+b)^2}{a-b}}$. **95.** 1) $\sqrt[9]{b^4}$; 2) $-\sqrt{2a(a-2)}$. **96.** 1) $\sqrt[3]{5}>$ $>\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; 2) $\sqrt[3]{7}<\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$. **97.** 1) $-\sqrt{\frac{2(x+y)}{y-x}}$; 2) $\sqrt[3]{4a^3(x-y)^4}$.
98. 1. **102.** 1) $\frac{x}{y}\sqrt{xy}$; 2) $\sqrt[5]{x^2y^2}$; 3) $\frac{2a}{bc}\sqrt[3]{5ab^2c}$.
103. 1) $\frac{1}{a+b}\sqrt[3]{a(a+b)}$; 2) $\begin{cases} a, a>2b \\ -a, a<2b \end{cases}$. **104.** 1) $y^2\sqrt[n]{x^2y^2}$; 2) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2$ $\left(1+x-\sqrt{ax}+a\right)^2$. **105.** $-\sqrt{x}$. **106.** 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **109.** Ні. **110.** 9 при $x=5$; 1 при $x=\frac{1}{2}$. **112.** 1) так; 2) ні. **113.** 1) $210\sqrt[5]{15a^4}$; 2) $0{,}8\sqrt[7]{\frac{14a^5}{b^3}}$; 3) $\frac{1}{4}ab\sqrt{2ab}$.
114. 1) $6\sqrt[13]{a^5}$; 2) $\sqrt[24]{a^{21}b^7}$; 3) $a-2\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[3]{a^2}$.
115. 1) $\sqrt[60]{4000a^{26}}$; 2) $\sqrt[24]{m^5}$; 3) $a^2-b,\ a\geq\sqrt{b}$. **116.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{a}}{b}$; 3) $3a\sqrt[3]{a^2}$; 4) $\frac{\sqrt{mn}}{2n}$; 5) $\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{7}\right)$; 6) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.
117. 1) $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$; 2) $\frac{5a\left(a\sqrt{7}+2\sqrt{a}\right)}{7a^2-4a}=\frac{5\left(a\sqrt{7}+2\sqrt{a}\right)}{7a-4}$;
3) $\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)$; 4) $\frac{\left(7\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^2}{49a+4b}$; 5) $7\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$;
6) $(a^2+ax+x^2)\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)$. **118.** 1) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{12}=$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}$; 2) $-\dfrac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}$. **119.** 1) $\dfrac{3}{2ab\sqrt[7]{a^3}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-1}$;

3) $\dfrac{41}{\left(3\sqrt{5}+2\right)^2}$; 4) $\dfrac{5}{3\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$; 5) $\dfrac{x}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}$;

6) $\dfrac{47}{55\sqrt{3}-28\sqrt{6}-54\sqrt{2}+96}$; 7) $\dfrac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}$. **120.** 1) 4; 2) 28; 3) 16;

4) 16; 5) 1; 6) $a+b^2$. **121.** 1) 4; 2) 7. **122.** 1) 16 і 8; 2) −0,5.

123. 1) розв'язків немає; 2) −2. **124.** 6. **125.** 1) 2; 2) $\frac{2}{9}$. **126.** 1) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 3) a і $-b$; 4) −1 і 3. **127.** 1) 2; 2) 6. **128.** 1) −1 і $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.
129. 1) 0; 2) 62. **130.** 1) $-\frac{2}{3}$ і 3; 2) 0 і 1; 3) 0, 1, 8, 9; 4) $3a$ і $4a$.
134. 1) $\frac{1}{4}$ і 1; 2) коренів немає. **135.** 1) −1; 2) −2; 3) 0; 4) −6, −5, $-\frac{11}{2}$. **136.** 1) 1, $-\frac{1}{3}$; 2) ±21; 3) $5 \le x \le 10$; 4) 3. **137.** 1) 8; 2) 1, −6; 3) 32; 4) 64. **138.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (1; 4), (4; 1); 3) (8; 2), (2; 8). **139.** 1) (1; 9), (9; 1); 2) (5; 20), (20; 5); 3) (1; 64), (64; 1); 4) (−1; −64), (64; 1). **141.** 1) (4; 9), (9; 4); 2) (1; 4), (4; 1); 3) $(9a^2; a^2)$; 4) (4; 1). **142.** 1) (3; −2; 6); 2) (16; 1); 3) (16; 1), (1; 16); 4) $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. **143.** 1) $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$; 2) (2; 3); (−2; −3); (2; −3); (−2; 3); 3) (5; 3), (5; 4); 4) (5; 4; 5). **144.** 1) [1; 5); 2) $(-\infty; -2)$, $(14; +\infty)$; 3) [−2; 2); 4) [−2; 2) 5) [2; 3); 6) $(-\infty; -2]$, $[5; 5\frac{9}{13})$.
145. 1) a^{16}; 2) x^{7n}; 3) b^3; 4) c^n; 5) a^2; 6) b^2. **146.** 1) $16x^{12}y^8z^4$; 2) $27a^6b^{12}c^{15}$; 3) $-\frac{27}{125}$; 4) $\frac{a^4}{16b^4}$. **147.** 1) a^8; 2) $-\frac{64x^3y^6}{125z^9}$; 3) $a^{4(n-1)}$; 4) $-\frac{2^{2n-1}}{3^{2n-1}}$. **148.** 1) 1; 2) $\frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{4a}{3b^2x}$; 4) $\frac{1}{32}$. **149.** 1) a^{-m}; 2) 10^{-12}; 3) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; 4) $2x^3$. **150.** 1) a^{12}; 2) $625a^4b^8c^{12}$; 3) $p^{m(2n-1)}$; 4) $4^5m^5n^5$; 5) 8; 6) $\frac{3a^4+1}{a^2}$. **151.** 1) $\frac{16}{81a^8b^{36}}$; 2) $15x^{2n}$; 3) $\frac{24a^8b^4}{x^7y^8}$; 4) $\frac{25b^4-a^2}{a^2b^4}$. **152.** 1) $4a^{6x}+a^{x+1}x+\frac{x^2}{16a^{2(2x-1)}}$. **153.** 1) c^3;

2) $\left(\frac{c+x}{a-b}\right)^m$. **155.** 1) $\left(\frac{a^2b^4}{2b^2+a}\right)^{-1}$. **156.** 1) x^4; 2) $a^{\frac{13}{12}}$; 3) $b^{-\frac{1}{4}}$; 4) a^{-4}; 5) c^2; 6) $\frac{16}{25}$. **157.** 1) $x^{-\frac{1}{15}}$; 2) $p^{-\frac{9}{7}}q^{\frac{37}{28}}$; 3) b^2. **158.** 1) $3^{\frac{27}{8}}$; 2) $27\cdot125^{-2}$. **159.** 1) $a^{-\frac{61}{60}}$; 2) $2a^{-\frac{17}{8}}b^{\frac{2}{3}}$. **160.** 1) 1; 2) $a^{\frac{19}{20}}x^{\frac{2}{15}}$.

161. 1) 9; 2) 32; 3) 15; 4) $\frac{1}{a^2}$. **163.** 1) $\frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{5}$; 2) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+3}$; 3) $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-1}$; 4) $\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$. **164.** 1) $ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x$; 2) $4-y^3$. **165.** 1) $b^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}$; 2) $a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}$. **166.** 1) $\left(a-3^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+3^{\frac{1}{2}}\right)$; 2) $\left(b^{\frac{1}{3}}-5\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+5\right)$; 3) $\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)$; 4) $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$. **167.** 1) 1; 2) $x-y$. **169.** 1) $x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$; 2) $x^{-2}-2x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$.

170. 1) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 2) $\left(5-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(25+5b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$; 3) $6^{\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-6^{\frac{1}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}\right)$; 4) $a^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)$. **171.** 1) 5; 2) 41.

172. 32. **173.** 1) 0; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$; 3) y^2; 4) $x+1$; 5) $\frac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$. **174.** 1) 6; 2) 4,5; 3) –4; 4) 4; 5) 2,5; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 3 і 4; 9) –2 і 1; 10) –2; 11) 1,5; 12) 5; 13) 1; 14) 1; 15) 3; 16) 2; 17) 11; 18) –4; 19) 35; 20) 3; 21) 9; 22) 2; 23) 2; 24) 4; 25) 1; 26) 9; 27) розв'язків немає; 28) 1; 29) –3; 30) $-\frac{1}{2}$; 31) 3; 32) 1 і 2; 33) –1 і 1; 34) –2 і 2; 35) –2 і 2; 36) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$; 37) 2; 38) 0; 39) 3 і 9; 40) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+{}+n\pi,\ n\in Z$; 41) 3; 42) 0,5; 43) $\frac{3}{4}$; 44) 0; 45) 1; 46) –2; 47) 0 і $\frac{1}{2}$; 48) –4 і 10; 49) 10; 50) –2,5 і 3.

175. 1) $x > -1$; 2) $x > 0$; 3) $x < 2$; 4) $x < -2$; $x > 3$; 5) $x > 0$; 6) $x \geq 3$; 7) $x > -\frac{2}{3}$; 8) $x < -3$; $x > 1$; 9) $x \leq -4$; 10) $x < \frac{3}{2}$; 11) $x < -4$; $x > 2$; 12) $x \in R$; 13) $-\frac{10}{7} < x < 10$; 14) $x > \frac{6}{11}$; 15) $x < -0{,}25$; 16) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; 17) $-1 < x < 7$; 18) $1 < x < 2$; 19) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; 20) $x > \frac{21}{11}$; 21) $(0; 1)$; 22) $(-\infty; -7{,}5)$ і $(-0{,}5; +\infty)$; 23) $(0; +\infty)$; 24) $(-\infty; 6)$; 25) $(1{,}5; +\infty)$; 27) $(-3; +\infty)$; 28) $(0; 2]$; 29) $(-\infty; -1]$; 30) $[0; 1]$; 31) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$; 32) $(0; +\infty)$; 33) $(0; +\infty)$; 34) $[0; 4]$; 35) $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **177.** 1) $4 = \log_3 81$; 2) $-2 = \log_4 \frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{3} = \log_8 2$; 4) $\frac{1}{3} = \log_{27} 3$. **178.** 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) -1; 5) 9; 6) -7. **179.** 1) -2; 2) 3; 3) -4; 4) 6. **180.** 1) 25; 2) 216; 3) 16; 4) 1; 5) 8; 6) 0,001. **182.** 1) $\log_{\frac{2}{3}} 2{,}25 = -2$; 2) $\log_{0,1} 0{,}01 = 2$; 3) $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$; 4) $\log_{343} 7 = \frac{1}{3}$. **183.** 1) 1; 2) -3; 3) 4; 4) 0; 5) -5; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{2}$; 8) $-2\frac{1}{2}$. **184.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{1}{2}$. **185.** 1) так; 2) так. **186.** 1) 2; 2) 2. **187.** 2. **188.** 1) -2; 2) -2; 3) $2\frac{1}{2}$; 4) -2; 5) 1; 6) 0; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{3}{5}$. **189.** 1) 81; 2) $\frac{1}{25}$; 3) 1,25; 4) 4; 5) $a + 1$; 6) 729. **190.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 32; 3) 1; 4) $\frac{1}{343}$; 5) $\frac{1}{216}$; 6) 8. **191.** 1) -1; 2) 0. **192.** 1) 8; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2; 5) 0,8; 6) 3. **193.** 1) 10; 2) 7; 3) 5; 4) 3; 5) $\frac{1}{7}$; 6) 8. **194.** 1) 5; 2) 7,4; 3) 2; 4) 64; 5) 24; 6) 1,25. **195.** 1) 0,3; 2) 9; 3) 1,5; 4) 7. **197.** 1) 20; 2) $\frac{4}{5}$. **199.** 1) $\lg a + 3\lg b - 2\lg c$; 2) $\frac{1}{5}\lg a - \lg b - 2\lg c$; 3) $2\lg a + \frac{1}{3}\lg b$; 4) $3\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c - 2\lg(a + b)$. **200.** 1) $2\lg a + \frac{1}{2}\lg b + \frac{1}{2}\lg c - \lg 3 - \frac{3}{5}\lg(a + b)$; 2) $\lg 2 + \frac{3}{4}\lg a - \frac{1}{2}\lg b$; 3) $\sqrt[3]{1{,}2}\,\lg 0{,}6$; 4) $\frac{1}{2}\lg a + \frac{2}{5}\lg b$. **201.** 1) $\lg 3 + 1\frac{3}{5}\lg a + \frac{2}{5}\lg(a + b)$; 2) $\frac{1}{3}(\lg a - \lg b)$; 3) $\frac{3}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg b$; 4) $-1\frac{5}{6}\lg a$; 5) $\frac{5}{8}(\lg a - \lg b)$. **202.** 1) $\lg_{12} 20$; 2) 1. **203.** 2. **204.** 1) 2; 2) 2. **206.** 1) $\frac{7a^3}{5}$; 2) 12; 3) $\frac{\sqrt{a+b}}{a^2 b^3}$; 4) $\frac{2(a+b)}{3a}$.

207. 1) $\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$; 2) $\frac{2ab^3}{3\sqrt[4]{b-a}}$. **208.** 1) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt[3]{a+b}}{a-b}$; 2) $\sqrt[24]{\frac{b^6(a-b)}{a^{16}}}$. **209.** 1) 3; 2) $1\frac{7}{9}$. **210.** 1) 2; 2) 4. **216.** 1) $x > 2$; 2) $x < 5$. **217.** Додатний. **219.** Число N у 100 разів більше, ніж число M. **220.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-2; 2)$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **221.** 1) $(-\infty; -2)$; $(2; +\infty)$; 2) $(-2; 3)$; 3) $(-1; 2)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right)$. **222.** 1) $\left(-\infty; -2\frac{2}{3}\right)$, $(5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2{,}5)$, $(1; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$, $(3{,}5; +\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$, крім $x = 0$; 6) $\boldsymbol{R}$, крім $x = 0$. **228.** 1) 4; 2) 3; 3) $-2{,}35$; 4) розв'язків немає; 5) 0; 1; 6) 3; 7) 15; 8) 1 і 125; 9) 100 і 1000; 10) 9 і $\frac{1}{3}$; 11) 100 і 0,01; 12) 10 і 0,0001; 13) 10^{10}; 14) 10 і 0,001. **229.** 1) 6,5; 2) 4,5; 3) 1; 4) $\frac{9}{4}$; 5) 3; 6) 14 і 6; 7) 10; 0,1; 1000; 0,01; 8) 100 і 0,01; 9) 1 і -3; 10) 0; 1; 4; 11) 13; 12) коренів немає; 13) 10; 100; 14) $\frac{1}{3}$; 15) 0,0001 і 10; 16) 80. **230.** 1) -3; 2) 95 і 5; 3) 100 і 10^8; 4) 8; 5) 3,5; 6) 4; 7) 4; 8) $\frac{1}{2}$ і 16; 9) 2; 10) 3; $\frac{\sqrt{2}-8}{8}$; 11) 3; 12) 100; 13) a^{-1} і a^2; 14) 10 і $\frac{1}{10}$; 15) 3; 2; 16) 2; 3; 17) 1; 10^3; 10^{-2}; 18) 1; 19) $-\frac{5}{4}$; 20) 6; 21) 1; 22) 3. **231.** 1) (100; 10); 2) (2; 5), (5; 2); 3) (1; 2), (2; 1); 4) (2; 1). **232.** 1) (6; 8), (8; 6); 2) (2; 18), (18; 2); 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{4}{3}\right)$. **233.** 1) $\left(12\frac{5}{9}; -12\frac{4}{9}\right)$; 2) (4,5; 0,5); 3) (27; 4), $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; 4) (5; 5); 5) (3; 9); (9; 3); 6) $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 7) (4; 16); 8) (5; 5); 9) (6; 8), (8; 6); 10) (9; 7); 11) (8; 4); 12) (2; 4). **234.** 1) $0 < x < 81$; 2) $x > 25$; 3) $x > \frac{1}{8}$; 4) $0 < x < 0{,}027$; 5) (0; 3); 6) $(\sqrt[3]{10}; +\infty)$; 7) $(5; +\infty)$; 8) $(0{,}001; +\infty)$; 9) (−3; $\left(-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$; 10) $(-3; 1)$; 11) $3 < x < 5$; 12) розв'язків немає. **235.** 1) (0; 1); 2) $(7; +\infty)$; 3) $n > 3$; 4) $x < 4$; 5) $1{,}6 < x < 5$; 6) $x > 0$, крім $x = 1$; 7) $x > 0$; 8) $x > 2$; 9) $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$; 10) $(0; 0{,}001)$, $(10; +\infty)$; 11) $(2; +\infty)$;

12) $3 < x \le 81$. **236.** 1) $(0; 3)$, $(9; 12)$; 2) $(-\infty; -4)$, $(2; +\infty)$; 3) $3 < x < 4$; 4) $(0; 1)$, $(8; 9)$; 5) $(1; +\infty)$; 6) $-3 < x < -\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt{2{,}5} < x < 3$; 7) $(-\infty; -1]$; $[2; +\infty)$; 8) $(0; 1)$; 9) $2 \le x < \frac{11}{4}$; $4 \le x + \infty$; 10) $\sqrt[8]{\frac{1}{3}} < x < 1$; 11) $(1; 2)$; 12) $x > 0$; 13) $2 + \sqrt{2} < x < 4$; 14) $1 + \sqrt{5} < x < +\infty$; 15) $0{,}1 < x < \sqrt{10}$, $x > 100$; 16) $(3; 4)$.
237. 1) $-\infty < x < +\infty$; $x \ne 1$; 2) $-\infty < x \le -\sqrt{8}$; $0 \le x \le \sqrt{3}$; 3) $-1 \le x < 1$, $x = 2$; 4) $|x| > 2$; 5) $-\frac{1}{3} \le x \le 1$; 6) $x > 0$, $x \ne n$, $n = 1, 2, \ldots$; 7) $|x - k\pi| \le \frac{\pi}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 8) $4k^2\pi^2 \le x < (2k+1)^2\pi^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
238. 1) Непарна; 2) парна; 3) не належить ні до парних, ні до непарних функцій; 4) непарна; 5) парна; 6) непарна.
241. 1) $\pm 30^\circ + 180^\circ k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm 18^\circ 53' + 90^\circ k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{9}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = 2m\pi$, $m \in \boldsymbol{Z}$; 8) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $x = \operatorname{arctg} 2 + n\pi$, $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - 1) + n\pi$, $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} + 1) + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 10) $x = \frac{n\pi}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 11) $x = \frac{n\pi}{3}$, $x = \frac{(2n+1)\pi}{10}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 12) $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{(4n+1)\pi}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 13) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 14) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 15) $\frac{(2n+1)\pi}{11}$; $x = \frac{(2k+1)\pi}{25}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 16) $\frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 17) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = (-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{2}) + n\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 18) $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in \boldsymbol{Z}$; **242.** 1) $\frac{5\pi}{6} + k\pi < x < \pi + k\pi$; $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{3} + n\pi \le t \le \frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} < x < \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{8} + k\pi \le x \le \frac{3\pi}{8} + k\pi$; $k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **243.** 1) $x = 4$; 2) $x = 10$; 3) $x = 4$; 4) $x = 3$; 5) $x = 7$; 6) $x = -1$; 7) $x = 1$; 8) не має розв'язків; 9) $-\frac{17}{15}$.

244. 1) $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $x \in [0; 3]$; 3) $x \in (2; 2\sqrt{2})$;

4) $x \in \left[-4; \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 5) $x \in (0; 2) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right)$;

6) $x \in \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; 1\right)$; 7) $x \in (1; 2)$; 8) $x \in \left(\frac{17}{3}; +\infty\right)$. **245.** 1) $x = 1$;

2) $x = \log_{2,5}2$; 3) $\frac{\lg 225-\lg 31}{\lg 6.25}$; 4) $x = \frac{25}{31}$; 5) $x = 2,5$; 6) $x_1 =$ $= \log_2 18 - \log_2 17$; $x_2 = 1$; 7) $x = \pm 3$; 8) $x = 3$; $x = 4$; $x = 5$.

246. 1) $x \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$; 2) $x \in (0; 2]$; 3) $x \in (-\infty; 2)$; 4) $x \in (2; 3) \cup (4; +\infty)$; 5) $x \in (0; 1)$; 6) $x \in (0; +\infty)$; 7) $x \in (1; +\infty)$; 8) $x \in (-\infty; 2)$; 9) $x \in (-\infty; 1)$. **247.** 1) 24,5; 2) 14; 3) 1; 3; $\frac{1}{9}$; 4) 2; $-\frac{7}{4}$;

5) $-\frac{1}{16}$; 6) не має розв'язків; 7) 0,2; 8) 31; 9) 0,01. **248.** 1) $(15; +\infty)$;

2) $(100; +\infty)$; 3) $\left(2-\sqrt{2}; \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4}; 2+\sqrt{2}\right)$; 4) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right) \cup (1; \sqrt{2}]$;

5) $(-\infty; -4) \cup (3,5; +\infty)$; 6) $x > 27$; 7) $\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$;

8) $(\log_3 \frac{28}{27}; \log_3 4$; 9) $(-3; 1) \cup (3; 4)$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Шкіль Микола Іванович, Слєпкань Зінаїда Іванівна, Дубинчук Олена Степанівна

Алгебра і початки аналізу

Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
Затверджено Міністерством освіти і науки України
Редактори *Н. В. Демиденко*, *М. Ю. Зубченко*
Макет, художнє оформлення
і художнє редагування *Ц. М. Ганушкевич*
Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*
Коректори *К. І. Зубченко*, *О. А. Козлова*

Підписано до друку 16.08.05. Формат 60×90 1/16. Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 17,0+0,25 форзац. Умов. фарбовідб. 34,75. Обл.-вид. арк. 16,5+0,46 форзац. Наклад 10 000 прим. Вид. № 73. Зам. № 6-709.

**Видавництво «Зодіак-ЕКО».
01004, Київ, 4, вул. Басейна, 1/2.**

Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.

**Комп'ютерний набір та верстка СМП «АВЕРС».
04214, Київ, пр. Оболонський, 36.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 586 від 05.09.2001 р.**

**Надруковано з готових діапозитивів у ТОВ «Оберіг»
м. Харків, пр. Гагаріна, 82 кв. 86.
Свідоцтво ДК № 2249 від 01.08.2005 р.**